Т. Х. Расулов, О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозон с не более чем двумя фотонами, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 2, 293–310

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/tmf8854

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 186, № 2
февраль, 2016**

 Т. Х. Расулов*

О ВЕТВЯХ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА РЕШЕТЧАТОЙ МОДЕЛИ СПИН-БОЗОН С НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ ДВУМЯ ФОТОНАМИ

Рассматривается решетчатый аналог $\mathcal{A}_m$ модели светового излучения с неподвижным атомом и не более чем m фотонами $(m = 1, 2)$. Описано местоположение существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$ через спектр оператора $\mathcal{A}_1$, т. е. выделены двухчастичная и трехчастичная ветви существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$. Доказано, что существенный спектр состоит из объединения не более чем шести отрезков, и изучено расположение этих отрезков. Получены оценки для нижних граней двухчастичных и трехчастичных ветвей.

Ключевые слова: модель спин-бозон, бозонное пространство Фока, блочно-операторная матрица, операторы рождения и уничтожения, существенный и дискретный спектры, критерий Вейля.

DOI: 10.4213/tmf8854

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Блочно-операторная матрица – это матрица, элементы которой являются линейными операторами в банаховом или гильбертовом пространстве [1]. Один из специальных классов блочно-операторных матриц составляют гамильтонианы системы с несохраняющимся числом квантовых частиц на целочисленной решетке. Их количество может быть неограниченным, как в случае моделей спин-бозон [2], [3], или ограниченным, как в случае "урезанных" моделей спин-бозон [4], [5]. Отметим, что такие системы обычно возникают в задачах физики твердого тела [6], квантовой теории поля [7], статистической физики [8], магнитогидродинамики [9] и квантовой механики [10].

В хорошо известной модели светового излучения (так называемой модели *спин-бозон*, см. статьи [2]–[5]) предполагается, что атом, который может находиться в двух

Работа поддержана программой Einstein Foundation, Berlin, Germany.

*Физико-математический факультет, Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан. E-mail: rth@mail.ru

состояниях – основном с энергией $-\varepsilon$ и возбужденном с энергией ε, испускает и поглощает фотоны, переходя из одного состояния в другое. Решетчатый аналог этой модели задается (формальным) выражением

$$\mathcal{A} := \varepsilon\sigma_z + \int_{\mathbb{T}^d} w(k)a^*(k)a(k)\,dk + \alpha\sigma_x\int_{\mathbb{T}^d} v(k)(a^*(k)+a(k))\,dk \tag{1}$$

и действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{L} := \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L_2(\mathbb{T}^d))$, состоящем из последовательностей

$$F = \{f_0^{(s)}, f_1^{(s)}(k_1), f_2^{(s)}(k_1,k_2), \dots, f_n^{(s)}(k_1,\dots,k_n), \dots;\ s=\pm\}$$

функций возрастающего числа переменных $(k_1,\dots,k_n)$, $k_i \in \mathbb{T}^d$, и дискретной переменной $s=\pm$, симметричных по переменным k_i, $i=1,\dots,n$, $n\in\mathbb{N}$. Здесь $L_2(\mathbb{T}^d)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на d-мерном торе $\mathbb{T}^d$, $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L_2(\mathbb{T}^d))$ – стандартное бозонное пространство Фока над пространством $L_2(\mathbb{T}^d)$:

$$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L_2(\mathbb{T}^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^d) \oplus L_2^{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^d)^2) \oplus \cdots,$$

$L_2^{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^d)^n)$ – гильбертово пространство симметричных функций n переменных, определенных на $(\mathbb{T}^d)^n$, $n \geqslant 2$. В формуле (1) операторы $a^*(k)$ и $a(k)$ суть операторы *рождения–уничтожения*, $\varepsilon > 0$,

$$\sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

суть матрицы Паули, $w(k)$ – энергия фотона с импульсом k, $v(\,\cdot\,)$ – вещественнозначная непрерывная функция на $\mathbb{T}^d$, $\alpha > 0$ – *параметр взаимодействия*. При этом $w(\,\cdot\,)$ есть вещественнозначная непрерывная функция на $\mathbb{T}^d$ и $\min_{k\in\mathbb{T}^d} w(k) = 0$.

Задача о полном спектральном описании оператора $\mathcal{A}$ является довольно трудной. В связи с этим естественно рассмотреть упрощенные ("урезанные") модели, отличающиеся от описанной выше модели тем, что возможное число фотонов в них ограничено и не превосходит m, $m\in\mathbb{N}$. Гильбертовым пространством состояний такой модели служит пространство

$$\mathcal{L}_m := \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^d)),$$

где

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^d), \\ &\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^d)) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^d) \oplus L_2^{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^d)^2) \oplus \cdots \oplus L_2^{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^d)^m), \qquad m \geqslant 2. \end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{A}_m$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_m$ задается формулой

$$\mathcal{A}_m := P_{\mathcal{L}_m}\mathcal{A}P_{\mathcal{L}_m},$$

где $P_{\mathcal{L}_m}$ – проектор в пространстве $\mathcal{L}$ на подпространство $\mathcal{L}_m$, а гамильтониан $\mathcal{A}$ определен выражением (1).

В работах [2], [3] предпринято серьезное математическое исследование спектральных свойств "непрерывного" (стандартного) гамильтониана модели спин-бозон. В работе [4] изучена модель светового излучения с неподвижным атомом и не более чем тремя фотонами ($m = 3$) в “непрерывном” случае, т. е. в бозонном фоковском пространстве над $L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^2)$. В [4] проведен спектральный анализ гамильтониана с помощью теории рассеяния в паре пространств со специально выбранным вложением. В частности, доказаны существование волновых операторов и их асимптотическая полнота. При этом все построения опираются на детальный анализ резольвенты. В работе [5] полностью изучены случаи $m = 1, 2$ при малых значениях параметра α. Отметим, что в работах [2]–[5] условия малости параметра взаимодействия α существенны.

В настоящей работе мы рассмотрим случай $m = 2$. При этом оператор $\mathcal{A}_2 = P_{\mathcal{L}_2}\mathcal{A}P_{\mathcal{L}_2}$ действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2$ и записывается как трехдиагональная блочно-операторная матрица размера 3×3

$$\mathcal{A}_2 := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mathcal{A}_{01} & 0 \\ \mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ 0 & \mathcal{A}_{12}^* & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$\mathcal{A}_{00} f_0^{(s)} = s\varepsilon f_0^{(s)}, \qquad \mathcal{A}_{01} f_1^{(s)} = \alpha \int_{\mathbb{T}^d} v(t) f_1^{(-s)}(t)\, dt,$$

$$(\mathcal{A}_{11} f_1^{(s)})(p) = \bigl(s\varepsilon + w(p)\bigr) f_1^{(s)}(p), \qquad (\mathcal{A}_{12} f_2^{(s)})(p) = \alpha \int_{\mathbb{T}^d} v(t) f_2^{(-s)}(p,t)\, dt,$$

$$(\mathcal{A}_{22} f_2^{(s)})(p,q) = \bigl(s\varepsilon + w(p) + w(q)\bigr) f_2^{(s)}(p,q),$$

где $\{f_0^{(s)}, f_1^{(s)}, f_2^{(s)},\ s = \pm\} \in \mathcal{L}_2$. Здесь $\mathcal{A}_{ij}^*$ – оператор, сопряженный с $\mathcal{A}_{ij}$, $i < j$, а норма элемента

$$F = \{f_0^{(s)}, f_1^{(s)}, f_2^{(s)},\ s = \pm\} \in \mathcal{L}_2$$

задается выражением

$$\|F\|^2 = \sum_{s=\pm} \biggl(|f_0^{(s)}|^2 + \int_{\mathbb{T}^d} |f_1^{(s)}(p)|^2\, dp + \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{T}^d)^2} |f_2^{(s)}(p,q)|^2\, dp\, dq \biggr).$$

Хотя решетчатая модель $\mathcal{A}_2$ ограничена и самосопряжена, ее спектр имеет более сложный характер по сравнению с непрерывным случаем. Следует отметить, что в непрерывном случае двухчастичная и трехчастичная ветви существенного спектра состоят из полуосей $[\kappa, \infty)$, где $\kappa < 0$, и пересекаются. Следовательно (см. статью [5]), для описания существенного спектра этой модели достаточно найти собственные значения в случае $m = 1$, а используемая при этом техника элементарна. В решетчатом случае двухчастичная и трехчастичная ветви существенного спектра состоят из отрезков конечной длины, причем они могут не пересекаться. Возникает вопрос: существуют ли собственные значения в лакунах и, если существуют, конечно ли их число? Поэтому изучение существенного спектра и условий существования лакун существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$ является важной задачей для дальнейшего исследования спектральных свойств рассматриваемого оператора.

