ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ХАЖИЕВ ИКРОМБЕК ОЗОДОВИЧ

ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ АРАЛАШ-ТУЗИЛМАЛИ ТУРДАГИ ТЕНГЛАМАЛАРГА ҚЎЙИЛГАН НОКОРРЕКТ МАСАЛАЛАРНИ ТАДҚИҚ ЭТИШ ВА ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧАФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шаҳри – 2017 йил

УДК: 519.6+517.95

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ХАЖИЕВ ИКРОМБЕК ОЗОДОВИЧ

ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ АРАЛАШ-ТУЗИЛМАЛИ ТУРДАГИ ТЕНГЛАМАЛАРГА ҚЎЙИЛГАН НОКОРРЕКТ МАСАЛАЛАРНИ ТАДҚИҚ ЭТИШ ВА ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧАФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шаҳри – 2017 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.1.PhD/FM12 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Фаязов Кудратилло Садридинович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Хасанов Акназар Бекдурдиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Исломов Бозор Исломович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Бухоро давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети, Математика институти ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2017 йил «_ _»___________ соат ___ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4- уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2017 йил «___» _______________куни тарқатилди.
(2017 йил «____» ___________ даги ______ рақамли реестр баённомаси).

А.С. Садуллаев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., академик

Ғ.И. Ботиров
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

М.С. Салахитдинов
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалаларни тадқиқ қилишга келтирилади. Тескари ва нокоррект масалаларнинг асоссий объекти геофизик кузатувлар, газ динамикаси, акустик тўлқинлар тарқалиши каби амалий тадқиқотларнинг моделларидир. Аралаш-тузилмали турдаги дифференциал тенгламаларга қўйилган нокоррект чегаравий масалаларни шартли корректликка текшириш ва тақрибий ечимларини қуриш етарли даражада шаклланмаганлиги сабабли, ушбу нокоррект масалаларга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Мустақиллик йилларида мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий татбиқига эга бўлган дифференциал тенгламаларнинг долзарб йўналишларига, жумладан аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун турли чегаравий масалаларни тадқиқ қилишга алоҳида эътибор қаратилди. Бунинг натижасида хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тескари ва нокоррект чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш ҳамда уларнинг тақрибий ечимларини қуришга доир салмоқли натижаларга эришилди. “Математика, физика, амалий математика фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари” этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси, тескари ва нокоррект масалалар назарияси ва қарорларни қабул қилиш назарияларини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ҳозирги кунда жаҳонда юқори тартибли аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали тенгламаларга қўйилган нокоррект чегаравий масалаларнинг ечимини шартли корректликкка текшириш, тақрибий ечимларини қуриш, аниқ ечими ва тақрибий ечими орасидаги фарқни баҳолаш билан боғлиқ муаммоларни тадқиқ қилиш ва амалиётга татбиқ этиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: масаланинг ечими априор баҳосини аниқлаш; корректлик тўпламини топиш; ягоналик ва шартли турғунлик теоремаларини исботлаш; регулярлаштириш ва квазитескари усуллари билан тақрибий ечим қуриш, аниқ ва тақрибий ечим орасидаги фарқ нормасига мос функционал фазода баҳо топиш; регулярлаштириш параметрни ҳисоблаш формула келтириб чиқариш; бошланғич берилганларга мос аниқ ва тақрибий ечимларни ҳисоблаш алгоритмини тузиш ва дастурини яратиш мақсадли илмий тадқиқотлар ҳисобланади.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Диссертацияда тадқиқот қилинаётган масалалар математик физиканинг аралаш тенгламалар синфига тегишли. Бундай турдаги тенгламаларга қўйилган коррект чегаравий масалалар кўп математиклар томонидан тадқиқ қилинган. Йўналишини вақт бўйича ўзгартирувчи параболик тенглама учун чегаравий масалани M.Jevrey қараган. Бундай масалаларни турли чегаравий ва бошланғич шартлар билан C.D.Pagani, G.Talenti, В.В.Врагов, В.К.Романко, С.А.Терсенов, А.М.Нахушев ва бошқалар тадқиқ қилишган. Ф.Трикоми ва С.Геллерстедт илмий ишлари аралаш турдаги тенгламаларга бағишланган. Бунга М.А.Лаврентьев, М.В.Келдыш, А.В.Бицадзе, М.С.Салахитдинов, Т.Д.Джураев, В.Н.Врагов, К.Б.Сабитов, А.И.Кожанов, С.П.Пулькин, А.П.Солдатов, Н.В.Кислов ва уларнинг илмий мактабининг илмий ишлари ҳам тегишли.

Тескари вақт оралиғи билан параболик тенглама учун нокоррект чегаравий масала А.Н.Тихонов, М.Ландис, С.Г.Крейн, С.П.Шишатский, Х.Левин ва бошқаларнинг илмий ишларида қаралган. Бу ишларда параболик турдаги тенглама учун Коши масаласини характерламайдиган тескари масаланинг шартли корректлиги қаралган. Ушбу натижалар С.Г.Крейн, Х.Левин ва бошқалар томонидан ўз-ўзига қўшма оператор коэффициентли эволюцион дифференциал тенгламалар учун умумлаштирилган. Шундай тадқиқотлар псевдо-дифференциал тенгламалар учун B.D.Coleman, R.J.Duffin ва V.J.Mizel ишларида бажарилган. Эллиптик турдаги тенгламалар учун нокоррект масалалар F.John, М.М.Лаврентьев, С.Г.Крейн, М.Ландис, В.К.Иванов ва бошқалар тадқиқ қилишган.

Гиперболик тенглама учун Дирехли масаласи А.Ш.Алимов томонидан қаралган. Ш.Ярмухамедов Карлеман функцияси ёрдамида эллиптик тенглама учун Коши масаласининг тақрибий ечимини қурган. Ш.Ярмухамедов ўқувчилари томонидан тенгламалар системаси учун Карлеман функцияси усули билан регулярлашган ечим қурилган. С.П.Шишатский ҳамда М.Х.Аламинов натижаларини такидлаш керак, бунда бузилган параболик ва эллиптик тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалалар қаралган.

А.Хайдаров ва Д.К.Дурдиевларнинг тадқиқот ишларида эллиптик ва гиперболик тенгламалар учун тескари ва нокоррект масалалар ўрганилган, Акр.Бегматовнинг ишларида эса интеграл геометрия масалалари тадқиқ қилинган. Йўналишини вақт бўйича ўзгартирувчи, иккинчи тартибли аралаш турдаги тенгламаларга қўйилган нокоррект масалалар К.С.Фаязов ишларида ўрганилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университетининг Ф-4-30 «Оператор тип коэффициентли дифференциал-оператор тенгламалар учун ички ва чегаравий масалалар» (2012-2016 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади юқори тартибли аралаш, тузилмали ва аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга қўйилган нокоррект масалаларни шартли корректликка текшириш ва мос корректлик тўпламида тақрибий ечимларини топишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

юқори тартибли тузилмали ва аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга қўйилган нокоррект чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш;

юқори тартибли аралаш турдаги хусусий ҳосилали тенгламаларга қўйилган нокоррект чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш;

регулярлаштирилган тақрибий ечимларни топиш, мос функционал фазоларда аниқ ва тақрибий ечим орасидаги фарқ нормаси учун баҳо аниқлаш;

регулярлаштириш параметрини ҳисоблаш формуласини топиш, сонли ечимни ва график натижаларни чиқариш дастурини тузиш.

Тадқиқотнинг объекти юқори тартибли аралаш, тузилмали ва аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети юқори тартибли аралаш, тузилмали ва аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга қўйилган нокоррект чегаравий масалалардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида математик таҳлил, спектрал ёйилмалар, логарифмик қавариқлик, Карлеман баҳо, математик физика ва дифференциал тенгламаларни ечиш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

юқори тартибли аралаш, тузилмали ва аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалаларнинг ечимлари априор баҳоси олинган;

юқори тартибли аралаш, тузилмали ва аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалаларнинг корректлик тўплами аниқланган ҳамда ягоналик, шартли турғунлик теоремалари исботланган;

регулярлаштириш усули билан тақрибий ечим топилиб, мос фазода аниқ ечим билан тақрибий ечим орасидаги фарқ нормаси учун баҳо аниқланган, регулярлаштириш параметрини ҳисоблаш учун формула келтирилиб чиқарилган;

ҳисоблаш алгоритмлар асосида аниқ ва тақрибий ечимнинг сонли, график натижаларини чиқариш дастури Visual C# муҳитида тузилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали тенгламаларга қўйилган нокоррект масалалар ечими учун априор баҳо олинганлиги, шартли корректлик тўпламлари аниқланганлиги ва тақрибий ечимни ҳисоблаш учун регулярлаштириш параметри формуласи топилганлидан иборатдир.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функционал анализ, дифференциал тенгламалар назарияси, нокоррект масалалар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг ва исботларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси ҳамда нокоррект масалалар назариясининг ривожланиши учун фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти аралаш, тузилмали, аралаш-тузилмали турдаги дифференциал тенгламаларга қўйилган нокоррект чегаравий масалалар билан ифодаланувчи геофизик кузатувлар, газ динамикаси, туташ муҳитлар механикси, акустик тўлқинлар тарқалиши каби жараёнларнинг моделларига татбиқ этиш билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши:

Нокоррект масалаларнинг ечимлари учун шарли турғунлик баҳони аниқлаш ва мос корректлик тўпламида тақрибий ечимларини топиш:

учинчи тартибли аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали тенгламага қўйилган нокоррект масаланинг шартли турғунлиги ва бир жинсли бўлмаган тенгламаларга қўйилган чегаравий масала ечими априор баҳоси “Математик физика тенгламалари” номли ўқув қўлланманинг “5-§. Коррект қўйилган масала тушунчаси. Нокоррект чегаравий масалаларга мисоллар” ва “21- §. Бир жинсли бўлмаган иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун Коши масаласи”да фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2017 йил 30 октябрдаги 89-03-2584 сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши нокоррект масалаларга мисоллар тузиш ва бир жинсли бўлмаган иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун Коши масаласи ечими ягоналиги ҳамда турғунлигини исботлаш имконини берган;

аралаш-тузилмали турдаги тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалаларнинг ечими априор баҳоси Ф-4-02 рақамли грантда каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга қўйилган чегаравий масалаларнинг ечими априор баҳосини аниқлашда қўлланилган (Ўзбекистон Республикаси Фан ва технологиялар агентлигининг 2017 йил 28 августдаги ФТА-02-11/558-сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга қўйилган чегаравий масалаларнинг ечими ягоналиги ва турғунлигини аниқлаш имконини берган;

аралаш турдаги хусусий ҳосилали тенгламаларга қўйилган чегаравий масалаларга мос спектрал масалаларнинг хоссалари Ф-4-02 рақамли грантда каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга қўйилган масалаларга мос спектрал масалаларни ўрганишда қўлланилган (Ўзбекистон Республикаси Фан ва технологиялар агентлигининг 2017 йил 28 августдаги ФТА-02-11/558-сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга қўйилган масалаларга мос спектрал масалаларнинг хос сонлари ва хос функцияларини аниқлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 14 илмий-амалий анжуманларда, жумладан 8 та халқаро ва 6 та республика илмий - амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 23 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестатция комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 9 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 7 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхати, иловадан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 100 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Шартли-коррект масалалар ва аралаш-тузилмали турдаги дифференциал тенгламалар»** деб номланувчи биринчи боби диссертациянинг асосий натижаларини баён қилишда зарур бўладиган ёрдамчи маълумотлар, асосий таърифлар, нокоррект масалалар учун муҳим лемма ва теоремалар, учинчи тартибли аралаш турдаги хусусий ҳосилали тенглама учун нокоррект чегаравий масалани шартли корректликка текшириш ва тақрибий ечиш, учинчи ва тўртинчи тартибли тузилмали турдаги хусусий ҳосилали тенгламаларга қўйилган чегаравий масала шартли коррректлиги ва регуляризациясига бағишланган.

1.1-параграфда диссертация мавзуси бўйича қилинган тадқиқотларни умумлаштирувчи қисқача маълумот, коррект ва нокоррект масала тушунчаси, шартли коррект таърифи, А.Н.Тихонов теоремаси, логарифмик қабариқ функцияси, регулярлаштириш оператори таърифи келтирилган.

2.2-параграфда қуйидаги чегаравий масала қаралган: Берилган $\Omega=\{-1<x<1,\ x\neq 0,\ 0<t<T\}$ соҳада

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-1\right)\left(\operatorname{sgn} x\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=0\,, \tag{1}$$

тенгламани ва бошланғич

$$u(x,0)=p_1(x),\quad u_t(x,0)=p_2(x),\ \ u_{tt}(x,0)=p_3(x)\,, \tag{2}$$

чегаравий

$$u(-1,t)=u(1,t)=0\,, \tag{3}$$

тикиш

$$u(-0,t)=u(+0,t),\quad u_x(-0,t)=u_x(+0,t)\,, \tag{4}$$

шартларини қаноатлантирувчи $u(x,t)$ функцияни топинг. Бунда $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$ берилган функциялар.

Йўналишини вақт бўйича ўзгартирувчи параболик турдаги ва аралаш турдаги иккинчи тартибли тенгламалар учун коррект чегаравий масалалар кўпчилик муаллифлар томонидан ўрганилган. К.С. Фаязов ишида эса Лаврентьев-Бицадзе тенгламаси учун нокоррект чегаравий масала тадқиқ қилинган.

Мазкур (1)-(4) масалани тадқиқ қилишда $u_t(x,t)+u(x,t)=v(x,t)$ белгилаш киритамиз ва

$$\operatorname{sgn} x\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}=0$$

$$v(x,0)=f(x),\quad v_t(x,0)=g(x)$$

$$v(-1,t)=v(1,t)=0$$

$$v(-0,t)=v(+0,t),\quad v_x(-0,t)=v_x(+0,t)$$

масалага келамиз, бу ерда $f(x)=p_2(x)-p_1(x),\ g(x)=p_3(x)-p_2(x)$. Бу масалани ўрганишда

$$\begin{cases} sgn\,x\,X''(\mathrm{x})+\lambda\,\mathrm{X}(\mathrm{x})=0,\\ X(-1)=\mathrm{X}(1)=0,\\ X(-0)=\mathrm{X}(+0),\ X'(-0)=\mathrm{X}'(+0), \end{cases}$$

спектрал масаланинг хоссаларидан фойдаланилади.

