

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika-matematika fakulteti

“Matematika” kafedrası

Idiyeva Huriyat Abbos qizi

**«Singulyar integral tenglamalar tushunchasi va ularning turlari»
mavzusida**

5130100 – “Matematika” ta’lim yo’nalishi bo’yicha bakalavr
darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**“ Ish ko’rildi va himoyaga ruxsat “ _____” _____2017 y
berildi ”**

Ilmiy rahbar _____f.m.f.d., prof.

D.Q.Durdiyev

Taqrizchi : _____

Kafedra mudiri : _____

“ _____” _____2017 y

dots. I.M.Jo’rayev

“ _____” _____2017 y

«Himoya qilishga ruxsat berildi »

Fakultet dekani prof. Sh.M. Mirzayev

“ _____” _____2017 y.

Mundarija

Kirish	3
I . Integral tenglamalar haqida umumiy ma'lumotlar	
1.1.Fredgol'm integral tenglamalari.....	11
1.2.Volterra integral tenglamalari.....	21
I bob yuzasidan xulosalar.....	25
II. Singulyar integral tenglamalar.....	
2.1. Singulyar integral tenglamalar haqida tushuncha.	26
2.2. Singulyar integral tenglama turlari va ularni yechish usullari.	36
II bob yuzasidan xulosalar.....	47
Xotima	48
Foydalangan adabiyotlar.....	49

KIRISH

Ta'lim va ma'rifat tizimini takomillashtirish,
mamlakatimiz kelajagi bo'lgan yoshlarni
zamonaviy bilim olishga yo'naltirish,
barkamol shaxsni tarbiyalash bilan bog'liq
ekanini biz yaxshi anglaymiz.

SH.M.Mirziyoev

O'zbekistonimizga mos tarixiy, milliy, an'anaviy va iqtisodiy vaziyat va xususiyatlarni inobatga olmasdan turib, "bozor iqtisodiyotining shiddatli girdobiga o'zingni tashlasang, uning o'zi ko'zlangan manzilga olib chiqadi" degan xomxayollardan butunlay voz kechdik. Va bugungi kunda butun dunyoda tan olingan, "o'zbek modeli" deb nom olgan jamiyatimizni tubdan isloh etish, erkinlashtirish, demokratik yangi davlat qurish, uni modernizatsiya qilish bo'yicha puxta o'ylangan taraqqiyot yo'limizni tanlab oldik.

Konstitutsiyamizda belgilab berilgan asosiy maqsadlarimiz barchamizga yaxshi ma'lum. Ya'ni, Bosh qomusimiz bozor iqtisodiyotiga asoslangan mustaqil demokratik davlat qurish, inson manfaatlari, huquq va erkinliklari, qonun ustuvorligi va mamlakatimiz barcha fuqarolari uchun qonun oldida tenglik tamoyili ta'minlanadigan fuqarolik jamiyatini shakllantirishning mustahkam poydevorini yaratib berdi.

Biz tanlagan va mashhur besh tamoyilga asoslangan taraqqiyot modelining naqadar haqqoniy va samarali ekani biz qurayotgan yangi demokratik tizimda, iqtisodiyotimiz rivojlanishining barqaror, barchani hayratda qoldirayotgan sur'atlarida, xalqimizning hayot darajasi va sifati ortib borayotganida o'zining amaliy tasdig'ini topmoqda.

O'tgan davrda biz duch kelgan og'ir sinov va muammolarga qaramasdan, mustaqillik yillarida O'zbekiston iqtisodiyoti qariyb 5 barobar, aholi daromadlari jon boshiga o'rtacha 8,7 barobar o'sganini, mamlakatimiz aholisi bu davrda 1,5-marta ko'payib, 2015-yilning 1-yanvarida 31 million 500 ming

kishini tashkil etishini inobatga oladigan bo'lsak, bunday ulkan natijalarga erishganimizni, ochig'ini aytganda, ba'zan tasavvur qilishning o'zi ham qiyin.

Mamlakatimizda amalga oshirilayotgan olamshumul o'zgarishlar, shahar va qishloqlarimizning qiyofasi tobora chiroy ochib, aholimizning farovonligi yuksalib borayotgani haqida gapirganda, bunday yangilanishlarning g'oyat muhim manbalari – avvalo, odamlarimizning ongu tafakkuri, dunyoqarashi va kayfiyati tubdan o'zgarib, ularning yon-atrofimizda ro'y berayotgan voqea-hodisalarga daxldorlik hissi, ertangi kunga munosabati va ishonchi tobora mustahkamlanib, siyosiy saviyasi va huquqiy madaniyati o'sib borayotgani haqida alohida to'xtalishni o'rinli deb bilaman

Jahon tarixi barchamizga bir haqiqatni doimo eslatib turadi – hayotimiz taraqqiyoti hech qachon bir joyda to'xtab turmaydi, xuddi shu kabi jamiyatimizni isloh etish va demokratlashtirish, mamlakatni modernizatsiya qilish va yangilash bir muddatlik ish emas, balki muntazam davom etadigan uzluksiz jarayondir.

Ayniqsa, bugun biz XXI asrda – intellektual mehnat birlamchi ahamiyat kasb etayotgan globallashuv va internet asrida yashayotganimizni hisobga oladigan bo'lsak, jahon bozorida raqobat kurashining miqyosi va keskinligi tobora ortib borayotgani bu haqiqatni yana tasdiqlab bermoqda.

Shuning uchun ham qo'lga kiritilgan yutuqlar bilan chegaralanmasdan, xotirjamlik va havolanish kayfiyatiga berilmasligimiz, aksincha, yangi marralar sari intilishimiz, doimo izlanib yashashimiz, taraqqiyot va yangilanish yo'lidan izchillik bilan yanada ilgarilab borishimiz zarur.