Следует отметить, что некоторые спектральные свойства модели $\mathcal{A}_2$ ранее изучены в работе [11]. В частности, в ней описано (без доказательства) местоположение существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$ и получена оценка для нижней грани существенного спектра в случае $d = 1$. В настоящей работе проведено детальное исследование существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$ при любых значениях размерности $d \in \mathbb{N}$ и параметра взаимодействия $\alpha > 0$. В дополнение к уже известным свойствам спектра модели $\mathcal{A}_2$ изучена его геометрия и строго установлена его ветвистая структура. Ради удобства читателей мы приводим полное доказательство полученных результатов.

Целью настоящей работы является решение следующих задач:

– определить количество и местоположение собственных значений, а также исследовать соответствующие собственные векторы оператора $\mathcal{A}_1$; показать отсутствие собственных значений, лежащих в лакуне (т. е. между ветвями) существенного спектра; доказать существование собственного значения, лежащего в существенном спектре (т. е. вложенных собственных значений);

– описать местоположение существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$ и доказать, что существенный спектр этого оператора состоит из объединения не более чем шести отрезков;

– изучить структуру существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$ и оценить его нижнюю грань.

В следующих разделах мы подробно обсудим эти вопросы.

2. ОПИСАНИЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРОВ $\mathcal{A}_m$, $m = 1, 2$

В этом разделе мы сведем изучение спектра оператора $\mathcal{A}_m$ к изучению спектра более простого оператора $\mathcal{A}_m^{(s)}$, $s = \pm$, используя оператор перестановки, и затем опишем спектр оператора $\mathcal{A}_m$ через спектр оператора $\mathcal{A}_m^{(s)}$, $s = \pm$.

Сначала отметим, что оператор $\mathcal{A}_1$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d))$ записывается как блочно-операторная матрица размера 2×2:

$$\mathcal{A}_1 := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mathcal{A}_{01} \\ \mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11} \end{pmatrix}.$$

Пусть $m = 1, 2$. С целью изучения спектральных свойств оператора $\mathcal{A}_m$ рассмотрим также ограниченные самосопряженные операторы $\mathcal{A}_m^{(s)}$, $s = \pm$, действующие в $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^d))$ как блочно-операторные матрицы размера $(m+1) \times (m+1)$:

$$\mathcal{A}_1^{(s)} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(s)} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(s)} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2^{(s)} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(s)} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} & 0 \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(s)} & \widehat{\mathcal{A}}_{12} \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{12}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(s)} \end{pmatrix}$$

с элементами

$$\widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(s)} f_0 = s\varepsilon f_0, \qquad \widehat{\mathcal{A}}_{01} f_1 = \alpha \int_{\mathbb{T}^d} v(t) f_1(t)\, dt,$$

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(s)} f_1)(p) = (-s\varepsilon + w(p)) f_1(p), \qquad (\widehat{\mathcal{A}}_{12} f_2)(p) = \alpha \int_{\mathbb{T}^d} v(t) f_2(p,t)\, dt,$$

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(s)} f_2)(p,q) = (s\varepsilon + w(p) + w(q)) f_2(p,q),$$

где

$$(f_0, f_1) \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d)), \qquad (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^d)).$$

При этом

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{01}^* f_0)(p) = \alpha v(p) f_0,$$

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{12}^* f_1)(p,q) = \alpha (v(p) f_1(q) + v(q) f_1(p)), \qquad (f_0, f_1) \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d)).$$

Операторы $\widehat{\mathcal{A}}_{01}$ и $\widehat{\mathcal{A}}_{12}$ называются операторами уничтожения, а $\widehat{\mathcal{A}}_{01}^{*}$ и $\widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*}$ – операторами рождения [7]. Оператор уничтожения снижает количество частиц в данном состоянии на единицу, а оператор рождения увеличивает число частиц в данном состоянии на единицу и является сопряженным к оператору уничтожения. Такие операторы имеют широкое применение в квантовой механике, в частности при изучении квантовых гармонических осцилляторов и систем многих частиц [12].

Несмотря на то что аналог модели $\mathcal{A}_2^{(s)}$ изучен во многих работах (см., например, статьи [13]–[15]), введенное выше определение позволяет получить более точную информацию о существенном спектре оператора $\mathcal{A}_2^{(s)}$. Далее $\sigma(\,\cdot\,)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\,\cdot\,)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(\,\cdot\,)$ и $\sigma_{\mathrm{disc}}(\,\cdot\,)$ суть спектр, существенный спектр, точечный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора соответственно.

Установим связь между спектрами операторов $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{A}_m^{(s)}$, $s=\pm$.

Лемма 1. *Пусть* $m=1,2$. *Имеет место равенство* $\sigma(\mathcal{A}_m)=\sigma(\mathcal{A}_m^{(+)})\cup\sigma(\mathcal{A}_m^{(-)})$. *Более того*,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m)=\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(-)}),\qquad \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_m)=\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_m^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_m^{(-)}).$$

Доказательство. Введем два оператора перестановки Φ_m, $m=1,2$:

$$\Phi_m\colon \mathcal{L}_m\to\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^d))\oplus\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^d)),\qquad m=1,2,$$
$$\Phi_1\colon (f_0^{(+)},f_0^{(-)},f_1^{(+)},f_1^{(-)})\to(f_0^{(+)},f_1^{(-)},f_0^{(-)},f_1^{(+)}),$$
$$\Phi_2\colon (f_0^{(+)},f_0^{(-)},f_1^{(+)},f_1^{(-)},f_2^{(+)},f_2^{(-)})\to(f_0^{(+)},f_1^{(-)},f_2^{(+)},f_0^{(-)},f_1^{(+)},f_2^{(-)}).$$

Очевидно, что Φ_m – унитарный оператор и

$$\Phi_m^{-1}\colon \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^d))\oplus\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^d))\to\mathcal{L}_m,\qquad m=1,2,$$
$$\Phi_1^{-1}\colon (\phi,\phi')\to(\phi_0,\phi_0',\phi_1',\phi_1),$$
$$\phi=(\phi_0,\phi_1),\qquad \phi'=(\phi_0',\phi_1')\in\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d)),$$
$$\Phi_2^{-1}\colon (\varphi,\varphi')\to(\varphi_0,\varphi_0',\varphi_1',\varphi_1,\varphi_2,\varphi_2'),$$
$$\varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2),\qquad \varphi'=(\varphi_0',\varphi_1',\varphi_2')\in\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^d)).$$

Из определения операторов $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{A}_m^{(s)}$ и Φ_m следует, что

$$\Phi_m\mathcal{A}_m\Phi_m^{-1}=\operatorname{diag}\{\mathcal{A}_m^{(+)},\mathcal{A}_m^{(-)}\}.$$

Учитывая унитарную эквивалентность операторов $\mathcal{A}_m$ и $\operatorname{diag}\{\mathcal{A}_m^{(+)},\mathcal{A}_m^{(-)}\}$, получим искомую связь между спектрами операторов $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{A}_m^{(s)}$. Лемма доказана.

Замечание 1. Пусть $m=1,2$. Так как часть множества $\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(s)})$ может лежать в множестве $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(-s)})$, имеют место соотношения

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m)\subseteq\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(-)}),\tag{2}$$
$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m)=\{\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(-)})\}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m).\tag{3}$$

Точнее,

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m)=\bigcup_{s=\pm}\{\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(s)})\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(-s)})\}.$$

Очевидно, что при $m=1,2$ и $s=\pm$ оператор $\mathcal{A}_m^{(s)}$ имеет более простую структуру, чем $\mathcal{A}_m$, и поэтому лемма 1 и соотношения (2), (3) играют важную роль при дальнейших исследованиях спектра оператора $\mathcal{A}_m$.

3. НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА $\mathcal{A}_1$

В этом разделе мы подробно изучим существенный и дискретный спектры оператора $\mathcal{A}_1^{(s)}$, $s=\pm$. При каждом $s=\pm$ рассмотрим оператор $\mathcal{A}_{1,0}^{(s)}$, действующий в $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d))$ как

$$\mathcal{A}_{1,0}^{(s)} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор возмущения $\mathcal{A}_1^{(s)} - \mathcal{A}_{1,0}^{(s)}$ оператора $\mathcal{A}_{1,0}^{(s)}$ является самосопряженным оператором ранга 2. Из известной теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга следует, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}_1^{(s)}$ совпадает с существенным спектром оператора $\mathcal{A}_{1,0}^{(s)}$. Известно, что

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_{1,0}^{(s)}) = [-s\varepsilon, -s\varepsilon + M], \qquad M := \max_{p\in\mathbb{T}^d} w(p).$$

Отсюда вытекает, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(s)}) = [-s\varepsilon, -s\varepsilon + M]$. Следовательно, в силу леммы 1 имеет место равенство

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1) = [-\varepsilon, -\varepsilon + M] \cup [\varepsilon, \varepsilon + M].$$

Напомним, что в непрерывном случае (см. статьи [2]–[5]) существенный спектр оператора $\mathcal{A}_1$ совпадает с полуосью $[-\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$. В рассматриваемом случае существенный спектр оператора $\mathcal{A}_1$ есть объединение двух отрезков конечной длины, причем при $\varepsilon > M/2$ они не пересекаются. Другими словами, при $\varepsilon > M/2$ существенный спектр оператора $\mathcal{A}_1$ имеет лакуну $(-\varepsilon + M, \varepsilon)$.

Определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [-s\varepsilon, -s\varepsilon + M]$ функцию

$$\Delta^{(s)}(z) := s\varepsilon - z - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{-s\varepsilon + w(t) - z}.$$

Функция $\Delta^{(s)}(\,\cdot\,)$ называется детерминантом Фредгольма, ассоциированным с оператором $\mathcal{A}_1^{(s)}$.

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями оператора $\mathcal{A}_1^{(s)}$ и нулями функции $\Delta^{(s)}(\,\cdot\,)$.

Лемма 2. *Число $z^{(s)} \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(s)})$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}_1^{(s)}$ тогда и только тогда, когда $\Delta^{(s)}(z^{(s)}) = 0$.*

Доказательство. Пусть $z^{(s)} \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(s)})$ есть собственное значение оператора $\mathcal{A}_1^{(s)}$, и пусть $f = (f_0, f_1) \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d))$ – соответствующая собственная вектор-функция. Тогда эта вектор-функция удовлетворяет уравнению $\mathcal{A}_1^{(s)} f = z^{(s)} f$ или, что то же самое, системе уравнений

$$\begin{aligned} (s\varepsilon - z^{(s)}) f_0 + \alpha \int_{\mathbb{T}^d} v(t) f_1(t)\,dt = 0, \\ \alpha v(p) f_0 + (-s\varepsilon + w(p) - z^{(s)}) f_1(p) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Так как $z^{(s)} \notin [-s\varepsilon, -s\varepsilon + M]$, из второго уравнения системы (4) для f_1 имеем

$$f_1(p) = -\frac{\alpha v(p) f_0}{-s\varepsilon + w(p) - z^{(s)}}. \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) в первое уравнение системы (4), заключаем, что система (4) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\Delta^{(s)}(z^{(s)}) = 0$. Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1^{(s)}) = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(s)}) :\, \Delta^{(s)}(z) = 0 \right\}.$$

Тогда, учитывая замечание 1, мы приходим к выводу, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1) = \big\{ z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1) \colon \Delta^{(+)}(z)\Delta^{(-)}(z) = 0 \big\}.$$

Обозначим через $I^{(m)}$ единичный оператор в $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^d))$, $m = 1, 2$.

Лемма 3. *Определитель $\Delta^{(s)}_{\mathcal{A}_1^{(s)}/\mathcal{A}_{1,0}^{(s)}}(z)$ возмущения оператора $\mathcal{A}_{1,0}^{(s)}$ относительно оператора $\mathcal{A}_1^{(s)} - \mathcal{A}_{1,0}^{(s)}$ имеет вид*

$$\Delta^{(s)}_{\mathcal{A}_1^{(s)}/\mathcal{A}_{1,0}^{(s)}}(z) = -\frac{1}{z}\Delta^{(s)}(z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{A}_{1,0}^{(s)}).$$

Доказательство. Так как $\mathcal{A}_1^{(s)} - \mathcal{A}_{1,0}^{(s)}$ является оператором ранга 2, определитель возмущения $\Delta^{(s)}_{\mathcal{A}_1^{(s)}/\mathcal{A}_{1,0}^{(s)}}(z)$ может быть представлен выражением (см., например, работу [16])

$$\Delta^{(s)}_{\mathcal{A}_1^{(s)}/\mathcal{A}_{1,0}^{(s)}}(z) := \det\big(I^{(1)} + (\mathcal{A}_1^{(s)} - \mathcal{A}_{1,0}^{(s)})(\mathcal{A}_{1,0}^{(s)} - z)^{-1}\big).$$

Не нарушая общности, предположим, что $\|v\| = 1$. Выберем ортонормированный базис $\{\psi_n\}_n \subset L_2(\mathbb{T}^d)$ следующим образом: $\psi_1 := v$ и $\psi_j \perp v$ для любых $j \geqslant 2$. Положим

$$\Psi_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\psi_1 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_j := \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{j-1} \end{pmatrix}, \quad j \geqslant 3.$$

По построению система $\{\Psi_n\}_n \subset \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d))$ является ортонормированной. Пусть

$$a_{ij}^{(s)}(z) := ((\mathcal{A}_1^{(s)} - \mathcal{A}_{1,0}^{(s)})(\mathcal{A}_{1,0}^{(s)} - z)^{-1}\Psi_i, \Psi_j), \qquad i, j \in \mathbb{N}.$$

С помощью простых вычислений получим

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(s)}(z) &= -\frac{s\varepsilon}{z} + \alpha \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{-s\varepsilon + w(t) - z} - \frac{\alpha}{z}, \\
a_{12}^{(s)}(z) &= -\frac{s\varepsilon}{z} + \alpha \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{-s\varepsilon + w(t) - z} + \frac{\alpha}{z}, \\
a_{21}^{(s)}(z) &= -\frac{s\varepsilon}{z} - \alpha \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{-s\varepsilon + w(t) - z} - \frac{\alpha}{z}, \\
a_{22}^{(s)}(z) &= -\frac{s\varepsilon}{z} - \alpha \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{-s\varepsilon + w(t) - z} + \frac{\alpha}{z}, \\
a_{ij}^{(s)}(z) &= \delta_{ij} \qquad \text{в остальных случаях,}
\end{aligned}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Следовательно,

$$\Delta^{(s)}_{\mathcal{A}_1^{(s)}/\mathcal{A}_{1,0}^{(s)}}(z) = \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} 2+a_{11}^{(s)}(z) & a_{12}^{(s)}(z) \\ a_{21}^{(s)}(z) & 2+a_{22}^{(s)}(z)\end{pmatrix} = -\frac{1}{z}\Delta^{(s)}(z).$$

Лемма доказана.