Умумлашган ечим деб

$$\int_0^T\int_{-1}^1 v(x,t)\left(\operatorname{sgn} x V_{tt}+V_{xx}\right)dxdt=\int_{-1}^1\operatorname{sgn} x V(x,0)g(x)dx-\int_{-1}^1\operatorname{sgn} x V_t(x,0)f(x)dx$$

тенгликни қаноатлантирувчи $v(x,t)\in\left(\mathrm{L}_2(-1,1);C[0,\mathrm{T}]\right)$ функцияни тушунамиз, бунда $V(x,t)\in W_2^2(\Omega)$, $V(x,T)=V_t(x,T)=0,\quad V(-1,t)=V(1,t)=0$ шартларни бажарувчи ихтиёрий функция.

Ушбу параграфда қуйидаги лемма ва теоремалар исботланган.

Лемма 1. $\operatorname{sgn} x\, v_{tt}(x,t)+v_{xx}(x,t)=0$ тенгламани ва $v(-1,t)=v(1,t)=0$ шартни қаноатлантирувчи $v(x,t)$ функция учун

$$\int_{-1}^{1} v^2(x,t)dx\le 4\left(\int_{-1}^{1} {v_x}^2(x,0)dx+\left|\alpha\right|\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(\int_{-1}^{1} {v_x}^2(x,T)dx+\left|\alpha\right|\right)^{\frac{t}{T}} e^{2t(T-t)}-\left|\alpha\right|$$

баҳо ўринли, бу ерда $\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} sgn\, x\, v_{xx}^2(x,0)dx-\int_{-1}^{1} v_{xt}^2(x,0)dx\right)$.

Теорема 1. Фараз қиламиз масаланинг ечими мавжуд, $u(x,t)\in M$, ва $M=\left\{u:\left\|u_{tx}(x,T)\right\|+\left\|u_x(x,T)\right\|\le M\right\}$. У ҳолда (1)-(4) масала ечими ягона.

Теорема 2. Фараз қиламиз масаланинг ечими мавжуд, $u_1(x,t),u_2(x,t)\in M$, $M=\left\{u:\left\|u_{tx}(x,T)\right\|+\left\|u_x(x,T)\right\|\le M\right\}$ ва $\left\|p_i-p_{i\varepsilon}\right\|_{W_2^2[-1;1]}\le\varepsilon\ \ i=1,2.,\ \left\|p_3-p_{3\varepsilon}\right\|_{W_2^1[-1;1]}\le\varepsilon$. У ҳолда (1)-(4) масаланинг ечими учун

$$\left\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right\|\le e^t\varepsilon+\left(8\left(e^{2t}-1\right)\int_0^t\left(2\varepsilon^2\right)^{\frac{T-s}{T}}\left(2m^2+\varepsilon^2\right)^{\frac{s}{T}}e^{2s(T-s)}ds\right)^{1/2}$$

баҳо ўринли.

Фараз қиламиз қаралаётган (1)-(4) масаланинг ечими мавжуд, M тўпламга тегишли ва $\left\|p_i(x)-p_{i_\varepsilon}(x)\right\|<\varepsilon$, $i=1,2,3.,\ \varepsilon>0$. У ҳолда аниқ ва тақрибий бошланғич берилганларга мос тақрибий ечим қурилиб, мос функционал фазода аниқ ва тақрибий ечимлар орасидаги фарқ нормаси қуйидаги тенгсизликни қаноатлантиради

$$\left\|u(t,x)-u_{N\varepsilon}(t,x)\right\|^2\le 2\left(e^{2T}-1\right)m^2e^{2\mu_{N+1}(t-T)}/\mu_{N+1}+\left(2e^{2T}+2\int_0^T e^{2(T-t)}ch^2\mu_N t\,dt\right)\varepsilon^2,$$

бу ерда μ_k, $tg\mu=-th\mu$ тенгламанинг мусбат ечимлари.

1.3 - параграф бигармоник тенгламага қўйилган чегаравий масала регуляризацияси ва шартли корректлигига бағишланган.

Масаланинг қўйилиши. $\Omega=\left\{0<x<\pi,\ 0<t<T\right\}$ соҳада

$$\Delta^2u(x,t)=0 \tag{5}$$

тенгламани,

$$\left.\frac{\partial^{(i)}u}{\partial t^i}\right|_{t=0}=f_i(x),\quad i=0,1,2,3\ ,\quad 0\le x\le\pi\,, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial^{(i)}u}{\partial x^i}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^{(i)}u}{\partial x^i}\right|_{x=\pi}=0,\quad i=0,2\ ,\quad 0\le t\le T \tag{7}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ функцияни топинг.

Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи М.М.Лаврентьев, М.Е. Ландис, абстракт шаклида эса С.Г. Крейн, H.Levine ва бошқалар томонидан шартли корректликка текширилган.

Лемма 2. Ушбу $\Delta v(x,t)=0$ тенгламани, $v(t,0)=v(t,\pi)=0$ шартни қаноатлантирувчи $v(x,t)$ ечим учун

$$\int_0^\pi v^2dx \le c(t)\left(\int_0^\pi v^2(0,x)dx+\left|p\right|\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(\int_0^\pi v^2(T,x)dx+\left|p\right|\right)^{\frac{t}{T}},$$

баҳо ўринли, бу ерда $c(t)=e^{2t(T-t)}$, $p=\dfrac{1}{2}\int_0^\pi\left(v_x^2(0,x)-v_t^2(0,x)\right)dx$.

Лемма 3. (5) тенгламани ва (7) шартларни қаноатлантирувчи функция ихтиёрий $t\in(0,T)$ да

$$\int_0^t\int_0^\pi u^2dxd\tau \le d(t)\left(T\int_0^\pi u^2(x,0)dx+\gamma\right)^{1-r(t)}\left(\int_0^T\int_0^\pi u^2dxdt+\gamma\right)^{r(t)}$$

тенгсизликни қаноатлантиради, бу ерда $d(t)=e^{\frac{2T+1}{2}\frac{\left(1-e^{-2t}\right)T-\left(1-e^{-2T}\right)t}{1-e^{-2T}}}$,

$\gamma=\left(2T^2+1\right)\int_0^T\int_0^\pi v^2(x,t)dxdt+\left|\alpha\right|$, $\alpha=2\int_0^\pi\left(Tu_x^2(x,0)-Tu_t^2(x,0)+u(x,0)u_t(x,0)\right)dx$,

$r(t)=\dfrac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2T}}$.

Корректлик тўплами M ни қуйидагича аниқлаймиз

$$M=\left\{u:\left\|u(x,T)\right\|+\left\|u_{xx}(x,T)\right\|+\left\|u_{tt}(x,T)\right\|\le m\right\}.$$

Теорема 3. Фараз қиламиз (5)-(7) масаланинг ечими мавжуд ва $u(x,t)\in M$. У ҳолда масаланинг ечими ягонадир.

Теорема 4. Фараз қиламиз масаланинг ечими мавжуд, $u_1(x,t),u_2(x,t)\in M$, $\left\|f_i-f_{i\varepsilon}\right\|_{W_2^{3-i}}<\varepsilon$, $i=0,1,2,3$. У ҳолда (5)-(7) масаланинг ечими учун қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$\int_0^t\int_0^\pi\left(u_1(x,t)-u_2(x,t)\right)^2dxd\tau\le c(t)\left(T\varepsilon^2+\gamma_\varepsilon\right)^{1-r(t)}\left(2m^2T+\gamma_\varepsilon\right)^{r(t)}$$

бу ерда $\gamma_\varepsilon=\left(2T^2+1\right)\int_0^T e^{2t(T-t)}\left(2\varepsilon^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(2m^2+\varepsilon^2\right)^{\frac{t}{T}}dt+\left(4T+2\right)\varepsilon^2$.

(5)-(7) масаланинг тақрибий ечими квазитескари ва Тихонов ругулярлаштириш усуллари билан қурилган. Аниқ берилганларга мос аниқ ечим ва тақрибий берилганларга мос тақрибий ечим орасидаги фарқ баҳоси аниқланган:

Квазитескари усули билан аниқланган баҳо

$$\left\|u(t,x)-u_{\alpha\varepsilon}(t,x)\right\|\le\frac{4m\alpha t}{e^2(T-t)^2}+e^{\frac{t}{4\alpha}}\varepsilon.$$

Бу тенгсизликнинг ўнг тарафи $\forall \varepsilon > 0$ учун $\inf\limits_{\varepsilon>0}\left\{\dfrac{4M\alpha t}{e^2(T-t)^2}+e^{\frac{t}{4\alpha}}\varepsilon\right\}, t \neq T$ дан α параметр қиймати топилади.

Тихонов регулярлаштириш усули билан

$$\left\|u(t,x)-u_{N\varepsilon}(t,x)\right\| \leq \frac{m}{2}e^{(N+1)(t-T)}+\frac{e^{Nt}}{2}\varepsilon$$

баҳони келтириб чиқариш мумкин.

Маълумки, охирги тенгсизликнинг ўнг тарафидаги ифоданинг $\inf\limits_{\varepsilon>0}\left\{me^{(N+1)(t-T)}+e^{Nt}\varepsilon\right\}$ дан, регулярлаштириш параметри N топилади. Агар $\varepsilon \to 0$ бўлса $N \sim \dfrac{1}{T}\ln\dfrac{m}{\varepsilon}$.

Биринчи бобнинг 4-параграфида учинчи тартибли тузилмали турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламага қўйилган чегаравий масала ечимининг шартли корректлиги кўрсатилган.

Масаланинг қўйилиши. Берилган $\Omega = \{0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ соҳада

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=f(x,t) \tag{8}$$

тенгламани, бошланғич

$$\left.\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0}=\varphi_i(x),\ i=0,1,2.,\quad 0 \leq x \leq 1; \tag{9}$$

чегаравий

$$\begin{aligned} &u(0,t)=u(1,t)=0 \\ &u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t)=0 \end{aligned},\qquad 0 \leq t \leq T, \tag{10}$$

шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ функцияни топинг.

(8)-(10) масалани тадқиқ қилиш учун лемма 3 ва қуйидаги леммадан фойдаланилган.

Лемма 4. Ушбу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)v(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in\Omega,$$

тенгламанинг ечими ва

$$v(0,t)=v(1,t)=0,\ 0 \leq t \leq T.$$

шартларни қаноатлантирувчи $v(x,t)$ функция учун

$$\int_0^T\int_0^\pi v^2(x,t)dxdt \leq \frac{e^{2sT^2}}{2s}\int_0^T\int_0^\pi f^2(x,t)dxdt+Te^{2sT^2}\int_0^\pi v^2(x,0)dx+\frac{1}{2s}\int_0^\pi v_x^2(x,T)dx$$

баҳо ўринли, бу ерда $\forall s > 0$.

Белгилаш киритамиз

$$M=\left\{u:\left\|u(x,T)\right\|+\left\|u_{xxx}(x,T)\right\|+\left\|u_{xtt}(x,T)\right\| \leq m\right\}.$$

Теорема 5. Фараз қиламиз (8)-(10) масала ечими мавжуд ва $u(x,t)\in M$, у ҳолда бу масаланинг ечими ягона.

Теорема 6. Фараз қиламиз (8)-(10) масала ечими мавжуд, $u_1(x,t), u_2(x,t) \in M$ ва $\left\|p_0(x) - p_{0\varepsilon}(x)\right\|_{W_2^2[0,\pi]} \le \varepsilon$, $\left\|p_1(x) - p_{1\varepsilon}(x)\right\|_{L_2[0,\pi]} \le \varepsilon$, $\left\|p_2(x) - p_{2\varepsilon}(x)\right\|_{L_2[0,\pi]} \le \varepsilon$, $\left\|f(x,t) - f_\varepsilon(x,t)\right\|_{L_2[0,\pi]} \le \varepsilon$. У ҳолда бу масала ечими учун ушбу тенгсизлик ўринли

$$\int_0^t \int_0^\pi \left(u_1(x,t) - u_2(x,t)\right)^2 dx d\tau \le d(t)\left(T\varepsilon^2 + \gamma_\varepsilon\right)^{1-r(t)} \left(Tm^2 + \gamma_\varepsilon\right)^{r(t)}$$

где $\gamma_\varepsilon = \left(2T^2 + 1\right)\left(e^{2sT^2} T\left(\frac{1}{2s} + 4\right)\varepsilon^2 + \frac{1}{2s}m^2\right) + 2\left(2T + 1\right)\varepsilon^2$, $\forall s > 0$.

Диссертациянинг **«Аралаш-тузилмали турдаги тенгламаларга қўйилган чегаравий масалаларнинг Тихонов бўйича корректлигини тадқиқ қилиш»** деб номланувчи иккинчи бобида t ўзгарувчи бўйича иккинчи, учинчи ва тўртинчи тартибли аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга қўйилган нокоррект чегаравий масалалар қаралган. Ҳар бир масала ечими учун априор баҳо олиниб, мос корректлик тўпламида ягоналик ва шартли турғунлик теоремалари исбот қилинган.

Иккинчи бобнинг 1-параграфида пароболик турдаги вақт бўйича йўналишини ўзгартирувчи ва иссиқлик тарқалиш тенгламаларидан тузилган t ўзгарувчига нисбатан иккинчи, x ўзгарувчига нисбатан эса тўртинчи тартибли тенглама учун чегаравий масала қаралган. Бунда $\Omega = \{-1 < x < 1,\ x \ne 0,\ 0 < t < T\}$ соҳада

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + sign\, x \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = 0 \tag{11}$$

тенгламани,

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \qquad -1 \le x \le 1; \tag{12}$$

бошланғич,

$$\begin{gathered} u(-1,t) = u(1,t) = 0 \\ u_{xx}(-1,t) = u_{xx}(1,t) = 0 \end{gathered}, \quad 0 \le t \le T, \tag{13}$$

чегаравий,

$$\begin{gathered} u(-0,t) = u(+0,t),\ u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \\ u_{xx}(-0,t) = u_{xx}(+0,t),\ u_{xxx}(-0,t) = u_{xxx}(+0,t). \end{gathered} \tag{14}$$

ва тикиш шартларини қаноатлантирувчи $u(x,t)$ функция тадқиқ қилинган. Бу ердаги $f(x)$, $g(x)$ берилган функциялар.