Istiqlol mamlakatimiz yosh olimlariga jahon ilm-fani oldida turgan dolzarb masalalarni hal etishda faol ishtirok etish imkonini berdi. Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti huzurida Kembrij universiteti (Buyuk Britaniya) ishtirokida Yuqori texnologiyalar markazining tashkil etilgani ham bunga yorqin misoldir. Innovatsion loyihalar ishlab chiquvchilar orasida yosh mutaxassislarning ulushi tobora ortib borayotir. Yosh olimlar kengashi iste'dodli yoshlarni qo'llab-quvvatlash maqsadida ilmiy va

innovatsion faoliyatni rivojlantirish bo'yicha ilm-fan yo'lini tanlagan yoshlarni rag'batlantirishga qaratilgan maqsadli strategiyani ishlab chiqdi.

Respublikamiz mustaqillikka erishgandan keyin bizning o'zbek yigit-qizlari jahon arenalarida sport va ilm-fanning turli sohalarida yutuqlarga erishib yurtimiz sharafiga himoya qilishmoqda. Ularga o'z sohasini mukammal biladigan mutaxassislar bo'lib yetishishi uchun jahon standartlari darajasida bilim berish, fanlarni chuqur o'rgatish, fanning ishlab chiqarish bilan aloqasini mustahkamlash bugungi kunning muhim vazifalaridan biridir.

O'zbekiston mustaqilligining 21-yilligi arafasida Fanlar akademiyasining Astronomiya institutiga yaponiyalik olimlar tomonidan 22948-kichik sayyora-asteroid kashf etilgani, unga Xalqaro astronomiya ittifoqi "Maydanak" nomini bergani ham olimlarimiz ilmiy yutuqlari e'tirofidan dalolatdir. Garvard kichik sayyoralar markazi tomonidan chop etilgan xabarda Maydanak O'zbekistonda joylashgan jahon miqyosidagi astronomik observatoriya ekani ta'kidlangan. Umuman, chet ellik astronomlar turli vaqtlarda kashf etilgan besh kichik sayyora jahon ilm-fani rivojiga beqiyos hissa qo'shgan buyuk ajdodlarimiz sharafiga O'zbekiston, Avitsenna, Ulug'bek, Beruniy va Xorazmiy nomini bergan. Yana bir sayyora 2009-yilda o'zbekistonlik olimlar tomonidan Maydanak observatoriyasida kashf etildi. Birinchi prezidentimiz Islom Karimovning taklifiga binoan unga azaldan jahon astronomiyasi markazi bo'lgan shahar Samarqand nomi berildi. O'tgan yillar davomida Fanlar akademiyasi olimlari xalqaro ahamiyatga molik boshqa ko'plab muhim fundamental ilmiy natijalarga erishdi. Gen-nokaut texnologiyasi yordamida g'o'zaning ildiz tizimi rivojlangan, hosildorligi yuqori, tolasi sifatli, ertapishar va sho'rlanishga chidamli noyob transgen navining yaratilgani mamlakatimiz paxtachiligida erishilgan eng katta ilmiy yutuq bo'ldi. Olimlarimiz tomonidan serhosil "Mehnat" va "AN-16" g'o'za navlari ham yaratilib, ular har yili katta maydonlarda yetishtirilmoqda. Bundan tashqari, 10 jildli noyob "Tabiiy birikmalar (tabiiy resurslar, tuzilma va xususiyatlar)" ilmiy-amaliy nashri tayyorlanib, ilk bor ingliz tilida chop etildi, mahalliy o'simlik

xomashyosi asosida o'ttizdan ziyod dorivor preparatlar yaratildi. Ayni paytda O'zbekiston Fanlar akademiyasi muassasalarining jahondagi yirik ilmiy markazlar bilan to'g'ridan-to'g'ri ilmiy aloqalari tenglik va o'zaro manfaatdor. Oliy ta'lim muassasalarida tabiiy fanlarning o'qitilishi integratsiyasining afzalligi, birinchidan, mavzu, bo'lim, bob va fanlararo bog'lanishlar natijasida talabalarda mustaqil fikrlash, tashabbuskorlik, bilimlarni puxta va ongli o'zlashtirish ko'nikmalari takomillashadi, ular tabiiy va ijtimoiy hodisalarni kuzatadi, qiyoslaydi, xulosalaydi va xotirada saqlaydi. Natijada talabada ijodiy tafakkur, mustaqil ishlash qobiliyati rivojlantiradi.lik asosida sezilarli ravishda kengayib bormoqda. Har qanday voqelik makon va zamonda ro'y berishi tabiiy fan namoyandalarning doimiy e'tiborida bo'lib kelgan. Akademik I. P. Gerasimovning bilimlarni kundalik hayot bilan uyg'unlashtirish jamiyatning muhim talabi ekanligini ta'kidlab o'tganligi zamonaviylik sifat ko'rsatgichiga mos keladi.

XXI asrga kelib, tabiat va jamiyat munosabatlari tufayli 40 dan ziyod sayyoraviy-global muammolar yuzaga keldi-ki, ularning vujudga kelishida asosan inson omili yetakchilik qiladi. Demak, dunyo hamjamiyati mazkur muammolarni bartaraf qilishda antropogen omillarga katta e'tibor qaratmoqda. Har bir kishi tabiat boyliklaridan samarali, tejab, asrab-avaylab foydalanishi bugungi kunning talabi ekanligini doimo mas'uliyat bilan his qilishi lozim.

Mamlakatimizda mazkur yo'nalishning echimi sifatida "Komil inson" tarbiyasi asos qilib olindi. "Komil inson" ning asosiy fazilatlaridan biri uning ma'naviy etukligidir. O'zbekiston Respublikasi birinchi prezidenti I. A. Karimovning "Yuksak ma'naviyat – yengilmas kuch" nomli asarida ma'naviyat tushunchasi shunday ta'riflangan: "Ma'naviyat tushunchasi jamiyat hayotidagi g'oyaviy, mafkuraviy, ma'rifiy, madaniy, diniy va axloqiy qarashlarni o'zida to'la mujassam etadi " (20 b.). Mazkur ma'naviyat so'zining poydevorlaridan biri sifatida ma'rifat va madaniyat tushunchalarining ham alohida qayd qilinganligi e'tiborga loyiq. Komil insondagi asosiy xususiyatlardan yana biri fan sirlarini chuqur o'zlashtirishidir. Ushbu vazifani fanlar amalga oshiradi.