При дальнейшем исследовании собственных значений оператора $\mathcal{A}_1^{(s)}$ предположим, что

$$\int_{\mathbb{T}^d}\frac{v^2(t)\,dt}{w(t)} < \infty, \qquad \int_{\mathbb{T}^d}\frac{v^2(t)\,dt}{M-w(t)} < \infty, \tag{6}$$

и положим

$$\alpha_1 := \sqrt{M+2\varepsilon}\biggl(\int_{\mathbb{T}^d}\frac{v^2(t)\,dt}{M-w(t)}\biggr)^{-1/2}, \qquad \alpha_2 := \sqrt{2\varepsilon}\biggl(\int_{\mathbb{T}^d}\frac{v^2(t)\,dt}{w(t)}\biggr)^{-1/2},$$

$$\alpha_3 := \sqrt{M}\biggl(\int_{\mathbb{T}^d}\frac{v^2(t)\,dt}{2\varepsilon+M-w(t)}\biggr)^{-1/2}.$$

Лемма 4. *Имеют место следующие утверждения.*

А. *При всех $\alpha > 0$ оператор $\mathcal{A}_1^{(-)}$ имеет единственное простое собственное значение, лежащее левее $-\varepsilon$. Если $\alpha \in (0,\alpha_1]$, то оператор $\mathcal{A}_1^{(-)}$ не имеет собственных значений, лежащих правее $M+\varepsilon$. При $\alpha > \alpha_1$ оператор $\mathcal{A}_1^{(-)}$ имеет единственное простое собственное значение, лежащее правее $M+\varepsilon$.*

Б. *Если $\alpha \in (0,\min\{\alpha_2,\alpha_3\}]$, то оператор $\mathcal{A}_1^{(+)}$ не имеет собственных значений, лежащих левее $-\varepsilon$ и правее $M+\varepsilon$. При $\alpha > \max\{\alpha_2,\alpha_3\}$ оператор $\mathcal{A}_1^{(+)}$ имеет по одному простому собственному значению, лежащему левее $-\varepsilon$ и правее $M+\varepsilon$ соответственно.*

Доказательство. Функция $\Delta^{(s)}(\,\cdot\,)$ строго убывает от $+\infty$ до $\Delta^{(s)}(z_0)$ в интервале $(-\infty, z_0)$, $z_0 \leqslant -\varepsilon$, и от $\Delta^{(s)}(z_1)$ до $-\infty$ в интервале $(z_1,+\infty)$, $z_1 \geqslant M+\varepsilon$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}_1^{(s)}$ имеет собственное значение $e_0 < z_0$ тогда и только тогда, когда $\Delta^{(s)}(z_0) < 0$, и имеет собственное значение $e_1 > z_1$ тогда и только тогда, когда $\Delta^{(s)}(z_1) > 0$.

А. Из соотношения

$$\Delta^{(-)}(-\varepsilon) = -\alpha^2\int_{\mathbb{T}^d}\frac{v^2(t)\,dt}{w(t)+2\varepsilon} < 0$$

следует, что при всех значениях параметра $\alpha > 0$ оператор $\mathcal{A}_1^{(-)}$ имеет одно простое собственное значение, лежащее левее $-\varepsilon$. Из определения числа α_1 следуют формулы

$$\Delta^{(-)}(M+\varepsilon) = -2\varepsilon - M + \alpha^2\int_{\mathbb{T}^d}\frac{v^2(t)\,dt}{M-w(t)} \leqslant 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha\in(0,\alpha_1],$$

$$\Delta^{(-)}(M+\varepsilon) = -2\varepsilon - M + \alpha^2\int_{\mathbb{T}^d}\frac{v^2(t)\,dt}{M-w(t)} > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha>\alpha_1,$$

завершающие доказательство настоящего утверждения леммы.

Б. Из определения чисел α_2, α_3 следует, что

$$\Delta^{(+)}(-\varepsilon) = 2\varepsilon - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{w(t)} \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in (0, \alpha_2],$$

$$\Delta^{(+)}(-\varepsilon) = 2\varepsilon - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{w(t)} < 0 \qquad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in (\alpha_2, +\infty),$$

$$\Delta^{(+)}(M+\varepsilon) = -M + \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{2\varepsilon + M - w(t)} \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in (0, \alpha_3],$$

$$\Delta^{(+)}(M+\varepsilon) = -M + \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{2\varepsilon + M - w(t)} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > \alpha_3.$$

Следовательно, если $\alpha \in (0, \min\{\alpha_2, \alpha_3\}]$, то оператор $\mathcal{A}_1^{(+)}$ не имеет собственных значений, лежащих левее $-\varepsilon$ и правее $M+\varepsilon$. При $\alpha > \max\{\alpha_2, \alpha_3\}$ оператор $\mathcal{A}_1^{(+)}$ имеет по одному простому собственному значению, лежащему левее $-\varepsilon$ и правее $M+\varepsilon$ соответственно. Лемма доказана.

Пусть

$$\alpha_{\min} := \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \qquad \alpha_{\max} := \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}.$$

Следствием леммы 4 является следующее утверждение.

Следствие 1. *При всех $\alpha > 0$ оператор $\mathcal{A}_1$ имеет не менее одного и не более четырех собственных значений. Более того, если $\alpha \in (0, \alpha_{\min}]$, то оператор $\mathcal{A}_1$ имеет единственное простое (изолированное) собственное значение, которое лежит левее $-\varepsilon$, а при $\alpha \in (\alpha_{\max}, +\infty)$ оператор $\mathcal{A}_1$ имеет по два собственных значения, лежащих левее $-\varepsilon$ и правее $M+\varepsilon$ соответственно.*

Замечание 2. В следствии 1 собственное значение E_0 оператора $\mathcal{A}_1$, которое существует при всех $\alpha > 0$, обычно называется *основным состоянием*. На основании доказательства леммы 2 можно сделать вывод, что компоненты соответствующей собственной вектор-функции выглядят следующим образом:

$$f_0^{(+)} = 0, \qquad f_0^{(-)} = \mathrm{const} \neq 0, \qquad f_1^{(+)}(p) = -\frac{\alpha v(p) f_0^{(-)}}{\varepsilon + w(p) - E_0}, \qquad f_1^{(-)}(p) = 0.$$

Замечание 3. На основании доказательства леммы 4 можно сделать вывод, что если интеграл

$$\int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{w(t)}$$

расходится, то при всех $\alpha > 0$ оператор $\mathcal{A}_1$ имеет два собственных значения, лежащих левее $-\varepsilon$. А при расходимости интеграла

$$\int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{M - w(t)}$$

для любого $\alpha > 0$ оператор $\mathcal{A}_1$ имеет по крайней мере одно собственное значение, лежащее правее $M+\varepsilon$.

Верна следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть $\varepsilon > M/2$. Тогда при всех $\alpha > 0$ оператор $\mathcal{A}_1$ не имеет собственных значений, лежащих в лакуне $(M-\varepsilon, \varepsilon)$. Если $\alpha \in (0, \alpha_3)$, то оператор $\mathcal{A}_1$ имеет собственное значение, лежащее в существенном спектре, а именно в интервале $(\varepsilon, M+\varepsilon)$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > M/2$. В этом случае существенный спектр оператора $\mathcal{A}_1$ имеет лакуну $(M-\varepsilon, \varepsilon)$, причем при всех $\alpha > 0$

$$\Delta^{(-)}(M-\varepsilon) = -M - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{2\varepsilon + w(t) - M} < 0,$$

$$\Delta^{(-)}(\varepsilon) = -2\varepsilon - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{w(t)} < 0,$$

$$\Delta^{(+)}(M-\varepsilon) = 2\varepsilon - M + \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{M - w(t)} > 0,$$

$$\Delta^{(+)}(\varepsilon) = \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{2\varepsilon - w(t)} > 0.$$

Учитывая монотонность функции $\Delta^{(s)}(\,\cdot\,)$ в лакуне $(M-\varepsilon, \varepsilon)$ и лемму 2, получим, что оператор $\mathcal{A}_1$ не имеет собственных значений, лежащих в лакуне $(M-\varepsilon, \varepsilon)$. Очевидно, что при $\alpha \in (0, \alpha_3)$ имеет место равенство

$$\Delta^{(+)}(M+\varepsilon) = -M + \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)\,dt}{2\varepsilon + M - w(t)} < 0.$$

Так как $\Delta^{(+)}(\,\cdot\,)$ является непрерывной монотонной функцией на полуоси $(M-\varepsilon, +\infty)$ и $\Delta^{(+)}(\varepsilon) > 0$ (при этом $\varepsilon > M-\varepsilon$), то эта функция имеет простой нуль $z = E$ в лакуне $(\varepsilon, \varepsilon+M) \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1)$. Нетрудно убедиться, что вектор-функция

$$F = \{f_0^{(\sigma)}, f_1^{(\sigma)},\, \sigma = \pm\},$$

$$f_0^{(+)} = \mathrm{const} \neq 0, \qquad f_0^{(-)} = 0, \qquad f_1^{(+)}(p) = 0, \qquad f_1^{(-)}(p) = -\frac{\alpha v(p) f_0^{(+)}}{-\varepsilon + w(p) - E},$$

удовлетворяет уравнению $\mathcal{A}_1 F = EF$ и $F \in \mathcal{L}_1$, т. е. число $z = E$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}_1$. Лемма доказана.

