O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETI QOSHIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi"deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

1. 2016

УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ - 2016

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№1, pp.103-115

УДК 517.984

О свойствах дополнения Шура одной блочно-операторной матрицы

Расулов Т.Х.

Ushbu maqolada 2×2 blok operatorli matritsa ikkita Gilbert fazolarning to'g'ri yig'indisida ta'sir qiluvchi chegralangan va o'z-o'ziga qo'shma operatorlar sifatida qaralgan. Mos SHur to'ldiruvchisining ba'zi xossalari o'rganilgan. Bir o'lchamli holda parametr funksiyalarning maxsus sinfi uchun SHur to'ldiruvchisi cheksiz ko'p xos qiymatlarga ega bo'lishi isbotlangan. Xos qiymatlar va xos vektorlar ko'rinishi aniq topilgan.

In this paper 2×2 block operator matrix is considered as bounded and self-adjoint operator acting in the direct sum of two Hilbert spaces. Some properties of the corresponding Schur complement are studied. In one dimensional case for special class of parameter functions the existence of the infinitely many eigenvalues is proven. The eigenvalues and eigenvectors are founded.

Блочно-операторная матрица - это матрица, элементы которой являются линейными операторами в банаховом или гильбертовом пространстве. Пусть $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$–два гильбертовых пространства и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Тогда известно, что всякий линейный ограниченный оператор $\mathcal{A}$, действующий в $\mathcal{H}$ всегда представляется как 2×2 блочно-операторная матрица

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

с линейными ограниченными операторами $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i, j = 1, 2$. При этом оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным тогда и только тогда, когда

$$A_{11} = A_{11}^*, \quad A_{21} = A_{12}^*, \quad A_{22} = A_{22}^*$$

(A_{ij}^* сопряженный оператор к A_{ij}).

Обозначим через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$, $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$ и $\rho(\cdot)$, соответственно, спектр, существенный спектр, дискретный спектр и резольвентное множества ограниченного самосопряженного оператора.

Пусть $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел и $L(\mathcal{H})$ – пространство линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Следующие операторы

$$S_1 : \mathbb{C}\backslash\sigma(A_{22}) \to L(\mathcal{H}_1), \quad S_1(\lambda) := A_{11}-\lambda-A_{12}(A_{22}-\lambda)^{-1}A_{21}, \quad \lambda \in \rho(A_{22});$$

$$S_2 : \mathbb{C}\backslash\sigma(A_{11}) \to L(\mathcal{H}_2), \quad S_2(z) := A_{22}-\lambda-A_{21}(A_{11}-\lambda)^{-1}A_{12}, \quad z \in \rho(A_{11})$$

называются дополнениями Шура соответствующей блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$ и они играют важную роль в спектральном анализе этой матрицы. Видно, что дополнениями Шура являются операторно-значные регулярные функции, определенные вне спектров операторов A_{22} и A_{11}, соответственно. Дополнение Шура сначала использовано в теории матриц [1]. Термин "дополнение Шура" был введен в работе [2]. В бесконечномерных гильбертовых пространствах дополнение Шура впервые изучено в известной работе М. Г. Крейна [3] о расширениях самосопряженных операторов. Исходя из применения в теории матриц и численной линейной алгебре, дополнение Шура использовано во многих областях математики, таких как статистика, электротехника, C^*–алгебры [4] и теория математических систем [5].

В теории ограниченных и неограниченных блочно-операторных матриц дополнение Шура является мощным инструментом при изучении спектра и различных спектральных свойств. Эти свойства впервые была исследованы в работах Р. Нагела [6, 7].

Соотношение между спектральными свойствами блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$ и дополнением Шура можно наблюдать из так называемой "факторизации Фробениуса-Шура", т.е.,

$$\mathcal{A}-\lambda = \begin{pmatrix} I & A_{12}(A_{22}-\lambda)^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1(\lambda) & 0 \\ 0 & A_{22}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ (A_{22}-\lambda)^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix},$$

$\lambda \notin \sigma(A_{22})$;

$$\mathcal{A}-\lambda = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}(A_{11}-\lambda)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}-\lambda & 0 \\ 0 & S_2(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & (A_{11}-\lambda)^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$\lambda \notin \sigma(A_{11})$.

