

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIV VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI**

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika-matematika fakulteti

“Matematika” kafedrasi

5460100 – “Matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr darajasini olish
uchun

Ismoilov Sunnatilloning

**« Shtols teoremasi va uning ba'zi tatbiqlari »
mavzusida**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

“Ish ko'rildi va himoyaga ruxsat
berildi”

Kafedra mudiri

_____ f-m. f. n. dots. I.M.Jo'rayev

« _____ » _____ 2017 y.

Ilmiy rahbar _____ katta o'qt. A. X. Avezov

“ _____ ” _____ 2017 й.

Taqrizchi _____ o'qt. O.A. Umarov

“ _____ ” _____ 2017 y.

«Himoya qilishga ruxsat berildi »

Fakul'tet dekani

prof. Sh.M. Mirzayev

“ ____ ” _____ 06 ____ 2017 y.

Buxoro – 2017

Mundarija.

Kirish	3-10
I BOB. KETMA-KETLIKLER HAQIDA	
1.1.Sonli ketma-ketlik limiti.....	10-28
1.2.Funksiyaning limiti.....	29-36
Birinchi bob xulosasi	37
II BOB. Shtols teoremasi va uning ba'zi tatbiqi	
2.1.Lapital qoidasi.....	38-48
2.2.Boshqa turdagi aniqlashlarni hisoblash. Shtols teoremasi tatbiqi.....	49-61
Ikkinchi bob xulosasi.....	62
Xotima.....	63
Foydalanilgan adabiyotlar.....	64

KIRISH

Vatanimizning kelajagi, xalqimizning ertangi kuni, mamlakatimizning jahon hamjamiyatidagi obro'-e'tibori avvalombor farzandlarimizning unib-o'sib ulg'ayib qanday inson bo'lib hayotga kirib borishi bilan bog'liqdir. Biz bunday o'tkir haqiqatni hech qachon unutmasligimiz kerak

I. Karimov.

Bugun biz tarixiy davrda xalqimiz o'z oldiga ezgu maqsadlar qo'yib, tinch osoyishta hayot kechirayotgan, avvalombor o'z kuchi va fuqarolik jamiyati qurish yo'lida ulkan natijalarni qo'lga kiritayotgan avvalombor o'z kuch va imkoniyatlari-ga tayanib, demokratik davlat va fuqarolik jamiyati qurish yo'lida ulkan natijalarni qo'lga kiritayotgan bir zamonda yashamoqdamiz.

Men Abdulla Avloniyning "tarbiya biz uchun yo hayot yo mamot yo halokat yo saodat yo falokat masalasidir" degan fikrini ko'p mushohada qilaman. Buyuk ma'rifatparvarlarning bu so'zlari asrimiz boshida millatimiz uchun qanchalik muhim va dolzarb bo'lgan bo'lsa hozirgi kunda biz uchun ham shunchalik, balki undan ko'ra muhim va dolzarbdir.

Chunki ta'lim-tarbiya ong mahsuli, lekin ayni vaqtda ong darajasi va uning rivojini ham belgilaydigan omildir. Binobarin ta'lim-tarbiya tizimini o'zgartirmasdan turib, biz ko'zlagan oliy maqsad, ozod va obod jamiyatni barpo etib bo'lmaydi.

Barchamizga ma'lumki kelajak avlod haqida qayg'urish, sog'lom barkamol avlodni tarbiyalab yetishtirishga intilish bizning milliy xususiyatimizdir. Ta'limning yangi modeli jamiyatda mustaqil fikrlovchi erkin shaxsning shakllanishiga olib keladi. Va biz o'zining qadr-qimmatini, anglaydigan, irodasi baquvvat, iymoni butun, hayotda aniq maqsadga ega bo'lgan insonlarni tarbiyalash imkoniyatiga ega bo'lamiz. Shuni unutmasligimiz kerakki, kelajagimiz poydevori

bilim dargohlarida yaratiladigan, boshqacha aytganda xalqimizning ertangi kuni qanday bo'lishi farzandlarimizning bugun qanday ta'lim-tarbiya olishiga bog'liq.

Ta'limni tarbiyadan, tarbiyani esa ta'limdan ajratib bo'lmaydi, bu sharqona qarash, sharqona hayot falsafasi. Shu maqsadda yurtimizda kadrlar tayyorlash milliy dasturining uzviy va mantiqiy davomi bo'lmish 2004-2005 yillarda maktab ta'limini rivojlantirish umummilliy davlat dasturi qabul qilindi. Ushbu dasturga muvofiq, yurtimizda mavjud bo'lgan o'n mingga yaqin umumta'lim maktabining moddiy texnik bazasini mustahkamlash, mazmunini tubdan takomillashtirish, o'qituvchilarning mehnatini moddiy va ma'naviy rivojlantirish bo'yicha katta ishlar qilinmoqda.

Mamlakatimizda sog'lom va barkamol avlodni tarbiyalash, yoshlarning o'z ijodiy va intellektual salohiyatini ro'yobga chiqarishi, mamlakatimiz yigit qizlari XXI asr talablariga to'liq javob beradigan shaxslarni voyaga yetkazish uchun shart-sharoitlar va imkoniyatlarni yaratish bo'yicha keng ko'lamli aniq yo'naltirilgan chora-tadbirlarni amalga oshirish maqsadida, shuningdek, O'zbekiston Respublikasining 2010-yilni "Barkamol avlod yili" deb e'lon qilinganligi munosabati bilan: "Barkamol avlod yili" Davlat dasturi tasdiqlandi va unda quyidagilar asosiy vazifa etib belgilandi:

Bolalar va yoshlarning huquq manfaatlarini himoya qilishga, ularni barkamol rivojlantirishning huquqiy asoslarini mustahkamlashga qaratilgan me'yoriy-huquqiy ba'zani takomillashtirish, amaldagi qonunchilik hamda me'yoriy hujjatlarga zamon talablariga mos o'zgartirish va qo'shimchalar keltirish;

Tayyorlangan mutaxsislarga real iqtisodiy tarmoqlari va sohalaridagi mavjud talablarga alohida e'tibor qaratgan holda, o'sib kelayotgan yosh avlodga ta'lim tarbiya berish sohasida moddiy-texnika bazasini yanada mustahkamlash, undan oqilona va samarali foydalanishni ta'minlash, davlat ta'lim standartlarini o'quv dasturi va o'quv uslubiy adabiyotlarni takomillashtirish;

ta'lim jarayoniga yangi axborot kamunikatsiya va pedagogik texnologiyalarni elektron darsliklar, multimediya vositalari keng joriy etish orqali mamlakatimiz

talablarida kasb-hunar kollejlari, litsey va o'quv yurtlari o'qitish talablarini tubdan yaxshilash, ta'lim muassasalarining o'quv laboratoriya uskunalari, kompyuter texnikasi bilan ta'minlash, shuningdek o'quvchilar va murabbiylar mehnatini moddiy hamda ma'naviy rag'batlantirish bo'yicha samarali tizimni yanada rivojlantirish;

ilm-fanni yanada rivojlantirish, iqtidorli va qobiliyatli yoshlarni ilmiy faoliyatga keng jalb etish, ularni o'z intellektual salohiyatini ro'yobga chiqarish uchun sharoit yaratishga doir kompleks chora tadbirlarni ishlab chiqarish.

yosh avlodni jismonan barkamol etib tayinlash bolalar sportini rivojlantirish sohasida, yoshlarni ayniqsa qishloq qizlarini sport bilan muntazam shug'ullanishiga keng jalb etish, yangi sport majmualarini stadionlar va inshootlarni qurish, ularni zamonaviy sport anjomlari bilan ta'minlash. Malakali ustoz va murabbiylar bilan mustahkamlash bo'yicha amalga oshirilayotgan ishlarni kuchaytirish. Birinchi prezidentimizning ma'ruzasida mamlakatni rivojlantirish, yangilash, modernizatsiya qilishning to'g'ri tanlangan strategiyasi qabul qilingan. 2009-2012 yillarga mo'ljallangan "Inqirozga qarshi choralar" dasturini bajarish borasida 2009-yilda kuch va imkoniyatlarning safarbar qilinishi tufayli global inqirozning oqibatlari va tahdidlariga nafaqat bardosh berishga balki iqtisodiy va ijtimoiy rivojlantirishning barqaror sur'atlarini xalq bardamligi va farovonligini oshirishni ta'minlashga muvofiq bo'lganligi qayd etildi.

Uzluksiz ta'lim quyidagi ta'lim turlarini o'z ichiga oladi. Maktabgacha ta'lim, umumiy ta'lim, o'rta maxsus ta'lim, kasb hunar ta'limi, oliy ta'lim, oliy o'quv yurtlaridan keyingi ta'lim, kadrlar malakasini oshirish va qayta tayyorlash maktabdan tashqari ta'lim.

Bugungi kunda ham ta'lim-tarbiya sohasiga katta e'tibor qaratilmoqda. Xususan, maktabgacha ta'lim tizimini yanada takomillashtirish, moddiy-texnika bazasini mustahkamlash, maktabgacha ta'lim muassasalari tarmog'ini kengaytirish, malakali pedagog kadrlar bilan ta'minlash, bolalarni maktab ta'limiga tayyorlash darajasini tubdan yaxshilash, ta'lim-tarbiya jarayoniga zamonaviy ta'lim dasturlari

va texnologiyalarini tatbiq etish, bolalarni har tomonlama intellektual, axloqiy, estetik va jismoniy rivojlantirish uchun shart-sharoitlar yaratish maqsadida Prezidentimiz Shavkat Mirziyoyev tomonidan “2017-2021-yillarda maktabgacha ta'lim tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida” qaror qabul qilindi.

Ushbu dastur (keyingi o'rinlarda Dastur deb yuritiladi) ning asosiy maqsadli vazifalari va yo'nalishlari quyidagilarni o'z ichiga oladi:

Ilg'or xorijiy tajribani hisobga olgan holda bolalarni har tomonlama intellektual, axloqiy, estetik va jismoniy rivojlantirish sharoitlarini yaratish;

maktabgacha ta'lim sifatini oshirish, maktabgacha ta'lim muassasalarida bolalarni maktabga sifatli tayyorlashni tubdan yaxshilash, ta'lim-tarbiya jarayoniga jahon amaliyotida keng qo'llaniladigan zamonaviy ta'lim dasturlari va texnologiyalarini joriy etish;

maktabgacha ta'lim muassasalarida 5-6 yoshdagi bolalarni maktab ta'limiga tayyorlash bo'yicha 6100 ta qisqa muddatli guruhni tashkil etish; zamonaviy pedagogik texnologiyalar va uslublarni inobatga olgan holda maktabgacha ta'lim muassasalariga pedagog kadrlarni tayyorlash va malakasini oshirishning o'quv reja va dasturlarini takomillashtirish;

2200 ta maktabgacha ta'lim muassasasining moddiy-texnika bazasini mustahkamlash, shu jumladan qishloq joylarda maktabgacha ta'lim muassasalarini yangidan qurish, ularni zamonaviy talablarga javob beradigan inventar, jihoz, o'quv-metodik qo'llanmalar va multimedialli vositalar bilan ta'minlash.

Bundan tashqari, yurboshimiz akademik litseylarda o'quv jarayoni sifati va samaradorligini tubdan oshirish, akademik litseylarda umumta'lim maktablarining eng qobiliyatli bitiruvchilarini jamlash, umumta'lim maktablari bitiruvchilarining tanlangan kasblar va mutaxassisliklarni egallab olishga bo'lgan ehtiyojini qondirish uchun shart-sharoitlarni yanada kengaytirish maqsadida “O'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi muassasalari faoliyatini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari

to'g'risida" (O'zbekiston Respublikasi qonun hujjatlari to'plami, 2017-y., 11-son, 156-modda) qaror qabul qildi. Ushbu dastur quyidagilarni o'z ichiga oladi:

O'zbekiston Respublikasi Iqtisodiyot vazirligi, Moliya vazirligi, Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi, Madaniyat vazirligi, Sog'liqni saqlash vazirligi, O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining O'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi markazining respublikada faoliyat ko'rsatayotgan akademik litseylar sonini optimallashtirishni, akademik litseylarda o'quv jarayoni sifatini tubdan yaxshilash chora-tadbirlari amalga oshirilishini nazarda tutuvchi, jumladan:

moddiy-texnik va o'quv-pedagogik bazasi nisbatan past darajali ba'zi akademik litseylarni tugatish, tugatilayotgan akademik litseylarning 1-bosqichlariga o'quvchilarni qabul qilishni o'quv yilidan boshlab to'xtatish;

faoliyati ko'rsatkichlari eng past bo'lgan ba'zi akademik litseylarni bosqichma-bosqich kasb-hunar kollejlariga aylantirish;

kasb-hunar kollejlariga aylantirilayotgan akademik litseylarning 2-va 3-bosqichlari o'quvchilari kontingentini kasb-hunar kollejlariga aylantirilayotgan akademik litseylarning binolarida amaldagi o'quv dasturlari va o'qitish shartlari bo'yicha belgilangan tartibda o'qitishni tugallash;

o'quv jarayoni samaradorligini yanada oshirish va akademik litseylar bitiruvchilarining oliy ta'lim muassasalariga o'qishga kirishi ko'rsatkichlarini oshirish chora-tadbirlari dasturi haqidagi taklifi qabul qilish.