Из рассуждений, приведенных в этом разделе, можно сделать вывод, что существование изолированных или вложенных собственных значений оператора $\mathcal{A}_1$ тесно связано со свойствами операторов $\mathcal{A}_1^{(s)}$, $s = \pm$, и $\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1) \neq \varnothing$. Полученные ранее в работах [11], [13]–[15] результаты для $\mathcal{A}_1^{(s)}$, $s = \pm$, недостаточны для данного вывода.

4. УРАВНЕНИЕ ФАДДЕЕВА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА $\mathcal{A}_2^{(s)}$

В этом разделе получен аналог системы интегральных уравнений Фаддеева и его симметризованный вариант для собственных вектор-функций оператора $\mathcal{A}_2^{(s)}$, играющий важную роль при исследовании спектра этого оператора.

Напомним, что для $\lambda \in \mathbb{R}$ и $A \subset \mathbb{R}$ имеет место равенство $\lambda + A = \{\lambda + a\colon a \in A\}$. Обозначим

$$\sigma^{(s)} := \bigcup_{p\in\mathbb{T}^d} \{w(p) + \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1^{(-s)})\}, \qquad \Sigma^{(s)} := \sigma^{(s)} \cup [s\varepsilon, s\varepsilon + 2M].$$

Следует отметить, что

$$\bigcup_{p\in\mathbb{T}^d} \{w(p) + \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(-s)})\} = [s\varepsilon, s\varepsilon + 2M],$$

поэтому имеет место равенство

$$\bigcup_{p\in\mathbb{T}^d} \{w(p) + \sigma(\mathcal{A}_1^{(-s)})\} = \Sigma^{(s)}.$$

При каждом $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma^{(s)}$ определим блочно-операторную матрицу $T^{(s)}(z)$, действующую в пространстве $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d))$, следующим образом:

$$T^{(s)}(z) := \begin{pmatrix} T_{00}^{(s)}(z) & T_{01}^{(s)}(z) \\ T_{10}^{(s)}(z) & T_{11}^{(s)}(z) \end{pmatrix},$$

где матричные элементы суть

$$\begin{gathered} T_{00}^{(s)}(z)g_0 = (1 + z - s\varepsilon)g_0, \qquad T_{01}^{(s)}(z)g_1 = -\alpha \int_{\mathbb{T}^d} v(t)g_1(t)\,dt, \\ (T_{10}^{(s)}(z)g_0)(p) = -\frac{\alpha v(p)g_0}{\Delta^{(-s)}(z - w(p))}, \\ (T_{11}^{(s)}(z)g_1)(p) = \frac{\alpha^2 v(p)}{\Delta^{(-s)}(z - w(p))} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v(t)g_1(t)\,dt}{s\varepsilon + w(p) + w(t) - z}, \\ (g_0, g_1) \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d)). \end{gathered}$$

Установим связь между собственными значениями операторов $\mathcal{A}_2^{(s)}$ и $T^{(s)}(z)$.

Лемма 6. *Число $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma^{(s)}$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}_2^{(s)}$ тогда и только тогда, когда оператор $T^{(s)}(z)$ имеет собственное значение, равное единице, причем их кратности совпадают.*

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma^{(s)}$ – собственное значение оператора $\mathcal{A}_2^{(s)}$ и $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^d))$ – соответствующая собственная вектор-функция. Тогда элементы f_0, f_1 и f_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} (s\varepsilon - z)f_0 + \alpha \int_{\mathbb{T}^d} v(t)f_1(t)\,dt = 0, \\ \alpha v(p)f_0 + (-s\varepsilon + w(p) - z)f_1(p) + \alpha \int_{\mathbb{T}^d} v(t)f_2(p,t)\,dt = 0, \\ \alpha(v(p)f_1(q) + v(q)f_1(p)) + (s\varepsilon + w(p) + w(q) - z)f_2(p,q) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Так как $z \notin [s\varepsilon, s\varepsilon + 2M]$, из третьего уравнения системы (7) получим равенство

$$f_2(p,q) = -\frac{\alpha(v(q)f_1(p) + v(p)f_1(q))}{s\varepsilon + w(p) + w(q) - z}. \tag{8}$$

Подставляя выражение (8) во второе уравнение системы (7) получим, что система уравнений

$$
\begin{gathered}
0=(z-s\varepsilon)f_0-\alpha\int_{\mathbb{T}^d}v(t)f_1(t)\,dt,\\
\Delta^{(-s)}(z-w(p))f_1(p)=-\alpha v(p)f_0+\alpha^2v(p)\int_{\mathbb{T}^d}\frac{v(t)f_1(t)\,dt}{s\varepsilon+w(p)+w(t)-z}
\end{gathered}
\tag{9}
$$

имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уравнений (7) имеет нетривиальное решение и линейные подпространства, порожденные решениями систем (7) и (9), имеют одинаковые размерности.

По определению множества $\sigma^{(s)}$ для любых $z\notin\sigma^{(s)}$ и $p\in\mathbb{T}^d$ имеет место неравенство $\Delta^{(-s)}(z-w(p))\neq 0$. Следовательно, система уравнений (9) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$
\begin{gathered}
f_0=(1+z-s\varepsilon)f_0-\alpha\int_{\mathbb{T}^d}v(t)f_1(t)\,dt,\\
f_1(p)=-\frac{\alpha v(p)f_0}{\Delta^{(-s)}(z-w(p))}+\frac{\alpha^2v(p)}{\Delta^{(-s)}(z-w(p))}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{v(t)f_1(t)\,dt}{s\varepsilon+w(p)+w(t)-z}
\end{gathered}
\tag{10}
$$

или матричное уравнение

$$
g=T^{(s)}(z)g,\qquad g=(g_0,g_1)\in\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d)),
\tag{11}
$$

имеют нетривиальные решения. Здесь вновь линейные подпространства, порожденные решениями системы уравнений (10) и уравнения (11), имеют одинаковые размерности. Лемма доказана.

Операторное уравнение (11) обычно называется аналогом уравнения Фаддеева для собственных функций оператора $\mathcal{A}_2^{(s)}$.

По определению множества $\sigma^{(s)}$ для любого $(a,b)\subset\mathbb{R}\setminus\Sigma^{(s)}$ функция $\Delta^{(s)}(z-w(p))$ не меняет знак на интервале (a,b) независимо от значений $p\in\mathbb{T}^d$. При каждом фиксированном $z\in\mathbb{R}\setminus\Sigma^{(s)}$ определим $\xi_z^{(s)}$ равенством: $\xi_z^{(s)}:=\operatorname{sgn}(\Delta^{(-s)}(z-w(p)))$. В частности, $\xi_z^{(s)}=+$ для любого $z<\min\Sigma^{(s)}$ и $\xi_z^{(s)}=-$ для любого $z>\max\Sigma^{(s)}$. При каждом $z\in\mathbb{R}\setminus\Sigma^{(s)}$ определим блочно-операторную матрицу $\widehat{T}^{(s)}(z)$, действующую в пространстве $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d))$, следующим образом:

$$
\widehat{T}^{(s)}(z):=\begin{pmatrix}\widehat{T}_{00}^{(s)}(z) & \widehat{T}_{01}^{(s)}(z)\\ \widehat{T}_{10}^{(s)}(z) & \widehat{T}_{11}^{(s)}(z)\end{pmatrix},
$$

где матричные элементы суть

$$
\widehat{T}_{00}^{(s)}(z)g_0=(1+\xi_z^{(s)}(z-s\varepsilon))g_0,\qquad T_{01}^{(s)}(z)g_1=-\xi_z^{(s)}\alpha\int_{\mathbb{T}^d}\frac{v(t)g_1(t)\,dt}{\sqrt{|\Delta^{(-s)}(z-w(t))|}},
$$

$$
(\widehat{T}_{10}^{(s)}(z)g_0)(p)=-\xi_z^{(s)}\frac{\alpha v(p)g_0}{\sqrt{|\Delta^{(-s)}(z-w(p))|}},
$$

$$
(\widehat{T}_{11}^{(s)}(z)g_1)(p)=\xi_z^{(s)}\frac{\alpha^2v(p)}{\sqrt{|\Delta^{(-s)}(z-w(p))|}}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{v(t)g_1(t)\,dt}{\sqrt{|\Delta^{(-s)}(z-w(t))|}(s\varepsilon+w(p)+w(t)-z)},
$$

$$
(g_0,g_1)\in\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d)).
$$

Лемма 7. *Пусть $z \in \mathbb{R} \setminus \Sigma^{(s)}$. Число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора $T^{(s)}(z)$ тогда и только тогда, когда это число также является собственным значением оператора $\widehat{T}^{(s)}(z)$, причем их кратности совпадают.*