Bugungi kunda olimlar o'rtasida fan tushunchasi o'rniga fanlar tizimi (sistema) so'zi keng iste'molga kirdi.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti SH. MIRZIYOEV 2017 yil 7 fevral

Ta'lim va fan sohasini rivojlantirish borasida chiqargan qonunda quyidagilar aytilgan:

Uzluksiz ta'lim tizimini yanada takomillashtirish, sifatli ta'lim xizmatlari imkoniyatlarini oshirish, mehnat bozorining zamonaviy ehtiyojlariga mos yuqori malakali kadrlar tayyorlash siyosatini davom ettirish;

ta'lim muassasalarini qurish, rekonstruksiya qilish va kapital ta'mirlash, ularni zamonaviy o'quv va laboratoriya asboblari, kompyuter texnikasi va o'quv-metodik qo'llanmalar bilan jihozlash orqali ularning moddiy-texnika bazasini mustahkamlash yuzasidan maqsadli chora-tadbirlarni ko'rish;

maktabgacha ta'lim muassasalari tarmog'ini kengaytirish va ushbu muassasalarda bolalarning har tomonlama intellektual, estetik va jismoniy rivojlanishi uchun shart-sharoitlarni tubdan yaxshilash, bolalarning maktabgacha ta'lim bilan qamrab olinishini jiddiy oshirish va foydalanish imkoniyatlarini ta'minlash, pedagog va mutaxassislarning malaka darajasini yuksaltirish;

umumiy o'rta ta'lim sifatini tubdan oshirish, chet tillar, informatika hamda matematika, fizika, kimyo, biologiya kabi boshqa muhim va talab yuqori bo'lgan fanlarni chuqurlashtirilgan tarzda o'rganish;

bolalarni sport bilan ommaviy tarzda shug'ullanishga, ularni musiqa hamda san'at dunyosiga jalb qilish maqsadida yangi bolalar sporti ob'ektlarini, bolalar musiqa va san'at maktablarini qurish, mavjudlarini rekonstruksiya qilish;

kasb-hunar kollejlari o'quvchilarini bozor iqtisodiyoti va ish beruvchilarning ehtiyojlariga javob beradigan mutaxassisliklar bo'yicha tayyorlash hamda ishga joylashtirish borasidagi ishlarni takomillashtirish;

ta'lim va o'qitish sifatini baholashning xalqaro standartlarini joriy etish asosida oliy ta'lim muassasalari faoliyatining sifati hamda samaradorligini

oshirish, oliy ta'lim muassasalariga qabul kvotalarini bosqichma-bosqich ko'paytirish;

ilmiy-tadqiqot va innovatsiya faoliyatini rag'batlantirish, ilmiy va innovatsiya yutuqlarini amaliyotga joriy etishning samarali mexanizmlarini yaratish, oliy o'quv yurtlari va ilmiy-tadqiqot institutlari huzurida ixtisoslashtirilgan ilmiy-eksperimental laboratoriyalar, yuqori texnologiya markazlari va texnoparklarni tashkil etish.

Yoshlarga oid davlat siyosatini takomillashtirish:

jismonan sog'lom, ruhan va aqlan rivojlangan, mustaqil fikrlaydigan, Vatanga sodiq, qat'iy hayotiy nuqtai nazarga ega yoshlarni tarbiyalash, demokratik islohotlarni chuqurlashtirish va fuqarolik jamiyatini rivojlantirish jarayonida ularning ijtimoiy faolligini oshirish;

o'rta maxsus, kasb-hunar va oliy ta'lim muassasalari bitiruvchilarini ishga joylashtirish hamda xususiy tadbirkorlik sohasiga jalb etish;

yosh avlodning ijodiy va intellektual salohiyatini qo'llab-quvvatlash va ro'yobga chiqarish, bolalar va yoshlar o'rtasida sog'lom turmush tarzini shakllantirish, ularni jismoniy tarbiya va sportga keng jalb etish;

yoshlarni ijtimoiy himoya qilish, yosh oilalar uchun munosib uy-joy va ijtimoiy-maishiy sharoitlarni yaratish;

yoshlarga oid davlat siyosatini amalga oshirishda davlat hokimiyati va boshqaruvi organlari, ta'lim muassasalari, yoshlar va boshqa tashkilotlarning samarali faoliyatini tashkil etish.

Fan so'zining etimologiyasi "haqiqat", "bilish" ma'nolarini anglatadi. Haqiqatni yuzaga chiqarishda fanlarning o'zaro hamkorligi katta ahamiyatga ega.

Muammolarning serqirraligi, uning yechimida bir necha fanlarning o'zaro hamkorligi, qolaversa asrlar o'tishi bilan ma'lum fanning bir necha fanlarga bo'linishi bunday yondashuvning asosiy sababi hisoblanadi. Tabiat to'g'risidagi ilmiy bilimlar yig'indisi tufayli tabiiy fanlar shakllangan. Unga fizika, kimyo, biologiya, geografiya, geologiya, anatomiya, kosmologiya fanlari, shuningdek,

geokimyo, geofizika, meteorologiya, fiziologiya astrokimyo, biokimyo, antropologiya kabi o'ndan ortiq oraliq fanlar kiradi. Galaktika, Quyosh sistemasi, sayyoralar va Yer, inson, hayot, materiya mazkur fanlarning fundamental tushunchasi bo'lib, geografik qobiq, biosfera, ekotizim (ekosistema), sotsiosistema esa o'rganish ob'ekti va predmetidir. Albatta, matematika to'g'ridan-to'g'ri tabiiy fanlar tarkibiga kirmasa ham, tabiiy fan olimlarining tadqiqotlari uchun asos hisoblanadi.