При этом $\sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma(A_{22}) = \sigma(S_1)$ и $\sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma(A_{11}) = \sigma(S_2)$. Здесь для регулярной оператор-функции $S : \Omega \to \mathcal{H}$ ($\Omega \subset \mathbb{C}$ – открытое множество) ее спектр понимается как

$$\sigma(S) := \mathbb{C} \setminus \rho(S), \quad \rho(S) := \{\lambda \in \Omega : S(\lambda) \text{ биективен в } \mathcal{H}\}.$$

В работе [8] существенный спектр блочно-операторной матрицы определен в терминах дополнения Шура. Очень много последующих работ также посвящены этому объекту. Подробно см. в монографии [9].

Следует отметить, что включение $\sigma(A_{22}) \subset \sigma(\mathcal{A})$ не всегда выполняется, а дополнение Шура $S_1(\lambda)$ определено при $\lambda \notin \sigma(A_{22})$. В настоящей работе рассмотрим модель $\mathcal{A}$, соответствующему описанию задач из статистической физики [10], квантовой теории поля [11] и физики твердого тела [12], которая представляется как (1). При этом имеет место включение $\sigma(A_{22}) \subset \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A})$. Изучаются некоторые свойства, в основном связанные с числами собственных значений оператор-функции $S_1(\lambda)$ и приведены их следствия. Кроме того, в одномерном случае для специального класса параметров функций доказано существование бесконечного числа собственных значений этого оператора при всех $\lambda \notin \sigma(A_{22})$.

Через $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначим множество всех комплексных, вещественных, целых и натуральных чисел, соответственно. Пусть $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi; \pi]^{\mathrm{d}}$ - d-мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в работе $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ рассматривается как абелева группа в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^{\mathrm{d}}$. Например, если $\mathrm{d} = 4$ и

$$a = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}),\ b = (\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}) \in \mathbb{T}^4,$$

то

$$a + b = (-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}),\ 6a = (\pi, \pi, 0, 0) \in \mathbb{T}^4.$$

Пусть $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) симметричных функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$. Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ и $\mathcal{H}_2 := L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$, т.е. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ называются одночастичным и двухчастичным подпространствами бозонного фоковского пространства $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ по $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$, соответственно.

Всюду в работе будем рассматривать блочно-операторную матрицу

$\mathcal{A}$, определенную по формуле (1), со следующими матричными элементами

$$(A_{11}f_1)(p) = u(p)f_1(p), \quad (A_{12}f_2)(p) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} v(s)f_2(p,s)ds,$$

$$A_{21} = A_{12}^*, \quad (A_{22}f_2)(p,q) = w(p,q)f_2(p,q).$$

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$, $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ - вещественно-непрерывные функции на $\mathbb{T}^d$, а $w(\cdot,\cdot)$ – вещественно-непрерывная симметричная функция на $(\mathbb{T}^d)^2$. При этом

$$A_{12}^* : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2, \quad (A_{12}^*f_1)(p,q) = \frac{1}{2}(v(p)f_1(q) + v(q)f_1(p)), \quad f_1 \in \mathcal{H}_1.$$

Можно легко проверить, что при этих предположениях блочно-операторная матрица $\mathcal{A}$, является ограниченным и самосопряженным оператором в $\mathcal{H}$.

Оператор A_{12} называется оператором уничтожения, а оператор A_{21} – оператором рождения [11].