Доказательство. Пусть число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора $T^{(s)}(z)$. Тогда система уравнений (10) или же эквивалентная ей система уравнений (9) имеют нетривиальное решение. По определению множества $\sigma^{(s)}$ и числа $\xi_z^{(s)}$ имеем $\xi_z^{(s)}\Delta^{-(s)}(z - w(p)) > 0$ при всех значениях $p \in \mathbb{T}^d$ и $z \in \mathbb{R} \setminus \Sigma^{(s)}$. Умножая оба уравнения системы (9) на $\xi_z^{(s)}$, получим, что система уравнений

$$
\begin{aligned}
g_0 &= (1 + \xi_z^{(s)}(z - s\varepsilon))g_0 - \xi_z^{(s)}\alpha \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v(t)g_1(t)\,dt}{\sqrt{|\Delta^{(-s)}(z - w(t))|}},\\
g_1(p) &= -\xi_z^{(s)} \frac{\alpha v(p) g_0}{\sqrt{|\Delta^{(-s)}(z - w(p))|}} + \\
&\quad + \xi_z^{(s)} \frac{\alpha^2 v(p)}{\sqrt{|\Delta^{(-s)}(z - w(p))|}} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v(t)g_1(t)\,dt}{\sqrt{|\Delta^{(-s)}(z - w(t))|}(s\varepsilon + w(p) + w(t) - z)}
\end{aligned} \tag{12}
$$

или матричное уравнение

$$
g = \widehat{T}^{(s)}(z)g, \qquad g = (g_0, g_1) \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d)), \tag{13}
$$

имеют нетривиальное решение, причем линейные подпространства, порожденные решениями системы (12) и уравнения (13), имеют одинаковые размерности. Лемма доказана.

Операторное уравнение (13) обычно называется симметризованным вариантом уравнения Фаддеева для собственных вектор-функций оператора $\mathcal{A}_2^{(s)}$. Симметризованный компактный оператор $\widehat{T}^{(s)}(z)$ играет важную роль при исследовании дискретного спектра оператора $\mathcal{A}_2^{(s)}$.

5. СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА $\mathcal{A}_2$

В настоящем разделе изучены местоположение и структура существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$. Получена оценка для нижней грани существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$.

Напомним, что норма элемента $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^d))$ определяется выражением

$$
\|f\|^2 := |f_0|^2 + \int_{\mathbb{T}^d} |f_1(p)|^2\,dp + \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{T}^d)^2} |f_2(p,q)|^2\,dp\,dq. \tag{14}
$$

Следующая теорема описывает местоположение существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$.

Теорема 1. *Существенный спектр $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)$ оператора $\mathcal{A}_2$ совпадает со множеством $\Sigma^{(+)} \cup \Sigma^{(-)}$, т.е. справедливо равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2) = \Sigma^{(+)} \cup \Sigma^{(-)}$. Более того, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)$ представляет собой объединение не более чем шести отрезков.*

Доказательство. В силу леммы 1 справедливо следующее выражение для существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$: $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(-)})$. Покажем, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)}) = \Sigma^{(s)}$. По определению $\Sigma^{(s)} = \sigma^{(s)} \cup [s\varepsilon, s\varepsilon + 2M]$.

Докажем, что $[s\varepsilon, s\varepsilon+2M] \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)})$. Пусть $z_0 \in [s\varepsilon, s\varepsilon+2M]$ – произвольная точка. Покажем, что $z_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)})$. Для этого удобно воспользоваться критерием Вейля [17], т. е. достаточно построить последовательность ортонормированных векторов $\{f^{(n)}\} \subset \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^d))$, для которых $\|(\mathcal{A}_2^{(s)} - z_0 I^{(2)}) f^{(n)}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Здесь символ $\|\cdot\|$ означает норму в $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^d))$, определенную равенством (14). Так как $w(\,\cdot\,)$ – непрерывная функция в компактном множестве $\mathbb{T}^d$, существует точка $(p_0, q_0) \in (\mathbb{T}^d)^2$ такая, что $z_0 = s\varepsilon + w(p_0) + w(q_0)$. При $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую выколотую окрестность точки $p_0 \in \mathbb{T}^d$:

$$V_n(p_0) := \left\{p \in \mathbb{T}^d \colon \frac{1}{n+1} < |p - p_0| < \frac{1}{n}\right\},$$

где

$$|p| := \sqrt{p_1^2 + \dots + p_d^2}, \qquad p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{T}^d.$$

Пусть $\mu(\Omega)$ – мера Лебега множества Ω и $\chi_\Omega(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция множества Ω. Если $p_0 \neq q_0$, то при $n_0 := [2/|p_0 - q_0|] + 1$ верно следующее равенство: $V_{n_0}(p_0) \cap V_{n_0}(q_0) = \varnothing$. Тогда оно верно и при всех $n \geqslant n_0$. Выберем последовательность вектор-функций $\{f^{(n)}\}_{n \geqslant n_0} \subset \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^d))$ следующим образом:

$$f^{(n)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_2^{(n)} \end{pmatrix}, \quad f_2^{(n)}(p,q) := \frac{1}{\mu(V_n(p_0))} \chi_{W_n}(p,q), \qquad n \geqslant n_0,$$

где $W_n := V_n(p_0) \times V_n(q_0) \cup V_n(q_0) \times V_n(p_0)$. Очевидно, что $\{f^{(n)}\}$ – ортонормированная последовательность. При каждом значении номера $n \geqslant n_0$ рассмотрим функцию $(\mathcal{A}_2^{(s)} - z_0 I^{(2)}) f^{(n)}$ и оценим ее норму:

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A}_2^{(s)} - z_0 I^{(2)}) f^{(n)}\|^2 \leqslant 4\alpha^2 \mu(V_n(p_0)) \max_{p \in \mathbb{T}^d} |v(p)|^2 &+ \\ + \sup_{(p,q) \in V_n(p_0) \times V_n(q_0)} &|s\varepsilon + w(p) + w(q) - z_0|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, из определения множества $V_n(p_0)$ и из непрерывности функции $w(\,\cdot\,)$ следует, что $\|(\mathcal{A}_2^{(s)} - z_0 I^{(2)}) f^{(n)}\| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $z_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)})$. В силу произвольности точки z_0 верно включение $[s\varepsilon, s\varepsilon+2M] \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)})$.

При $p_0 = q_0$ выберем последовательность функций $f_2^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, как

$$f_2^{(n)}(p,q) := \frac{\sqrt{2}}{\mu(V_n(p_0))} \chi_{V_n(p_0)}(p) \chi_{V_n(p_0)}(q)$$

и получим, что верно включение $[s\varepsilon, s\varepsilon+2M] \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)})$.