Oldin bayon qilinganlar bilan birgalikda quyidagilar akademik litseylarning muhim vazifalari va faoliyati yo'nalishlari etib belgilansdi:

umumta'lim maktablarining eng iste'dodli o'quvchilarini tanlash, ularning intellektual qobiliyatlarini yanada rivojlantirish va o'qishni oliy ta'lim muassasalarida davom ettirishga maqsadli chuqur tayyorlash;

o'quvchilarning ijodiy salohiyati namoyon bo'lishi va faollashishiga ko'maklashuvchi, individual iste'dodlarni va har bir o'quvchining qobiliyatlari hamda xususiyatlarini hisobga olgan holda bilimlarni egallab olish jarayonida

mustaqil faoliyat ko'nikmalarini shakllantiruvchi va rivojlantiruvchi ta'lim muhitini yaratish;

ilg'or mahalliy va xorijiy ta'lim muassasalarining tajribasini hisobga olgan holda ta'lim jarayonini tashkil etishning zamonaviy shakllarini joriy etish va uning mazmunini doimiy ravishda yangilab borish.

Mustaqillik yillarida O'zbekiston Respublikasida uzluksiz ta'limning noyob tizimi yaratildi, ilmiy-tadqiqot faoliyati, oliy malakali ilmiy va ilmiy-pedagog kadrlar tayyorlash va attestatsiyadan o'tkazish samaradorligini oshirishga, mamlakatning ijtimoiy va iqtisodiy taraqqiyotida ilm-fanning rolini kuchaytirishga yo'naltirilgan salmoqli ishlar amalga oshirildi.

Bitiruv malakaviy ishi mavzusining dolzarbligi: Bizga ma'lumki hayotimizdagi ko'pgina masalalarning yechimi hosila tushunchasiga bog'liq. Aniqmasliklarni ochish uchun ham hosila tushunchalaridan foydalaniladi. Ketma – ketliklarda xususan ularning limitlarini hisoblashda ham aniqmaslik tushunchalari mavjud, ba'zan bu aniqmasliklarni ochishda hosila tushunchasidan foydalanganimizda ortiqcha noqulayliklarga duch kelamiz. Bu aniqmasliklarni ochishda bizga Shtols teoremasi qulaylik tug'diradi. Bitiruv malakaviy ishida biz Shtols teoremasi va uning ba'zi tatbiqlarini o'rganib chiqdik.

Tadqiqot obyekti va predmeti: sonli ketma-ketliklar, chegaralangan va chegaralanmagan ketma-ketliklar, yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi ketma-ketliklar, cheksiz katta va kichik funksiyalar, funksiyaning limiti, ajoyib limitlar, Lapital qoidasi, Shtols teoremasi,

Ishning maqsadi va vazifalari: Bitiruv malakaviy ishining maqsadi aniqmasliklarni ochishning hayotiy hamda nazariy tatbiqlarini o'rganish

Tadqiqot usuli va uslubiyoti: Matematik analiz usullari hamda, algebra va sonlar nazaryasi metodlari.

Xulosa va takliflar: Mazkur bitiruv malakaviy ishi amaliy va nazariy ahamiyatga ega bo'lib, ketma-ketliklar limitini topishdagi aniqmaslilarni ochishda qo'shimcha ta'rif va teoremlardan foydalanilgan.

Ishning hajmi va tuzilishi: Bitiruv malakaviy ishi kirish, ikki bob to'rt paragraf. Xulosa hamda foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan tashkil topgan bo'lib, Bitiruv malakaviy ishining hajmi 64 sahifadan iborat.

I-BOB KETMA- KETLIKLER HAQIDA

1.1 SONLI KETMA-KETLIKLER

Agar sonlarning natural qatori $1, 2, \dots, n, \dots$ dagi har bir n songa ma'lum bir qonun qoida bo'yicha biror x_n haqiqiy son mos keltirilsa, u holda nomerlangan haqiqiy sonlar to'plami $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ (1) ga sonli ketma-ketlik yoki ketma-ketlik deyiladi. x_n sonlarni (1) ning elementlari yoki hadlari deyiladi.

Bizga ixtiyoriy $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ va $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ ketma-ketliklar berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketliklar yig'indisi va ayirmasi deb $\{x_n \pm y_n\}$, ko'paytmasi yoki bo'linmasi deb $\{x_n y_n\}$ yoki $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ ketma-ketlikka aytamiz.

Agar shunday haqiqiy M soni (m soni) topilsa va bunda $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) shartlar bajarilsa u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi. Bunda M soni (m soni) x_n ketma-ketlikning yuqori chegarasi (quyi chegarasi) deyiladi.

Masalan : $-1, -4, -9, \dots, -n^2$ ketma-ketlik yuqoridan -1 bilan, $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ ketma-ketlik esa quyidan 1 bilan chegaralangan.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham yuqoridan ham quyidan chegaralangan bo'lsa, ya'ni $m \leq x_n \leq M$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

Chegaralangan ketma-ketlikni $|x_n| \leq M$ ko'rinishida ya'ni $-M \leq x_n \leq M$ ko'rinishida yozish mumkin.

Masalan: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ ketma-ketlik yuqoridan 1 bilan quyidan 0 bilan chegaralangan.

Agar har qanday musbat A soni uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $|x_n| > A$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x_n element topilsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralanmagan deyiladi.

1.1.1-misol. $-1, -4, -9, \dots, n^2, \dots$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan ammo quyidan chegaralanmagan. Bu ketma-ketlikning yuqori chegarasi -1 dan kichik bo'lmagan ixtiyoriy sonni olish mumkin.

1.1.2-misol. $-n-1, -n, \dots, 1, 2, 3, \dots, n, n+1$ ketma-ketlik chegaralanmagan. Haqiqatan ham A musbat soni qanday qilib olinmasin, bu ketma-ketlikning elementlari orasidan shunday element topiladiki, u A dan katta bo'ladi.

Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar.

1.1.1-ta'rif: Ixtiyoriy A soni uchun shunday N nomer ko'rsatish mumkin bo'lsaki $n \geq N$ bo'lganda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hamma elementlari $|x_n| > A$ tengsizlikni qanoatlantirsin, u holda $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi.

Ma'lumki har qanday cheksiz katta ketma-ketlik chegaralanmagan bo'ladi. Chunki ixtiyoriy $A > 0$ son uchun shunday N nomer ko'rsatish mumkinki, $n \geq N$ da boshlab x_n ning hamma elementlari $|x_n| > A$ tengsizlikni qanoatlantiradi va demak ixtiyoriy $A > 0$ son uchun $|x_n| > A$ tengsizlikni qanoatlantiradigan hech bo'lmaganda bitta x_n element topish mumkin. Biroq chegaralanmagan ketma-ketlik cheksiz katta bo'lmasligi ham mumkin.

1.1.3-misol. Chegaralanmagan $1, 2, 1, 3, \dots, 1, n, \dots$ ketma-ketlik cheksiz katta bo'la olmaydi, chunki $A > 1$ da $|x_n| > A$ tengsizlik toq nomerli barcha x_n elementlar uchun bajarilmaydi.

1.1.2-ta'rif: Ixtiyoriy musbat ε son uchun shunday N nomer ko'rsatish mumkin bo'lsaki $n \geq N$ dan boshlab $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlikning hamma elementlari $|\alpha_n| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.

1.1.4-misol. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ ketma-ketlik cheksiz kichikligini isbotlang.

$n \geq N$ da $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$. Shuning uchun berilgan ε bo'yicha N nomerni $\frac{1}{N} < \varepsilon$ shartdan topish mumkin.

Masalan, $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ deb olsa bo'ladi. Cheksiz kichik ketma-ketlikning asosiy xossalari.

1.1.1-teorema: Ikki cheksiz kichik ketma-ketlikning yig'indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot. $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklar bo'lsin. $\{\alpha_n + \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichik ekanini isbot qilamiz. ε -ixtiyoriy musbat son, N_1 esa $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajarilishi boshlangan, N_2 esa $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajarilishi boshlangan nomerlar bo'lsin. (bunday N_1 va N_2 cheksiz kichik ketma-ketliklar ta'rifidan topiladi). Ikki son yig'indisining moduli ular modullari yig'indisidan katta bo'lmaganligi uchun ya'ni $|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$. N_1, N_2 nomerlarning kattasini N orqali belgilab, ya'ni $N = \max\{N_1, N_2\}$ shu N nomerdan boshlab, $|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli ekanini chiqaramiz. Bu esa $\{\alpha_n + \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichik ekanligini ko'rsatadi. Teorema isbotlandi

1.1.2-teorema: Ikki cheksiz kichik ketma-ketlikning ayirmasi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

1.1.3-teorema: Cheksiz kichik ketma-ketliklar chegaralangandir.

Isbot. $\{\alpha_n\}$ Cheksiz kichik ketma-ketlik $\varepsilon > 0$ biror son bo'lsin. So'ngra $|\alpha_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishi boshlangan nomer N bo'lsin. Ushbu N ta ε , $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{n-1}|$ sonning eng kattasini A deb belgilaymiz. Buni quyidagicha yozish mumkin. $A = \max\{\varepsilon, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{n-1}|\}$. Ma'lumki ixtiyoriy N nomer uchun $|\alpha_n| \leq A$ tengsizlik bajariladi bu esa ketma-ketlikning chegaralanganliginini ko'rsatadi. Teorema isbotlandi.

1.1.4-teorema: Chegaralangan ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlikka ko'paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlikdan iborat.

Isbot. $\{x_n\}$ – chegaralangan, $\{\alpha_n\}$ – cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsin. $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralanganligi uchun shunday $A > 0$ soni mavjudki, ixtiyoriy element $\{x_n\}$ uchun $|x_n| \leq A$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ixtiyoriy musbat ε sonini olamiz. $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo'lganidan musbat son $\frac{\varepsilon}{A}$ uchun shunday N nomer ko'rsatish mumkinki, $n \geq N$ da $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$ tengsizlik bajariladi. Bu holda $n \geq N$ da $|x_n \alpha_n| = |x_n| |\alpha_n| < A \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$ shuning uchun $\{x_n \alpha_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichikdir. Teorema isbotlandi.

Natija: Ixtiyoriy chekli sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklar ko'paytmasi ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Ikki cheksiz kichik ketma-ketlikning nisbati ixtiyoriy turdagi ketma-ketlik bo'lishi mumkin. Hatto ma'noga ega bo'lmasligi mumkin.

1.1.5-misol. $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$ bo'lsa, $\left\{ \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right\}$ ketma-ketlikning hamma elementi birga teng bo'ladi. Agar $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n^2}$ desak, u holda $\left\{ \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right\}$ ketma-ketlik cheksiz katta va aksincha, agar $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$ desak, $\left\{ \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi. Agar $\{\beta_n\}$ ning cheksiz ko'p elementlari noldan iborat bo'lsa, u holda $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ nisbat ma'noga ega emas.

1.1.5-teorema: Agar $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlikning hamma elementlari biror c songa teng bo'lsa, u holda $c = 0$ bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $c \neq 0$ $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$, $\varepsilon > 0$ deb olamiz. Bu ε songa mos keluvchi N nomerdan boshlab, $|\alpha_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. $\alpha_n = c$ va $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$ bo'lgani uchun, oxirgi tengsizlikni $|c| < \frac{|c|}{2}$ deb qayta yozish mumkin, bundan $1 < \frac{1}{2}$. Bu qarama-qarshilikdan $c \neq 0$ degan farazimiz o'rinli emasligi kelib chiqadi. Demak $c = 0$ ekan. Teorema isbotlandi

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning xossalari:

1.1.3-ta'rif: Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday a soni mavjud bo'lsaki ushbu $\{x_n - a\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyiladi va a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Agar shunday a soni mavjud bo'lsaki, har qanday musbat ε uchun shunday N nomer ko'rsatish mumkin bo'lib, $n \geq N$ dan boshlab bu ketma-ketlikning hamma x_n elementlari $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantirsa u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, a soni uning limiti bo'lsa bu holda quyidagicha yoziladi $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ yoki $n \rightarrow \infty$ da $x_n \rightarrow a$ bo'ladi. Ushbu $x_n - a = \alpha_n$ ayirma cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini bildiradi. Demak limiti a bo'lgan har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlikning ixtiyoriy x_n elementi $x_n = \alpha_n + a$ ko'rinishda bo'lishi mumkin, bunda α_n -cheksiz kichik ketma-ketlik elementidir.

1.1.6-teorema: Yaqinlashuvchi ketma-ketlik faqat bitta limitga ega.

Isbot. a va b yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lsin. U holda yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning elementlari uchun $x_n = \alpha_n + a$ ifodadan foydalanib, $x_n = \alpha_n + a$, $x_n = \beta_n + b$ ni yozamiz, α_n, β_n - cheksiz kichik ketma-ketlikning elementlari. Topilgan ifodalarni ayirib $\alpha_n - \beta_n = b - a$ ni hosil qilamiz $\{\alpha_n - \beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlikning hamma elementlari bitta o'zgarmas $b - a$

qiymatga ega bo'lgani uchun yuqorida keltirilgan 1.1.5-teoremaga asosan $b - a = 0$ ya'ni $b = a$ tenglik hosil bo'ladi. Teorema isbotlandi .

1.1.7-teorema:Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangandir.

1.1.8-teorema: Yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning yig'indisi ham yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'lib, uning limitlari $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklari limitlari yig'indisiga teng.

Isbot. a va b sonlar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning limiti bo'lsin, u holda $x_n = \alpha_n + a$, $y_n = \beta_n + b$ bu yerda $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlikdir. Demak $(x_n + y_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n$ shunday qilib $\{(x_n + y_n) - (a + b)\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlikdir va shuning uchun $\{x_n + y_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti $a + b$ ga teng bo'ladi.

1.1.9-teorema: Yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar ayirmasi yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'lib uning limiti $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar limitlari ayirmasiga teng.

1.1.10-teorema: Yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar ko'paytmasi yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'lib, uning limiti $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar limitlari ko'paytmasiga teng.

1.1.11-teorema. Agar $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsa, u holda biror n nomerdan boshlab $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlik aniqlangan va u cheksiz kichik bo'ladi.

1.1.12-teorema: Agar yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning elementlari biror nomerdan boshlab, $x_n \geq b$ ($x_n \leq b$) tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda bu ketma-ketlikning limiti a ham $a \geq b$ ($a \leq b$) tengsizlikni qanoatlantiradi.