Пусть $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ есть множество всех вещественных, целых и натуральных чисел, соответственно. При каждом фиксированном $p \in \mathbb{T}^d$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [m(p); M(p)]$ функцию

$$\Delta(p\,; z) := u(p) - z - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(s)ds}{w(p,s) - z},$$

где числа $m(p)$ и $M(p)$ определяются следующим образом:

$$m(p) := \min_{q \in \mathbb{T}^d} w(p,q), \quad M(p) := \max_{q \in \mathbb{T}^d} w(p,q).$$

Пусть σ – множество точек $z \in \mathbb{C}$, для которых уравнение $\Delta(p\,; z) = 0$ имеет решение хотя бы для одной $p \in \mathbb{T}^d$ и

$$m := \min_{p,q \in \mathbb{T}^d} w(p,q), \quad M := \max_{p,q \in \mathbb{T}^d} w(p,q).$$

Тогда (см. [13]) для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ имеет место равенство

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}) = \sigma \cup [m; M]. \tag{2}$$

Теперь докажем некоторые свойства оператор-функции $S_1(\cdot)$ определенной в $\mathbb{C} \setminus [m; M]$.

Следующие два свойства устанавливают связь между дискретным и существенным спектром операторов $\mathcal{A}$ и $S_1(\lambda)$.

Свойство 1. *Число $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда оператор $S_1(\lambda)$ имеет собственное значение, равное нулю и их кратности совпадают.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ – собственное значение оператора $\mathcal{A}$ и $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}$ – соответствующая собственная вектор-функция. Тогда f_1 и f_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (A_{11} - \lambda)f_1 + A_{12}f_2 = 0 \\ A_{12}^* f_1 + (A_{22} - \lambda)f_2 = 0 \end{cases}. \tag{3}$$

Так как $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$, из второго уравнений системы (3) для f_2 имеем

$$f_2 = -(A_{22} - \lambda)^{-1} A_{12}^* f_1. \tag{4}$$

Подставляя выражения (4) для f_2 в первое уравнение системы (3) заключаем, что система уравнений (3) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда уравнение $S_1(\lambda)f_1 = 0$ имеет нетривиальное решение $f_1 \in \mathcal{H}_1$.

Пусть число $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ есть n - кратное собственное значение оператора $\mathcal{A}$ и число 0 есть m - кратное собственное значение оператора $S_1(\lambda)$. Покажем, что $n = m$.

Пусть $n < m$. Тогда существуют линейно независимые собственные функции $f_1^{(i)} \in \mathcal{H}_1$, $i = \overline{1, m}$, соответствующие собственному значению 0 оператора $S_1(\lambda)$. Для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ положим $f^{(i)} := (f_1^{(i)}, f_2^{(i)})$, где функция $f_2^{(i)}$ определяется по формуле (4), причем вместо f_1 берутся $f_1^{(i)}$. Тогда вектор-функция $f^{(i)}$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{A}f^{(i)} = \lambda f^{(i)}$. Так как $n < m$, то собственные вектор-функции $f^{(i)}$, $i = \overline{1, m}$ линейно зависимы. Поэтому существует ненулевой вектор $(\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$ такой, что $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f^{(i)} = 0$, но при этом имеет место неравенство $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f_1^{(i)} \neq 0$ (так как $f_1^{(i)}$, $i = \overline{1, m}$ линейно независимы).

Из последних двух соотношений и построения $f^{(i)}$ имеем

$$0=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f^{(i)}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i f_1^{(i)} \\ -R_{22}(\lambda)A_{21}(\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i f_1^{(i)}) \end{pmatrix}\neq 0.$$

Здесь $R_{22}(\lambda):=(A_{22}-\lambda)^{-1}$. Это противоречие показывает, что неравенство $n<m$ не выполняется.

Пусть теперь $n>m$. Тогда существуют линейно независимые собственные вектор-функции $f^{(i)}=(f_1^{(i)},f_2^{(i)})$, $i=\overline{1,n}$ соответствующие собственному значению λ оператора $\mathcal{A}$.