Bitiruv malakaviy ishining dolzarbligi: Respublikamiz mustaqillikka erishgandan keyin bizning o'zbek yigit-qizlari jahon arenalarida sport va ilm-fanning turli sohalarida yutuqlarga erishib yurtimiz sharafiga himoya qilishmoqda. Ularga o'z sohasini mukammal biladigan mutaxassislar bo'lib yetishishi uchun jahon standartlari darajasida bilim berish, fanlarni chuqur o'rgatish, fanning ishlab chiqarish bilan aloqasini mustahkamlash bugungi kunning muhim vazifalaridan biridir. **Malakaviy bitiruv ishi matematik fizika fanida muhim o'rin tutgan integral tenglamalarga, asosan singulyar integral tenglamalarga bag'ishlangan bo'lib, talabalar bunday masalalarni yechishda qator qiyinchiliklarga duch keladilar. Buning sababi bunday masalalar mantiqiy fikrlashni, mavzu yuzasidan bilimlarni talab qiladi. Mazkur malakaviy bitiruv ishi mavzuning xuddi shu jihatlarini yoritishga qaratilganligi bilan, qolaversa bir qancha fizik hodisa va jarayonlarning aniq matematik modelini tuzishda hamda uni yechishda qo'l kelganligi bilan dolzarb hisoblanib, unda integral tenglamalar haqida ma'lumot berilib, singulyar integral tenglama va uni yechish usullari berilgan.**

Tadqiqot ob'ekti va predmeti: Integral tenglama, singulyar integral tenglama, yechish usullari.

Oliy o'quv yurtlari matematik fizika fani darsliklari, masalalar to'plami hamda internet materiallaridan iborat.

Shuni ta'kidlab o'tish joizki, biz yurtimiz va uning kelajagi uchun faqatgina o'zimizning intilishimiz, shijoatimiz, kuchli bilimimiz, bukilmas irodamiz, bilagimizdagi kuchimiz va ularni o'z o'rnida qo'llay olish yo'li orqali yuqori

natijalarga erishib, o'zimizning natijalarimiz bilan butun dunyoni lol qoldirib ilm-fan, texnika-texnologiya, axborot-kommunikatsiya, sport va sog'lomlashtirish sohalaridagi o'zimizning yutuqlarimiz bilan bevosita va bilvosita yordam bera olamiz.

Bitiruv malakaviy ishning asosiy maqsadi va vazifalari:

1. Integral tenglamalar va ularni yechish usullari haqida ma'lumot berish.
2. Singulyar integral tenglama va uni yechish usullarini o'rganish.

Tadqiqot usuli va uslubiyoti: Matematik fizika fanining nazariy va amaliy metodlari hamda matematik fizika masalalar to'plamidan foydalanildi.

Olingan asosiy natijalar: Integral tenglamalar va ularni yechish usullari haqida ma'lumot berildi. Singulyar integral tenglama va uni yechish usullari o'rganildi.

Natijalarning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati: bu bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega bo'lib, BMIning amaliy ahamiyati mavzu va mavzuga oid misol-masalalarni tahlil hamda tadqiqi hisoblanadi. Fizika va boshqa tabiiy fanlar masalalari differensial tenglamalar nazariyasini muammolar bilan ta'minlab turadi. Differensial tenglamalarni integral tenglamalarga keltirib yechish mumkin. Bu esa ishning amaliy ahamiyatini ko'rsatadi.

Tadbiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi. Qo'llanish sohasi. Xulosa va takliflar. Olingan natija matematika va fizika yo'nalishi talaba yoshlari hamda o'qituvchilar uchun muhim qo'llanma sifatida va murakkablik darajasi ancha yuqori bo'lgan bir qancha masalalarni yechishda amaliy asos bo'lishi mumkin.

Bitiruv malakaviy ishning hajmi va tuzilishi: BMI kirish, ikki bob, to'rt paragraf, ikki bobning xulosasi, xotima va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

I. INTEGRAL TENGLAMALAR HAQIDA UMUMIY MA'LUMOTLAR.

1.1. Fredgol'm va Volterra integral tenglamalari.

Integral tenglamalar nazariyasi shu qadar rivojlanib, tenglamalarning turlari shu qadar ko'payib ketdiki, ularga umumiy ta'rif berishning iloji bo'lmay qoldi. Shunday bo'lsa ham, integral tenglamaning ilgarilari qabul qilingan ta'rifini eslatib o'tamiz. Ma'lumki, agar biror tenglamadagi noma'lum funksiya differensiallash ishorasi ostida bo'lsa, bunday tenglama differensial tenglama deb yuritiladi. Integral tenglamaning ta'rif ham shunga o'xshaydi.

Ta'rif 1.1.1. Agar tenglamadagi noma'lum funksiya shu funksiyaning argumenti bo'yicha olinadigan integral ishorasi ostida bo'lsa, bunday tenglama **integral tenglama** deb ataladi.

Integral tenglamalarning turlari ko'p, ulardan ba'zilar quyidagilardir.

Fredgol'm integral tenglamalari.

Ta'rif 1.1.2. Ushbu integral tenglama Fredgol'mning¹ birinchi tur tenglamasi deyiladi:

$$\lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt = f(x), \quad (1.1.1)$$

bu yerda $u(x)$ – noma'lum funksiya, $f(x)$ – ozod had va $K(x, t)$ tenglamaning yadrosi – ma'lum funksiyalar, integrallash chegaralari a va b berilgan haqiqiy o'zgarmas sonlardir.

Ta'rif 1.1.3. Fredgol'mning ikkinchi tur tenglamasi deb quyidagi tenglamani aytamiz:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt. \quad (1.1.2)$$

Bu tenglamadagi noma'lum funksiya $u(x)$ integral ishorasidan tashqarida ham ishtirok etmoqda. (1.1.1) va (1.1.2) dagi λ tenglamaning parametri deb ataladi.

¹ Fredgol'm Erik Ivar (1866-1927)-mashhur shved matematigi.

Bu tenglamalardagi $f(x)$ funksiya $I(a \leq x \leq b)$ kesmada, $K(x, t)$ yadro esa $R(a \leq x \leq b, a \leq t \leq b)$ yopiq sohada berilgan deb hisoblanadi. Agar I kesmada $f(x) \equiv 0$ bo'lsa, (1.1.2) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt. \quad (1.1.3)$$

bunday tenglama bir jinsli integral tenglama deyiladi.

Nihoyat,

Ta'rif 1.1.4. Ushbu

$$\psi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt \quad (1.1.4)$$

tenglama uchinchi tur integral tenglama deb ataladi.