Isbot. x_n ketma-ketlikning elementlari biror nomerdan boshlab $x_n \geq b$ tengsizlikni qanoatlantirsin, $a \geq b$ tengsizlikni isbot qilish talab etiladi. Faraz qilaylik, $a < b$ bo'lsin a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lgani uchun $\varepsilon = b - a$ uchun shunday N nomer ko'rsatish mumkinki: $n \geq N$ bo'lganda $|x_n - a| < b - a$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik ushbu ikki $-(b-a) \leq x_n - a \leq (b-a)$ tengsizlikka teng kuchli. Bu tengsizliklarning o'ng tomonida turgan $x_n - a \leq (b-a)$ tengsizlikdan foydalanib, $x_n \leq b$ ga ega bo'lamiz. Bu esa teorema shartiga zid $a \leq b$ ham shunga o'xshash chiqariladi. Teorema isbotlandi.

Natija: Agar yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketlikning elementlari biror nomerdan boshlab $x_n \leq y_n$ tengsizlikni qanoatlantirsa u holda ularning limitlari ham xuddi shunday $\lim x_n \leq \lim y_n$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Ya'ni $\lim x_n = a$ va $\lim y_n = b$ bo'lsa $a \leq b$ munosabat o'rinli bo'ladi.

1.1.13-teorema: $\{x_n\}$ va $\{z_n\}$ umumiy a limitga ega bo'lgan yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'lsin. Bundan tashqari, biror nomerdan boshlab $\{y_n\}$ ketma-ketlikning elementlari $x_n \leq y_n \leq z_n$ tengsizlikni qanoatlantirsin. U holda y_n ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, a limitga ega bo'ladi

Monoton ketma-ketliklar.

1.1.4-ta'rif: Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir keyingi elementi o'zidan avvalgi elementdan kichik (katta) bo'lmasa, ya'ni agar n nomerlar uchun $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$) tengsizlik bajarilsa bunday ketma-ketlik kamaymaydigan (o'smaydigan) ketma-ketlik deyiladi. Kamaymaydigan va o'smaydigan ketma-ketliklar bir nom bilan monoton ketma-ketliklar deb yuritiladi.

Agar $\{x_n\}$ monoton ketma-ketlikning elementlari hamma n nomerlar uchun $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi (kamayuvchi) deyiladi. O'suvchi yoki kamayuvchi ketma-ketliklar qat'iy monoton ketma-ketlik ham deyiladi.

Monoton ketma-ketliklar yoki yuqoridan yoki quyidan chegaralangan bo'ladi. O'smaydigan ketma-ketlik yuqoridan kamaymaydigan ketma-ketlik quyidan o'zining birinchi elementi bilan chegaralangan bo'ladi. Shuningdek agar o'smaydigan ketma-ketlik quyidan chegaralangan bo'lsa, hamda kamaydigan

ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lsa, bu ketma-ketliklar ikki tomondan chegaralangan ya'ni chegaralangan ketma-ketliklar deyiladi.

1.1.6-misol: $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots$ ketma-ketlik o'smaydigan ketma-ketlikdir. U yuqoridan o'zining birinchi elementi 1 bilan, quyidan esa nol bilan chegaralangandir.

1.1.7-misol. $1, 1, 2, 2, \dots, n, n, \dots$ ketma-ketlik kamaymaydigan ketma-ketlik. U quyidan o'zining birinchi elementi 1 bilan chegaralangan, yuqoridan esa chegaralanmagan.

1.1.8-misol. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}$ ketma-ketlik o'suvchi u ikki tomondan: quyidan o'zining birinchi elementi $\frac{1}{2}$ bilan, yuqoridan esa masalan, 1 soni bilan chegaralangandir.

1.1.14-teorema: Agar kamaymaydigan (o'smaydigan) $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa u holda u yaqinlashuvchi bo'ladi.

Bizga $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ sonlar ketma-ketligi va uning limiti biror a son berilgan bo'lsin.

1.1.4-ta'rif: Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganida ham shunday natural son $n_0 \in N$, mavjud bo'lsaki, $n > n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha sonlar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi. Limit uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ yoki $\lim x_n = a$ yoki $x_n \rightarrow a$ belgilashlardan foydalaniladi.

Bu ta'rifni qisqacha ixtiyoriy $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ ixtiyoriy $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ kabi ifodalash mumkin. Agar ta'rifdagi shartni qanoatlantiruvchi a son mavjud bo'lmasa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik limitga ega emas deyiladi.

1.1.5-ta'rif: Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ni cheksiz kichik miqdor deyiladi.

1.1.9-misol: 1) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$; 2) $\{x_n\} = \left\{-\frac{1}{n}\right\}$; 3) $\{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ lar cheksiz kichik

miqdorlar. Chunki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ qolgan misollar ham shu yo'sinda ko'rsatiladi.

1.1.6-ta'rif: Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topiladiki, ixtiyoriy $n > n_0$, uchun $|x_n| > \varepsilon$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ni cheksiz katta miqdor deyiladi.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $n_0 \in N$ topilsaki, $\forall n > n_0$ uchun $x_n > \varepsilon$ ($x_n < -\varepsilon$) bo'lsa, unda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti $+\infty$ ($-\infty$) deb olinadi va $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$) kabi belgilanadi.

Ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari. Faraz qilaylik ixtiyoriy $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlikning hadlaridan tuzilgan ushbu $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ ($n_1 < \dots < n_k < \dots, n_k \in N, k = 1, 2, \dots$) ketma-ketlik berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qiymiy ketma-ketligi deyiladi. $\{x_n\}$ ketma -ketlik qismaniy limitlarining eng kattasi berilgan ketma-ketlikning yuqori limiti deyiladi va $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$ kabi belgilanadi. $\{x_n\}$ ketma-ketlik qismaniy limitlarining eng kichigi berilgan ketma-ketlikning quyi limiti deyiladi va $\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$ kabi belgilanadi.

1.1.15-teorema: Har qanday ketma-ketlik quyi hamda yuqori limitlarga ega. Ixtiyoriy ketma-ketliklar hamda sonli to'plamlarning ayrim xossalari.

Sonli ketma-ketliklarning qismaniy ketma-ketligi $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ biror sonli ketma-ketlik bo'lsin. Butun sonlardan tuzilgan ixtiyoriy o'suvchi $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ nomerli elementlardan tuzilgan ketma-ketlikni ko'ramiz. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ nomerli elementlarini tanlab olamiz va ular k_n sonlar tartibida joylashtiramiz: $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$, hosil bo'lgan sonli ketma-ketlikni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qismaniy ketma-ketligi deyishimiz mumkin (bu holda $k_n = n$). Yaqinlashuvchi ketma-ketlik qismaniy ketma-ketligining quyidagi xossasini aytib

o'tamiz, agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib a soni uning limiti bo'lsa, u holda bu ketma-ketlikning ixtiyoriy qisman ketma-ketligi ham yaqinlashuvchi va limiti a soni bo'ladi. Haqiqatdan ham, $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik va a uning limiti bo'lganidan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ bo'yicha shunday N nomer ko'rsatish mumkinki $n \geq N$ bo'lganda $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror qisman ketma-ketligi $\{x_{k_n}\}$ ni olamiz. $\{x_{k_n}\}$ qisman ketma-ketlikning elementlari $|x_{k_n} - a| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi bo'lib hisoblanadi. Shuning uchun $\{x_{k_n}\}$ qisman ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti a songa teng. Teskari tasdiq ham o'rinli: Agar berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hamma qisman ketma-ketliklari yaqinlashuvchi bo'lsa u holda bu qisman ketma-ketliklarning limitlari bitta va faqat bitta a songa teng bo'ladi. Xususan shu songa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi. Haqiqatdan ham $\{x_n\}$ ketma-ketlik qisman ketma-ketlik bo'lgani uchun u ham yaqinlashuvchi bo'ladi va biror a son uning limiti bo'ladi. Lekin bunday ixtiyoriy boshqa bir qisman ketma-ketlik ham shuningdek yaqinlashuvchi va o'sha a limitga ega bo'ladi. Cheksiz katta ketma-ketliklarning qisman ketma-ketliklari ham shunday xossaga ega bo'ladi. Masalan har qanday cheksiz katta ketma-ketlikning qisman ketma-ketligi ham cheksiz katta bo'ladi. Har bir yaqinlashuvchi ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi monoton qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. Haqiqatdan ham agar $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'lib, a uning limiti bo'lsa u holda quyidagi ikki holning bittasi o'rinli bo'ladi:

1) ketma-ketlikning cheksiz ko'p bir-biriga teng a elementlari bor.

2) a nuqtaning ixtiyoriy ε atrofida $x_n < a$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi cheksiz ko'p elementlar bor. Agar bu ikki holning birortasi ham o'rinli bo'lmaganda edi, a nuqtaning ε -atrofida ketma-ketlikning chekli sondagi elementlari yotardi, ya'ni a soni ketma-ketlik limiti bo'la olmasdi. Birinchi holda yaqinlashuvchi monoton qisman ketma-ketlik bir-biriga teng a elementlardan tuzilgan qisman ketma-ketlik bo'ladi, ya'ni birinchi holni asoslashimiz shart emas.

Shuning uchun ikkinchi hol bilan chegaralanamiz, ya'ni a nuqtaning ixtiyoriy ε atrofida $x_n < a$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi cheksiz ko'p x_n elementlar yotadi deylik. Boshqacha aytganda ixtiyoriy $(a - \varepsilon, a)$ intervalda ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari yotgan holni ko'ramiz. x_{k_1} shunday elementlardan biri bo'lsin. $x_{k_1} < a$, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning (x_{k_1}, a) intervalda yotuvchi cheksiz ko'p elementlari ichidan k_2 nomer k_1 nomerdan katta bo'lgan biror x_{k_2} elementni tanlaymiz $\{x_n\}$ ketma-ketlikning (x_{k_2}, a) intervalda yotuvchi cheksiz ko'p elementlar ichidan biror x_{k_3} elementni shunday tanlaymizki, bunda $k_3 > k_2$ bo'ladi. Buni cheksiz davom ettirib $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan monoton o'suvchi $\{x_{k_n}\}$ qisman ketma-ketlik ajratamiz. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik qisman ketma-ketliklarining xossasiga asosan $\{x_{k_n}\}$ ketma-ketlik, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lgan a songa yaqinlashadi. Har bir cheksiz katta ketma-ketlikdan cheksiz katta monoton qisman ketma-ketlik ajratish mumkin.

Ketma-ketlikning limit nuqtalari.

1.1.7-ta'rif. Agar cheksiz to'g'ri chiziqning x nuqtasining ixtiyoriy ε - atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari bor bo'lsa, u holda, shu x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limit nuqtasi deyiladi.

1.1.16-teorema: Agar x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limit nuqtasi bo'lsa, u holda bu ketma-ketlikdan shu x nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qisman ketma-ketlik ajratish mumkin.

Isbot. x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limit nuqtasi bo'lsin. x nuqtaning ε - atrofidagi nuqtani qaraymiz bunda ε navbat bilan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ ga teng. Bu atroflarning birinchisidan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x_{k_1} elementini olamiz, ikkinchi atrofidan shunday x_{k_2} olamizki bunda, $k_2 > k_1$. Uchinchi atrofdan shunday x_{k_3} elementni olamizki, bunda $k_3 > k_2$. Bu jarayonni cheksiz davom ettirish mumkin,

chunki x element ning ixtiyoriy ε – atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari bor. Natijada biz $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x ga yaqinlashuvchi $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$ qisman ketma-ketligiga ega bo'lamiz chunki, $|x_{k_n} - x| < \frac{1}{n}$. teorema isbotlandi.

Teskari tasdiq ham o'rinli: agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan x nuqtaga yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, u holda x soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limit nuqtasi bo'ladi. Haqiqatdan ham, x nuqtaning ixtiyoriy ε – atrofida ajratilgan qisman ketma-ketlikning va $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari yotadi. Shunday qilib, ketma-ketlik limit nuqtasining 1-ta'rifiga teng kuchli bo'lgan 2-ta'rifni berish mumkin.

1.1.8-ta'rif: Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan x nuqtaga yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, x nuqta $\{x_n\}$ ning limit nuqtasi deyiladi.

1.1.17-teorema. Har bir yaqinlashuvchi ketma-ketlik faqat bitta limit nuqtaga ega bo'lib bu nuqta ketma-ketlikning limiti bilan usma-ust tushadi.

Isbot. Yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti a uning limit nuqtasi bo'ladi, a nuqtaning ixtiyoriy ε – atrofida biror nomerdan boshlab ketma-ketlikning hamma elementlari yotadi. Endi yaqinlashuvchi ketma-ketlikning boshqa limit nuqtasi yo'qligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham b - yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limit nuqtasi bo'lsin. Teoremaga asosan $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan b ga yaqinlashuvchi $\{x_{k_n}\}$ qisman ketma-ketlik ajratish mumkin, lekin yaqinlashuvchi ketma-ketlikning ixtiyoriy qisman ketma-ketligi a limitga ega va shuning uchun $a = b$.

Ikkita limit nuqtaga ega bo'lgan ketma-ketlikka misol keltiramiz. Ushbu $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, \dots, \frac{1}{n}, 2, \dots$ ketma-ketlik faqat ikkita 0 va 2 limit nuqtalarga ega ekanligini isbotlaymiz. Ma'lumki bu nuqtalar ketma-ketlikning limit nuqtalaridir. Chunki bu ketma-ketlikning ushbu $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ qisman ketma-ketligining limiti noldan iborat. $2, 2, \dots, 2$ qisman ketma-ketligining limiti esa 2 (2-ta'rif: agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan

x nuqtaga yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, x nuqta $\{x_n\}$ ning limit nuqtasi deyiladi) dan iborat. Berilgan ketma-ketlikning boshqa nuqtalari yo'q haqiqatdan ham x -son o'qining 0 va 2 nuqtalardan farqli ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Endi $0, 2$ va x nuqtalarni n ig ustma-ust tushmaydigan ε atroflarini qaraymiz. 0 va 2 nuqtalrning atroflarida biror nomerdan boshlab ketma-ketlikning hamma elementlari yotadi va shuning uchun x nuqtaning ko'rsatilayotgan ε – atrofida ketma-ketlikning faqat chekli sondagi elementlari yotadi, ya'ni x limit nuqta bo'la olmaydi.