С.Г. Пятков, Н.В. Кислов муаллифларнинг ишларида биринчи тартибли тенглама учун коррект чегаравий масалалар ўрганилган. Йўналишини вақт бўйича ўзгартирадиган пароболик тенгламага қўйилган нокоррект масала К.С. Фаязов томонидан ўрганилган. Биринчи тартибли тенгламалар учун нокоррект масалалар H. Levine, А.Л. Бухгейм ишларида ҳам қаралган.

Лемма 5. Ушбу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + sgn\, x\, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v(x,t) = 0$$

тенгламани, $v(-1,t) = v(1,t) = 0$ шартни Ω соҳада қаноатлантирувчи $v(x,t)$ ечим учун

$$\int_{-1}^{1} v_x^{\ 2}(x,t)dx \le \left(\int_{-1}^{1} v_x^{\ 2}(x,0)dx\right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\int_{-1}^{1} v_x^{\ 2}(x,T)dx\right)^{\frac{t}{T}}$$

баҳо ўринли.

Корректлик тўпламини қуйидагича киритамиз

$$M = \left\{ u : \int_{-1}^{1} u^2(x,t)dx + \int_{-1}^{1} u_{xxx}^2(x,t)dx + \int_{-1}^{1} u_{ttx}^2(x,t)dx \le m^2 \right\}.$$

Теорема 7. Фараз қиламиз (11)-(14) масаланинг ечими мавжуд ва $u(x,t) \in M$. У ҳолда бу ечим ягонадир.

Теорема 8. Фараз қиламиз (11) - (14) масаланинг ечими мавжуд, $u_1(x,t), u_2(x,t) \in M$ ва $\left\| f(x) - f(x)_\varepsilon \right\|_{W_2^3} < \varepsilon$, $\left\| g(x) - g(x)_\varepsilon \right\|_{W_2^1} < \varepsilon$. У ҳолда (11)-(14) масаланинг ечими учун

$$\int_0^T \int_{-1}^{1} \left(u_1 - u_2\right)^2 dxdt \le \frac{2e^{2sT^2}}{s} \int_0^T \left(\left(\varepsilon^2\right)^{\frac{T-t}{T}} \left(4m^2\right)^{\frac{t}{T}} \right) dt + \frac{m^2}{2s} + Te^{2sT^2}\varepsilon^2,$$

баҳо тўғри, бу ерда $\forall s > 0$.

Мазкур бобнинг 2-параграфида бир жинсли бўлмаган t ўзгарувчига нисбатан учинчи тартибли аралаш тузилмали дифференциал тенгламала учун чегаравий масаланинг шартли корректлиги ўрганилган.

Масаланинг қўйилиши: $u(x,t) \in C_{x,t}^{4,3}(\Omega) \cap C_{x,t}^{3,2}(\bar{\Omega})$ синфга тегишли ва $\Omega = \{-1 < x < 1,\ 0 < t < T,\ x \ne 0\}$ соҳада

$$\left(sign\, x\, \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) = g(x,t), \tag{15}$$

тенгламани,

$$u(x,0) = p(x), \quad u_t(x,0) = q(x), \quad u_{tt}(x,0) = r(x), \quad -1 \le x \le 1; \tag{16}$$

бошланғич,

$$\begin{matrix} u(-1,t) = u(1,t) = 0 \\ u_{xx}(-1,t) = u_{xx}(1,t) = 0 \end{matrix}, \quad 0 \le t \le T; \tag{17}$$

чегаравий, ва

$$\begin{matrix} u(-0,t) = u(+0,t),\ u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \\ u_{xx}(-0,t) = u_{xx}(+0,t),\ u_{xxx}(-0,t) = u_{xxx}(+0,t). \end{matrix} \tag{18}$$

тикиш шартларини қаноатлантирувчи $u(x,t)$ функцияни топинг, бу ерда $p(x),\ q(x) \in W_2^4[-1;1],\ r(x) \in W_2^2[-1;\ 1],\ g(x,t) \in W_{2,t}^1(\Omega)$ берилган функциялар.

Лемма 6. Фараз қиламиз $w(t)$

$$w''(t) - \lambda w(t) = g(t)$$

тенгламани ва $w(0)=w_1, w'(0)=w_2$ шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда ушбу тенгламанинг ечими учун $t\in(0,T)$ бўлганда

$$\int_0^t w^2(\tau)d\tau \le c(t)\left(Tw_1^2+\gamma\right)^{1-r(t)}\left(\int_0^T w^2(\tau)d\tau+\gamma\right)^{r(t)}$$

тенгсизлик ўринли, бунда λ -ўзгармас сон, $g(t)$ - берилган функция, $r(t)=\dfrac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2T}}$, $c(t)=\exp\left(\dfrac{2T+1}{2}\dfrac{\left(1-e^{-2t}\right)T-\left(1-e^{-2T}\right)t}{1-e^{-2T}}\right)$

$$\gamma=\left(2T^2+1\right)\int_0^T g^2(t)dt+2\left|\lambda w_1^2-w_2^2\right|T+2\left|w_1w_2\right|.$$

Лемма 7. Ω соҳада $v(x,t)$ функция $sgnx v_{tt}+v_{xx}=g(x,t)$ тенгламани ва

$$v(x,0)=f(x), v_t(x,0)=s(x),$$
$$v(-1,t)=v(1,t)=0,$$
$$v(-0,t)=v(+0,t),\ v_x(-0,t)=v_x(+0,t),$$

шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда $v(x,t)$ ечим учун ихтиёрий $\left(x,t\right)\in\Omega$ да кейинги баҳо ўринли

$$\int_0^t \left\|v(x,\tau)\right\|_0^2 d\tau \le c(t)\left(T\left\|f(x)\right\|_0^2+\gamma\right)^{1-r(t)}\left(\int_0^T \left\|v(x,t)\right\|_0^2 dt+\gamma\right)^{r(t)},$$

бу ерда $\gamma=\left(2T^2+1\right)\int_0^T \left\|g(x,t)\right\|_0^2 dt+2T\left\|f(x)\right\|_1^2+(2T+1)\left\|s(x)\right\|_0^2+\left\|f(x)\right\|_0^2$.

(15)-(18) масала учун корректлик тўпламини қуйидагича киритамиз

$$M=\left\{u:\int_{-1}^1\left(u_x^2(x,T)+u_{xx}^2(x,T)+u_t^2(x,T)\right)dx\le m^2\right\}$$

Теорема 9. Фараз қиламиз (15)-(18) масаланинг ечими мавжуд ва $u(x,t)\in M$, у ҳолда бу масаланинг ечими ягона.

Теорема 10. Фараз қиламиз (15)-(18) масаланинг ечими мавжуд, $u_1(x,t), u_2(x,t)\in M$ ва $\left\|g(x,t)-g_\varepsilon(x,t)\right\|_0\le\varepsilon$, $\left\|p(x)-p_\varepsilon(x)\right\|_{W_2^4}\le\varepsilon$, $\left\|q(x)-q_\varepsilon(x)\right\|_{W_2^2}\le\varepsilon$, $\left\|r(x)-r_\varepsilon(x)\right\|_{L_2}\le\varepsilon$. У ҳолда бу масаланинг ечими учун ушбу

$$\int_0^T\int_{-1}^1\left(u_1-u_2\right)^2dxdt\le\frac{e^{2sT^2}}{2s}\int_0^T c(t)\left(3T\varepsilon^2+\gamma_\varepsilon\right)^{1-r(t)}\left(4Tm^2+\gamma_\varepsilon\right)^{r(t)}dt+\frac{m^2}{2s}+Te^{2sT^2}\varepsilon^2$$

баҳо ўринли, бу ерда $\forall s>0$, $\gamma_\varepsilon=(2T^3+17T+12)\varepsilon^2$.

Ушбу бобнинг 3-параграфида t ўзгарувчига нисбатан учинчи тартибли йўналишини вақт бўйича ўзгартирувчи ва Лаплас операторларидан тузилган дифференциал тенглама учун чегаравий масаланинг шартли корректлиги ўрганилган.

Бунда $\Omega=\{-1<x<1,\ 0<t<T,\ x\neq 0\}$ соҳада

$$\left(sign\,x\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=0 \qquad (19)$$

учинчи тартибли аралаш тузиламали дифференциал тенгламани қараймиз.

Берилган Ω соҳада (19) тенгламани, кейинги

$$u(x,0)=p(x),\quad u_t(x,0)=q(x),\quad u_{tt}(x,0)=r(x),\quad -1\le x\le 1; \qquad (20)$$

бошланғич

$$\begin{aligned}&u(-1,t)=u(1,t)=0\\&u_{xx}(-1,t)=u_{xx}(1,t)=0\end{aligned},\quad 0\le t\le T; \qquad (21)$$

чегаравий

$$\begin{aligned}&u(-0,t)=u(+0,t),\ u_x(-0,t)=u_x(+0,t),\\&u_{xx}(-0,t)=u_{xx}(+0,t),\ u_{xxx}(-0,t)=u_{xxx}(+0,t).\end{aligned} \qquad (22)$$

ва тикиш шартларини қаноатлантирувчи $u(x,t)$ функция тадқиқ қилинган. Бу ерда $p(x),\ q(x),\ r(x)$ берилган функциялар.

Лемма 5 ва лемма 3 натижаларидан фойдаланиб ушбу масаланинг ечими учун

$$\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^1 u^2dxd\tau\le d(t)\left(T\int\limits_{-1}^1 u^2(x,0)dx+\gamma\right)^{1-r(t)}\left(\int\limits_0^T\int\limits_{-1}^1 u^2dxdt+\gamma\right)^{r(t)},$$

априор баҳо ўринли, бунда $d(t)=e^{\frac{2T+1}{2}\frac{\left(1-e^{-2t}\right)T-\left(1-e^{-2T}\right)t}{1-e^{-2T}}}$, $r(t)=\dfrac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2T}}$,

$$\gamma=4\left(2T^2+1\right)\int\limits_0^T\left(\int\limits_{-1}^1\left(u_{ttx}(x,0)+u_{xxx}(x,0)\right)^2dx\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(\int\limits_{-1}^1\left(u_{ttx}(x,T)+u_{xxx}(x,T)\right)^2dx\right)^{\frac{t}{T}}dt+\left|\alpha\right|,$$

$$\alpha=2\int\limits_{-1}^1\left(Tu_x^2(x,0)-Tu_t^2(x,0)+u(x,0)u_t(x,0)\right)dx\,.$$

(19)-(22) масаланинг ечими учун корректлик тўпламини қуйидагича киритамиз

$$M=\left\{u:\int\limits_{-1}^1 u^2(x,T)dx+\int\limits_{-1}^1 u_{xxx}^2(x,T)dx+\int\limits_{-1}^1 u_{xtt}^2(x,T)dx\le m^2\right\}.$$

Теорема 11. Фараз қиламиз (19)-(22) масаланинг ечими мавжуд ва $u(x,t)\in M$, у ҳолда ушбу масаланинг ечими ягона.

Теорема 12. Фараз қиламиз (19)-(22) масаланинг ечими мавжуд, $u_1(x,t),u_2(x,t)\in M$ ва $\left\|p(x)-p(x)_\varepsilon\right\|_{W_2^3}\le\varepsilon$, $\left\|q(x)-q(x)_\varepsilon\right\|_{L_2}\le\varepsilon$, $\left\|r(x)-r(x)_\varepsilon\right\|_{W_2^1}\le\varepsilon$. У ҳолда ушбу масала ечими учун

$$\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^1\left(u_1-u_2\right)^2dxd\tau\le d(t)\left(T\varepsilon^2+\gamma_\varepsilon\right)^{1-r(t)}\left(m^2T+\gamma_\varepsilon\right)^{r(t)}$$

баҳо ўринли, бунда $\gamma_\varepsilon = 8\left(2T^2+1\right)\int\limits_0^T \left(2\varepsilon^2\right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\int\limits_{-1}^{1} m^2 dx\right)^{\frac{t}{T}} dt + 2(2T+1)\varepsilon^2$,

$d(t) = e^{\frac{2T+1}{2}\frac{\left(1-e^{-2t}\right)T-\left(1-e^{-2T}\right)t}{1-e^{-2T}}}$, $r(t) = \dfrac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2T}}$.

2.4-параграфда эса тўртинчи тартибли аралаш тузилмали хусусий ҳосилали дифференциал тенглама учун чегаравий масаланинг шартли корректлиги ўрганилган.

Бунда $\Omega = \{-1 < x < 1,\ 0 < t < T,\ x \neq 0\}$ соҳада кейинги тенгламани

$$\left(sign\,x\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = 0, \tag{23}$$

бошланғич

$$u(x,0) = p(x),\ u_t(x,0) = q(x),\ u_{tt}(x,0) = r(x),\ u_{ttt}(x,0) = s(x),\quad -1 \le x \le 1; \tag{24}$$

чегаравий

$$\begin{aligned} &u(-1,t) = u(1,t) = 0, \\ &u_{xx}(-1,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \end{aligned} \quad 0 \le t \le T \tag{25}$$

ва тикиш

$$\begin{aligned} &u(-0,t) = u(+0,t),\ u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \\ &u_{xx}(-0,t) = u_{xx}(+0,t),\ u_{xxx}(-0,t) = u_{xxx}(+0,t). \end{aligned} \tag{26}$$

шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ функцияни топиш керак. Бу ерда $p(x),\ q(x) \in C^4(\overline{\Omega}),\ r(x),\ s(x) \in C^2(\overline{\Omega})$.