Можно показать, что $f_1^{(i)}$, $i=\overline{1,n}$ является собственной функцией, соответствующей собственному значению 0 оператора $S_1(\lambda)$. Рассуждая аналогично из неравенства $n>m$ получим, что существует ненулевой вектор $(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{C}^n$ такой, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i f_1^{(i)}=0$. При этом $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i f^{(i)}\neq 0$. Из последних двух соотношений и построения $f^{(i)}$, а также линейности операторов A_{21} и $R_{22}(\lambda)$ вытекает

$$0\neq\sum_{i=1}^{n}\beta_i f^{(i)}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i f_1^{(i)} \\ -R_{22}(\lambda)A_{21}(\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i f_1^{(i)}) \end{pmatrix}=0.$$

Это противоречие показывает, что неравенство $n>m$ не имеет места. Таким образом $n=m$. Свойство 1 доказано.

Свойство 2. *Пусть* $\lambda\in\mathbb{C}\setminus[m;M]$. *Тогда* $\lambda\in\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})\Longleftrightarrow 0\in\sigma_{\mathrm{ess}}(S_1(\lambda))$.

Доказательство. Сначала описываем существенный спектр оператора $S_1(\lambda)$. По определению, оператор-функция $S_1(\lambda)$ действует в $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ по формуле

$$(S_1(\lambda)g)(p)=\Delta(p\,;\lambda)g(p)-\frac{v(p)}{2}\int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\frac{v(s)g(s)ds}{w(p,s)-\lambda}.$$

Очевидно, что при каждом $\lambda \in \mathbb{R}\setminus[m;M]$ ядро интегрального оператора

$$(K(\lambda)g)(p) = \frac{v(p)}{2}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{v(s)g(s)ds}{w(p,s)-\lambda}, \quad g\in L_2(\mathbb{T}^d)$$

является непрерывным в $(\mathbb{T}^d)^2$ и следовательно, этот оператор компактен. В силу теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при компактных возмущениях имеем $\sigma_{\text{ess}}(S_1(\lambda)) = \sigma_{\text{ess}}(S_1(\lambda) - K(\lambda))$. Из непрерывности функции $\Delta(\cdot\,;\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{C}\setminus[m;M]$ на компактном множестве $\mathbb{T}^d$ следует, что

$$\sigma_{\text{ess}}(S_1(\lambda)) = \text{Ran}(\Delta(\cdot\,;\lambda)). \tag{5}$$

Пусть $\lambda_0 \in \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A})\setminus[m;M]$. Тогда в силу равенства (2) имеем $\lambda_0 \in \sigma\setminus[m;M]$. Из определения множества σ вытекает, что существует точка $p_0 \in \mathbb{T}^d$ такая, что $\Delta(p_0\,;\lambda_0) = 0$. Учитывая (5) имеем, что $0 \in \sigma_{\text{ess}}(S_1(\lambda_0))$.

Пусть теперь $0 \in \sigma_{\text{ess}}(S_1(\lambda_1))$ для некоторого $\lambda_1 \in \mathbb{C}\setminus[m;M]$. Тогда в силу равенства (5) существует точка $p_1 \in \mathbb{T}^d$ такое, что $\Delta(p_1\,;\lambda_1) = 0$. Теперь из определения множества σ вытекает, что $\lambda_1 \in \sigma \subset \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H})$. Свойство 2 доказано.

Из свойств 1 и 2 вытекает следующее:

Следствие 1. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}\setminus[m;M]$. Тогда $\lambda \in \rho(\mathcal{A}) \iff 0 \in \rho(S_1(\lambda))$.*

Следствие 2. *Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus[m;M]$. Если $(\lambda_0;\lambda_0+\gamma) \in \rho(\mathcal{A})$ (соот. $(\lambda_0-\gamma;\lambda_0) \in \rho(\mathcal{A})$) при некотором $\gamma > 0$, то существует число $\delta = \delta(\gamma) > 0$ такое, что $(0;\delta) \in \rho(S_1(\lambda_0))$ (соот. $(-\delta;0) \in \rho(S_1(\lambda_0))$).*

Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и ограниченного самосопряженного оператора B, действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, обозначим через $\mathcal{H}_B(\lambda)$ такое подпространство, что $(Bf,f) < \lambda\|f\|$ для любого $f \in \mathcal{H}_B(\lambda)$ и положим

$$N(\lambda,B) := \sup_{\mathcal{H}_B(\lambda)} \dim\mathcal{H}_B(\lambda).$$

Число $N(\lambda,B)$ является бесконечным, если $\lambda > \min\sigma_{\text{ess}}(B)$ и если число $N(\lambda,B)$ конечно, то оно равно числу собственных значений оператора B, с учетом кратности, меньших чем λ.