1-eslatma: Biz $\{x\}$ to'plamning aniq quyi chegarasi $\bar{x}$ $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limit nutasi ekanini isbotladik. Endi $\bar{x}$ dan katta birorta ham x son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limit nuqtasi bo'la olmasligini ya'ni $\bar{x}$ bu ketma-ketlikning eng katta limit nuqtasi ekanini isbotlaymiz. x son $\bar{x}$ dan katta ixtiyoriy son bo'lsin. $\varepsilon > 0$ ni shunday kichik qilib olamizki, $x - \varepsilon$ son ham $\bar{x}$ dan katta bo'lsin. $\{x\}$ to'plamdan shunday x nuqta topiladiki u $x' - \varepsilon$ dan chapdan yotadi. $\{x\}$ to'plamning kiritilishidan ko'ra x nuqtaning ε atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlik ko'pi bilan chekli sonda elementlari yotadi. Bu esa x soni limit nuqtasi bo'la olmasligini isbotlaydi.

1.1.9-ta'rif: $\{x_n\}$ ketma-ketlikning eng katta limit nuqtasi bo'lsin $\bar{x}$ bu ketma-ketlikning yuqori limiti deyiladi va $\bar{x} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$ kabi belgilanadi. Quyi limiti $\underline{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ kabi belgilanadi.

Yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish haqida teorema. **(Balsano–Veyershtrass teoremasi)**. Ixtiyoriy chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin.

Isbot. Ketma-ketlik chegaralangani uchun u hech bo'lmaganda bitta limit nuqta x ga ega bo'ladi. Bu holda ketma-ketlikda x nuqtaga yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin.

1-eslatma: Ixtiyoriy chegaralangan ketma-ketlikdan monoton qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. Haqiqatdan ham, Bolsano –Veyershtass teoremasiga asosan har qanday chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin.

2-eslatma: $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lib, uning elementlari esa $[a, b]$ kesmada yotsin deylik.

Bunda ixtiyoriy yaqinlashuvchi $\{x_{k_n}\}$ qisman ketma-ketlikning limiti c ham shu $[a, b]$ kesmada yotadi. Haqiqatdan ham, $a \leq x_{k_n} \leq b$ bo'lgani uchun $a \leq c \leq b$ tengsizlik bajariladi. Bu esa c ning $[a, b]$ segmentda yotishini ko'rsatadi. Ayrim ixtiyoriy hollarda hatto chegaralanmagan ketma-ketlikdan ham yaqinlashuvchi ketma-ketlik ajratish mumkin. Masalan $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \dots, n, \frac{1}{n+1}, \dots$ ketma-ketlik chegaralanmagan bunga qaramasdan juft nomerli elementlardan tuzilgan $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ qisman ketma-ketlik yaqinlashuvchidir. Lekin har bir chegaralanmagan ketma-ketlikdan ham yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lavermaydi. Masalan $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ ketma-ketligi uzoqlashuvchidir. Shuning uchun ham hamma chegaralanmagan ketma-ketliklardan yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratib olish mumkin degan mulohaza umuman olganda to'g'ri emas.

1.1.18-teorema: Har bir chegaralanmagan ketma-ketlikdan cheksiz katta qisman ketma-ketlik ajratish mumkin.

Isbot: $\{x_n\}$ chegaralanmagan ketma-ketlik bo'lsin. U holda bu ketma-ketlikning $|x_{k_1}| > 1$ shartni qanoatlantiruvchi x_{k_1} elementi, $|x_{k_2}| > 2$ $k_2 > k_1$ shartni qanoatlantiruvchi x_{k_2} elementi topiladi. Shu yo'sinda cheksiz davom ettirsak $|x_{k_n}| > n$ $k_n > k_{n-1}$ ni hosil qilamiz. Ma'lumki $x_{k_1}, \dots, x_{k_n}$ qisman ketma-ketlik cheksiz katta bo'ladi. Balsano-Veyershtass teoremasidan quyidagilar kelib chiqadi.

1.1.19-teorema: Mutlaqo ixtiyoriy ketma-ketlikdan yoki cheksiz katta yoki cheksiz kichik qisman ketma-ketlik ajratish mumkin.

1.1.10-misol: $x_n = \frac{n}{4+n^2}, (n = 1, 2, \dots)$ ketma-ketlik chegaralanganligini

isbotlang.

Isbot. $\forall n \geq N$ uchun $x_n = \frac{n}{4+n^2} > 0$. Bu ketma-ketlik quyidan chegaralangan.

$0 \leq (n-2)^2 = n^2 - 4n + 4$ bo'lib, undan $4 \leq 4+n^2 \Rightarrow \frac{n}{4+n^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow$. Bu esa ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi va bu ketma-ketlik chegaralangan.

1.1.11-misol: $x_n = \frac{n}{n+1}, (n = 1, 2, \dots)$ ketma-ketlikning limiti 1 ga teng bo'lishini isbotlang.

$$\varepsilon > 0, |x_n - a| < \varepsilon, |x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1. n_0 \in N \text{ -sifatida}$$

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1 \text{ olinsa } (\varepsilon > 0 \text{ ga ko'ra } n_0 \in N \text{ topilib}) \forall n > n_0 \text{ uchun } |x_n - 1| < \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ bo'lishini bildiradi.

1.1.12-misol: $x_n = \frac{2n}{n-1}, (n = 1, 2, \dots)$ ketma-ketlikning limiti 2 ga teng bo'lishini isbotlang.

$$\varepsilon > 0, |x_n - a| < \varepsilon, |x_n - 2| = \left| \frac{2n}{n-1} - 2 \right| = \frac{2}{n-1}, \frac{2}{n-1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} + 1. n_0 \in N \text{ sifatida}$$

$$n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} + 1 \right] + 1 \text{ olinsa } (\varepsilon > 0 \text{ ga ko'ra } n_0 \in N \text{ topilib}) \forall n > n_0 \text{ uchun } |x_n - 2| < \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n-1} = 2$ bo'lishini bildiradi.

1.1.13-misol: $x_n = \frac{3n+1}{2n+3}, (n = 1, 2, \dots)$ ketma-ketlikning limiti 1,5 ga teng bo'lishini isbotlang.

$$\varepsilon > 0, |x_n - a| < \varepsilon, |x_n - 1,5| = \left| \frac{3n+1}{2n+3} - 1,5 \right| = \frac{7}{4n+6}, \frac{7}{4n+6} < \varepsilon, n > \frac{7}{4\varepsilon} - 1,5, n_0 \in N \quad \text{sifatida}$$

$$n_0 = \left[\frac{7}{4\varepsilon} - 1,5 \right] + 1 \text{ olinsa } (\varepsilon > 0 \text{ ga ko'ra } n_0 \in N \text{ topilib}) \quad \forall n > n_0 \text{ uchun } |x_n - 1,5| < \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+3} = 1$ bo'lishini bildiradi.

Sonli ketma-ketlikning limitiga doir misollar

1.1.14-misol: $x_n = \frac{(-1)^n}{2n+5}, \quad a = 0$

$$x_n - \text{ketma} - \text{ketlikka} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N, n \geq n_0, |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{(-1)^n}{2n+5} - 0 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{2n+5} \right| = \frac{1}{2n+5} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2n+5} < \varepsilon, \quad \frac{1}{\varepsilon} < 2n+5, \quad 2n > \frac{1}{\varepsilon} - 5, \quad n > \left[\frac{1-5\varepsilon}{2\varepsilon} \right] + 1, \quad n_0 = \left[\frac{1-5\varepsilon}{2\varepsilon} \right] + 1.$$

1.1.15-misol: $x_n = \frac{n+1}{n}, \quad a = 1 \quad |x_n - a| < \varepsilon, \quad \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$

deb olinsa ($\varepsilon > 0$ ga ko'ra $n_0 \in N$ topilib) $\forall n > n_0$ uchun $|x_n - 1| < \varepsilon$ bo'ladi. Bu esa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \text{ bo'lishini bildiradi.}$$

1.1.16-misol: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n+1}{n}}$ sonlar ketma-ketligining limitini toping.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{4n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{n}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4 + \frac{1}{n}}{1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n}} = \sqrt{4+0} = \sqrt{4} = 2.$$

1.1.17-misol:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 \end{aligned}$$

1.1.18-misol:

$$x_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{4n^2 - 5n + 6}, \quad a = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}} = \frac{2}{4} = 0,5$$

1.1.19-misol: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + 3b^n}{5a^n + 7b^n}$, ($a > 0$, $b > 0$) limitni hisoblang.

$$1) a < b \text{ bo'lsin bu holda: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^n}{b^n} + \frac{3b^n}{b^n}}{5\frac{a^n}{b^n} + 7\frac{b^n}{b^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 3}{5\left(\frac{a}{b}\right)^n + 7} = \frac{3}{7}$$

$$2) a > b \text{ bo'lsin bu holda } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + 3b^n}{5a^n + 7b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3b^n}{a^n}}{5 + \frac{7b^n}{a^n}} = \frac{1}{5}.$$

$$3) a = b \text{ bo'lsin bu holda } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + 3b^n}{5a^n + 7b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3b^n}{a^n}}{5 + \frac{7b^n}{a^n}} = \frac{1 + 3}{5 + 7} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

1.1.20-misol: $\{x_n\} = \left\{ \frac{5\sqrt{n}}{n+1} \right\}$ ketma-ketlikning limitini toping.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{n}}{n+1} = \frac{5\sqrt{n}}{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{\sqrt{n}}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 0$$

1.1.21-misol: $\{x_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}; \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ ketma-ketlikning limitini $a = 1$

bo'lishini ko'rsating.

$$\varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil, \quad \forall n > n_0$$

$$\left| x_n - a \right| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

1.1.22-misol: $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \cos n \right\}$ ketma-ketlikning limitini toping.

$$x_n = \frac{1}{n} \cos n \text{ uchun } -\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cos n \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos n = 0$$

1.1.23-misol: $\{x_n\} = \left\{ \frac{5n^3 + 6n^2 - 8n + 9}{9n^3 + 8n^2 - 6n + 1} \right\}$ ketma-ketlikning limitini toping.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 6n^2 - 8n + 9}{9n^3 + 8n^2 - 6n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5n^3}{n^3} + \frac{6n^2}{n^3} - \frac{8n}{n^3} + \frac{9}{n^3}}{\frac{9n^3}{n^3} + \frac{8n^2}{n^3} - \frac{6n}{n^3} + \frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{6}{n} - \frac{8}{n^2} + \frac{9}{n^3}}{9 + \frac{8}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \\ &= \frac{5 + 0 - 0 + 0}{9 + 0 - 0 + 0} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

1.1.24-misol: $\{x_n\} = \{\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - 1}\}$ ketma-ketlikning limitini hisoblang.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - 1})(\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - 1})}{(\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - 1})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1 - n^2 + 1}{(\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - 1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2}{(\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - 1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 + \frac{2}{n})}{n(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{2}{n})}{(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}})} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1.2 Funksiyaning limiti

1.2.1-ta'rif: Agar X to'plamdagi har bir x songa biror qoida yoki qonunga ko'ra Y to'plamdan y element mos qo'yilsa, X to'plamda funksiya berilgan deyiladi va u $f : x \rightarrow y$ yoki $y = f(x)$ kabi belgilanadi. Bunda X to'plam funksiyaning aniqlanish soxasi Y to'plam esa funksiyaning o'zgarish sohasi deyiladi.

1.2.1-misol: f – har bir haqiqiy x songa uning butun qismi $[x]$ ni mos qo'yuvchi qoida bo'lsin demak, $f : x \rightarrow [x]$ yoki $y = [x]$ funksiya ega bo'lamiz. Bu funksiyaning aniqlanish to'plami $X = \mathbb{R}$ o'zgarish to'plami esa $Y = \mathbb{Z}$ bo'ladi.

1.2.2-misol: Har bir ratsional songa 1 ni, har bir irratsional songa 0 ni mos qo'yish natijasida funksiya hosil bo'ladi. Bu funksiyaning Dirixli funksiyasi deyiladi va uni $D(x)$ kabi belgilanadi.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

Dirixli funksiyasining aniqlanish to'plami $X = \mathbb{R}$ bo'lib, o'zgarish to'plami $Y = \{0, 1\}$ bo'ladi. Biror X to'plamda $y = f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin, $x_0 \in X$ ga mos keluvchi y_0 miqdor $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi xususiy qiymati deyiladi va uni $y_0 = f(x_0)$ kabi belgilanadi.

1.2.2-ta’rif: Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\exists \delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - b| < \varepsilon$, bo’lsa bu b soni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi ($x \rightarrow a$ dagi) limiti deyiladi. Funksiya limitiga berilgan bu ta’rif Koshi ta’rifi deyiladi.

Funksiyaning limiti ta’rifdagi x nuqta $0 < |x - a| < \delta$, $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$ tengsizliklarni qanoatlantirishi uning a nuqtaning $U_\delta(a)$ atrofiga tegishli bo’lishini ifodalaydi. Bunda $U_\delta(a) = \{x : x \in R; a - \delta < x < a + \delta; x \neq a\}$.

Shunga o’xshash $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishi $x \in U_\delta(a)$ da $f(x)$ funksiyaning qiymatlari b nuqtaning $U_\varepsilon(b)$ atrofida bo’lishini bildiradi.