Корректлик тўпламини қуйидагича киритамиз

$$M = \left\{u : \int\limits_{-1}^{1} u^2(x,t)dx + \int\limits_{-1}^{1} u_{xxx}^2(x,t)dx + \int\limits_{-1}^{1} u_{ttx}^2(x,t)dx \le m^2\right\}.$$

(23) - (26) масаланинг ечими учун қуйидаги теоремалар ўринли.

Теорема 13. Фараз қиламиз (23) – (26) масаланинг ечими мавжуд ва $u(x,t) \in M$, у ҳолда ушбу масаланинг ечими ягона.

Теорема 14. Фараз қиламиз (23) – (26) масаланинг ечими мавжуд, $u_1(x,t), u_2(x,t) \in M$ ва $\left\|p(x) - p(x)_\varepsilon\right\|_{W_2^4} \le \varepsilon$, $\left\|q(x) - q(x)_\varepsilon\right\|_{W_2^4} \le \varepsilon$, $\left\|r(x) - r(x)_\varepsilon\right\|_{W_2^2} \le \varepsilon$, $\left\|s(x) - s(x)_\varepsilon\right\|_{W_2^2} \le \varepsilon$. У ҳолда (23) - (26) масаланинг ечими учун

$$\int\limits_0^t \int\limits_{-1}^{1} \left(u_1 - u_2\right)^2 dxd\tau \le d(t)\left(T\varepsilon^2 + \gamma_\varepsilon\right)^{1-r(t)} \left(m^2 T + \gamma_\varepsilon\right)^{r(t)}$$

баҳо ўринли, бу ерда $\gamma_\varepsilon = 4\left(2T^2+1\right)\int\limits_0^T \left(5\varepsilon^2\right)^{\frac{T-t}{T}} \left(2m^2 + 4\varepsilon^2\right)^{\frac{t}{T}} e^{2t(T-t)} dt + (2T+1)\varepsilon^2$.

Диссертациянинг **«Юқори тартибли аралаш турдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар»** деб номланувчи учинчи боби юқори тартибли аралаш турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалаларни шартли корректликка текшириш ва тақрибий ечимини қуришга, тўртинчи тартибли абстракт дифференциал тенглама учун Коши масаласининг шартли корректлигига бағишланган.

Учинчи бобнинг 1-параграфида $\forall j \in N, j \geq 2$ учун аралаш турдаги 2^j тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама ўрганилган.

Масала. $\Omega = \left\{-1 < x < 1, x \neq 0, 0 < t < T\right\}$ соҳада

$$sgn\, x \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \;\; n = 2^j, j \in N, j \geq 2 \tag{27}$$

тенгламани, бошланғич

$$\left.\frac{\partial^l u(x,t)}{\partial t^l}\right|_{t=0} = \varphi_l(x), l = 0,1,2,...,n-1., -1 \leq x \leq 1; \tag{28}$$

чегаравий

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \; 0 \leq t \leq T; \tag{29}$$

ва тикиш

$$u(-0,t) = u(+0,t), \; u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \; 0 \leq t \leq T, \tag{30}$$

шартларини қаноатлантирувчи $u(x,t)$ функцияни топиш керак.

Ушбу (27)-(30) масаланинг умумлашган ечими деб

$$\int_0^T \int_{-1}^1 u(x,t)\left(sgn\, x \frac{\partial^n V}{\partial t^n} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) dx dt = \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(-1\right)^k \varphi_{n-k}(x) \left.\frac{\partial^k V}{\partial t^k}\right|_{t=0}\right) dx,$$

тенгликни қаноатлантирувчи $u(x,t)$, $u(x,t) \in \left(L_2(-1,1); C[0,T]\right)$ функцияни тушунамиз, бунда $V(x,t) \in W_2^n(\Omega)$, $\left.\frac{\partial^l V}{\partial t^l}\right|_{t=T} = 0$, $l = 0,1,...,\mathrm{n}-1.$, $V(-1,t) = V(1,t) = 0$ шартларни бажарувчи ихтиёрий функция.

Лемма 8. $\nu(t)$ функция ушбу

$$\frac{d^n \nu}{dt^n} - \theta^{\mathrm{n}/2} \nu = 0$$

тенгламани ва

$$\frac{d^l \nu(0)}{dt^l} = f_l, \; l = 0,1,...,\mathrm{n}-1.,$$

шартларни қаноатлантирсин, у ҳолда

$$\nu^2(t) \leq 8\left(\sum_{l=0}^{n-1} \left|\theta\right|^{-l} f_l^2\right)^{1-\frac{t}{T}} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \left|\theta\right|^{-l} \left(\frac{d^l \nu(T)}{dt^l}\right)^2\right)^{\frac{t}{T}},$$

тенгсизлик ўринли, бу ерда θ - ўзгармас сон.

Бу леммадан (27)-(30) масала ечими учун қуйидаги априор баҳо келтирилиб чиқарилган

$$\left\|u(x,t)\right\|_0^2 \leq 2n\left(\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\mu_k\right|^{-l} \left(\left|\varphi_{l_k}^+\right|^2 + \left|\varphi_{l_k}^-\right|^2\right)\right)^{1-\frac{t}{T}} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\mu_k\right|^{-l} \left(\left|\frac{d^l}{dt^l} u_k^+(T)\right|^2 + \left|\frac{d^l}{dt^l} u_k^-(T)\right|^2\right)\right)^{\frac{t}{T}}$$

Қаралаётган масаланинг корректлик тўпламини

$$M=\left\{u:\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\mu_k\right|^{-l}\left(\left|\frac{d^l}{dt^l}u_k^+(T)\right|^2+\left|\frac{d^l}{dt^l}u_k^-(T)\right|^2\right)\le m^2\right\}$$

кўринишда киритамиз.

Теорема 15. Айтайлик (27) - (30) масаланинг ечими мавжуд ва $u(x,t)\in M$. У ҳолда бу масланинг ечими ягона.

Теорема 16. Айтайлик (27) - (30) масаланинг ечими мавжуд, $u(x,t),u_\varepsilon(x,t)\in M$, ва $\left\|\varphi_l(x)-\varphi_{l_\varepsilon}(x)\right\|_0\le\varepsilon$, $l=0,1,...,\mathrm{k}-1.$. У ҳолда (27) - (30) масаланинг ечими учун $\left(x,t\right)\in\Omega$ бўлганда қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$\left\|u(x,t)-u_\varepsilon(x,t)\right\|_0\leqslant\varpi(\varepsilon,m),$$

бу ерда $\varpi(\varepsilon,m)=\sqrt{2n}\left(\sqrt{n\varepsilon}\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(2m\right)^{\frac{t}{T}}$.

3.2 параграфда тўртинчи тартибли дифференциал-оператор тенглама учун нокоррект чегаравий масаланинг шартли корректлиги ва регулярлашган ечими ўрганилган.

Айтайлик, $u(t)$ - t $0\le t\le T,$ скаляр аргументининг функцияси бўлиб, қийматларини H Гильберт фазодан қабул қилсин.

Ушбу дифференциал тенгламани қараймиз

$$Bu_{tttt}=Au, \tag{31}$$

бу ерда A ўз-ўзига қўшма мусбат аниқланган оператор бўлиб, аниқланиш соҳаси $D(A)$ H да зич жойлашган, B оператор ҳам ўз-ўзига қўшма оператор бўлиб, H фазони H га изоморф акслантирсин, ундан ташқари $E^+ + E^- = I$ бўлсин, бунда E^+, E^- лар B оператор спектрининг мусбат ва манфий қисмларига мос келувчи спектрал проекторлар.

Масала. (31) тенгламани ва бошланғич

$$\left.\frac{d^j u(x,t)}{dt^j}\right|_{t=0}=\varphi_j,\ j=0,1,2,3., \tag{32}$$

шартларини қаноатлантирувчи $u(t)$ функция топиш керак.

(31)-(32) масаланинг умумлашган ечими деб

$$\int_0^T\left(u,Bv_{tttt}+Av\right)dt=\left(f_0,Bv_{ttt}(0)\right)+\left(f_1,Bv_{tt}(0))+(f_2,Bv_t(0))+(f_3,Bv(0)\right)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $u(t)$, $u(t)\in C\left(\left[0,T\right];H\right)$, функцияни тушинамиз, бунда $v(t)\in L_2\left(\left(0,T\right);H^2\right)$, $v_t,v_{tt},v_{ttt}\in L_2\left(0,T;H\right)$, $v(T)=v_t(T)=v_{tt}(T)=v_{ttt}(T)=0$.

Корректлик тўпламини

$$M=\left\{u:\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-j}\left(\left|\frac{d^j}{dt^j}u_k^+(T)\right|^2+\left|\frac{d^j}{dt^j}u_k^-(T)\right|^2\right)\le m^2\right\}$$

кўринишда киритамиз.

Теорема 17. Фараз қиламиз (31)-(32) масаланинг ечими мавжуд ва $u(x,t) \in M$. У ҳолда (31)-(32) масаланинг ечими ягона.

Теорема 18. Фараз қилайлик, A ва B операторлар кўрсатилган шартларни қаноатлантирсин ва $u(t), u_\varepsilon(t) \in M$, $\left\| f_j - f_{j_\varepsilon} \right\|_0 \le \varepsilon$, $j = 0,1,2,3.$, у ҳолда (31)-(32) масаланинг ечими $t \in (0,T)$ учун ушбу

$$\left\| u(t) - u_\varepsilon(t) \right\|_0 \le \omega(\varepsilon, m),$$

тенгсизлик ўринли, бунда $\omega(\varepsilon, m) = \inf_t \left\{ 2\sqrt{2} \left(\varepsilon\right)^{\frac{T-t}{T}} \left(m\right)^{\frac{t}{T}} \right\}$.

Учинчи бобнинг 3-параграфида тўртинчи тартибли аралаш турдаги дифференциал тенглама учун чегаравий масаланинг тақрибий ечими тадқиқ қилинган.

Бунда $\Omega = \left\{ -1 < x < 1, x \ne 0, 0 < t < T \right\}$ соҳада

$$sgn x \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad (33)$$

тенгламани қараймиз.

Масала. Ушбу Ω соҳада (33) тенгламани, бошланғич

$$\left. \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial t^j} \right|_{t=0} = \varphi_j(x), \, j = 0,1,2,3., -1 \le x \le 1;$$

чегаравий

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \, 0 \le t \le T;$$

ва тикиш

$$u(-0,t) = u(+0,t), \; u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \, 0 \le t \le T,$$

шартларини қаноатлантирувчи $u(x,t)$ функцияни топиш керак.

Мазкур масаланинг умумлашган ечими деб

$$\int_0^T \int_{-1}^1 u(x,t) \left(sgn x \frac{\partial^4 V}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) dxdt = \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \left(\sum_{k=0}^3 \left(-1\right)^k \varphi_{3-k}(x) \left. \frac{\partial^k V}{\partial t^k} \right|_{t=0} \right) dx,$$

тенгликни қаноатлантирувчи $u(x,t)$, $u(x,t) \in \left(L_2(-1,1); C[0,T] \right)$ функцияни тушунамиз, бунда $V(x,t) \in W_2^4(\Omega)$, $\left. \frac{\partial^j V}{\partial t^j} \right|_{t=T} = 0$, $j = 0,1,2,3.$, $V(-1,t) = V(1,t) = 0$ шартларни бажарувчи ихтиёрий функция.

Тихонов регулярлаштириш усули билан қаралаётган масаланинг тақрибий ечими қурилган, аниқ ечим ва тақрибий ечим орасидаги фарқ нормаси учун

$$\left\| u - u^{N_\varepsilon} \right\|_0 \le ch(\sqrt{\mu_N} \cdot t) \cdot \varepsilon + \sigma(m, N)$$

тенгсизлик ўринли, бу ерда

$$\sigma^2(m,N) = \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\left\{ \varphi_{0_k}^+ \right\}^2 + \left\{ \varphi_{0_k}^- \right\}^2 \right) \right)^{\frac{T-t}{T}} \left(m^2 \right)^{\frac{t}{T}}$$

бунда $\sigma(m,N) \to 0$ қачонки $N \to \infty$.

ХУЛОСА

Диссертация иши тузилмали, аралаш ҳамда аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга қўйилган нокоррект чегаравий масалаларни шартли корректликка текшириш, тақрибий ечимини қуриш, аниқ ва тақрибий ечим орасидаги яқинлигини кўрсатувчи фарқнинг мос функционал фазодаги нормасини аниқлашга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Тузилмали, аралаш, аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар корректликга текширилган ва ечимларининг априор баҳолари аниқланган.

2. Тузилмали, аралаш, аралаш-тузилмали турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалалар ечимларининг ягоналик ва шартли турғунлик теоремалари исботланган.

3. Аралаш турдаги тенгламага мос келувчи спектрал масала ўрганилиб, хос функциялар ва хос сонларни ҳисоблаш формуллари топилган.

4. Тузилмали ва аралаш турдаги хусусий ҳосилалаи дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалаларнинг тақрибий ечимлари кетма-кетлик кўринишда қурилиб, аниқ ечим ва тақрибий ечим орасидаги яқинликни билдирувчи фарқ нормаси аниқланган.

5. Нокоррект чегаравий масалаларга шартли коррект тўплами топилган.

6. Тақрибий ечимларни қуриш учун регулярлаштириш параметрини ҳисоблаш формуласи аниқланган.

7. Аниқланган ҳисоблаш алгоритмлари асосида бошланғич берилганларга мос масалаларнинг аниқ ва тақрибий ечимларини сонли, график кўринишда чиқариш дастури тузилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА, ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ХАЖИЕВ ИКРОМБЕК ОЗОДОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЯ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

г. Ташкент – 2017 год

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.1.PhD/FM12

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант: **Фаязов Кудратилло Садридинович**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Хасанов Акназар Бекдурдиевич**
доктор физико-математических наук, профессор

Исломов Бозор Исломович
доктор физико-математических наук, профессор

Ведущая организация: **Бухарский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» _____________2017 года в ____ часов на заседании Научного совета ___________________ при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2017 года.

(протокол рассылки №________ от «____» _______________2017 года).