Agar I kesmada

a) $\psi(x) \equiv 0$ bo'lsa, undan (1.1.1) tenglama;

b) $\psi(x) \equiv 1$ bo'lsa, undan (1.1.2) tenglama kelib chiqadi.

Yuqorida biz tanishgan integral tenglamalarning barchasida noma'lum $u(x)$ funksiya bir argumentlidir, ya'ni birgina x erkli o'zgaruvchining funksiyasidir. Misol uchun quyidagi integral tenglamani olaylik:

$$u(x) = 3x - 2 + 3 \int_0^1 xtu(t) dt$$

bunda

$$f(x) = 3x - 2, \quad K(x, t) = xt, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad \lambda = 3$$

demak, bu tenglama Fredgol'mning ikkinchi tur tenglamalaridan ekan.

Integral tenglamada ishtirok etadigan noma'lum funksiya ikki argumentli bo'lishi ham mumkin. U holda, masalan, ikkinchi tur tenglama quyidagicha yoziladi:

$$u(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^b \int_c^d K(x, y, t_1, t_2) u(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (1.1.5)$$

bu yerda $f(x, y)$ -ozod had $R(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ sohada, yadro $K(x, y, t_1, t_2)$ esa $P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, c \leq y \leq d, a \leq t_1 \leq b, c \leq t_2 \leq d)$ sohada berilgan deb hisoblanadi; a, b, c, d esa λ lar berilgan o'zgaras haqiqiy sonlardir. Ana shunday tenglamalarga misol sifatida quyidagi tenglamani ko'rsatish mumkin:

$$u(x, y) = 2xy - 3 + 5 \int_0^1 \int_0^1 xyt_1 t_2 u(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

umuman, integral tenglamadagi noma'lum funksiya $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p argumentli bo'lishi ham mumkin, u holda Fredgol'm tenglamasidagi integral n karrali bo'ladi.

Integral tenglamalarni yechishning quyidagi usullari mavjud:

1. Differensial tenglamalarga keltirib yechish;
2. Aynigan yadroli integral tenglamalarni chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga keltirib yechish;
3. Aynigan yadroli integral tenglamalarni koeffitsiyentlarni tenglash usuli bilan yechish;
4. Ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechish;
5. Rezolventa usuli bilan yechish.

Fredgol'mning ikkinchi tur tenglamalarini quyidagi usul bilan yechish mumkin. Bu usul ketma-ket yaqinlashish usul yoki funktsional qator yordami bilan yechish usulidir.

Shunday qilib, ushbu

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt \quad (1.1.6)$$

tenglama berilgan bo'lib, bu erda $f(x)$ ozod had $I(a \leq x \leq b)$ kesmada noldan farqli uzluksiz funksiya; $K(x, t)$ yadro $R(a \leq x \leq b, a \leq t \leq b)$ sohada noldan farqli uzluksiz funksiya; a, b, λ lar esa o'zgaras haqiqiy sonlar deb faraz qilinadi $\lambda \neq 0$

Berilgan (1.2.1) tenglamaning yechimi quyidagi qator shaklida izlaymiz:

$$u(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \lambda^n u_n(x) + \dots, \quad (1.1.7)$$

bundagi $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots$ lar noma'lum funktsiyalardir. Ularni shunday tanlab olish kerakki, natijada (1.1.7) qator (1.1.6) integral tenglamaning yechimi bo'lsin.

Ana shu maqsadda (1.1.7) ni tenglamaning yechimi deb hisoblab (1.1.6) tenglamaga qiyamiz:

$$\begin{aligned} u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots &\equiv f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) [u_0(t) + \lambda u_1(t) + \lambda^2 u_2(t) + \dots] dt \equiv \\ &\equiv f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u_0(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K(x, t) u_1(t) dt + \dots \end{aligned}$$

biz (1.1.7) funktsional qatorni biror intervalda tekis yaqinlashuvchi deb faraz qilamiz, shu sababli uni hadlab integrallash mumkin. Bu ayniyatning ikki tomonidagi bir xil darajali λ larning koeffitsientlari teng bo'ladi, ya'ni

$$\begin{aligned} u_0(t) &= f(x), \\ u_1(x) &= \int_a^b K(x, t) u_0(t) dt, \\ u_2(x) &= \int_a^b K(x, t) u_1(t) dt, \\ &\dots\dots\dots \\ u_n(x) &= \int_a^b K(x, t) u_{n-1}(t) dt, \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

endi bu ifodalarni yuqoridan boshlab birin-ketin izidan keyingisiga qo'yib chiqamiz, natijada quyidagi ifodalar hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x), \\ u_1(x) &= \int_a^b K(x, t) f(t) dt, \\ u_2(x) &= \int_a^b K(x, t) \int_a^b K(t, t_1) f(t_1) dt_1 dt, \\ &\dots\dots\dots \\ u_n(x) &= \int_a^b K(x, t) \int_a^b K(t, t_1) \dots \int_a^b K(t_{n-2}, t_{n-1}) f(t_{n-1}) dt_{n-1} \dots dt_1 dt \end{aligned} \tag{1.1.8'}$$

Mana shu ifodalar yordamida (1.1.7) qatorni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K(x, t) \int_a^b K(t, t_1) f(t_1) dt_1 dt + \dots, \quad (1.1.9)$$