Shunday qilib funksiya limitining ikki xil Geyne hamda Koshi ta’riflari keltiriladi. Bu ta’riflarning ekvivalentdir.

$f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada Koshi ta’rifiga ko’ra limitga ega bo’lsin, ya’ni $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\exists \delta > 0$ son topiladiki, $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlik bajarilganda $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik ham o’rinli bo’ladi. x to’plamning nuqtalaridan tuzilgan, har bir hadi a dan farqli bo’lgan va a ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olaylik: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ($x_n \neq a$, ($n = 1, 2, \dots$)). Sonlar ketma-ketligi limiti ta’rifiga ko’ra $\exists \delta > 0$ uchun, shunday $n_0 \in N$ son topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun $|x_n - a| < \delta$ tengsizlik o’rinli bo’ladi. Natijada $x_n \neq a$, $n = 1, 2, \dots$ munosabatga ko’ra $0 < |x_n - a| < \delta$ tengsizliklar kelib chiqadi. Bu tengsizliklarning o’rinli bo’lishidan $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ tengsizliklarning bajarilishi kelib chiqadi. Demak, $x_n \rightarrow a$ da $f(x_n) \rightarrow b$ bo’ladi.

1.2.3-ta’rif: (Geyne) Agar X to’plamning nuqtalaridan tuzilgan va har bir hadi a dan katta (kichik) bo’lib a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olganimizda ham mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b limitga intilsa, shu b ni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o’ng (chap) limiti deyiladi.

1.2.4-ta’rif: (Koshi) Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\exists \delta > 0$ son topiladiki,

Argument x ning $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o'ng (chap) limiti deyiladi. Funksiyaning o'ng (chap) limiti quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \text{ yoki } f(a+0) = b \quad (\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \text{ yoki } f(a-0) = b). \text{ Agar } a = 0$$

bo'lsa $x \rightarrow 0+0$ ($x \rightarrow 0-0$) o'rniga $x \rightarrow +0$ ($x \rightarrow -0$) deb yoziladi. Funksiyaning o'ng (chap) limitlari uning bir tomonli limitlari deyiladi. Funksiyaning biror nuqtada bir tomonli limitlarning mavjud bo'lishidan uning shu nuqtaga har doim ham limitga ega bo'lishi kelib chiqavermaydi. b nuqta bir vaqtning o'zida x to'plam uchun o'ng va chap limit nuqta bo'lib, bu to'plamda $y = f(x)$ funksiya aniqlangan deylik.

1.2.5-ta'rif: (Geyne) Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan har qanday cheksiz katta (musbat cheksiz katta; manfiy cheksiz katta) $\{x_n\}$ ketma-ketlik olganimizda ham mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b limitga intilsa, shu b ni $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$) dagi limiti deyiladi va $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$) kabi belgilanadi.

1.2.6-ta'rif: Agar b (chekli yoki cheksiz) har qanday $U(b)$ atrofi olinganda ham a ning shunday $U(a)$ atrofi mavjud bo'lsaki, $\forall x \in U(a)$ uchun $f(x) \in U(b)$, bo'lsa, b ni $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ dagi limiti deyiladi. Va quyidagicha belgilanadi.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Murakkab funksiyaning limiti.

Faraz qilaylik, biror X to'plamda $t = \psi(x)$ funksiya aniqlangan va bu funksiya qiymatlaridan iborat T to'plamda $y = f(t)$ funksiya aniqlangan bo'lib ular yordamida murakkab funksiya $y = f(\psi(x))$ hosil qilingan bo'lsin. Bu murakkab funksiya x to'plamda aniqlangan. Shu bilan birga a son x to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1.2.1-teorema: Agar 1) $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = c$ limit o'rinli bo'lib, a nuqtaning shunday $U_\delta(a)$ atrofi mavjud bo'lsaki, $x \in U_\delta(a)$ lar uchun $\psi(x) \neq c$ bo'lsa, 2) c nuqta T to'plamning limit nuqtasi bo'lib, $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = b$ limit mavjud bo'lsa u holda $x \rightarrow a$ da murakkab funksiya $y = f(\psi(x))$ ham limitga ega $\lim_{x \rightarrow a} f(\psi(x)) = b$ bo'ladi.

Monoton funksiyaning limiti.

1.2.2-teorema: Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan bo'lsa $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli limitga ega bo'ladi, agar $f(x)$ funksiya yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, uning limiti $+\infty$ bo'ladi.

Isbot. $f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lsin. Bu holda $\{f(x)\} = \{f(x) : x \in X\}$ to'plamning aniq yuqori chegarasi mavjud bo'ladi va buni b bilan belgilaymiz: $\sup \{f(x)\} = b$. Aniq yuqori chegaraning xossasiga ko'ra $\forall x \in X$, uchun $f(x) \leq b$ bo'lib $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham $x' \in X$ topiladiki, $f(x') > b - \varepsilon$ bo'ladi. Qaralayotgan bu funksiya o'suvchi bo'lgani uchun $x > x'$ tengsizlik bajarilganda $f(x) \geq f(x')$ tengsizlik ham o'rinli bo'ladi. Demak barcha $x > x'$ ($x \in X$) lar uchun $f(x) > b - \varepsilon$. Natijada ushbu $b - \varepsilon < f(x) \leq b < b + \varepsilon$ tengsizliklarga kelamiz. Bu esa b son $f(x)$ funksiyaning limiti ekanini ifodalaydi. a chekli bo'lganda $x' = a - \delta$ ($\delta = a - x'$), a cheksiz bo'lganda esa $x' > P > 0$ deb olinishi lozim.

Endi $f(x)$ funksiya X da o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralanmagan bo'lsin. Demak har qanday $P > 0$ son olinganda ham, shunday $x' \in X$ son topiladiki, $f(x') > P$ bo'ladi. Endi $x \in X$ va $x > x'$ tengsizlik bajarilganda $f(x) \geq f(x')$ tengsizlik o'rinli bo'lganidan barcha $x \in X$ va $x > x'$ lar uchun $f(x') > P$ bo'ladi. Bu esa $x \rightarrow a$ da $f(x) \rightarrow +\infty$ ekanini ko'rsatdik. Teorema isbotlandi.

1.2.3-teorema: Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi bo'lib, u quyidan chegaralangan bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli limitga ega, $f(x)$ funksiya

quyidan chegaralanmagan bo'lsa, uning limiti $-\infty$ bo'ladi. (Koshi teoremasi). Endi funksiya limitining mavjudligi haqidagi umumiy teoremani keltiramiz.

1.2.4-teorema: Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x' va x'' ($x' \in X, x'' \in X$) qiymatlarida $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli limitga ega bo'lishi uchun uning bu nuqtada Koshi shartini qanoatlantirishi zarur va yetarli.

1.2.7-ta'rif: Agar $x \rightarrow a$ da $\alpha(x)$ funksiyaning limiti nolga teng, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya a nuqtada (yoki $x \rightarrow a$ da) cheksiz kichik funksiya deyiladi.

1.2.3-misol. $f(x) = \sin x$ funksiya $x \rightarrow 0$ da cheksiz kichik. Chunki $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$. Agar x to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da chekli b limitga ega bo'lsa (ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$) u holda $\alpha(x) = f(x) - b$ funksiya $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik bo'lgan $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ bo'lsa, $\alpha(x)$ yordamida quyidagi $f(x) = b + \alpha(x)$ ko'rinishida ifodalash mumkin.

1.2.8-ta'rif: Agar $x \rightarrow a$ da (cheksiz) $\beta(x)$ funksiyaning limiti, ∞ bo'lsa ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty$ bo'lsa, $\beta(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da cheksiz katta funksiya deyiladi.

1.2.4-misol: $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya $x \rightarrow 0$ da cheksiz katta funksiya bo'ladi.

Cheksiz kichik hamda cheksiz katta funksiyalar ham cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklarning xossalriga o'xshash xossalarga ega.

1) Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalar yig'indisi va ko'paytmasi yana cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

2) Chegaralangan funksiyaning cheksiz kichik funksiya bilan ko'paytmasi yana cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

3) Agar $\alpha(x)$ ($\alpha(x) \neq 0$) cheksiz kichik funksiya bo'lsa $\frac{1}{\alpha(x)}$ cheksiz katta

funksiya bo'ladi.

4) Agar $\beta(x)$ cheksiz katta funksiya bo'lsa, $\frac{1}{\beta(x)}$ cheksiz kichik funksiya

bo'ladi.

Funksiya limitiga doir misollar:

1.2.5-misol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)}{(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1.$$

1.2.6-misol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x}{x^3 + x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^3 - 1)}{x(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = 0 - 1 = -1.$$

1.2.7-misol:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 - 0}} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

1.2.8-misol:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x+2x^2)(1+3x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+3x+3x+9x^2+2x^2+6x^3-1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^3+11x^2+6x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 6x^2+11x+6 = 6. \end{aligned}$$

1.2.9-misol:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^3 - 1) - 2(x-1)}{x(x^4 - 1) - 3(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) - 2(x-1)}{(x-1)(x^3 + 1) - 3(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 2}{x(x^2 + 1)(x+1) - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+1+1-2}{1(1+1)(1+1) - 3} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

1.2.10-misol:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x-2) - 4(x-2)}{(x^2 - 4)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-2)(x+2)}{(x-2)^2(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

1.2.11-misol:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x - x - 1}{x^5 - x - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x^2 - 1) - (x + 1)}{x(x^4 - 1) - (x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x(x - 1) - 1)}{(x + 1)(x(x^2 + 1)(x - 1) - 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - x) - 1} = \frac{1 + 1 - 1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\mathbf{1.2.12-misol:} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1)}{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)} = \frac{m}{n}$$

$$\mathbf{2.1.13-misol:} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \left| \begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ \frac{1}{x} \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right| \frac{\sin \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

1.2.14-misol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x} \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 \frac{\sin 3x}{\cos 3x}} = \frac{1}{3}.$$

1.2.15-misol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{1}{\cos x} - 1)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{\cos x}}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{1.2.16-misol:} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

1.2.17-misol:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[6]{\frac{(x-1)^3}{(x^2-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[6]{\frac{(x-1)^2 \dots (x-1)}{(x-1)^2 \dots (x+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[6]{\frac{(x-1)}{(x+1)^2}} = 0.$$

1.2.18-misol:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \left| \begin{array}{l} x - \pi - t \\ x \rightarrow \pi \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t + \pi)}{\sin n(t + \pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin mt}{\sin nt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{m \sin mt}{mt}}{\frac{n \sin nt}{nt}} = \frac{m}{n}.$$

1.2.19-misol:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2}}{2 \frac{x-a}{2}} = \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = \cos a. \\ & \left| \begin{array}{l} x-a=t \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \cos \frac{x+a}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} \cos \frac{t+a}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} \cos \frac{t+a+a}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} \cos \frac{t+2a}{2} = \cos a.\end{aligned}$$

1.2.20-misol:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x-a} = \left| \begin{array}{l} x-a=t \\ x \rightarrow a \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \lim_{x \rightarrow a} \sin \left(-\frac{x+a}{2} \right) = \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{t+2a}{2} \right) &= -\sin a.\end{aligned}$$

1.2.21-misol:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x+2} = \frac{(2-2)^2}{2+2} = \frac{0}{4} = 0.$$

1.2.22-misol:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+4)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+4} = \frac{1+2}{1+4} = \frac{3}{5}$$

1.2.23-misol:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+10)(3x+7)(x+4) - 12}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+10}{x} \frac{3x+7}{x} \frac{x+4}{x} - \frac{12}{x^3} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(2 + \frac{10}{x}\right) \left(3 + \frac{7}{x}\right) \left(1 + \frac{4}{x}\right) - \frac{12}{x^3} \right) = (2+0)(3+0)(1+0) - 0 = 6. \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 9x + 7x^2 - 63}{x^2 + 4x - 21} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^2 - 9) + 7(x^2 - 9)}{(x-3)(x+7)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(x+7)}{(x-3)(x+7)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(x+7)}{(x-3)(x+7)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 3+3 = 6.\end{aligned}$$

1.2.24-misol:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 100x - 375}{x^3 - 9x^2 + 15x + 25} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^4 - 15x^3 + 75x^2 - 125x + 3x^3 - 45x^2 + 225x - 375}{x^3 - 10x^2 + 25x + x^2 - 10x + 25} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x^3 - 15x^2 + 75x - 125)(x+3)}{(x^2 - 10x + 25)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)^3(x+3)}{(x-5)^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+3)}{x+1} = \frac{(5-5)(5+3)}{5+1} = 0.\end{aligned}$$

Xulosa

Bitiruv malakaviy ishining I bobi ketma-ketliklar haqida bo'lib, uning birinchi rejasi sonli ketma-ketliklar haqida. Ikkinchi rejasida esa funksiyaning limiti haqida ma'lumot berilgan. Bu bobda sonli ketma-ketliklar, cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklar, chegaralangan ketma-ketliklar, yaqinlashuvchi, uzoqlashuvchi ketma-ketliklar, cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar o'rganilgan. Bu mavzular asosan oliy o'quv yurtlarining matematik analiz fanini o'rganishda kerak bo'ladi.

Matematik analiz kursi bo'lajak mutaxassislarning matematik jihatdan shakllanishida ma'lum metodologik ahamiyatga ega.

II-BOB.ANIQMASLIKLARNI OCHISH

2.1 Lapital qoidasi .

1. $\frac{0}{0}$ ko'rinishidagi aniqmasliklarni ochish.

Agar ikkita $f(x)$ va $g(x)$ funksiya uchun $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ bo'lsa, u holda

ikki funksiya nisbati $\frac{f(x)}{g(x)}$ $x \rightarrow a$ da $\frac{0}{0}$ ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi. Bu

aniqmaslikni ochish $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limit qiymatini hisoblash (bu limit qiymat mavjud bo'lganda) demakdir.