А.С.Садуллаев
Председатель научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., академик

Г.И.Ботиров
Ученый секретарь научного совета по
присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н.

М.С. Салахитдинов
Председатель научного семинара при научном
совете по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, во многих случаях сводятся к исследованию некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Основным объектом теории обратных и некорректных задач являются модели прикладных исследований в области геофизических наблюдений, газовой динамики, распространения акустических волн и др. Так как для некорректных краевых задач дифференциальных уравнений смешанно-составного типа исследования на условную корректность и построения приближённого решения нужной степени не сформированы, для этих некорректных задач развития исследовании остается одним из важных задач.

В годы независимости в нашей стране особое внимание было уделено актуальным направлениям дифференциальных уравнений, которые имеют практическое применение в фундаментальных науках, а также исследованиям различных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных смешанно-составного типа. В результате были получены значительные результаты в исследовании обратных и некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных и их приближенное решение. Проведение научных исследований на международном уровне по важным направлениям математики, прикладной математики, физики выделено как основная задача фундаментальных исследований[1]. Развитие теорий дифференциальных уравнений в частных производных, теорий обратных и некорректных задач, и теорий принятия решений играют важную роль в исполнении постановления.

На сегодняшний день в мире проведение исследований на условную корректность, на построение приближённого решения, нахождения погрешности между точным и приближённым решениями некорректных краевых задач для уравнений в частных производных смешанно-составного типа высокого порядка связанные с прикладными проблемами, приобретают большое значение. В этой связи: определение априорный оценки решения, нахождение множества корректности, доказательство теорем единственности и условной устойчивости, построение приближённых решений методами регуляризации и квази-обращений, нахождение оценки нормы разности между точными и приближёнными решениями в соответствующем пространстве, вывод формулы вычисления параметра регуляризации, составление алгоритма и реализация программы вычисления точных и приближённых решений с соответствующими начальными данными считаются целевыми научными исследованиями.

Эта диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-916 «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения

[1] Постановление №292 Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 207 года “Об организации деятельности научно-исследовательских заведений Академии наук”

инновационных проектов и технологий в производство» от 15 июля 2008 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 8 февраля 2017 года а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Исследуемые в диссертации задачи относятся к классу смешанных уравнений математической физики. Корректные краевые задачи для таких типов уравнений исследованы многими математиками. В частности, M.Jevrey рассмотрел краевую задачу для параболического уравнения с меняющимся направлением времени. Задачи такого типа с различными граничными и начальными условиями исследовали C.D.Pagani, G.Talenti, В.В.Врагов, В.К.Романко, С.А.Терсенов, А.М.Нахушев и др. Работа Ф.Трикоми и С.Геллерстедта была посвящена уравнению смешанного типа. Сюда относятся и работы М.А.Лаврентьева, М.В.Келдыша, А.В.Бицадзе, М.С.Салахитдинова, Т.Д.Джураева, В.Н.Врагова, К.Б.Сабитова, А.И.Кожанова, С.П.Пулькина, А.П.Солдатова, Н.В.Кислова и их научных школ.

Некорректные краевые задачи для параболического уравнения с обратным течением времени были исследованы в работах А.Н. Тихонова, М.Ландиса, С.Г.Крейна, С.П.Шишатского, Х.Левина и др. В этих работах для уравнения параболического типа были рассмотрены обратная и не характерная задача Коши на условную корректность. Эти результаты были обобщены для абстрактных эволюционных уравнений с самосопряженными операторными коэффициентами С.Г.Крейном, Х.Левином и др. Для псевдо-дифференциальных уравнений аналогичные исследования были проведены в работах B.D.Coleman, R.J.Duffin и V.J.Mizel. Некорректные задачи для уравнений эллиптического типа были предметом исследований F.John, М.М.Лаврентьева, С.Г.Крейна, М.Ландиса, В.К.Иванова и др.

А.Ш.Алимов рассмотрел задачу Дирехле для гиперболического уравнения. Ш.Ярмухамедов с помощью функций Карлемана построил приближенные решения задачи Коши для эллиптического уравнения. Для системы уравнений были построены регуляризованные решения методом функции Карлемана учениками Ш.Ярмухамедова. Следует отметить результаты С.П.Шишатского, а таже М.Х.Аламинова, которые исследовали некорректные краевые задачи для вырождающихся параболических и эллиптических уравнений. Обратные и некорректные задачи для задач уравнений эллиптического и гиперболического типа были предметом исследований А.Хайдарова и Д.К.Дурдиева, а задачи интегральной геометрии исследовались Акр.Бегматовым. Некорректные краевые задачи для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени и уравнения смешанного типа были предметом исследований работ К.С.Фаязова.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Ф-4-30 «Внутренние и краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений с операторными типами коэффициентов» Национального университета Узбекистана (2012-2016 гг.).

Целью исследования являются установлению условной корректности и нахождения приближенных решений на множестве корректности некорректных задач для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного и составного, а также смешанно-составного типов высокого порядка.

Задачи исследования:

исследование некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных составного и смешанно-составного типов высокого порядков;

исследование некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа высокого порядков;

нахождение регуляризованних решений, определение оценок норм разности между точными и приближенными решениями в соответствующих функциональных пространствах;

нахождение формул вычисления параметров регуляризации, реализация программ численного решения и графических результатов.

Объектом исследования являются дифференциальные уравнения в частных производных смешанного, составного и смешанно-составного типов высокого порядка.

Предметом исследования являются некорректные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного, составного и смешанно-составного типов высокого порядка.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы математического анализа, спектрального разложения, логарифмической выпуклости, Карлемановская оценка и методы решений дифференциальных уравнений и математической физики**.**

Научная новизна исследования состоит в следующем:

получены априорные оценки решения некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного, составного и смешанно-составного типов высокого порядков;

определены множества корректности некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного, составного и смешанно-составного типов высокого порядков, а также доказаны теоремы единственности и условной устойчивости;

построены приближенные решения, определены оценки норм разности между точными и приближенными решениями в соответствующих пространствах, выведены формулы вычисления параметров регуляризации;

реализованы программы в среде Visual C# выводящие численные и графические результаты точного и приближенного решения на основе вычисляющих алгоритмов.

Практические результаты исследования состоят из вывода априорных оценок решений, определения множеств корректности, нахождения формул параметра регуляризаций для вычисления приближеных решений некорректных задач для уравнений в частных производных смешанно-составного типа.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием методов теории некорректных задач, теории дифференциальных уравнений, функционального анализа

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная **значимость результатов** исследования заключается в том, что их можно использовать для дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений в частных производных смешанно-составного типа а также теории некорректных задач.

Практическая значимость результатов исследований определяется тем, что их можно применить к моделям геофизических наблюдений, в газовой динамике, механике сплошной среды, распространении акустических волн и подобным прикладным задачам, которые выражаются некорректными краевыми задачами для дифференциальных уравнений смешанного, составного и смешанно-составного типов.

Внедрение результатов исследования:

На основе опеределения оценок условной устойчивости и нахождения приближенных решений на соответствующем множестве корректности для решений некорректных задач:

- условная устойчивость решения некорректной краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка смешанно-составного типа и априорная оценка решения некорректной задачи для неоднородного уравнения использованы при “§5. Понятия корректных задач. Примеры некорректных задач” и “§21. Задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности” учебного пособия “Уравнения математической физики” (Протокол №89-03-2584 от 30 октября 2017 года Министерства высшего и средне-специального образования Республики Узбекистан). Применение этих научных результатов дало возможность создание примеров некорректных задач, доказать единственность и устойчивость решения задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности;

- априорная оценка решения некорректной краевой задачи для дифференциального уравнения смешанно-составного типа применена при получении аппriорной оценки кревых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка в научном проекте Ф-4-02 (Протокол № ФТА-

02-11/558 от 28 августа 2017 года агентства науки и технологии Республики Узбекистан). Применения научных результатов дали возможность доказать единственность и устойчивость решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка;

- соответствующие краевым задачам уранений в частных производных смешанного типа свойства спектральных задач применены при исследованиях собственых значений и собственных функций краевой задачи для уравнения дробного порядка в научном проекте Ф-4-02 (Протокол № ФТА-02-11/558 от 28 августа 2017 года агентства науки и технологии Республики Узбекистан). Применения научных результатов дали возможность определить собственные функции и собственые значение соответствующей спектральной задачи для уравнения дробного порядка.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 14 научно-практических конференциях, в том числе на 8 международных и 6 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 23 научных работ, из них 9 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 2 опубликованы в зарубежных журналах и 7 – в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложения. Объем диссертации составляет 100 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований, степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Условно-корректные задачи и дифференциальные уравнения смешанно-составного типа»**, приведены необходимые предварительные сведения, основные определения, теоремы и леммы для важных некорректных задач, которые будут использованы при изложении результатов диссертации, исследования на условную устойчивость и приближенное решение для уравнения в частных производных смешанно-составного типа третьего порядка, условная корректность и регуляризация краевых задач для уравнения в частных производных составного типа третьего, четвертого порядков.

В параграфе 1.1 представлен краткий обзор выводов по теме диссертации, приведены понятия корректных и некорректных задач, определение условной корректности, теорема А.Н.Тихонова, функция логарифмической выпуклости, определение регуляризирующего оператора.

В параграфе 1.2 рассматривается следующая краевая задача: найти решение уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-1\right)\left(\operatorname{sgn} x\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=0 \tag{1}$$

в области $\Omega=\{-1<x<1,\ x\neq 0,\ 0<t<T\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x,0)=p_1(x),\quad u_t(x,0)=p_2(x),\ \ u_{tt}(x,0)=p_3(x), \tag{2}$$

$$u(-1,t)=u(1,t)=0, \tag{3}$$

$$u(-0,t)=u(+0,t),\quad u_x(-0,t)=u_x(+0,t), \tag{4}$$

где $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$ заданные функции.

Исследованиям корректных краевых задач для уравнения смешенного типа второго порядка и уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени посвящены работы многих авторов. В работе К.С.Фаязова исследована краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе.

Для исследования задачи (1)-(4) введем обозначение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-u(x,t)=v(x,t)$$

и перепишем задачу (1)-(4) в следующем виде:

$$\operatorname{sgn} x\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}=0\ ,$$

$$u(x,0)=p_1(x),\ v(x,0)=f(x),\ v_t(x,0)=g(x)\ ,$$

$$v(-1,t)=v(1,t)=0\ ,$$

$$v(-0,t)=v(+0,t),\quad v_x(-0,t)=v_x(+0,t)\ ,$$

где $f(x)=p_2(x)-p_1(x),\ \ g(x)=p_3(x)-p_2(x)$.

В дальнейшем будем пользоваться свойствами собственных функций следующей спектральной задачи:

$$\begin{cases} sgn\,x\,X''(\mathrm{x})+\lambda\,\mathrm{X}(\mathrm{x})=0,\\ X(-1)=\mathrm{X}(1)=0,\\ X(-0)=\mathrm{X}(+0),\ X'(-0)=\mathrm{X}'(+0). \end{cases}$$

Под *обобщенным решением краевой задачи* понимаем функцию $v(x,t)\in\left(\mathrm{L}_2(-1,1);C[0,\mathrm{T}]\right)$, удовлетворяющую следующему тождеству

$$\int_0^T\int_{-1}^1 v(x,t)\left(\operatorname{sgn} x V_{tt}+V_{xx}\right)dxdt=\int_{-1}^1\operatorname{sgn} x V(x,0)g(x)dx-\int_{-1}^1\operatorname{sgn} x V_t(x,0)f(x)dx$$

для любой функции $V(x,t)\in W_2^2(\Omega)$, $V(x,T)=V_t(x,T)=0,\quad V(-1,t)=V(1,t)=0$.

В этом параграфе доказаны следующие лемма и теоремы.

Лемма 1. Пусть в области Ω функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению $\operatorname{sgn} x\, v_{tt}(x,t) + v_{xx}(x,t) = 0$ и условиям $v(-1,t) = v(1,t) = 0$. Тогда для решения $v(x,t)$ при любом $\left(x,t\right) \in \Omega$ справедлива следующая оценка

$$\int_{-1}^{1} v^2(x,t)dx \le 4\left(\int_{-1}^{1} {v_x}^2(x,0)dx + \left|\alpha\right|\right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\int_{-1}^{1} {v_x}^2(x,T)dx + \left|\alpha\right|\right)^{\frac{t}{T}} e^{2t(T-t)},$$

где $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} sgn\, x\, v_{xx}^2(x,0)dx - \int_{-1}^{1} v_{xt}^2(x,0)dx\right)$.

Теорема 1. Пусть решение задачи существует и $u(x,t) \in M$. Решение задачи (1)-(4) единственно.

Теорема 2. Пусть решение задачи существует, $u_1(x,t), u_2(x,t) \in M$ и $\left\|p_i - p_{i\varepsilon}\right\|_{W_2^2[-1;1]} \le \varepsilon \quad i = 1,2.$, $\left\|p_3 - p_{3\varepsilon}\right\|_{W_2^1[-1;1]} \le \varepsilon$. Тогда для решения задачи (1)-(4) имеет место оценка

$$\left\|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right\| \le e^t\varepsilon + \left(8\left(e^{2t} - 1\right)\int_0^t \left(2\varepsilon^2\right)^{\frac{T-s}{T}} \left(2m^2 + \varepsilon^2\right)^{\frac{s}{T}} e^{2s(T-s)}ds\right)^{1/2}.$$

Пусть решение рассматриваемой задачи (1)-(4) существует и принадлежит M, а также $\left\|p_j(x) - p_{j\varepsilon}(x)\right\| \le \varepsilon \quad j = 1,2,3.,\ \varepsilon > 0,\ p_2(x) = p_3(x)$. Тогда построены приближенные решения по точным и приближенным начальным данным, а разность, в соответствующем функциональном пространстве, удовлетворяет следующему неравенству:

$$\left\|u(t,x) - u_{N\varepsilon}(t,x)\right\|^2 \le 2\left(e^{2T} - 1\right)m^2 e^{2\mu_{N+1}(t-T)} / \mu_{N+1} + \left(2e^{2T} + 2\int_0^T e^{2(T-t)} ch^2\mu_N t\, dt\right)\varepsilon^2$$

где μ_k положительный корень уравнения $tg\mu = -th\mu$.