Через $\tau_{\text{ess}}(\mathcal{A})$ обозначим нижнюю грань существенного спектра оператора $\mathcal{A}$. Из определения функции $\Delta(\cdot;\cdot)$ и множества σ видно, что для любых $p \in \mathbb{T}^d$ и $\lambda < \tau_{\text{ess}}(\mathcal{A})$ справедливо неравенство $\Delta(p\,;\lambda) > 0$. Отсюда и из равенства (5) следует, что для таких λ имеет место соотношение $\sigma_{\mathrm{ess}}(S_1(\lambda)) \subset (0;+\infty)$.

Свойство 3. *Для любого* $\lambda < \tau_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$ *имеет место равенство* $N(\lambda, \mathcal{A}) = N(0, S_1(\lambda))$.

Доказательство. Пусть I_i, $i = 1, 2$ единичный оператор $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$.

Для любого $\lambda < \tau_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$ оператор $A_{22} - \lambda I_2$ является положительным и обратимым, поэтому существует квадратный корень $R_{22}^{1/2}(\lambda)$ резольвенты оператора A_{22}.

Пусть $V(\lambda)$, $\lambda < \tau_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$ есть блочно-операторная матрица 2×2 в $\mathcal{H}$ с элементами

$$V_{11}(\lambda) := A_{11} - \lambda I_1, \quad V_{12}(\lambda) := A_{12} R_{22}^{1/2}(\lambda),$$

$$V_{21}(\lambda) := R_{22}^{1/2}(\lambda) A_{12}^*, \quad V_{22}(\lambda) := I_2.$$

Простые вычисления показывают, что неравенство $(\mathcal{A}f, f) < \lambda(f, f)$, $f \in \mathcal{H}$ выполняется тогда и только тогда, когда $(V(\lambda)g, g) < 0$, $g = (f_1, (A_{22} - \lambda I_2)^{1/2} f_2)$. Отсюда следует, что

$$N(\lambda, \mathcal{A}) = N(0, V(\lambda)). \tag{6}$$

.

Пусть $f_1 \in \mathcal{H}_{S_1(\lambda)}(0)$, т.е., $(S_1(\lambda)f_1, f_1) < 0$. Тогда для любого $g := (f_1, -V_{21}f_1) \in \mathcal{H}$, имеем

$$(V(\lambda)g, g) = (S_1(\lambda)f_1, f_1) < 0.$$

Следовательно, $g \in \mathcal{H}_{V(\lambda)}(0)$, и поэтому

$$N(0, S_1(\lambda)) \leq N(0, V(\lambda)). \tag{7}$$

Для любых $f_1 \in \mathcal{H}_1$ и $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}$ имеет место равенство

$$(S_1(\lambda)f_1, f_1) =$$

$$= (V(\lambda)f, f) - (V_{12}(\lambda)V_{21}(\lambda)f_1, f_1) - (V_{21}(\lambda)f_1, f_2) - (V_{12}(\lambda)f_2, f_1) - (f_2, f_2).$$

При этом если $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}_{V(\lambda)}(0)$, то

$$(S_1(\lambda)f_1, f_1) = (V(\lambda)f, f) - \|f_2 + V_{21}f_1\|^2 < 0,$$

т.е., $f_1 \in \mathcal{H}_{S_1(\lambda)}(0)$. Таким образом

$$N(0, V(\lambda)) \leq N(0, S_1(\lambda)). \tag{8}$$

Теперь неравенства (7), (8) и равенство (6) заключает доказательство свойства 3.