2.1.1-teorema: (Lapital qoidasi)

Ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofidagi hamma nuqtalarda aniqlangan va differensiallanuvchi bo'lib, a nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'lishi mumkin deylik. Bundan tashqari $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ va $g'(x)$ hosila a

nuqtaning yuqorida ko'rsatilgan holda noldan farqli bo'lsin. Agar ushbu (chekli yoki cheksiz) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (1) (limit qiymati mavjud) (1) ning limit qiymati mavjud

bo'lmasa ham funksiyalar nisbatining limiti $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud bo'lishi mumkin

bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limit qiymati mavjud shu bilan birga

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (2.1.1)$$

formula o'rinli.

Isbot. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning $x = a$ nuqtada qiymatlari nolga teng, ya'ni $f(a) = 0$, $g(a) = 0$ deb olsak, natijada $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 = g(a)$ tengliklar o'rinli bo'lib , $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'ladi. $\forall x \in (a, b)$ nuqta olib, $[a, x]$ segmentda $f(x)$ va $g(x)$ qaraymiz. Bu segmentda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar Koshi teoremasining (Koshi teoremasi. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar bu

funksiyalar (a, b) intervalda chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lib $\forall x \in (a, b)$ uchun $g'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda shunday c ($a < c < b$) nuqta topiladiki, $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ tenglik o'rinli bo'ladi) shartlarini qanoatlantiradi. U holda Koshi teoremasiga ko'ra a bilan x orasida shunday c ($a < c < b$) nuqta topiladiki, ushbu $\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu tenglikdan esa $f(a) = 0, g(a) = 0$ ga ko'ra $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ bo'lishi kelib chiqadi. Ma'lumki $x \rightarrow a$ da $c \rightarrow a$. Demak, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$. Teorema isbotlandi.

1-eslatma: Agar $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar bilan bir xil shartlarni qanoatlantirsa, u vaqtda Lapital qoidasini takror qo'llash mumkin (ya'ni $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar birinchi hosilalarining nisbatlari limit qiymatini shu funksiyaning ikkinchi hosilalarining nisbatining limit qiymati bilan almashtirish mumkin). Bu holda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ ni hosil qilamiz.

2-eslatma: 1-Teoremani argument x chekli limitdan cheksiz limitga $a \rightarrow +\infty$ yoki $a \rightarrow -\infty$ intilgan holiga o'tkazish qiyin emas. 1-teoremani $a \rightarrow +\infty$ holi uchun ta'riflash bilan to'xtaymiz. Ikki $f(x)$ va $g(x)$ yarim to'g'ri chiziq $c < x < \infty$ da aniqlangan va difrensiallanuvchi bo'lsin. Bundan tashqari $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ bo'lib, ko'rsatilgan yarim chiziqda $g'(x)$ hosila noldan farqli bo'lsin. Agar $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit qiymat mavjud bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ limit qiymati mavjud va $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

2.1.1-misol: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = 0,5$

2.1.2-misol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

Lapital qoidasi 2 marta qo'llandi.

2.1.3-misol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2 \cos x - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^4)'}{(x^2 + 2 \cos x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{2x - 2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24x}{2 \sin x} = 12$$

Lapital qoidasi 3 marta qo'llanildi.

2.1.4-misol:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2e^x - 2 - 2x - x^2)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2x - 2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2e^x - 2x - 2)'}{(3x^2)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2e^x - 2)'}{(6x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Lapital qoidasi 3 marta qo'llanildi.

$$2.1.5\text{-misol: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg} x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} = 1$$

$$2.1.6\text{-misol: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\operatorname{tg} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 0$$

$$2.1.7\text{-misol: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}, \quad (\alpha > 0) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = 0$$

Eslatma: ba'zi hollarda Lapital qoidasini qo'llash natijasida $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ yana $\frac{0}{0}$

ko'rinishidagi aniqmaslikka duch kelamiz, $f'(x)$ va $g'(x)$ funksiyalar uchun $[a, b]$ da uzluksiz va $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar berilgan bo'lib

1) $[a, b]$ da $f'(x)$ va $g'(x)$ mavjud hamda $g'(x) \neq 0$

2) $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} g'(x) = 0$

3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$ mavjud bo'lsa u holda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ bo'ladi. shartlari bajarilsa

va

$\frac{f''(x)}{g''(x)}$ ning limiti mavjud bo'lsa u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k \text{ bo'ladi.}$$

2.1.2-teorema: 1) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[c, +\infty)$ oraliqda aniqlangan,

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

3) $[c, +\infty)$ oraliqda chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud, shu bilan birga $g'(x) \neq 0$, va nihoyat

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \text{ limit (chekli yoki cheksiz) mavjud deb faraz qilaylik. U holda}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

Isbot. X o'zgaruvchini $x = \frac{1}{t}, t = \frac{1}{x}$ formula bilan almashtiraylik, u vaqtda,

agar $x \rightarrow +\infty$ bo'lsa, u holda $t \rightarrow +0$. Natijada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar t

o'zgaruvchining $f(\frac{1}{t})$ va $g(\frac{1}{t})$ funksiyalari bo'lib, ular $(0, \frac{1}{c})$ intervalda

aniqlangan Teoremadagi 2-shart tufayli $\lim_{t \rightarrow +0} f(\frac{1}{t}) = 0, \lim_{t \rightarrow +0} g(\frac{1}{t}) = 0$ bo'ladi va 4) ga

asosan: $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = k$. $f(\frac{1}{t})$ va $g(\frac{1}{t})$ funksiyalarga 1-teoremani qo'llash mumkin, u

$$\text{bizga } \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = k. \text{ (bu yerda } f(\frac{1}{t}) \text{ va } g(\frac{1}{t}) \text{ funksiyalar } t$$

bo'yicha murakkab funksiyalar deb differensiallaymiz) ni beradi, u vaqtda

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \text{ bo'ladi.}$$

2.1.1-misol: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{2 \arctg x^2 - \pi}$ limitni hisoblang

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - 1, \quad g(x) = 2 \arctg x^2 - \pi, \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}, \quad g'(x) = \frac{4x}{1+x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}} \frac{1+x^4}{4x} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^4}{2x^4} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 2}{2 \arctg x^2 - \pi} = -\frac{1}{2}$$

2. $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslikni ochish.

Agar ikkita $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$ (∞

o'rniga $+\infty$ yoki $-\infty$ larni olish mumkin). Bo'lsa u holda ikki funksiya nisbati $\frac{f(x)}{g(x)}$

ni $x \rightarrow \infty$ da $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi.

1) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[c, +\infty)$ oraliqda aniqlangan,

2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

3) $(a, b]$ oraliqda chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud, shu bilan birga $g'(x) \neq 0$

va nihoyat

4) limit (chekli yoki cheksiz) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$ mavjud deb faraz qilaylik. U holda

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ bo'ladi.

Isbot: k ning chekli hamda cheksiz bo'lgan hollarini alohida – alohida qarab o'tamiz

1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$ bo'lib, k -chekli bo'lsin. Limit ta'rifiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ olinganda

ham $\frac{\varepsilon}{2}$ ga ko'ra, shunday musbat son topiladiki $a < x < a + \delta$ tengsizlik bajarilganda

$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik ham bajariladi. Limit qiymat ta'rifi: agar ixtiyoriy musbat

son ε uchun shunday musbat son δ topilsaki, argument x ning $0 < |x - a| < \delta$

tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha qiymatlari uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik

o'rinli bo'lsa, u holda b son $f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limit qiymati deyiladi. Ushbu $a < x < x_0 < a + \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x va tayinlangan x_0 nuqtalarni olib $[x, x_0]$ segmentda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarga Koshi teoremasini qo'laymiz. (Koshi teoremasi: $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar bu funksiyalar (a, b) intervalda chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lib, $\forall x \in (a, b)$ uchun $g'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda shunday c ($a < c < b$) nuqta topiladiki, $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ tenglik o'rinli bo'ladi.).

U holda $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ tenglik o'rinli bo'lib, bunda $x < c < x_0$ bo'ladi.

Ma'lumki, bu a nuqta x ga bog'liqdir. Teoremaning $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

bo'lish shartiga asosanib $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0, \frac{f(x_0)}{f(x)} \neq 1$ deb olsak bo'ladi.

$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ tengliklarni chap tomonida turgan $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$ nisbatni quyidagicha yozib olamiz.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x) \left[1 - \frac{f(x_0)}{f(x)} \right]}{g(x) \left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right]} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}.$$

U holda

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

munosabat ushbu

$$\frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{ya'ni} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \quad (x < c < c_0) \quad \text{ko'rinishga keladi}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \quad \text{tenglikning o'ng tomonidagi} \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{nisbat} \quad x_0 \rightarrow a$$

($a < x < c < x_0 < a + \delta$) da k ga intiladi: $\lim_{x_0 \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = k, \alpha = \frac{f'(c)}{g'(c)} - k$ deb belgilaymiz.

Ma'lumki, α miqdor c ga va u orqali x va x_0 nuqtalarga bog'liq bo'lib,

$a < x < c < x_0 < a + \delta$ bo'lganda $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ munosabatga ko'ra $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}$ tenglikdagi $(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}) : (1 - \frac{f(x_0)}{f(x)})$ nisbat, x_0 nuqta

tayinlangan holda $x \rightarrow a$ da 1 ga intiladi, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1$.

Endi $\beta = \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1$ deb belgilasak u holda $\lim_{x \rightarrow a} \beta = 0$ bo'ladi. Demak, $\forall \varepsilon > 0$

olinganda ham $\frac{\varepsilon}{2(|k| + \varepsilon)}$ ga ko'ra shunday $\delta_1 > 0$ son topiladiki, $a < x < a + \delta_1$

bo'lganda $\|\beta\| < \frac{\varepsilon}{2(|k| + \varepsilon)}$ tengsizlik o'rili bo'ladi.

Endi $\frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}$, $\alpha = \frac{f'(c)}{g'(c)} - k$, $\beta = \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1$

munosabatlarni topamiz: $\frac{f(x)}{g(x)} = (k + \alpha)(1 + \beta) = k + [a + (k + \alpha)\beta]$. Agar $\delta > 0$ va $\delta_1 > 0$

sonlarning kichigini δ^* deb olsak, unda $a < x < a + \delta^*$ uchun $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ va

$\|\beta\| < \frac{\varepsilon}{2(|k| + \varepsilon)}$ tengsizliklar bir vaqtda o'rinli bo'lib,

$|\alpha + (k + \alpha)\beta| \leq |\alpha| + (|k| + |\alpha|)|\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + (|k| + \frac{\varepsilon}{2}) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|k| + \varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

tengsizlik bajariladi .Demak , $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta^* > 0$ son topiladi,

ki, $a < x < a + \delta^*$ bo'lganda $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \varepsilon$ bo'ladi. Bu esa $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$

bo'lishini bildiradi.

2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ bo'lsin. Funksiya limiti ta'rifiga ko'ra (Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun

shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $a < x < a + \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha

qiymatlarida $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi

($x \rightarrow a$ dagi) limiti deyiladi). $\forall M > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki,

$a < x < a + \delta$ bo'lganda $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| > M$ bo'ladi. 1) holdagidek $a < x < x_0 < a + \delta$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x va x_0 nuqtalarni olib, $[x, x_0]$ segmentda

$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ tenglikka ega bo'lamiz. Bunda $a < x < c < x_0 < a + \delta$ va demak,

$a < c < a + \delta$ tengsizliklarga ko'ra $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ tengsizlikdan $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| > M$

tenglik kelib chiqadi. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1$ bo'lganligidan $\forall \varepsilon > 0$ va $\varepsilon = \frac{1}{2}$ uchun

shunday $\delta_1 > 0$ son topiladiki, $a < c < a + \delta_1$ bo'lganda $\left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| < \frac{1}{2}$ bo'ladi,

keyingi tengsizlikdan esa $\left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| > \frac{1}{2}$ bo'lishi $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ tenglikdan

topamiz.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Endi $\delta^* = \min \{\delta, \delta_1\}$ deb olsak, u holda $a < x < a + \delta^*$ bo'lganda $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| > M$ va

$\left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| > \frac{1}{2}$ tengsizlik baravariga o'rinli bo'ladi. Natijada $a < x < a + \delta^*$ bo'lganda

$\left| \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| = \left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| > \frac{1}{2} M$ bo'ladi. Bu esa $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ bo'lishini bildiradi

Teorema isbotlandi.

2.1.3-teorema: Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lib, 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, 2) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar diferensiallanuvchi va $g'(x) \neq 0$ 3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$ bo'lsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ bo'ladi.

Isbot. 3) shartdan $\forall \varepsilon > 0 \quad \delta > 0 \quad \forall x \in [a, a + \delta]$ uchun $k - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < k + \frac{\varepsilon}{2}$ kelib chiqadi. $\forall x \in [a, a + \varepsilon]$ dan x_0 va x sonlarni olamiz va Koshi teoremasidan

foydalanamiz : $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ bunda $c \in [a, a + \delta]$. U holda

$k - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} < k + \frac{\varepsilon}{2}$ x ning a ga yaqin qiymatlari

uchun $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} = 1$. Chunki $f(x_0)$ va $g(x_0)$ aniq sonlar teoremaning

1) shartiga ko'ra $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Shuning uchun x ni a ga yaqinlashtirsak, $k - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < k + \frac{\varepsilon}{2}$ o'rinli bo'ladi. Demak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ o'rinlidir.