Параграф 1.3 посвящен регуляризации и условной корректности краевой задачи для бигармонического уравнения.

Пусть $u(t,x)$ является решением уравнения в области $\Omega = \left\{0 < x < \pi,\ 0 < t < T\right\}$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = 0. \tag{5}$$

Постановка задачи. Найти решение уравнения (5) в области Ω, удовлетворяющее следующим условиям:

начальным

$$\left.\frac{\partial^{(i)} u}{\partial t^i}\right|_{t=0} = f_i(x), \quad i = 0,1,2,3\ , \quad 0 \le x \le \pi\,; \tag{6}$$

граничным

$$\left.\frac{\partial^{(i)}u}{\partial x^i}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^{(i)}u}{\partial x^i}\right|_{x=\pi}=0,\quad i=0{,}2\ ,\quad 0\le t\le T\,. \tag{7}$$

Задачу Коши для уравнения Лапласа исследовали М.М.Лаврентьев, М.Е.Ландис, в виде абстрактного С.Г.Крейн, Х.Левин и другие исследовали на условной корректности.

Лемма 2. Для решения уравнения $\Delta v(x,t)=0$, удовлетворяющего условиям $v(t,0)=v(t,\pi)=0$ справедлива оценка

$$\int_0^\pi v^2dx\le c(t)\left(\int_0^\pi v^2(x,0)dx+\left|p\right|\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(\int_0^\pi v^2(x,T)dx+\left|p\right|\right)^{\frac{t}{T}},$$

Где $c(t)=e^{2t(T-t)}$, $p=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi\left(v_x^2(x,0)-v_t^2(x,0)\right)dx$.

Лемма 3. Для решения уравнения (5), удовлетворяющего условиям $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ при любом $t\in(0,T)$ имеет место оценка

$$\int_0^t\int_0^\pi u^2dxd\tau\le d(t)\left(T\int_0^\pi u^2(x,0)dx+\gamma\right)^{1-r(t)}\left(\int_0^T\int_0^\pi u^2dxdt+\gamma\right)^{r(t)},$$

где функции $d(t)=e^{\frac{2T+1}{2}\frac{\left(1-e^{-2t}\right)T-\left(1-e^{-2T}\right)t}{1-e^{-2T}}}$, $\gamma=\left(2T^2+1\right)\displaystyle\int_0^T\int_0^\pi v^2(x,t)dxdt+\left|\alpha\right|$,

$\alpha=2\displaystyle\int_0^\pi\left(Tu_x^2(x,0)-Tu_t^2(x,0)+u(x,0)u_t(x,0)\right)dx$, $r(t)=\dfrac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2T}}$.

Определим множества корректности M следующим образом

$$M=\left\{u:\left\|u(x,T)\right\|+\left\|u_{xx}(x,T)\right\|+\left\|u_{tt}(x,T)\right\|\le m\right\}.$$

Теорема 3. Пусть решение задачи существует и $u(x,t)\in M$. Тогда решение задачи (5)-(7) единственно.

Введем обозначение: через $u_1(x,t)$ обозначим решение задачи с точными данными, а через $u_2(x,t)$ решение задачи с приближенными данными.

Теорема 4. Пусть решение задачи существует, $u_1(x,t),\,u_2(x,t)\in M$ и $\left\|f_i-f_{i\varepsilon}\right\|_{W_2^{3-i}}<\varepsilon\quad i=0,1,2,3.$. Тогда для решения задачи (5)-(7) имеет место оценка

$$\int_0^t\int_0^\pi\left(u_1(x,t)-u_2(x,t)\right)^2dxd\tau\le c(t)\left(T\varepsilon^2+\gamma_\varepsilon\right)^{1-r(t)}\left(2m^2T+\gamma_\varepsilon\right)^{r(t)},$$

где $\gamma_\varepsilon=\left(2T^2+1\right)\displaystyle\int_0^T e^{2t(T-t)}\left(2\varepsilon^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(2m^2+\varepsilon^2\right)^{\frac{t}{T}}dt+\left(4T+2\right)\varepsilon^2$.

Построены приближенные решения задачи (5)-(7) методами регуляризации Тихонова и квазиобращения. Определена оценка разности между точным и приближенным решениями.

Получена оценка методом квазиобращения

$$\left\| u(t,x) - u_{\alpha\varepsilon}(t,x) \right\| \le \frac{4m\alpha t}{e^2 (T-t)^2} + e^{\frac{t}{4\alpha}} \varepsilon .$$

Из правой части последнего неравенства для любых $\varepsilon > 0$ найдем $\inf\limits_{\varepsilon>0} \left\{ \frac{4M\alpha t}{e^2(T-t)^2} + e^{\frac{t}{4\alpha}}\varepsilon \right\} = \varphi(\alpha)$, $t \ne T$ и тогда найдется α.

Оценка методом регуляризация Тихонова

$$\left\| u(x,t) - u_{N\varepsilon}(x,t) \right\| \le \frac{m}{2} e^{(N+1)(t-T)} + \frac{e^{Nt}}{2} \varepsilon .$$

Правую часть неравенства можно сделать сколь угодно малой из-за $\inf\limits_{\varepsilon>0} \left\{ m e^{(N+1)(t-T)} + e^{Nt}\varepsilon \right\} = \varphi(N)$ и тогда найдется N. Легко видеть, что при $\varepsilon \to 0$ $N \sim \frac{1}{T} \ln \frac{m}{\varepsilon}$.

В параграфе 4 первой главы показана условная коррекность краевой задачи для дифференциального уравнения составного типа третьего порядка

Постановка задачи. В области $\Omega = \{0 < x < \pi,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x,t) = f(x,t) . \qquad (8)$$

Пусть ее решение удовлетворяет следующим условиям

$$\left. \frac{\partial^i u(x,t)}{\partial t^i} \right|_{t=0} = p_i(\mathrm{x}),\ i = 0,1,2.,\quad 0 \le x \le \pi; \qquad (9)$$

$$\begin{matrix} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0 \end{matrix},\ 0 \le t \le T . \qquad (10)$$

Для исследования задачи (8)-(10) использованы лемма 3 и следующая лемма.

Лемма 4. Для решения уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \Omega,$$

удовлетворяющего условиям

$$v(0,t) = v(1,t) = 0,\ 0 \le t \le T .$$

справедлива оценка

$$\int_0^T \int_0^\pi v^2(x,t)\,dxdt \le \frac{e^{2sT^2}}{2s} \int_0^T \int_0^\pi f^2(x,t)\,dxdt + Te^{2sT^2} \int_0^\pi v^2(x,0)\,dx + \frac{1}{2s} \int_0^\pi v_x^2(x,T)\,dx$$

где $\forall s > 0$.

Введем обозначение

$$M = \left\{ u : \left\| u(x,T) \right\| + \left\| u_{xxx}(x,T) \right\| + \left\| u_{xtt}(x,T) \right\| \le m \right\} .$$

Теорема 5. Пусть решение задачи существует и $u(x,t)\in M$. Решение задачи (8)-(10) единственно.

Теорема 6. Пусть решение задачи существует и $u_1(x,t),u_2(x,t)\in M$, $\left\|p_0(x)-p_{0\varepsilon}(x)\right\|_{W_2^2[0,\pi]}\le\varepsilon$, $\left\|p_1(x)-p_{1\varepsilon}(x)\right\|_{L_2[0,\pi]}\le\varepsilon$, $\left\|p_2(x)-p_{2\varepsilon}(x)\right\|_{L_2[0,\pi]}\le\varepsilon$, $\left\|f(x,t)-f_\varepsilon(x,t)\right\|_{L_2[0,\pi]}\le\varepsilon$. Тогда для решение задачи (1.4.1)-(1.4.3) имеет место оценка

$$\int_0^t\int_0^\pi\left(u_1(x,t)-u_2(x,t)\right)^2dxd\tau\le d(t)\left(T\varepsilon^2+\gamma_\varepsilon\right)^{1-r(t)}\left(Tm^2+\gamma_\varepsilon\right)^{r(t)},$$

где $\gamma_\varepsilon=\left(2T^2+1\right)\left(e^{2sT^2}T\left(\frac{1}{2s}+4\right)\varepsilon^2+\frac{1}{2s}m^2\right)+2\left(2T+1\right)\varepsilon^2$, $\forall s>0$.

Вторая глава диссертации, названная **«Исследования корректности по Тихонову краевых задач для уравнений смешанно-составного типа»,** посвящена исследованию некорректных краевых задач для уравнений в частных производных смешанно-составного типа второго, третьего, четвертого порядков. Получены априорная оценка, доказаны теоремы о единственности и условной устойчивости на множестве корректности для каждой задачи.

Во второй главе первого параграфа рассмотрена оценка условной устойчивости некорректной краевой задачи для уравнения второго порядка по t смешанно-составного типа.

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+sgn\,x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=0 \tag{11}$$

в области $\Omega=\{-1<x<1,\ x\neq 0,\ 0<t<T\}$. Будем рассматривать задачу: найти решение уравнения (11) в области Ω, которое удовлетворяет следующим условиям

$$u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x),\qquad -1\le x\le 1; \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&u(-1,t)=u(1,t)=0\\&u_{xx}(-1,t)=u_{xx}(1,t)=0\end{aligned},\qquad 0\le t\le T, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&u(-0,t)=u(+0,t),\ u_x(-0,t)=u_x(+0,t),\\&u_{xx}(-0,t)=u_{xx}(+0,t),\ u_{xxx}(-0,t)=u_{xxx}(+0,t).\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $f(x),\ g(x)$ заданные функции.

Для уравнений первого порядка исследованию корректных краевых задач посвящены работы С.Г.Пяткова, Н.В.Кислова, и других. Случаю некорректных задач для уравнений с меняющимся направлением по времени посвящены работы К.С.Фаязова, а также работа H.Levine, А.Л.Бухгейма и других.

Лемма 5. Для решения уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + sgn\, x\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)v(x,t) = 0$$

удовлетворяющего условиям $v(-1,t) = v(1,t) = 0$ в области Ω справедлива оценка

$$\int_{-1}^{1} v_x^{\,2}(x,t)dx \le \left(\int_{-1}^{1} v_x^{\,2}(x,0)dx\right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\int_{-1}^{1} v_x^{\,2}(x,T)dx\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Теорема 7. Пусть решение задачи (11)-(14) существует и $u(x,t) \in M$. Тогда решение задачи единственно.

Теорема 8. Пусть решение задачи существует, $u_1(x,t), u_2(x,t) \in M$ и $\left\|f(x) - f(x)_\varepsilon\right\|_{W_2^3} < \varepsilon$, $\left\|g(x) - g(x)_\varepsilon\right\|_{W_2^1} < \varepsilon$. Тогда для решения задачи (11)-(14) с соответствующими данными верна оценка

$$\int_0^T \int_{-1}^{1} \left(u_1(x,t) - u_2(x,t)\right)^2 dxdt \le \frac{2e^{2sT^2}}{s} \int_0^T \left(\left(\varepsilon^2\right)^{\frac{T-t}{T}} \left(4m^2\right)^{\frac{t}{T}}\right)dt + \frac{m^2}{2s} + Te^{2sT^2}\varepsilon^2,$$

где $\forall\, s > 0$.

Второй параграф данной главы посвящен изучению некорректной краевой задачи для неоднородного уравнения смешанно-составного типа третьего порядка с переменным направлением времени.

Постановка задачи. Исследуем функцию $u(x,t) \in C_{x,t}^{4,3}(\Omega) \cap C_{x,t}^{3,2}(\overline{\Omega})$ в области $\Omega = \{-1 < x < 1, 0 < t < T, x \ne 0\}$, удовлетворяющую уравнению

$$\left(sgn x\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = g(x,t), \tag{15}$$

при следующих начальных

$$u(x,0) = p(x),\ u_t(x,0) = q(x),\ u_{tt}(x,0) = r(x),\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{16}$$

и граничных условиях

$$\begin{matrix} u(-1,t) = u(1,t) = 0 \\ u_{xx}(-1,t) = u_{xx}(1,t) = 0 \end{matrix},\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{17}$$

и условиям склеивания

$$\begin{matrix} u(-0,t) = u(+0,t),\ u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \\ u_{xx}(-0,t) = u_{xx}(+0,t),\ u_{xxx}(-0,t) = u_{xxx}(+0,t). \end{matrix} \tag{18}$$

Здесь $p(x) \in W_2^4[-1;1]$, $q(x) \in W_2^2[-1;1]$, $r(x) \in L_2[-1;1]$, $g(x,t) \in L_2(\Omega)$ заданные функции.

Лемма 6. Пусть $\omega(t)$ решение уравнения

$$\omega''(t) - \lambda\omega(t) = g(t),$$

и удовлетворяет условиям $\omega(0) = w_1,\ \omega'(0) = w_2$, тогда для решения данного уравнения при $t \in \left(0,T\right)$ имеет место неравенство

$$\int_0^t w^2(\tau)d\tau \leqslant c(t)\left(Tw_1^2+\gamma\right)^{1-r(t)}\left(\int_0^T w^2(\tau)d\tau+\gamma\right)^{r(t)}$$

где λ - некоторая константа, $g(t)$ - заданная функция, $r(t)=\dfrac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2T}}$,

$$c(t)=\exp\left(\frac{2T+1}{2}\frac{\left(1-e^{-2t}\right)T-\left(1-e^{-2T}\right)t}{1-e^{-2T}}\right),$$

$$\gamma=(2T^2+1)\int_0^T g^2(t)dt+2\left|\lambda w_1^2-w_2^2\right|T+2\left|w_1w_2\right|.$$

Лемма 7. Пусть в области Ω функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$sgn x v_{tt}+v_{xx}=g(x,t),$$

и условиям

$$v(x,0)=f(x), v_t(x,0)=s(x),$$
$$v(-1,t)=v(1,t)=0,$$
$$v(-0,t)=v(+0,t),\, v_x(-0,t)=v_x(+0,t).$$

Тогда для решения $v(x,t)$ при любом $\left(x,t\right)\in\Omega$ справедлива следующая оценка

$$\int_0^t \left\|v(x,\tau)\right\|_0^2 d\tau \leqslant c(t)\left(T\left\|f(x)\right\|_0^2+\gamma\right)^{1-r(t)}\left(\int_0^T \left\|v(x,t)\right\|_0^2 dt+\gamma\right)^{r(t)},$$

где $\gamma=\left(2T^2+1\right)\int_0^T \left\|g(x,t)\right\|_0^2 dt+2T\left\|f(x)\right\|_1^2+(2T+1)\left\|s(x)\right\|_0^2+\left\|f(x)\right\|_0^2$.