Bu cheksiz qatorning umumiy hadi

$$\nu_n(x) = \lambda^n \int_a^b K(x, t) \int_a^b K(t, t_1) \dots \int_a^b K(t_{n-2}, t_{n-1}) f(t_{n-1}) dt_{n-1} \dots dt_1 dt \quad (1.1.10)$$

bo'ladi. Yuqorida keltirilgan shartlarga ko'ra, I kesmada $|f(x)| \leq N$, $N > 0$, hamda R sohada $|K(x, t)| \leq M$, $M > 0$. Bu yerdagi M va N o'zgarmas haqiqiy sonlardir. Shunga asosan (1.1.10) dan ushbu

$$|\nu_n(x)| \leq |\lambda|^n N M^n (b-a)^n = N [|\lambda| M (b-a)]^n \quad (1.1.11)$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Ma'lumki, o'ng tomondagi ifoda cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning, ya'ni yaqinlashuvchi qatorning umumiy hadi bo'lishi uchun

$$q = |\lambda| M (b-a) < 1, \quad |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \quad (1.1.12)$$

bo'lishi shart. Shundagina (1.1.9) qator I intervalda absolyut va tekis yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Biz hozircha (1.1.9) qator (1.1.6) tenglamaning yechimi ekanligini ko'rsatdik. endi undan boshqa yechimi yo'qligini ko'rsatamiz. Buning uchun aksincha faraz qilamiz, ya'ni (1.1.6) tenglamaning yana bitta uzluksiz $\nu(x)$ yechimi bor deb faraz qilamiz. U holda

$$\nu(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \nu(t) dt$$

Buni (1.1.6) dan ayiramiz:

$$u(x) - \nu(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) [u(t) - \nu(t)] dt$$

$$u(x) - \nu(x) = \alpha(x)$$

deb belgilab olaylik. U holda yuqoridagi tenglikni

$$\alpha(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \alpha(t) dt \quad (1.1.13)$$

koʻrinishda yozish mumkin. Maʼlum $\alpha(x)$ ayirma I kesmada uzluksiz boʻlgani uchun chegaralangan boʻladi, yaʼni

$$|\alpha(x)| < A, \quad A > 0$$

shunga asosan

$$|\alpha(x)| \leq \left| \lambda \int_a^b K(x, t) \alpha(t) dt \right| \leq |\lambda| M A (b - a)$$

Bundan foydalanib (1.1.13) tenglikdan quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$|\alpha(x)| \leq \left| \lambda \int_a^b K(x, t) \alpha(t) dt \right| \leq \left| \lambda \int_a^b M |\lambda| M A (b - a) dt \right| = A |\lambda|^2 M^2 (b - a)^2$$

buni yana (1.1.13) ga qoʻyish natijasida

$$|\alpha(x)| \leq A |\lambda|^3 M^3 (b - a)^3$$

hosil boʻladi. Umuman shu jarayonni n marta takrorlasak,

$$|\alpha(x)| \leq A [|\lambda| M (b - a)]^n \quad (1.1.14)$$

hosil boʻladi.

$$q = |\lambda| M (b - a) < 1,$$

boʻlgani uchun n cheksizlikka intilganda, (1.1.14) ning oʻng tomoni nolga intiladi. Shu sababli $\alpha(x) \equiv 0$, yaʼni $v(x) \equiv u(x)$ boʻladi.

Demak, ikkala yechim aslida bitta ekan.

Shunday qilib quyidagi teorema isbot qilindi.

1.1.1-Teorema Agar $f(x)$ funksiya I kesmada noldan farqli, uzluksiz, $K(x, t)$ yadro R sohada noldan farqli uzluksiz boʻlib, ushbu

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt$$

tenglama ^I kesmada absalyut va tekis yaqinlashuvchi (1.1.7) qatordan iborat faqat birgina yechimga ega bo‘ladi.

Misollar yechishda $u_0, u_1, u_2, \dots$ larning ifodalarini (1.1.8) formulalar yodamida topib, so‘ngra ularni (1.1.7) qatorga qo‘yib chiqish ishni osonlashtiradi.

Ta’rif 1.1.5.: Ushbu integral tenglama Fredgolmning 2-tur tenglamasi deyiladi:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy$$

Bunda $\varphi(x)$ – noma’lum funksiya integral ishorasidan tashqarida ham ishtirok etmoqda. (1.1.1) va (1.1.2) dagi λ tenglamaning parametri deyiladi.

Bu tenglamalardagi $f(x)$ funksiya $I(a \leq x \leq b)$ kesmada, $K(x, y)$ yadro esa $R(a \leq x \leq b, a \leq y \leq b)$ yopiq sohada berilgan deb hisoblanadi.

Ta’rif 1.1.6: Fredgol’mning 2-tur tenglamasi berilgan bo‘lsin:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy \quad (1.1.15)$$

Agar bu tenglamada ishtirok etayotgan yadroni ushbu:

$$K(x, y) = a_1(x)b_1(y) + a_2(x)b_2(y) + \dots + a_n(x)b_n(y) \quad (1.1.16)$$

ko‘rinishida yozish mumkin bo‘lsa, bunday yadro **aynigan yadro**¹ deyiladi.

Fredgolmninig 2-tur integral tenglamasi aynigan yadroga ega bo‘lsin, ya’ni tenglama quyidagi ko‘rinishda berilgan bo‘lsin.

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^b a_i(x)b_i(y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (1.1.17)$$

tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozib olishimiz mumkin:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i a_i(x) \quad (1.1.18)$$

bu yerda

¹ Aynigan yadro – вырожденное ядро

$$c_i = \int_a^b b_i(y) \varphi(y) dy \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1.19)$$

- noma'lum koeffitsiyentlar.

c_i larni shunday tanlaymizki, (1.1.18) formula bilan aniqlanadigan $\varphi(x)$ funksiya (1.1.17) integral tenglamaning yechimi bo'lsin.

Shu maqsadda (1.1.18) ni etib (1.1.17)ga qo'yamiz:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \left[c_i - \int_a^b b_i(y) f(y) dy - \lambda \sum_{j=1}^n \int_a^b c_j b_j(y) a_j(y) dy \right] = 0$$

Bundan chiziqli bog'liq bo'lmagan $a_i(x)$ funksiyalar uchun

$$c_i - \int_a^b b_i(y) f(y) dy - \lambda \sum_{j=1}^n \int_a^b c_j b_j(y) a_j(y) dy = 0$$

yoki

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} c_j = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1.20)$$

bu yerda

$$\alpha_{ij} = \int_a^b b_i(y) a_j(y) dy, \quad \gamma_i = \int_a^b b_i(y) f(y) dy \quad (1.1.21)$$

Shunday qilib (1.1.17) integral tenglamaning $\varphi(x)$ yechimini topish (1.1.20) algebraik tenglamalar sistemasini yechishga keldi.