$k = +\infty$ bo'lsin. Bu holda x ning a ga yetarli yaqinroq qiymatlarida $f'(x) \neq 0$ bo'lib

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$$

ekani kelib chiqadi, demak isbotlaganga asosan

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \quad \left(\frac{g}{f} > 0 \right)$$

va nihoyat bundan $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. Shunday qilib $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmasliklarni

ochish uchun ham Lapital qoidasi o'rinli bo'ladi.

$$\text{2.1.2-misol: } \lim_{x \rightarrow 0+0} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0+0} \sqrt{x} = 0$$

$$\text{2.1.3-misol : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^n)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-2}(n-1)}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

Lapital qoidasini n marta qo'llash bilan hisoblanadi.

$$\text{2.1.4-misol: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\mu} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\mu)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu x^\mu} = 0$$

$$\text{2.1.5-misol: } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^{\frac{1}{x^2}} \text{ limitni hisoblang.}$$

$x \rightarrow 0$ da $y = \left[\frac{\sin x}{x} \right]^{\frac{1}{x^2}}$ ifoda 1^∞ ko'rinishidagi aniqmaslik,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \frac{\sin x}{x})'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)'}{(x^3)'} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

$$\text{2.1.7-misol: } y = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

$$\ln y = \frac{\ln \sin x - \ln x}{1 - \cos x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin^2 x + 2x \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\frac{\sin x}{x} + 2 \cos x} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

2.2 Boshqa turdagi aniqmasliklar.

$$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Bu aniqmasliklarning barchasi algebraik almashtirishlar yordamida $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmasliklarga keltiriladi va Lapital qoidasidan foydalaniladi. Agar $0 \cdot \infty$ ko'rinishidagi aniqmaslikka ega bo'lsak, u holda buni $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslikka keltirish mumkin va u vaqtda Lapital qoidasidan foydalaniladi. Faraz qilaylik $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ shu bilan birga, $f(x)$ ishorasini o'zgartirmasin. U

$$\text{vaqtda } f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{Bu ifodalardan ikkinchisi } x \rightarrow a \text{ da } \frac{0}{0}$$

ko'rinishidagi uchinchisi $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslikda iboratdir.

$$\text{2.2.1-misol: } \lim_{x \rightarrow +0} (x^\mu \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-\mu}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-\mu})'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{\mu-1}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^\mu}{-\mu} = 0 \quad (\mu > 0)$$

2.2.2-misol: $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$ ni hisoblang. Logarifmlab limitga o'tamiz:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} -x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = e^0 = 1$$

$\infty - \infty$ ko'rinishidagi aniqmaslikni doimo $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmasliklarga keltirish mumkin. Faraz qilaylik, $f(x) - g(x)$ ifoda berilgan bo'lsin va shu bilan birga $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ bo'lsin. U vaqtda bu ifodani $\frac{0}{0}$ ko'rinishidagi aniqmaslikka keltiriladigan ushbu almashtirishlarni bajarish mumkin:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}}.$$

Bunda o'ng tomondagi kasr $x \rightarrow a$ da $\frac{0}{0}$ ko'rinishidagi aniqmaslikni ifodalaydi.

4) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ b'lib, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)]$ ni hisoblash kerak bo'lsin. Bu

holda $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ ko'rinishda keltirsak, $x \rightarrow a$ da $\frac{0}{0}$ yoki $(\frac{\infty}{\infty})$

ko'rinishidagi aniqmasliklarga bo'lib Lapital qoidasini qo'llash mumkin.

5) $y = [f(x)]^{g(x)}$ funksiyaning

a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

hollarda $x \rightarrow a$ da limitni hisoblash kerak. Bu holda y ni logarifmlab,

$\ln y = g(x) \ln f(x)$ ning limitini izlaymiz: $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lim_{x \rightarrow a} [g(x) \ln f(x)]$. $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \alpha$

topilgan bo'lsa, $\ln \lim_{x \rightarrow a} y = \alpha$ bo'ladi. Shuning uchun $\lim_{x \rightarrow a} y = e^\alpha$ kelib chiqadi. Demak

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^\alpha$$

$1^\infty, 0^0, \infty^0$ ko'rinishidagi aniqmasliklarni ochish uchun avval $y = [f(x)]^{g(x)}$ ni logarifmlanadi: $\ln y = g(x) \ln f(x)$. $x \rightarrow a$ da $g(x) \ln f(x)$ ifoda $0 \cdot \infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Faraz qilaylik, $x \rightarrow a$ da $g(x) \ln f(x)$ aniqmas ifodani o'zgartirib Lapital qoidasini qo'llab $\lim_{x \rightarrow a} [g(x) \ln f(x)] = b$ (b-chekli yoki cheksiz) bo'lishini topdik deylik. Unda $\lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^b$ bo'ladi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalari ham $f(x)$ va $g(x)$ lar kabi aniqmaslikka olib kelsa u holda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ tengliklar o'rinli bo'ladi, ya'ni bu holda Lapital qoidasini takror qo'llash mumkin bo'ladi.

2.2.3-misol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{\sin x} \cos x\right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \frac{x}{\sin x} \cos x} = \frac{1}{3}$$

demak, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

2.2.4-misol: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (tg x)^{tg 2x}$ limitni hisoblang.

Bu aniqmaslik 1^∞ ko'rinishidagi aniqmaslik bo'lib $y = (tg x)^{tg 2x}$ ifoda logarifmlanadi,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \ln y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln tg x}{(tg 2x)^{-1}}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\ln tg x)'}{((tg 2x)^{-1})'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{tg x} \cdot \frac{1}{\cos x}}{\frac{2}{\cos^2 2x}} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x = -1$$

demak, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (tg x)^{tg 2x} = \frac{1}{e}$. Shunday qilib funksiya hosilalari yordamida $0 \cdot \infty$ va $\infty - \infty$

ko'rinishidagi aniqmasliklarni ochishda, ularni $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslikka keltiriladi.

Aniqmas ifodalar.

$\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma- ketliklar berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketliklarni

yaqinlashuvchibo'lgan holda $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, ($y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim y_n \neq 0$)

ketma-ketlikniyaqinlashuvchi bo'lishini I BOB da o'rgandik. Bunda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$

ketma-ketliklarning limitlariga nisbatan quyidagi ikki shart bajarilgan edi:

1) $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning limitlari chekli;

2) $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, ($y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim y_n \neq 0$) ketma-ketlikning limitiga oid mulohazada

$$\lim y_n \neq 0$$

Endi bu shartlar bajarilmagan holda $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}, \{x_n \cdot y_n\}, \{x_n \pm y_n\}$ ketma-ketliklarni o'rganamiz.

1. $\frac{0}{0}$ ko'rinishidagi aniqmaslik. $\lim x_n = 0, \lim y_n = 0$ bo'lsin. $\lim y_n = 0$

bo'lgani uchun $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ limitiga ya'ni $\lim \frac{x_n}{y_n}$ limitga (teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$

ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\forall n \in N$ uchun $y_n \neq 0$ va $\lim y_n \neq 0$ bo'lsa $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$

ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi hamda $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$ formula o'rinli bo'ladi.)

Teoremani tatbiq qilib bo'lmaydi. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklardan tuzilgan $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$

ketma-ketlikning xarakteri $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning birining har birining nolga qanday intilishiga qarab turlicha bo'ladi.

Misollar: 1) $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ va $\{y_n\} = \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$ ketma-ketlikning (xarakteri $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$

limitlari nolga tengligi ma'lum. Endi $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ ketma-ketlikni tuzaylik: $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} = \{n\}$

demak, $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

2) $\{x_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ va $\{y_n\} = \left\{ \frac{2}{n} \right\}$ ketma-ketliklarning har birining limiti nolga teng.

Bu ketma-ketliklardan tuzilgan $\left\{ \frac{(-1)^n}{2} \right\}$ ketma-ketlik limitga ega emas.

3) $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$ va $\{y_n\} = \left\{ \frac{5}{n^2} \right\}$ ketma-ketliklarning har biri nolga teng. Bu ketma-

ketliklardan tuzilgan $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} = \left\{ \frac{1}{5} \right\}$ ketma-ketlik uchun $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{5}$ bo'ladi

Misollardan ko'rinadiki $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$ bo'lishini bilgan holda, bu ketma-ketliklardan tuzilgan $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ ketma-ketlikning limiti tog'risida aniq xulosaga kelib

bo'lmaydi. Shuning uchun $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$ bo'lganda $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ ketma-ketlikning xarakterini aniqlash aniqmaslikni ochish deyiladi.

2. $\frac{\infty}{\infty}$ Ko'rinishidagi aniqmaslik. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketlikning har birining limitlari cheksiz bo'lsin: $\lim x_n = \infty, \lim y_n = \infty$. Bu holda ham $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ ketma-ketlikning xarakteri qanday bo'lishini oldindan aytib bo'lmaydi misollarda ko'ramiz.

1) $\{x_n\} = \{n^2\}, \{y_n\} = \{n\}$ ketma-ketlikning har birining limiti cheksiz bo'ladi.

$\lim n^2 = +\infty, \lim n = +\infty$. Bu ketma-ketliklardan tuzilgan $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} = \{n\}$ ketma-ketlikning

limiti ham cheksizdir: $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$

2) $\{x_n\} = \{n^2 + n + 1\}$ va $\{y_n\} = \{n^2 + 1\}$ ketma-ketlikning har birining limiti cheksiz.

Bu ketma-ketliklardan tuzilgan ketma-ketlik limiti $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$.

3) $\{x_n\} = \{(-1)^n \cdot n\}$ va $\{y_n\} = \{n\}$ ketma-ketlikning har birining limiti cheksiz bo'lib bu ketma-ketliklardan tuzilgan $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ ketma-ketlik limitga ega emas.

Misollardan ko'rinadiki, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketlikning har birining limiti cheksiz

bo'lgan holda bu ketma-ketliklarning nisbatidan tuzilgan $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ ketma-ketlik

$\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslikni ifodalaydi. Bu holda ham $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow \infty$ da

$\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ ning xarakterini aniqlash aniqmaslikni ochish deyiladi.

3. $0 \cdot \infty$ ko'rinishidagi aniqmaslik $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lib,

$\lim x_n = 0, \lim y_n = \infty$ bo'lsin. Bu holda ham, $\{x_n \cdot y_n\}$ ketma-ketlikning ketma-ketlikni xarakterlaydigan misollarni ko'ramiz

1) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}, \{y_n\} = \{n^2\}$ ketma-ketlikning limiti mos ravishda 0 va ∞ dir. Bu ketma-ketliklar ko'paytmasidan tuzilgan, $\{x_n \cdot y_n\} = \{n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz bo'ladi.

2) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ va $\{y_n\} = \{n^2 + n + 1\}$ ketma-ketlikning limiti mos ravishda 0 va ∞ dir. Bu ketma-ketliklar ko'paytmasidan tuzilgan $\{x_n \cdot y_n\} = \left\{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right\}$ ketma-ketlikning limiti 1 ga teng.

3) $\{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}, \{y_n\} = \{n\}$ bo'lsin. Ularning limiti mos ravishda 0 va ∞ . Bu ketma-ketliklar ko'paytmasidan, tuzilgan, $\{x_n \cdot y_n\} = \{(-1)^n\}$ ketma-ketlik limitga ega emas. Demak $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow \infty$ bo'lgan holda $\{x_n \cdot y_n\}$ ketma-ketlikning xarakteri turlicha boladi. Shuning uchun $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow \infty$ bo'lishini bilgan holda $\{x_n \cdot y_n\}$ ketma-ketlik $0 \cdot \infty$ ko'rinishidagi aniqmaslikni ifodalaydi deyiladi.

4. $\infty - \infty$ ko'rinishidagi aniqmaslik $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lib ular turli ishorali cheksizga intilsin, masalan, $\lim x_n = +\infty, \lim y_n = -\infty$ deylik .Bu ketma-ketliklar yig'indisidan tuzilgan $\{x_n \pm y_n\}$ ketma-ketlikning xarakteri ham turlicha bo'lishi mumkin.

Misollar: 1) $\{x_n\} = \{2n\}, \{y_n\} = \{-n\}$ ketma-ketliklar uchun $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow -\infty$ bo'lib, $x_n + y_n = n \rightarrow +\infty$ bo'ladi.

2) $\{x_n\} = \left\{n + \frac{1}{n}\right\}, \{y_n\} = \{-n\}$ bo'lsin. Ularning limiti $\lim x_n = +\infty, \lim y_n = -\infty$ bo'lgan holda $\{x_n \pm y_n\}$ ketma-ketlikning limiti nolga teng bo'ladi. $x_n + y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

3) $\{x_n\} = \{n + (-1)^{n+1}\},$ va $\{y_n\} = \{-n\}$ ketma-ketliklar uchun $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow -\infty$ Bo'lib, bu ketma-ketliklar yig'indisidan tizilgan $\{x_n + y_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$ ketma-ketlik

limitga ega emas. Bu holda ham $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow -\infty$ da $\{x_n \pm y_n\}$ ketma-ketlik aniqlanmaslikni ifodalaydi. Bu aniqlanmaslik $\infty - \infty$ ko'rinishidagi aniqlanmaslik deyiladi.

Shtols teoremasi.

Ko'p hollarda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ nisbatning yaqinlashishini tekshirish uchun quyidagi tasdiq o'rinli bo'ladi.

Shtols teoremasi: $\{y_n\}$ o'suvchi va cheksiz katta ketma-ketlik bo'lib, $\left\{ \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \right\}$

Ketma-ketlik esa yaqinlashuvchi va limiti a bo'lsin, u holda $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti a ga teng bo'ladi.