Свойство 4. *Функция $N(0, S_1(\cdot))$ монотонно не убывает в $(-\infty; 0)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in (-\infty; 0)$ такое, что $\lambda_1 < \lambda_2$. Так как при каждом $f_2 \in \mathcal{H}_2$ функция $(R_{22}(\cdot)f_2, f_2)$ монотонна возрастает в $(-\infty; 0)$, то имеем

$$\begin{aligned}(S_1(\lambda_1)f_1, f_1) &= ((A_{11} - \lambda_1)f_1, f_1) - (A_{12}R_{22}(\lambda_1)A_{12}^*f_1, f_1) \\ &= ((A_{11} - \lambda_1)f_1, f_1) - (R_{22}(\lambda_1)A_{12}^*f_1, A_{12}^*f_1) \\ &> ((A_{11} - \lambda_2)f_1, f_1) - (R_{22}(\lambda_2)A_{12}^*f_1, A_{12}^*f_1) = (S_1(\lambda_2)f_1, f_1).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $f_1 \in \mathcal{H}_{S_1(\lambda_1)}(0)$, то $f_1 \in \mathcal{H}_{S_1(\lambda_2)}(0)$, т.е., $\mathcal{H}_{S_1(\lambda_1)}(0) \subset \mathcal{H}_{S_1(\lambda_2)}(0)$ и следовательно, $N(0, S_1(\lambda_1)) \leq N(0, S_1(\lambda_2))$. Свойство 4 доказано.

Определение. *Обозначим через $E_m(\cdot)$, $m \in \mathbb{N}$ положительнозначные функции, определенные на $[\alpha; \beta] \subset \mathbb{R} \setminus [m; M]$, удовлетворяющие условию: $E_m(\lambda)$–m–е собственное значение (собственные значения пронумерованы в порядке возрастания, считая их кратность) оператора $S_1(\lambda)$, $\lambda \in [\alpha; \beta]$.*

Отметим, что оператор-функция $S_1(\cdot)$ является непрерывной на $[\alpha; \beta]$ в смысле равномерной операторной топологии. Поэтому для каждого $m \in \mathbb{N}$ функция $E_m(\cdot)$ является непрерывной на любом сегменте $[\alpha; \beta] \subset \mathbb{R} \setminus [m; M]$.

Следующее свойство является модификацией леммы 2 из работы [14], которая доказана для модели Фридрихса.

Свойство 5. *Число $\lambda_0 < \tau_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$ является регулярной точкой оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда функция $N(0, S_1(\cdot))$ непрерывна в точке $\lambda = \lambda_0$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lambda_0 < \tau_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$ регулярная точка оператора $\mathcal{A}$. Тогда из свойства 1 вытекает, что $E_n(\lambda_0) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

В силу непрерывности функции $E_n(\cdot)$, существует число $\rho > 0$ такое, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in [\lambda_0 - \rho; \lambda_0 + \rho] \subset (-\infty; \tau_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}))$, имеет место неравенство $E_n(\lambda) \neq 0$. Отсюда получим

$$\mathrm{card}\{n : E_n(\lambda_0) < 0\} = \mathrm{card}\{n : E_n(\lambda) < 0,\ \lambda \in [\lambda_0 - \rho; \lambda_0 + \rho]\},$$

где card$M$ – мощность множества M. Следовательно, $N(0, S_1(\lambda_0)) = N(0, S_1(\lambda_0+\varepsilon))$, $\varepsilon \in [-\rho; \rho]$, т.е., функция $N(0, S_1(\cdot))$ непрерывна в точке $\lambda = \lambda_0$.