(1.1.17) ga mos bir jinsli tenglama:

$$\varphi^0(x) - \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^b a_i(x) b_i(y) \varphi^0(y) dy = 0 \quad (1.1.22)$$

uchun mos algebraik tenglamalar sistemasi quyidagicha bo'ladi:

$$c_i^0 - \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} c_j^0 = 0 \quad (1.1.23)$$

Sistemalar nazariyasida quyidagi matrisa fundamental rol o'ynaydi:

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

Chiziqli algebra kursidan ma'lumki,

$$\det M(\lambda) \neq 0 \quad (1.1.24)$$

bo'lsa, sistema yagona yechimga ega.

Ammo $\det M(\lambda)$ λ ga nisbatan n -tartibli ko'phadni tashkil etadi. Shuning uchun (1.1.24) shart λ ning chekli sondagi: $\lambda : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ $m \leq n$ qiymatlari, ya'ni $\det M(\lambda)$ ko'phaning nollari uchun bajarilmaydi. Bu sonlar $K(x, y)$ yadroning xos sonlari deyiladi.

Shunday qilib, λ_k $k = 1, 2, \dots, m$ dan farqli har bir chekli λ lar uchun (1.1.20) sistema yagona $c_1, c_2, \dots, c_n$ yagona yechimga ega. (1.1.20) sistemaning yechimini (1.1.18) formulaning o'ng tomoniga qo'yib (1.1.15) integral tenglamaning $\varphi(x)$ yechimini olamiz. Shunday qilib quyidagi teorema isbotlandi:

Teorema 1.1.2. (Fredholmning birinchi teoremasi): Agar λ son $K(x, y)$ yadroning xos soni bo'lmasa, u holda har qanday uzluksiz $f(x)$ ozod had uchun (1.1.15) integral tenglama yechimga ega va bu yechim yagona.

(1.1.22) bir jinsli integral tenglamaga mos integral tenglama quyidagi ko'rinishga ega:

$$\psi(x) - \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^b a_i(y) b_i(x) \psi(y) dy = 0 \quad (1.1.25)$$

Bu tenglamaga mos algebraik tenglamalar sistemasi quyidagicha bo'ladi:

$$d_i - \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} d_j = 0 \quad (1.1.26)$$

bu yerda

$$d_i = \int_a^b a_i(y) \psi(y) dy \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1.27)$$

Agar $\lambda = \lambda_\varepsilon$ $k = 1, 2, \dots, m$ va $M(\lambda)$ matrisaning rangi r ga teng bo'lsa, u holda algebra kursidagi asosan, bir jinsli (1.1.23) sistema va unga mos (1.1.26) sistema $n-r$ ta chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimga ega:

$$c_1^{oj}, c_2^{oj}, \dots, c_n^{oj}$$

$$d_1^j, d_2^j, \dots, d_n^j, \quad j = 1, \dots, n-r.$$

(1.1.23) va (1.1.26) sistemalarning yechimlarini:

$$\varphi_{li}^0(x) = \lambda \sum_{i=1}^n c_i^{0l} a_i(x)$$

$$\psi_l(x) = \lambda \sum_{i=1}^n d_i^l b_i(x)$$

$$l = 1, \dots, n-r,$$

formulalarning o'ng tomoniga qo'yib, bir jinsli (1.1.22) va (1.1.25) integral tenglamaning $n-r$ ta chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarini topamiz. Ya'ni quyidagi teorema isbot bo'ldi:

Teorema 1.2.3. (Fredholmning ikkinchi teoremasi): (1.1.15) integral tenglamaga mos (1.1.22) va unga o'xshash (1.1.25) bir jinsli integral tenglamalar $n-r$ ta chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimga ega.

$\varphi_{li}^0(x)$, $l = 1, \dots, n-r$ funksiyalarga $K(x, y)$ yadroning λ_ε xos songa mos xos funksiyalari deyiladi.

$\lambda = \lambda_\varepsilon$ $k = 1, 2, \dots, m$ da (1.1.20) sistema harqanday o'ng tomon uchun yechimga ega emas. Bu sistema yechimga ega bo'lishi uchun γ_i , $i = 1, \dots, n$ sonlar quyidagi shartlarni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j d_j^l = 0, \quad l = 1, \dots, n-r. \quad (1.1.28)$$

(1.1.28) shart (1.1.21) ga asosan quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli:

$$\int_a^b f \psi_l(x) dx = \lambda \sum_{i=1}^n d_i^l \int_a^b b_i(x) f(x) dx = 0,$$

$$l = 1, \dots, n - r \quad (1.1.29)$$

Shunday qilib, biz quyidagi xulosaga keldik:

Teorema 1.1.4. (Fredholmning uchinchi teoremasi): $\lambda = \lambda_k$ $k = 1, 2, \dots, m$ da (1.1.15) integral tenglama yechimga ega bo'lishi uchun uning o'ng tomonidagi ozod had $f(x)$ funksiya (1.1.22) bir jinsli integral tenglamaga o'xshash (1.1.25) bir jinsli integral tenglamaning $\psi_l(x)$ $l = 1, \dots, n - r$ yechimlariga ortogonal bo'lishi zarur va yetarli.

1.2. Vol'terra integral tenglamalari.

Ta'rif 1.2.1. Ushbu

$$\lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt = f(x) \quad (1.2.1)$$

integral tenglama Vol'terraning² birinchi tur tenglamasi deb ataladi; bu yerda $f(x)$ funksiya $I(a \leq x \leq b)$ intervalda va $K(x, t)$ yadro $\Delta(a \leq x \leq b, a \leq t \leq x)$ sohada aniqlangan deb hisoblanadi.