Shunday qilib, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$

Isbot. $\left\{ \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \right\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti a bolgani

uchun $\alpha_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo'lsin $\bar{N}$ ixtiyoriy

belgilangan nomer bo'lib, $n > \bar{N}$ bo'lsin. α_n uchun yozilgan ifodadan foydalanib, quyidagi. Tengliklarni ko'rib chiqamiz:

$$\begin{aligned} x_{N+1} - x_N &= a(y_{N+1} - y_N) + \alpha_{N+1}(y_{N+1} - y_N) \\ x_{N+2} - x_{N+1} &= a(y_{N+2} - y_{N+1}) + \alpha_{N+2}(y_{N+2} - y_{N+1}) \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n-1} - x_{n-2} &= a(y_{n-1} - y_{n-2}) + \alpha_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}) \\ x_n - x_{n-1} &= a(y_n - y_{n-1}) + \alpha_n(y_n - y_{n-1}). \end{aligned}$$

Bu tengliklarni qo'shib topamiz :

$$\begin{aligned} x_n - x_N &= ay_n - ay_N + \alpha_{N+1}(y_{N+1} - y_N) + \alpha_{N+2}(y_{N+2} - y_{N+1}) + \dots + \alpha_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}) \\ &+ \alpha_n(y_n - y_{n-1}) \end{aligned}$$

$\{y_n\}$ o'suvchi cheksiz katta bo'lgani uchun biror nomerdan boshlab uning elementlari musbat bo'ladi. $n \geq \bar{N}$ bo'lganda $y_n > 0$ deb hisoblaymiz. U holda oxirgi tenglikdan topamiz:

$$\frac{x_n}{y_n} - a = \frac{x_{\bar{N}} - ay_{\bar{N}} + \alpha_{\bar{N}}(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + \alpha_{\bar{N}+2}(y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}) + \dots + \alpha_n(y_{\bar{N}} - y_{\bar{N}-1})}{y_n}$$

$\{y_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lgani uchun $y_{k+1} - y_k$ ($k = \bar{N}, \bar{N}+1, \dots, n-1$) ayirmalar musbat. Shu sababli oxirgi munosabatdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| \leq \left| \frac{x_{\bar{N}} - ay_{\bar{N}}}{y_n} \right| + \frac{|\alpha_{\bar{N}+1}| |y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}| + |\alpha_{\bar{N}+2}| |y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}| + \dots + |\alpha_n| (y_{\bar{N}} - y_{\bar{N}-1})}{y_n}$$

endi $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi uning limiti a ga tengligini isbot qilamiz.

buning uchun har qanday musbat ε uchun shunday N nomerni ko'rsatish yetarliki,

$n \geq N$ da $\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Birinchidan, berilgan, $\varepsilon > 0$ bo'yicha

shunday $\bar{N}$ nomer tanlaymizki $n \geq \bar{N}$ da $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajarilsin. (Bu mumkin

chunki $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik.) Keyin shunday nomer $N \geq \bar{N}$ ni

tanlaymiz, $n \geq N$ da $\left| \frac{x_{\bar{N}} - ay_{\bar{N}}}{y_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bajarilsin. Bunday N ni tanlash

mumkin. Chunki $x_{\bar{N}} - ay_{\bar{N}}$ son avvaldan, tayinlangan $\{y_n\}$ ketma-ketlik esa cheksiz

katta va shuning uchun $\left\{ \frac{x_{\bar{N}} - ay_{\bar{N}}}{y_n} \right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik. Endi $n \geq N$ bo'lsin

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + (y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}) + \dots + (y_{\bar{N}} - y_{\bar{N}-1})}{y_n}$$

yoki $\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{y_{\bar{N}} - y_{\bar{N}}}{y_n}$ $n \geq N$ da oxirgi tengsizlikdan quyidagini topamiz:

$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| \left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| < \varepsilon$. Teorema isbotlandi.

Eslatma. Agar $\{y_n\}$ o'suvchi cheksiz katta ketma-ketlik bo'lib

$\left\{ \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \right\}$ ketma-ketlik ham cheksiz katta va aniq ishorali cheksizlikka intilsa, u

holda $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ ketma-ketlik cheksiz katta bo'ladi. haqiqatan ham, $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A_n$

bo'lsin. $\{A_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta. $n \geq \bar{N}$ da

$$\frac{x_{N+1}}{y_{N+1}} - \frac{x_N}{y_N} = A_{N+1} \left(\frac{y_{N+1}}{y_{N+1}} - \frac{y_N}{y_N} \right)$$

..... ga ega bo'lamiz. Bu tengliklarni qo'shib topamiz:

$$x_n - x_{n-1} = A_n (y_n - y_{n-1})$$

$$x_n - x_N = A_{N+1} (y_{N+1} - y_N) + \dots + A_n (y_n - y_{n-1}). \text{ Bundan}$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \left| \frac{A_{N+1} (y_{N+1} - y_N) + \dots + A_n (y_n - y_{n-1})}{y_n} \right| - \left| \frac{x_N}{y_N} \right|$$

Aniqmaslik uchun $n \geq \bar{N}$ da $\{y_n\}$ va $\{A_n\}$ ketma-ketlikning elementlari musbat deb hisoblaymiz. Endi berilgan A bo'yicha N nomerni shunday tanlaymizki $n \geq N$ da

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| \geq \left| \frac{A_{N+1} (y_{N+1} - y_N) + \dots + A_n (y_n - y_{n-1})}{y_n} \right| - \left| \frac{x_N}{y_N} \right| \text{ tengsizlikni}$$

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| > 4A \frac{(y_{N+1} - y_N) + \dots + (y_n - y_{n-1})}{y_n} - \left| \frac{x_N}{y_N} \right|$$

tengsizlikdan topamiz yoki $\left| \frac{x_n}{y_n} \right| > 4A \left(1 - \frac{y_N}{y_n} \right) - A > A$. Shunday qilib $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ ketma-

ketlik cheksiz katta.

2.2.5-misol. Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik yaqnlashuvchi bo'lib, limiti a bo'lsa, u holda $\{a_n\}$ ketma-ketlik elementlarining o'rta arifmetik qiymatlaridan tuzilgan

$\left\{ \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right\}$ ketma-ketlik ham o'sha a limitga yaqinlashishini ko'rsatamiz. Bu

tasdiq Koshi tomonidan isbotlangan. Haqiqatan ham agar

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = x_n$ va $y_n = y$ desak, u holda $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a_n$ bo'ladi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = a.$$

2.2.6-misol. $\{a_n\}$ ketma-ketlikni qaraylik:

$$a_n = \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}},$$

k -butun musbat son bo'lsin. $1^k + 2^k + \dots + n^k$ ni x_n orqali n^{k+1} ni y_n orqali belgilaymiz.

U holda $\{a_n\}$ ketma-ketlik $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ ko'rinishga keladi.

Endi $\left\{ \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \right\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchanligini tekshiramiz.

$(n-1)^{k+1} = n^{k+1} - (k+1)n^k + \dots$ va $n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = (k+1)n^k + \dots$ bo'lganidan ushbuga

$$\text{egamiz: } \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \frac{n^k}{(k+1)n^k - \frac{(k+1)kn^{k-1}}{2} + \dots + (-1)^{k+1}} \quad \text{Oxirgi}$$

ifodaning surat va maxrajini n^k ga bo'lib, quyidagini hosil qilamiz.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{k+1 + \frac{1}{n}[\dots]} \quad \text{u yerda katta qavs ichidagi ifoda yozilmadi, chunki uning}$$

limiti $n \rightarrow \infty$ da $\left[-\frac{(k+1)k}{2} \right]$ ga teng. Oxirgi formuladan topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{k+1}. \quad \text{Demak, Shtols teoremasiga ko'ra } \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

2.2.7-misol. $\{x_n\} = \left\{ \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \dots + n^2}{n^3} \right\}$ ketma-ketlikni qaraymiz.

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \dots + n^2 = x_n$ va $n^3 = y_n$ bo'lsin. U holda Shtols teoremasini tadbiq

qilsak: Endi $\left\{ \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \right\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchanligini tekshiramiz.

$x_n - x_{n-1} = n^2$ va $y_n - y_{n-1} = 3n^2 - 3n + 1$ bo'ladi. Bu yerda Shtols teoremasini ikki marta qo'llaymiz va birdan limitga o'tib ketaveramiz:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \dots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2 - 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n-1)^2}{(3n^2 - 3n + 1) - (3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{6n-6} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2.2.8-misol $a_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$ bo'lgan $\{a_n\}$ ketma-ketlikni qaraylik. Bunda

$$x_n = (n+1)(n+2)(n+3) \text{ va } y_n = n^3 \text{ deb olamiz va yuqoridagi singari } \left\{ \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \right\}$$

ketma-ketlik limitini hisoblaymiz :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2)}{n^3 - (n-1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 9n + 6}{3n^2 - 3n + 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 9n + 6 - (3(n-1)^2 + 9(n-1) + 6)}{3n^2 - 3n + 1 - (3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + 6}{6n - 6} = 1.\end{aligned}$$

Bu misolda Shtols teoremasini ikki marta qo'lladik. Ikkinchi martada $x_n = 3n^2 + 9n + 6$ va $y_n = 3n^2 - 3n + 1$ deb oldik va yana yuqorida teorema keltirilgan shartlarga tekshirib limitni topishda davom etdik.

II-Bobga doir misollar:

2.2.9-misol:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin^2 x - 12 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{12}{\cos^2 4x} - \frac{12}{\cos^2 x}}{12 \cos 4x - 12 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 \cos^2 x - 12 \cos^2 4x}{\cos^2 x \cos^2 4x (12 \cos 4x - 12 \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 (\cos x - \cos 4x)(\cos x + \cos 4x)}{12 \cos^2 x \cos^2 4x (\cos 4x - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} - \frac{(\cos x + \cos 4x)}{\cos^2 x \cos^2 4x} = \frac{-(1+1)}{1} = -2\end{aligned}$$

2.2.10-misol:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{3} \operatorname{tg}^{-\frac{2}{3}} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{3 \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} x \cos^3 x \cdot 4 \sin x} = \frac{1}{12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

2.2.11-Misol

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1 + xe^x - 2e^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^x x - e^x}{6x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{e^0}{6} = \frac{1}{6}$$

2.2.12-misol $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg 2x}$ limitni hisoblang.

$$y = (tgx)^{tg 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \ln y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln tgx}{(tg 2x)^{-1}}$$

$$y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\ln tgx)'}{((tg 2x)^{-1})'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2}{\cos^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x = -1$$

2.2.13-misol $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}$ limitni hisoblang.

$$f(x) = e^{\alpha x} - \cos \alpha x, \quad g(x) = e^{\beta x} - \cos \beta x. \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

$$f'(x) = \alpha(e^{\alpha x} + \sin \alpha x), \quad g'(x) = \beta(e^{\beta x} + \sin \beta x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

2.2.14-misol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgx - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} = \frac{1}{2}$$

2.2.15-misol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cotg 3x = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x} \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin 3x}{x}} = \frac{1}{3}$$

2.2.16-misol: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(x - \frac{\pi}{2})}{tgx}$ limit hisoblansin.

$$f(x) = \ln(x - \frac{\pi}{2}), \quad g(x) = tgx \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x (-\sin x)}{1} = 0$$

2.2.17-misol:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2}$$

Xulosa.

Bitiruv malakaviy ishining II bobi Aniqmasliklarni ochish bo'lib, uning birin-Rejasida Lapital qoidasi haqida ma'lumot berilgan.

Ikkinchi rejasi esa Boshqa turdagi aniqmasliklarni hisoblashga doir ma'lumotlar yoritib berilgan Shtols teoremasi va uning tadbiqlariga doir misollar keltirildi.

Bu bobda asosan Lapital qoidasi va aniqmasliklarni hisoblashga doir qo'shimcha misol va masalalar ishlandi.

Xotima.

Bitiruv malakaviy ishining I bobi ketma-ketliklar haqida bo'lib, uning birinchi rejasida sonli ketma-ketliklar haqida. Ikkinchi rejasida esa funksiyaning limiti haqida ma'lumot berilgan. Bu bobda sonli ketma-ketliklar, cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklar, chegaralangan ketma-ketliklar, yaqinlashuvchi, uzoqlashuvchi ketma-ketliklar, cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar o'rganilgan. Bu mavzular asosan oliy o'quv yurtlarining matematik analiz fanini o'rganishda kerak bo'ladi. Bitiruv malakaviy ishining II bobi Aniqmasliklarni ochish bo'lib, uning birin rejasida Lapital qoidasi haqida ma'lumot berilgan.

Ikkinchi rejasida esa boshqa turdagi aniqmasliklarni hisoblashga doir ma'lumotlar yoritib berilgan. Shtols teoremasi va uning tadbirlariga doir misollar keltirildi.

Bu bobda asosan Lapital qoidasi va aniqmasliklarni hisoblashga doir qo'shimcha misol va masalalar ishlandi.

Foydalanilgan dabiyyotlar.

1. I. Karimov “Yuksak manaviyat yengilmas kuch” Toshkent-2009 yil 2. I. Karimov “Barkamol avlod orzusi “ Toshkent-2000 yil (66-68 betlar)
3. I. Karimov “XXI asr bo’sag’asida” Toshkent-1997 yil (52-54 betlar)
4. Azlarov T.A. Mansurov X.T “Matematik analiz “I.II. tom . O’qituvchi 1995 yil
5. Ilin V. A. Sadovnichniy V. A, Sendov B.”matematicheskii analiz” I-II tom nauka 1972 yil
6. Sadullayev A . Mansurov X.T. Xudoyberganov G. Vorisov A.K . G’ulomov .R. “Matematik analiz fanidan misol va masalalar to’plami“ I.II.tom. T. O’qituvchi 1993 -1995 yil
- 7.T. Alorov. A. Mansurov “Matematik analiz asosolari“ 1,2-qism. T. Universiteti 2005-2007 yil
- 8.T. To’ychiyev , D. X Djumaboyev “Matematik analiz fanidan1-2-kurs talabalari uchun labaratoriya ishlari.T. Universitet-2003 yil
9. Differensial va integral hisob. N.S. Piskunov I,II tom. T. O’qituvchi 1974y
10. Илвин В. А, Позняк Е. Г “Математ анализ асослари” I-кисм Т-1991Y