Достаточность. Пусть функция $N(0, S_1(\cdot))$ непрерывна в точке $\lambda = \lambda_0$. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$N(0, S_1(\lambda_0 - \varepsilon)) = N(0, S_1(\lambda_0)) = N(0, S_1(\lambda_0 + \varepsilon)). \tag{9}$$

Учитывая монотонность квадратичной формы $(S_1(\lambda)\cdot, \cdot)$ при $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon; \lambda_0 + \varepsilon)$ и рассуждая как при доказательстве теоремы 2 работы [15] можно показать, что функции $E_1(\cdot), E_2(\cdot), \ldots$ монотонно убывают на $(\lambda_0 - \varepsilon; \lambda_0 + \varepsilon)$. Отсюда $E_n(\lambda_0) > E_n(\lambda_0 + \varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$E_n(\lambda_0) > E_n(\lambda_0 + \varepsilon) \geq 0, \quad \forall n \in \{n : E_n(\lambda_0 - \varepsilon) \geq 0\}.$$

Согласно (9) выполняется равенство

$$\{n : E_n(\lambda_0 + \varepsilon) < 0\} = \{n : E_n(\lambda_0 - \varepsilon) < 0\}.$$

Поэтому

$$E_n(\lambda_0) < E_n(\lambda_0 - \varepsilon) < 0, \quad \forall n \in \{n : E_n(\lambda_0 + \varepsilon) < 0\}.$$

Таким образом для каждого натурального $n \in \mathbb{N}$ получим неравенство $E_n(\lambda_0) \neq 0$, т.е., точка 0 не является собственным значением оператора $S_1(\lambda_0)$. Согласно свойства 1 число λ_0 является регулярной точкой оператора $\mathcal{A}$. Свойство 5 доказано.

Следствие 3. *Число $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus [m; M]$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда функция $N(0, S_1(\cdot))$ имеет разрыв в точке $\lambda = \lambda_0$.*

Для формулировки следующего свойства рассмотрим случай d = 1. Пусть

$$u(x) := u_0, \quad v(x) := v_0, \quad w(x, y) := \omega(x - y) \tag{10}$$

где $u_0, v_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а $\omega(\cdot)$ -четная непрерывная функция в $\mathbb{T}$.

Определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [m; M]$ функцию

$$\Delta(\lambda) := u_0 - \lambda - \frac{v_0^2}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{ds}{\omega(s) - \lambda}.$$

В этих предположениях для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ имеет место равенство

$$\sigma_{\rm ess}(\mathcal{A}) = [m; M] \cup \Delta_0, \quad \Delta_0 := \{\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m; M] : \Delta(\lambda) = 0\}.$$

Из монотонности функции $\Delta(\cdot)$ в $\mathbb{R} \setminus [m; M]$ следует, что множество Δ_0 состоит из не более чем двух точек.

Свойство 6. *Если параметры функции $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $w(\cdot, \cdot)$ определены по равенствам* (10), *то для любых $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\lambda \in \mathbb{R} \setminus ([m; M] \cup \Delta_0)$ число*

$$\xi_k(\lambda) := \Delta(\lambda) - \frac{v_0^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(ks)ds}{\omega(s) - \lambda}$$

является собственным значением оператора $S_1(\lambda)$ и соответствующая собственная функция $\varphi_k(\cdot)$ имеет вид $\varphi_k(x) := \exp(\pm ikx)$.

Доказательство. Если параметры функции $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $w(\cdot, \cdot)$ определены по равенствам (10), то оператор $S_1(\lambda)$ записывается как

$$(S_1(\lambda) f)(x) = \Delta(\lambda) f(x) - \frac{v_0^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(s)ds}{\omega(x-s) - \lambda}.$$

При каждом $\lambda \in \mathbb{R} \setminus ([m; M] \cup \Delta_0)$ найдем собственные значение оператора $S_1(\lambda)$.

Допустим $\varphi(\cdot)$ есть собственная функция оператора $S_1(\lambda)$, ассоциированная собственным значением $\xi(\lambda)$, т.е.,

$$\xi(\lambda)\varphi(x) = \Delta(\lambda)\varphi(x) - \frac{v_0^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(s)ds}{\omega(x-s) - \lambda}.$$

Разлагая функцию $\varphi(\cdot)$ в ряд Фурье по базису $\{\exp(ikx)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ получим

$$\xi(\lambda) c_k \exp(ikx) = \Delta(\lambda) c_k \exp(ikx) - \frac{v_0^2 c_k}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(iks)ds}{\omega(x-s) - \lambda}$$