Теперь докажем, что $\sigma^{(s)} \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)})$. Пусть $z_1 \in \sigma^{(s)}$ – произвольная точка. Покажем, что $z_1 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)})$. Для этого вновь построим последовательность ортонормированных вектор-функций $f^{(n)}$ такую, что $\|(\mathcal{A}_2^{(s)} - z_1 I^{(2)}) f^{(n)}\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Далее возможны два случая: $z_1 \in [s\varepsilon, s\varepsilon+2M]$ и $z_1 \notin [s\varepsilon, s\varepsilon+2M]$. Если $z_1 \in [s\varepsilon, s\varepsilon+2M]$, то, как показано выше, $z_1 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)})$. Если $z_1 \notin [s\varepsilon, s\varepsilon+2M]$, то по определению множества $\sigma^{(s)}$ существуют точки $p_1 \in \mathbb{T}^d$ и $\lambda_1 \in \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1^{(-s)})$ такие, что $z_1 = w(p_1) + \lambda_1$. Таким образом, существует такая единичная вектор-функция $\Psi = (\psi_0, \psi_1) \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^d))$, что

$$(\mathcal{A}_1^{(-s)} - \lambda_1 I^{(1)})\Psi = 0. \tag{15}$$

Положим

$$\tilde{f}^{(n)} := \begin{pmatrix} 0 \\ f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} f_1^{(n)}(p) &:= \frac{c_n(p)\psi_0}{\sqrt{\mu(V_n(p_1))}}, \\ f_2^{(n)}(p,q) &:= \frac{1}{\sqrt{\mu(V_n(p_1))}}\big(c_n(q)\psi_1(p) + c_n(p)\psi_1(q)\big). \end{aligned}$$

Здесь функции $\{c_n\} \subset L_2(\mathbb{T}^d)$ образуют ортонормированную систему, удовлетворяющую условию $\operatorname{supp}(c_n) \subset V_n(p_1)$, $n \in \mathbb{N}$, которую можно определить из условия ортогональности функций $\{\tilde{f}^{(n)}\}$: при $n \neq k$

$$(\tilde{f}^{(n)}, \tilde{f}^{(k)}) = \frac{1}{2\sqrt{\mu(V_n(p_1))\mu(V_k(p_1))}} \int_{V_n(p_1)} c_n(p)\overline{\psi_1(p)}\, dp \int_{V_k(p_1)} \overline{c_k(q)}\psi_1(q)\, dq = 0.$$

Это означает, что $\int_{V_n(p_1)} c_n(p)\overline{\psi_1(p)}\, dp = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. При этом существование функций $c_n(\,\cdot\,)$ вытекает из бесконечномерности пространства $L_2(V_n(p_1))$.

Прямые вычисления показывают, что

$$\|\tilde{f}^{(n)}\| = \frac{1}{\sqrt{\mu(V_n(p_1))}} > 0.$$

Положим $f^{(n)} := \tilde{f}^{(n)}/\|\tilde{f}^{(n)}\|$. Очевидно, что система функций $\{f^{(n)}\}$ является ортонормированной. Покажем, что для этой системы при $z_1 \in \sigma^{(s)}$ верно равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \|(\mathcal{A}_2^{(s)} - z_1 I^{(2)})f^{(n)}\| = 0.$$

Заметим, что

$$\|(\mathcal{A}_2^{(s)} - z_1 I^{(2)})f^{(n)}\|^2 \leqslant 2 \sup_{p\in V_n(p_1)} |w(p) - w(p_1)|^2 + \alpha^2\mu(V_n(p_1)) \max_{p\in\mathbb{T}^d} |v(p)|^2.$$

Тогда в силу непрерывности функции $w(\,\cdot\,)$ на $\mathbb{T}^d$ и по построению множества $V_n(p_1)$ имеем $\|(\mathcal{A}_2^{(s)} - z_1 I^{(2)})f^{(n)}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $z_1 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)})$. Поскольку точка $z_1 \in \sigma^{(s)}$ произвольна, верно включение $\sigma^{(s)} \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)})$.

Теперь докажем обратное включение, а именно $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)}) \subset \Sigma^{(s)}$. По построению $T^{(s)}(z)$ является компактнозначной аналитической функцией на $\mathbb{C}\setminus\Sigma^{(s)}$. Из самосопряженности оператора $\mathcal{A}_2^{(s)}$ и леммы 6 следует, что операторнозначная функция $(I^{(1)} - T^{(s)}(z))^{-1}$ существует при $\operatorname{Im}(z) \neq 0$. Согласно аналитической теореме Фредгольма (см. теорему XIII.13 из монографии [17]) операторнозначная функция $(I^{(1)} - T^{(s)}(z))^{-1}$ существует на $\mathbb{C} \setminus \Sigma^{(s)}$ всюду за исключением дискретного множества $\mathcal{M}$, где она имеет вычеты конечного ранга. Это означает, что множество $\sigma(\mathcal{A}_2^{(s)}) \setminus \Sigma^{(s)}$ состоит только из изолированных точек, которые могут иметь предельные точки только в граничных точках множества $\Sigma^{(s)}$. Отсюда следует, что $\sigma(\mathcal{A}_2^{(s)})\setminus\Sigma^{(s)} \subset \sigma(\mathcal{A}_2^{(s)})\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)})$, т. е. справедливо включение $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)}) \subset \Sigma^{(s)}$. Таким образом, мы доказали, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)}) = \Sigma^{(s)}$.

Осталось доказать, что множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)})$ представляет собой объединение не более чем трех отрезков. В силу леммы 4 оператор $\mathcal{A}_1^{(s)}$ имеет не более двух простых собственных значений, лежащих вне отрезка $[s\varepsilon, s\varepsilon + 2M]$. Так как функция $w(\,\cdot\,)$ непрерывна на множестве $\mathbb{T}^d$, множество $\sigma^{(s)} = \cup_{p\in\mathbb{T}^d}\{w(p) + \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1^{(-s)})\}$ представляет собой объединение не более чем двух отрезков. Следовательно, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2^{(s)})$ есть объединение не более чем трех отрезков. Применив лемму 1, завершим доказательство теоремы.

Введем новые подмножества существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$.

Определение 1. Множества

$$\sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}_2) := \sigma^{(+)} \cup \sigma^{(-)}, \qquad \sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2) := [-\varepsilon, -\varepsilon + 2M] \cup [\varepsilon, \varepsilon + 2M]$$

называются *двухчастичной* и *трехчастичной ветвями* существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$ соответственно.

Из определения множества $\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2)$ следует, что $\min(\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2)) = -\varepsilon$. Заметим, что в работе [13] существенный спектр оператора $\mathcal{A}_2^{(s)}$ в более общем виде описан в терминах нулей определителя Фредгольма $\Delta^{(-s)}(z - w(p))$ и спектра оператора $A_{22}^{(s)}$. По определению множество $\sigma^{(s)}$ состоит из таких точек z множества $\mathbb{C} \setminus [s\varepsilon + w(p), s\varepsilon + M + w(p)]$, для которых $\Delta^{(-s)}(z - w(p)) = 0$ при некотором $p \in \mathbb{T}^d$. Для формулировки следующего результата введем обозначения

$$\sigma_1^{(s)} := \sigma^{(s)} \cap (-\infty, s\varepsilon], \qquad \sigma_2^{(s)} := \sigma^{(s)} \cap [s\varepsilon + 2M, \infty),$$
$$E_{\min}^{(k,s)} := \min(\sigma_k^{(s)}), \qquad E_{\max}^{(k,s)} := \min(\sigma_k^{(s)}), \qquad k = 1, 2,$$
$$E_{\min} := \min\{E_{\min}^{(1,+)}, E_{\min}^{(1,-)}\}.$$

В случае $\sigma_k^{(s)} = \varnothing$ при $k = 1, 2$ положим

$$E_{\min}^{(1,s)} = E_{\max}^{(1,s)} = s\varepsilon, \qquad E_{\min}^{(2,s)} = E_{\max}^{(2,s)} = s\varepsilon + 2M.$$

Следующая теорема описывает структуру существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$ в зависимости от значений параметра взаимодействия $\alpha > 0$.

Теорема 2. *Для существенного спектра оператора $\mathcal{A}_2$ верны следующие утверждения.*

А. *Для любого $\alpha > 0$ справедлива оценка $E_{\min} < -\varepsilon$.*

Б. *Пусть выполняется условие (6). Тогда мы имеем следующее.*

Б1. *Если $\alpha \in (0, \alpha_{\min}]$, то*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2) = [E_{\min}^{(1,-)}, E_{\max}^{(1,-)}] \cup [-\varepsilon, -\varepsilon + 2M] \cup [\varepsilon, \varepsilon + 2M],$$

где $E_{\min}^{(1,-)} < -\varepsilon$.

Б2. *Если $\alpha \in (\alpha_1, \infty)$, то*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2) = [E_{\min}^{(1,-)}, E_{\max}^{(1,-)}] \cup [-\varepsilon, -\varepsilon + 2M] \cup [\varepsilon, \varepsilon + 2M] \cup [E_{\min}^{(2,-)}, E_{\max}^{(2,-)}] \cup \sigma_1^{(+)} \cup \sigma_2^{(+)},$$

где $E_{\min}^{(1,-)} < -\varepsilon$ и $E_{\max}^{(2,-)} > \varepsilon + 2M$.