Теорема 9. Пусть решение задачи (15)-(18) существует и $u(x,t)\in M$, тогда решение задачи единственно.

Теорема 10. Пусть решение задачи существует и $u_1(x,t),u_2(x,t)\in M$, $\left\|g(x,t)-g_\varepsilon(x,t)\right\|_0\leqslant\varepsilon$, $\left\|p(x)-p_\varepsilon(x)\right\|_{W_2^4}\leqslant\varepsilon$, $\left\|q(x)-q_\varepsilon(x)\right\|_{W_2^2}\leqslant\varepsilon$, $\left\|r(x)-r_\varepsilon(x)\right\|_{L_2}\leqslant\varepsilon$. Тогда для решения задачи (15)-(18) имеет место оценка

$$\int_0^T\int_{-1}^1 \left(u_1-u_2\right)^2 dxdt \le \frac{e^{2sT^2}}{2s}\int_0^T c(t)\left(3T\varepsilon^2+\gamma_\varepsilon\right)^{1-r(t)}\left(4Tm^2+\gamma_\varepsilon\right)^{r(t)}dt+\frac{m^2}{2s}+Te^{2sT^2}\varepsilon^2,$$

где $\forall s>0$, $\gamma_\varepsilon=(2T^3+17T+12)\varepsilon^2$.

Параграф 2.3 посвящен некорректной краевой задаче для уравнения третьего порядка по t с меняющимся направлением времени.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\left(sign\, x\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=0 \tag{19}$$

в области $\Omega=\{-1<x<1,\ 0<t<T,\ x\neq 0\}$.

Постановка задачи. Исследуем функцию $u(x,t)$ в области Ω удовлетворяющую уравнению (19) и следующим условиям:
начальным

$$u(x,0)=p(x),\quad u_t(x,0)=q(x),\quad u_{tt}(x,0)=r(x),\quad -1\le x\le 1; \tag{20}$$

граничным

$$\begin{matrix} u(-1,t)=u(1,t)=0 \\ u_{xx}(-1,t)=u_{xx}(1,t)=0 \end{matrix},\quad 0\le t\le T; \tag{21}$$

и условиям склеивания

$$\begin{matrix} u(-0,t)=u(+0,t),\ u_x(-0,t)=u_x(+0,t), \\ u_{xx}(-0,t)=u_{xx}(+0,t),\ u_{xxx}(-0,t)=u_{xxx}(+0,t), \end{matrix} \tag{22}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ заданные функции.

Используя результаты леммы 5 и леммы 3 для решения задачи имеем оценка

$$\int_0^t\int_{-1}^1 u^2dxd\tau \le d(t)\left(T\int_{-1}^1 u^2(x,0)dx+\gamma\right)^{1-r(t)}\left(\int_0^T\int_{-1}^1 u^2dxdt+\gamma\right)^{r(t)},$$

где $d(t)=e^{\frac{2T+1}{2}\frac{\left(1-e^{-2t}\right)T-\left(1-e^{-2T}\right)t}{1-e^{-2T}}}$, $r(t)=\dfrac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2T}}$,

$$\gamma=4\left(2T^2+1\right)\int_0^T\left(\int_{-1}^1\left(u_{ttx}(x,0)+u_{xxx}(x,0)\right)^2dx\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(\int_{-1}^1\left(u_{ttx}(x,T)+u_{xxx}(x,T)\right)^2dx\right)^{\frac{t}{T}}dt+\left|\alpha\right|,$$

$$\alpha=2\int_{-1}^1\left(Tu_x^2(x,0)-Tu_t^2(x,0)+u(x,0)u_t(x,0)\right)dx.$$

Введем обозначение

$$M=\left\{u:\int_{-1}^1 u^2(x,T)dx+\int_{-1}^1 u_{xxx}^2(x,T)dx+\int_{-1}^1 u_{xtt}^2(x,T)dx\le m^2\right\}.$$

Теорема 11. Пусть решение задачи (19)-(22) существует и $u(x,t)\in M$, тогда решение задачи единственно.

Теорема 12. Пусть решение задачи существует, $u_1(x,t),\,u_2(x,t)\in M$ и $\left\|p(x)-p(x)_\varepsilon\right\|_{W_2^3}\le\varepsilon$, $\left\|q(x)-q(x)_\varepsilon\right\|_{L_2}\le\varepsilon$, $\left\|r(x)-r(x)_\varepsilon\right\|_{W_2^1}\le\varepsilon$. Тогда для решения задачи (19)-(22) имеет место оценка

$$\int_0^t\int_{-1}^1\left(u_1-u_2\right)^2dxd\tau\le d(t)\left(T\varepsilon^2+\gamma_\varepsilon\right)^{1-r(t)}\left(m^2T+\gamma_\varepsilon\right)^{r(t)}$$

где $\gamma_\varepsilon=8\left(2T^2+1\right)\int_0^T\left(2\varepsilon^2\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(\int_{-1}^1 m^2dx\right)^{\frac{t}{T}}dt+2(2T+1)\varepsilon^2$, $d(t)=e^{\frac{2T+1}{2}\frac{\left(1-e^{-2t}\right)T-\left(1-e^{-2T}\right)t}{1-e^{-2T}}}$,

$r(t)=\dfrac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2T}}$.

В параграфе 2.4 рассматривается краевая задача некорректная в смысле Адамара для дифференциального уравнения в частных производных смешанно-составного типа 4-го порядка.

Постановка задачи. В области $\Omega = \{-1 < x < 1,\ 0 < t < T,\ x \neq 0\}$ рассмотрим следующее уравнение

$$\left(sign\, x \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x,t) = 0, \tag{23}$$

и пусть ее решение удовлетворяет следующим условиям

$$u(x,0) = p(x),\ u_t(x,0) = q(x),\ u_{tt}(x,0) = r(x),\ u_{ttt}(x,0) = s(x),\ \ -1 \leq x \leq 1; \tag{24}$$

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0,\ u_{xx}(-1,t) = u_{xx}(1,t) = 0,\ 0 \leq t \leq T \tag{25}$$

$$\begin{gathered} u(-0,t) = u(+0,t),\ u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \\ u_{xx}(-0,t) = u_{xx}(+0,t),\ u_{xxx}(-0,t) = u_{xxx}(+0,t). \end{gathered} \tag{26}$$

где $p(x),\, q(x) \in C^4(\bar{\Omega}),\ r(x),\, s(x) \in C^2(\bar{\Omega})$.

Введем множество корректности следующим образом

$$M = \left\{ u : \int_{-1}^{1} u^2(x,t)dx + \int_{-1}^{1} u_{xxx}^2(x,t)dx + \int_{-1}^{1} u_{ttx}^2(x,t)dx \leq m^2 \right\}.$$

Теорема 13. Пусть решение задачи (23)-(26) существует и $u(x,t) \in M$, тогда решение задачи единственно.

Теорема 14. Пусть решение задачи существует, $u_1(x,t),\, u_2(x,t) \in M$ и $\left\| p(x) - p(x)_\varepsilon \right\|_{W_2^4} < \varepsilon$, $\left\| q(x) - q(x)_\varepsilon \right\|_{W_2^4} < \varepsilon$, $\left\| r(x) - r(x)_\varepsilon \right\|_{W_2^2} < \varepsilon$ и $\left\| s(x) - s(x)_\varepsilon \right\|_{W_2^2} < \varepsilon$. Тогда для решения задачи (23)-(26) с соответствующими данными верна оценка

$$\int_0^t \int_{-1}^{1} \left(u_1 - u_2 \right)^2 dx d\tau \leq d(t) \left(T\varepsilon^2 + \gamma_\varepsilon \right)^{1 - r(t)} \left(m^2 T + \gamma_\varepsilon \right)^{r(t)},$$

где $\gamma_\varepsilon = 4\left(2T^2 + 1 \right) \int_0^T \left(5\varepsilon^2 \right)^{\frac{T-t}{T}} \left(2m^2 + 4\varepsilon^2 \right)^{\frac{t}{T}} e^{2t(T-t)} dt + (2T+1)\varepsilon^2$.

В третьей главе диссертации, названной **«Краевые задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка»**, исследована некорректная краевая задача для уравнения высокого порядка смешанного типа. Получена априорная оценка решения методом логарифмической выпуклости. Доказана теорема о единственности решения и получена оценка, характеризирующая условную устойчивость решения на множестве корректности. Рассмотрена задача Коши для абстрактного дифференциального уравнения четвертого порядка на условную корректность и приведен скалярный пример.

В параграфе 3.1 рассмотрена краевая задача для уравнения в частных производных смешанного типа 2^j порядка, $\forall j \in N, j \geq 2$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\operatorname{sgn} x \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \tag{27}$$

в области $\Omega=\left\{-1<x<1, x\neq 0, 0<t<T\right\}$, где $n=2^j, j\in N, j\geq 2$.

Задача. Ищется функция $u(x,t)$,удовлетворяющая уравнению (27) в Ω и следующим условиям:
начальным

$$\left.\frac{\partial^l u(x,t)}{\partial t^l}\right|_{t=0}=\varphi_l(x), l=0,1,2,...,n-1., -1\leq x\leq 1; \tag{28}$$

граничным

$$u(-1,t)=u(1,t)=0,\ 0\leq t\leq T; \tag{29}$$

а также условиям склеивания

$$u(-0,t)=u(+0,t), u_x(-0,t)=u_x(+0,t),\ 0\leq t\leq T. \tag{30}$$

Под обобщенным решением краевой задачи (27) - (30) понимаем функцию $u(x,t)$, такую, что $u(x,t)\in\left(L_2(-1,1);C[0,T]\right)$, удовлетворяющую следующему тождеству

$$\int_0^T\int_{-1}^1 u(x,t)\left(sgn x\frac{\partial^n V}{\partial t^n}+\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)dxdt=\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1\right)^k\varphi_{n-k-1}(x)\left.\frac{\partial^k V}{\partial t^k}\right|_{t=0}\right)dx,$$

для любой функции $V(x,t)\in W_2^n(\Omega)$, $\left.\frac{\partial^k V}{\partial t^k}\right|_{t=T}=0$, $k=0,1,...,\mathrm{n}-1.$, $V(-1,t)=V(1,t)=0$.

Лемма 8. Для решения уравнения

$$\frac{d^n\nu}{dt^n}-\theta^{\frac{n}{2}}\nu=0,$$

удовлетворяющего условиям

$$\frac{d^k\nu(0)}{dt^k}=f_k, k=0,1,...,\mathrm{n}-1.,$$

справедлива оценка

$$\nu^2(t)\leq n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|\theta\right|^{-k}f_k^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|\theta\right|^{-k}\left(\frac{d^k\nu(T)}{dt^k}\right)^2\right)^{\frac{t}{T}},$$

где θ - константа, $n=2^j, j\in N, j\geq 1$.

Пусть $M=\left\{u:\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\mu_k\right|^{-l}\left(\left|\frac{d^l}{dt^l}u_k^+(T)\right|^2+\left|\frac{d^l}{dt^l}u_k^-(T)\right|^2\right)\leq m^2\right\}.$

Теорема 15. Пусть решение задачи (27) - (30) существуют и $u(x,t)\in M$. Тогда решение задачи (27) - (30) единственно.

Теорема 16. Пусть решение задачи (27) - (30) существует и $u(x,t), u_\varepsilon(x,t)\in M$. Пусть $\left\|\varphi_l(x)-\varphi_{l_\varepsilon}(x)\right\|_0\leq\varepsilon$, $l=0,1,...,\mathrm{n}-1.$. Тогда для любого решения задачи (27) - (30) при $\left(x,t\right)\in\Omega$ имеет место неравенство

$$\left\|u(x,t)-u_{\varepsilon}(x,t)\right\|_0 \leqslant \varpi(\varepsilon,m),$$

где $\varpi(\varepsilon,m)=\sqrt{2n}\left(\sqrt{n}\varepsilon\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(2m\right)^{\frac{t}{T}}$.

Параграф 3.2 посвящен исследованию некорректной краевой задачи для дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка. Получена априорная оценка и доказаны единственность и условная устойчивость решения.

Пусть $u(t)$ – функция скалярного аргумента t, $0\le t\le T$, со значениями в пространстве Гильберта H.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Bu_{tttt}=Au, \tag{31}$$

где A – самосопряженный и положительный оператор с плотной в H областью определения $D(A)$, B-самосопряженный оператор, осуществляющий изоморфизм H в H, причем $E^{+}+E^{-}=I$, где E^{+},E^{-} – спектральные проекторы, соответствующие положительной и отрицательной частям спектра оператора B.

Задача Коши. Найти решение уравнения (31) такое, что

$$u^{(i)}\Big|_{t=0}=f_j,\quad j=0,1,2,3. \tag{32}$$

Под обобщенным решением задачи (31), (32) понимаем функцию, удовлетворяющую следующим условиям $u(t)\in C\left(\left[0,T\right];H\right)$, удовлетворяющую следующему тождеству

$$\int_0^T\left(u,Bv_{tttt}+Av\right)dt=\left(f_0,Bv_{ttt}(0)\right)+\left(f_1,Bv_{tt}(0)\right)+\left(f_2,Bv_t(0)\right)+\left(f_3,Bv(0)\right)$$

для любой функции $v(t)\in L_2\left(\left(0,T\right);H^2\right)$, $v_t,v_{tt},v_{ttt}\in L_2\left(0,T;H\right)$,

$v(T)=v_t(T)=v_{tt}(T)=v_{ttt}(T)=0$.