или

$$\xi(\lambda)=\Delta(\lambda)-\frac{v_0^2}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(ks)ds}{\omega(s)-\lambda}.$$

Здесь c_k, $k\in\mathbb{Z}$ – коэффициенты Фурье функции $\varphi(\cdot)$ по базису $\{\exp(ikx)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Так как в последней формуле правая часть зависит от k, заменяя в ней $\xi(\lambda)$ на $\xi_k(\lambda)$ получим, что для любого $k\in\mathbb{Z}$ число $\xi_k(\lambda)$ является собственным значением оператора $S_1(\lambda)$, а соответствующая собственная функция имеет вид $\varphi_k(x):=\exp(ikx)$. Очевидно, что для любых $k\in\mathbb{Z}$ и $\lambda\in\mathbb{R}\setminus([m;M]\cup\Delta_0)$ имеет место равенство $\xi_k(\lambda)=\xi_{-k}(\lambda)$. Поэтому при всех $k\in\mathbb{N}$ собственное значение $\xi_k(\lambda)$ имеет кратность по крайней мере 2. Свойство 5 доказано.

Следствие 4. *Пусть параметры функции $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $w(\cdot,\cdot)$ определены по равенствам* (10). *Если при некотором $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ число $\lambda_k\in\mathbb{R}\setminus([m;M]\cup\Delta_0)$ является решением уравнения*

$$u_0-\lambda-\frac{v_0^2}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1+\cos(ks))ds}{\omega(s)-\lambda}=0,$$

то число λ_k является собственным значением оператора $\mathcal{A}$. Причем при $k\in\mathbb{N}$ собственное значение λ_k имеет кратность по крайней мере 2, а соответствующая вектор-функция имеет вид: $f^{(k)}:=(f_1^{(k)},f_2^{(k)})$, где

$$f_1^{(k)}(x):=\exp(ikx),\quad f_2^{(k)}(x,y):=\frac{v_0(f_1^{(k)}(x)+f_1^{(k)}(y))}{\omega(x-y)-\lambda_k}.$$

Литература

1. I. Schur. Über potenzreihen, die im innern des einheitskreises beschränkt sint. J. Reine Angew. Math., **147** (1917), 205–232.

2. E. V. Haynsworth. Determination of the inertia of a partitioned Hermitian matrix. Linear Algebra Appl., **1**:1 (1968), 73–81.

3. М. Г. Крейн. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. Матем. сборник, **20** (1947), 365–404.

4. F. Zhang. The Schur complement and its applications. Vol. 4 of Numerical Methods and Algorithms. Springer, New York, 2005.

5. H. Bart, I. C. Gohberg, M. A. Kaashoek, A. C. V. Ran. Schur complements and state space realizations. Linear Algebra Appl., **399** (2005), 203–224.

6. R. Nagel. Well-posedness and positivity for systems of linear evolution equations. Confer. Sem. Mat. Univ. Bari, **203** (1985), 1–29.

7. R. Nagel. The spectrum of unbounded operator matrices with non-diagonal domain. J. Func. Anal., **89**:2 (1990), 291–302.

8. F. V. Atkinson, H. Langer, R. Menniken, A. A. Shkalikov. The essential spectrum of some matrix operators. Math. Nachr., **167** (1994), 5–20.

9. C. Tretter. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008.

10. В. А. Малышев, Р. А. Минлос. Кластерные операторы. Труды семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 9 (1983), 63–80.

11. К. О. Фридрихс. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1969.

12. D. Mattis. The few-body problem on a lattice. Rev. Modern Phys., **58**:2 (1986), 361–379.

13. С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов. Модель в теории возмущений существенного спектра многочастичных операторов. Матем. заметки, **73**:4 (2003), 556–564.

14. М. Э. Муминов. О выражении числа собственных значений модели Фридрихса. Матем. заметки, **82**:1 (2007), 75–83.

15. А. А. Владимиров. Оценки числа собственных значений самосопряженных оператор-функций. Матем. заметки, **74**:6 (2003), 839–848.

Бухарский государственный университет

Содержание