Б3. *Если* $\alpha \in (\alpha_{\max}, \infty)$, *то*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2) = \bigcup_{s=\pm} \bigl\{[E_{\min}^{(1,s)}, E_{\max}^{(1,s)}] \cup [s\varepsilon, s\varepsilon + 2M] \cup [E_{\min}^{(2,s)}, E_{\max}^{(2,s)}]\bigr\},$$

где $E_{\min}^{(1,s)} < -\varepsilon$, $E_{\max}^{(2,s)} > \varepsilon + 2M$, $s = \pm$.

В. *Если выполняется неравенство* $\varepsilon > M$, *то для любого* $\alpha > 0$ *имеет место соотношение* $(-\varepsilon + 2M, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)$.

Доказательство. А. В силу утверждения А леммы 4 при всех значениях $\alpha > 0$ оператор $\mathcal{A}_1^{(-)}$ имеет единственное собственное значение e_1, лежащее левее $-\varepsilon$. По определению $\sigma_1^{(-)} = [e_1, e_1 + M] \cap (-\infty, -\varepsilon]$, причем $e_1 < -\varepsilon$. Очевидно, что верно неравенство $E_{\min} \leqslant E_{\min}^{(1,-)} = e_1$, поэтому $E_{\min} < -\varepsilon$. Утверждение доказано.

Б1. Пусть $\alpha \in (0, \alpha_{\min}]$. Тогда в силу следствия 1 оператор $\mathcal{A}_1$ имеет единственное простое (изолированное) собственное значение e_1, которое лежит левее $-\varepsilon$. Как показано выше,

$$\sigma_1^{(-)} = [E_{\min}^{(1,-)}, E_{\max}^{(1,-)}] = [e_1, e_1 + M] \cap (-\infty, -\varepsilon],$$

т. е. $E_{\min}^{(1,-)} = e_1$. Кроме того,

$$\sigma_1^{(+)} \cap (-\infty, -\varepsilon) = \varnothing, \qquad \sigma_2^{(s)} \cap (\varepsilon + 2M, \infty) = \varnothing, \quad s = \pm.$$

Утверждение доказано.

Б2. Пусть $\alpha \in (\alpha_1, \infty)$. В силу утверждения А леммы 4 оператор $\mathcal{A}_1^{(-)}$ имеет по одному собственному значению, лежащему левее $-\varepsilon$ и правее $\varepsilon + 2M$. Обозначим их как e_1 и e_2 соответственно. Тогда

$$\sigma_1^{(-)} = [E_{\min}^{(1,-)}, E_{\max}^{(1,-)}] = [e_1, e_1 + M] \cap (-\infty, -\varepsilon] \quad \Longrightarrow \quad E_{\min}^{(1,-)} = e_1 < -\varepsilon,$$

$$\sigma_2^{(-)} = [E_{\min}^{(2,-)}, E_{\max}^{(2,-)}] = [e_2, e_2 + M] \cap [\varepsilon + 2M, \infty) \quad \Longrightarrow \quad E_{\max}^{(2,-)} = e_2 + M > \varepsilon + 2M.$$

Утверждение доказано.

Б3. Пусть $\alpha \in (\alpha_{\max}, \infty)$. Тогда в силу следствия 1 оператор $\mathcal{A}_1$ имеет по два собственных значения, лежащих левее $-\varepsilon$ и правее $M + \varepsilon$ соответственно. Обозначим их как $e_1^{(s)} < -\varepsilon$ и $e_2^{(s)} > \varepsilon + M$. По определению множеств $\sigma_k^{(s)}$, $k = 1, 2$,

$$\sigma_1^{(s)} = [E_{\min}^{(1,s)}, E_{\max}^{(1,s)}] = [e_1^{(s)}, e_1^{(s)} + M] \cap (-\infty, -\varepsilon] \Longrightarrow E_{\min}^{(1,s)} = e_1^{(s)} < -\varepsilon,$$

$$\sigma_2^{(s)} = [E_{\min}^{(2,s)}, E_{\max}^{(2,s)}] = [e_2^{(s)}, e_2^{(s)} + M] \cap [\varepsilon + 2M, \infty) \Longrightarrow E_{\max}^{(2,s)} = e_2^{(s)} + M > \varepsilon + 2M.$$

Утверждение доказано.

В. Пусть теперь $\varepsilon > M$. Тогда в силу леммы 5 при всех $\alpha > 0$ оператор $\mathcal{A}_1$ не имеет собственных значений, лежащих в лакуне $(M - \varepsilon, \varepsilon)$. Поэтому справедливо равенство $(-\varepsilon + 2M, \varepsilon) \cap \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2) = \varnothing$. Утверждение и теорема доказаны.

Замечание 4. Если условие (6) не выполняется, т. е. если интегралы в выражении (6) расходятся, то при всех $\alpha > 0$ оператор $\mathcal{A}_1$ имеет два собственных значения, лежащих левее $-\varepsilon$, и имеет по крайней мере одно собственное значение, лежащее правее $M + \varepsilon$ (см. замечание 3). Поэтому

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2) = \bigcup_{s=\pm} \{[E_{\min}^{(1,s)}, E_{\max}^{(1,s)}] \cup [s\varepsilon, s\varepsilon + 2M]\} \cup [E_{\min}^{(2,-)}, E_{\max}^{(2,-)}] \cup \sigma_2^{(+)}.$$

Здесь $E_{\min}^{(1,s)} < -\varepsilon$ при $s = \pm$ и $E_{\max}^{(2,-)} > \varepsilon + 2M$.

Замечание 5. Подчеркнем, что утверждения теоремы 2 в некоторых частных случаях можно получить на основе результатов работы [15], но в отличие от нее в настоящей работе рассмотрены все значения размерности d. Леммы 4, 5 и следствие 1 играют ключевую роль при доказательстве теоремы 2. В случае $d = 1$ доказательство конечности дискретного спектра оператора $\mathcal{A}_2$ опирается на утверждение A теоремы 2 (см. статью [11]).

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за ценные и полезные замечания, а также благодарит Berlin Mathematical School и Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics за приглашение, поддержку и гостеприимство.

Список литературы

[1] C. Tretter, *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications*, Imperial College Press, London, 2008.

[2] H. Spohn, *Commun. Math. Phys.*, **123**:2 (1989), 277–304.

[3] M. Hübner, H. Spohn, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **62**:3 (1995), 289–323.

[4] Ю. В. Жуков, Р. А. Минлос, *ТМФ*, **103**:1 (1995), 63–81.

[5] R. A. Minlos, H. Spohn, "The three-body problem in radioactive decay: The case of one atom and at most two photons", *Topics in Statistical and Theoretical Physics*, American Mathematical Society Translations Ser. 2, **177**, eds. R. L. Dobrushin, R. A. Minlos, M. A. Shubin, A. M. Vershik, AMS, Providence, RI, 1996, 159–193.

[6] A. I. Mogilner, "Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results", *Many-Particle Hamiltonians*: *Spectra and Scattering*, Advances in Soviet Mathematics, **5**, ed. R. A. Minlos, AMS, Providence, RI, 1991, 139–194.

[7] К. О. Фридрихс, *Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1972.

[8] В. А. Малышев, Р. А. Минлос, *Линейные операторы в бесконечночастичных системах*, Наука, М., 1994.

[9] A. E. Lifschitz, *Magnetohydrodynamic and Spectral Theory*, Developments in Electromagnetic Theory and Applications, **4**, Kluwer, Dordrecht, 1989.

[10] B. Thaller, *The Dirac Equation*, Texts and Monographs in Physics, Springer, Berlin, 1992.

[11] M. Muminov, H. Neidhardt, T. Rasulov, *J. Math. Phys.*, **56**:5 (2015), 053507, 24 pp., arXiv: 1410.4763.

[12] Р. Фейнман, *Статистическая механика. Курс лекций*, Мир, М., 1978.

[13] С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов, *Матем. заметки*, **73**:4 (2003), 556–564.

[14] S. Albeverio, S. N. Lakaev, T. H. Rasulov, *J. Statist. Phys.*, **127**:2 (2007), 191–220.

[15] Т. Х. Расулов, *Матем. заметки*, **83**:1 (2008), 78–94.

[16] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, М., 1965.

[17] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.

Поступила в редакцию 18.01.2015,
после доработки 13.04.2015