Введем обозначение $M=\left\{u:\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-j}\left(\left|\frac{d^j}{dt^j}u_k^{+}(T)\right|^2+\left|\frac{d^j}{dt^j}u_k^{-}(T)\right|^2\right)\le m^2\right\}$.

Теорема 17. Пусть решение задачи (31) - (32) существуют и $u(t)\in M$. Тогда решение задачи (31)-(32) единственно.

Теорема 18. Пусть операторы A и B удовлетворяет указанным условиям и пусть $u(t),u_{\varepsilon}(t)\in M$, $\left\|f_j-f_{j_\varepsilon}\right\|_0\le\varepsilon$, $j=0,1,2,3.$. Тогда для любого решения задачи (31), (32) при $t\in(0,T)$ имеет место неравенство

$$\left\|u-u_{\varepsilon}\right\|_0\le\omega(\varepsilon,m),$$

где $\omega(\varepsilon,m)=\inf_t\left\{4\left(\sqrt{2}\varepsilon\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(m\right)^{\frac{t}{T}}\right\}$.

В параграфе 3.3 исследуется начально-краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка. Построено приближенное решение методом регуляризации и получена оценка погрешности нормы разности точного и приближенного решения.

Рассмотрим уравнение

$$sgn x\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0, \tag{33}$$

в области $\Omega=\left\{-1<x<1, x\neq 0, 0<t<T\right\}$.

Задача. Ищется функция $u(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (33) в Ω и следующим условиям: начальным

$$\left.\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial t^j}\right|_{t=0}=\varphi_j(x),\, j=0,1,2,3.,-1\leq x\leq 1, \tag{34}$$

граничным

$$u(-1,t)=u(1,t)=0,\ 0\leq t\leq T, \tag{35}$$

а также условиям склеивания

$$u(-0,t)=u(+0,t),\ u_x(-0,t)=u_x(+0,t),\ 0\leq t\leq T. \tag{36}$$

Под обобщенным решением краевой задачи (33)-(36) понимаем функцию $u(x,t)$, такую, что, $u(x,t)\in\left(L_2(-1,1);C[0,T]\right)$, удовлетворяющую следующему тождеству

$$\int_0^T\int_{-1}^1 u(x,t)\left(sgn x V_{tttt}+V_{xx}\right)dxdt=$$

$$=\int_{-1}^1 sgn x\left(\varphi_3(x)V(x,0)-\varphi_2(x)V_t(x,0)+\varphi_1(x)V_{tt}(x,0)-\varphi_0(x)V_{ttt}(x,0)\right)dx,$$

для любой функции $V(x,t)\in W_2^4(\Omega)$, $V(x,T)=V_t(x,T)=V_{tt}(x,T)=V_{ttt}(x,T)=0$, $V(-1,t)=V(1,t)=0$.

Пусть $\left\|\varphi_0(x)-\varphi_{0_\varepsilon}(x)\right\|_3\leqslant\varepsilon$ и $u\in M$. Тогда построено приближенное решение методом регуляризации Тихонова и получена следующая оценка разности между точным и приближенным решениями

$$\left\|u-u^{N_\varepsilon}\right\|_0\leqslant ch(\sqrt{\mu_N}\cdot t)\cdot\varepsilon+\sigma(m,N).$$

где $\sigma^2(m,N)=\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\left\{\varphi_{0_k}^+\right\}^2+\left\{\varphi_{0_k}^-\right\}^2\right)\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(m^2\right)^{\frac{t}{T}}$, причем $\sigma(m,N)\to 0$ при $N\to\infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию условной корректности и построению приближенного решения, близкого в норме рассматриваемого пространства к точному решению на множестве корректности краевых задач дифференциального уравнения в частных производных составного, смешанного и смешанно-составного типов.

Основными результатами исследования являются:

1. Априорные оценки решений и установление условной корректности краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных составного, смешанного и смешанно-составного типов.

2. Доказаны теоремы единственности и условной устойчивости для решений некорректных краевых задач дифференциальных уравнений составного, смешанного и смешанно-составного типа.

3. Изучена спектральная задача, соответствующая уравнению смешанного типа, и найдена формула для вычисления собственных функций и собственных чисел.

4. Приближенные решения построены в виде последовательностей и соответственно определена норма разности, которая означает близость между точным и приближенным решениями некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений составного, смешанного и смешанно-составного типов.

5. Найдены множества условной корректности для некорректных задач.

6. Определены параметры регуляризации и выведены их формулы расчета для построения приближенного решения.

7. Реализовано программное обеспечение, которое вычисляет точные и приближенные решения в соответствии с исходными данными на основе численного алгоритма вычислений в численном и графическом виде.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, INSTITUTE OF MATHEMATICS

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

KHAJIEV IKROMBEK OZODOVICH

INVESTIGATIONS AND APPROXIMATE SOLUTIONS OF ILL-POSED PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MIXED-COMPOSITE TYPE

01.01.02-Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2017

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.1.PhD/FM12.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the “Ziyonet” Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Fayazov Kudratillo Sadridinovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Khasanov Aknazar Bekdurdievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Islomov Bozor Islomovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Bukhara State University**

Defense will take place «____» _____________2017 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.27.06.2017.FM.01.01 at National University of Uzbekistan, Institute of Mathematics. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2017 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2017 year)

A. Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor, academician

G.I. Botirov
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

M.S.Salakhitdinov
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor, academician

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The urgency and relevance of the dissertation topic. Many scientific and applied studies conducted at the world level, in many cases, reduce to the study of ill-posed boundary-value problems for partial differential equations. The basis of the theory of ill-posed problems laid in the middle of the last century and they are associated with problems of great practical importance. The main object of the theory of inverse and ill-posed problems is the model of applied research in the field of geophysical observation, gas dynamics, the propagation of acoustic waves, etc. Since the study of ill-posed problems for mixed-composite equations on conditional correctness and the construction of an approximate solution, it is insufficient to develop a study of ill-posed problems for such equations is an actual problem.

The aim of the research work is to establish conditionally correctness and finding approximate solutions on the set of correctness of ill-posed problems for high order partial differential equations of mixed, composite, mixed-composite types.

The tasks of research work:

- investigation of ill-posed boundary value problems for high orders partial differential equations of composite and mixed-composite types;
- studies of ill-posed boundary value problems for high orders partial differential equations of mixed type;
- finding regular solutions, determining estimates of the norms of the difference between exact and approximate solutions in the corresponding function spaces;
- finding formulas for calculating regularization parameters, implementing numerical solutions and graphical results.

The object of the research work is the high order partial differential equation of mixed, composite and mixed-composite types.

Scientific novelty of the research work is as follows**:**

- a priori estimates of the solution of ill-posed boundary-value problems for partial differential equations of mixed, composite and mixed-composite types of high orders are obtained;
- sets of correctness defined for ill-posed boundary-value problems for partial differential equations of mixed, composite and mixed-composite types of high orders, and uniqueness and conditional stability theorems are proved;
- approximate solutions are constructed, estimates of the norms of the difference between the exact and approximate solutions in the corresponding spaces are determined, formulas for calculating the regularization parameters are derived;
- implemented programs in a visual c # environment that outputs numerical and graphical results of an exact and approximate solution based on computational algorithms.

The outline of the thesis

In the dissertation work, conditional correctness investigated and approximate solution constructed that is close to an exact solution of boundary value problems for partial differential equation of composite, mixed, and mixed-composite types in the norm of the space under consideration on the correctness set.

The main results of the study are:

- A priori estimates of solutions and establishment of conditional correctness of boundary value problems for partial differential equations of composite, mixed and mixed-composite types.
- Theorems of uniqueness and conditional stability for solutions of ill-posed boundary value problems for differential equations of composite, mixed, and mixed-composite type proved.
- Spectral problems corresponding to the problems under study considered, formulas are given for calculating Eigen functions and eigenvalues.
- Approximate solutions constructed in the form of sequences and the norm of the difference is defined accordingly, which means the closeness between the exact and approximate solutions of ill-posed boundary value problems for differential equations of composite, mixed, and mixed-composite type.
- For considered ill-posed problems, the sets of conditional correctness defined.
- The regularization parameters are determined and its calculation formula derived to construct an approximate solution.
- Implemented software that calculates accurate and approximate solutions in accordance with the initial data based on numerical algorithms for calculations in numerical and graphical form.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Хажиев И.О. Приближенные решения некорректной краевой задачи для уравнения в частных производных третьего порядка смешанного типа. // Вестник НУУз, 2009, №1, С. 99-102. (01.00.00; № 8).
2. Хажиев И.О. Регуляризация краевой задачи для уравнения в частных производных четвертого порядка. // УзМЖ. - Ташкент 2009, №3, С. 56-64. (01.00.00; № 6).
3. Хажиев И.О. Исследования некорректной краевой задачи для уравнения третьего порядка составного типа. // Вестник НУУз, 2011, №4/1, С. 222-224. (01.00.00; № 8)
4. Хажиев И.О. Оценка устойчивости некорректной краевой задачи для уравнения второго порядка смешанно-составного типа. // Вестник НУУз, 2013, №2. С. 187-190. (01.00.00; № 8)
5. Хажиев И.О. Краевая задача для уравнения в частных производных четвертого порядка смешанного типа. // УзМЖ. –Ташкент, 2013, №2, С. 130-136. (01.00.00; № 6).
6. Фаязов К.С., Хажиев И.О. Условная корректность краевой задачи для составного дифференциального уравнения четвертого порядка. // Известия вузов, Математика. 2015, №4, С. 65 -74, РАН. (№ 22. Research Gate IF=0.37)
7. Фаязов К.С., Хажиев И.О. Оценка условной устойчивости и приближенное решение краевой задачи для уравнения в частных производных четвертого порядка. // Математические заметки СВФУ, 2015, Том 22, № 1 (85), С. 78-88. (РИНЦ Импакт-фактор 0,178)
8. Хажиев И.О., Фаязова З.К. Краевая задача для уравнения в частных производных восьмого порядка смешанного типа. // УзМЖ. – Ташкент, 2016, №4, С. 148-157. (01.00.00; № 6).
9. Khajiev I.O, Fayazov K.S., Fayazova Z.K. Ill-posed boundary value problem for operator-differential equation of fourth order. Вестник НУУз, 2016, №2. С. 53-61. (01.00.00; № 8)

II бўлим (2 часть; part 2)

10. Фаязов К.С., Хажиев И.О. Приближенное решение некорректной краевой задачи для уравнения смешанного типа. Труды межд. науч. конф. «Современные проблемы математической физики и информационные технологии », - Ташкент, 2003, Том №1. С. 116-119
11. Хажиев И.О. Регуляризация краевой задачи для уравнения в частных производных четвертого порядка. Материалы Республиканской научно-

практической конф. «Новые направления в теории динамических систем и некорректных задач». 19-20 октября 2007.- Самарканд.

12. Фаязов К.С., Хажиев И.О. Метод регуляризации для решения краевой задачи для уравнения в частных производных третьего порядка смешанного типа. Материалы Республиканской научно-практической конф. «Вычислительные технологии и математические моделирование», Ташкент, 2009 г.

13. Фаязов К.С., Хажиев И.О. Некорректная краевая задача для уравнения в частных производных третьего порядка смешанного типа. Материалы тезисов межд. науч. конф. «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач».- Новосибирск, 2009. С. 108.

14. Фаязов К.С., Хажиев И.О. Краевая задача для уравнения в частных производных третьего порядка. Тезисы межд. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий-Аль-Хорезми 2009». 18-21 сентября 2009. С. 77-78.

15. Фаязов К.С., Хажиев И.О. Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанно-составного типа третьего порядка. Тезисы межд. конф. "Обратные и некорректные задачи математической физики" посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М.Лаврентьева. -Новосибирск, 2012. С. 156.

16. Фаязов К.С., Хажиев И.О. Некорректная краевая задача для уравнения смешанно-составного типа третьего порядка. Материалы межд. науч. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий-Аль-Хорезми 2012». Том №II, Ташкент, 2012. С. 45-48.

17. Фаязов К.С., Хажиев И.О. Некорректная краевая задача для смешанно-составного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка. Тезисы докладов респуб. науч. конф. с участием ученых из стран СНГ «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». 21-23 ноября 2013. -Ташкент. С. 195-196.

18. Фаязов К.С., Хажиев И.О. Conditional correctness of boundary value problem for the composed-mixed type differential equations highs order. Материалы пятый конгресс математиков Тюркского мира. 5-7 июня 2014. - «Аврора – Иссык - Куль» Кыргызстан. С. 106.

19. Фаязов К.С., Хажиев И.О. Некорректные краевые задачи для уравнения смешанно-составного типа четвертого порядка. Материалы межд. науч. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий-Аль-Хорезми 2014». Том №I, Ташкент, 2014. С. 237-242.

20. Фаязов К.С., Хажиев И.О. Некорректная краевая задача для уравнения четвертого порядка с меняющимся направлением времени. Материалы межд. науч. конф. "Прикладной и геометрический анализ".- Самарканд, 2014. С. 89-90

21. Фаязов К.С., Хажиев И.О. Оценка условной устойчивости краевой задачи для уравнения в частных производных четвертого порядка. Материалы респуб. науч. конф. (с участием зарубежных ученых)

“Неклассические уравнения математической физики и их приложения”. 23-25 октября, 2014. -Ташкент, С. 104-107.

22. Хажиев И.О., Фаязова З.К. условная корректность краевой задачи для дифференциального уравнения смешанного типа восьмого порядка. Материалы рес. науч. конф. «Математическая физика и родственные проблемы современного анализа». 26-27 ноября 2015. - Бухара. С. 286-287.

23. Хажиев И.О. Некорректная краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка. Тезисы докладов рес. науч. конф. с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения». 15-17 апреля 2015.-Ташкент. С. 228-229.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«ЎзМУ хабарлари» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди: 03.11.2017 йил
Бичими 60x44 $^{1}/_{16}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 3,2. Адади: 100. Буюртма: № 320.

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ»
Давлат унитар корхонасида чоп этилди.