Ta'rif 1.2.2. Vol'terraning ikkinchi tur tenglamasi, quyidagicha yoziladi:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt \quad (1.2.2)$$

agar I intervalda $f(x) \equiv 0$ bo'lsa, (1.2.2) dan ushbu bir jinsli

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt \quad (1.2.3)$$

tenglama kelib chiqadi. Yuqoridagilardan ko'rinadiki, Vol'terra tenglamalarida integralning chegaralaridan biri o'zgaruvchi bo'lib, Fredgol'm tenglamalarida ikkala chegarasi ham o'zgarmas sonlar bo'ladi. Masalan, quyidagi tenglamalar Vol'terra tenglamalaridir.

$$1. \quad u(x) = 1 + \int_0^x (t - x) u(t) dt$$

$$2. \quad u(x) = 6x + 29 + \int_0^x (6x - 6t + 5) u(t) dt$$

² Вольтера Вито (1860-1940)-машшур итальян математиги.

$$3. u(x) = \int_0^x (t-x)u(t)dt$$

$$4. u(x) = -2 \cos x + x + 2 \int_0^x (t-x)u(t)dt$$

Vol'terra tenglamalaridagi noma'lum funksiyalar ko'p argumentli, jumladan, ikki argumentli bo'lishi ham mumkin. U holda Vol'terraning ikkinchi tur tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$u(x, y) = f(x, y) + \int_a^x \int_c^y K(x, y, t_1, t_2)u(t_1, t_2)dt_1 dt_2 \quad (1.2.4)$$

bundagi $f(x, y)$ ozod had $\Delta(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ sohada va $K(x, y, t_1, t_2)$ yadro $P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, a \leq t_1 \leq x, c \leq t_2 \leq y)$ sohada aniqlangan deb hisoblanadi. Masalan, quyidagilar shunday tenglamalardir:

$$1. u(x, y) = xy + \lambda \int_0^x \int_0^y u(t_1, t_2)dt_1 dt_2$$

$$2. u(x, y) = 1 + \lambda \int_0^x \int_0^y xt_1 u(t_1, t_2)dt_1 dt_2$$

$$3. u(x, y) = xy + \lambda \int_0^x \int_0^y (t_1 t_2 - xy)u(t_1, t_2)dt_1 dt_2$$

Vol'terraning ikkinchi tur tenglamalarini ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechish mumkin. Faraz qilaylik quyidagilar berilgan bo'lsin:

$$a) u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (1.2.5)$$

b) $f(x) \equiv 0$ haqiqiy va $I(a \leq x \leq b)$ kesmada uzluksiz,

v) $K(x, t) \equiv 0$ haqiqiy va $\Delta(a \leq x \leq b, a \leq t \leq x)$ sohada uzluksiz,

g) λ parametr (o'zgarmas son)

Berilgan (1.2.5) tenglamaning yechimini ushbu

$$u(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots \quad (1.2.6)$$

funksional qator ko‘rinishida izlaymiz. Nomaʼlum $u_0, u_1, u_2, \dots$ funksiyalarni topish maqsadida (1.2.6) ni (1.2.5) tenglamaga qo‘yamiz, u holda ushbu ayniyat hosil bo‘ladi.

$$\begin{aligned} u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \lambda^3 u_3(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots &\equiv \\ &\equiv f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) [u_0(t) + \lambda u_1(t) + \lambda^2 u_2(t) + \dots] dt \equiv \\ &\equiv f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u_0(t) dt + \lambda^2 \int_a^x K(x, t) u_1(t) dt + \\ &+ \lambda^3 \int_a^x K(x, t) u_2(t) dt + \dots \end{aligned}$$

bu ayniyatning ikki tomonidagi bir xil darajali λ larning koeffitsentlarini tenglab quyidagi

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x) \\ u(x) &= \int_a^x K(x, t) u_0(t) dt \\ u_2(x) &= \int_a^x K(x, t) u_1(t) dt \\ &\dots\dots\dots \\ u_n(x) &= \int_a^x K(x, t) u_{n-1}(t) dt \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

munosabatlarni olamiz. Bundagi $u_0(x) = f(x)$ maʼlum bo‘lgani uchun boshqa $u_i(x)$ lar (1.2.7) dan ketma-ket kelib chiqaveradi. So‘ngra ularni (1.2.6) ga qo‘yilsa, izlanayotgan yechim kelib chiqadi.

Endi (1.2.6) qatorning I kesmada absolyut va tekis yaqinlashishini ko‘rsatamiz. Uning uchun, biror musbat hadli yaqinlashuvchi qatorning hadlari bilan (1.2.6) qatorning mos hadlarini solishtirib ko‘rish kerak. Yuqorida berilgan b) va v) shartlarga ko‘ra

$$|f(x)| < N, |K(x, t)| < M, N > 0, M > 0$$

bo‘lgani sababli, quyidagi tengsizliklarni olamiz:

$$|u_0(x)| = |f(x)| < N$$

$$|u_1(x)| \leq \int_a^x |K(x,t)| |u_0(t)| dt \leq NM(x-a) \leq NM(b-a)$$

chunki $a \leq x < b$

$$|u_2(x)| \leq \int_a^x |K(x,t)| |u_1(t)| dt \leq NM^2 \int_a^x (t-a) dt = NM^2 \frac{(x-a)^2}{2!} \leq NM^2 \frac{(b-a)^2}{2!}$$

va hokazo, shu xilda davom etilsa

$$|u_n(x)| \leq NM^n \frac{(x-a)^n}{n!} \leq NM^n \frac{(b-a)^n}{n!}, \dots$$

Endi tengsizliklarning o'ng tomonidagi hadlarga asoslanib, quyidagi musbat hadli qatorni tuzib olaylik:

$$\begin{aligned} & N + N[\lambda |M(b-a)] + \frac{1}{2!} N[\lambda |M(b-a)]^2 + \\ & + \frac{1}{3!} N[\lambda |M(b-a)]^3 + \dots = N + N\alpha_1 + N\alpha_2 + N\alpha_3 + \dots \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Bu qatorning yaqinlashuvchi yokanini Dalamber alomati yordamida ko'rsatish mumkin:

$$\frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}} = \frac{1}{n!} |\lambda |M(b-a)|^n : \frac{1}{(n-1)!} [\lambda |M(b-a)|]^{n-1} = \frac{|\lambda |M(b-a)|}{n}$$

bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = 0 < 1$$

Demak, (1.2.8) qator yaqinlashuvchi ekan. Shu sababli yuqoridagi tengsizliklarga asosan (1.2.6) qator ^I sohada absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib, absolyut va tekis yaqinlashuvchi (1.2.6) qator berilgan (1.2.5) Vol'terra tenglamasining yechimidir. Bunday boshqa yechimi yo'q ekanini isbot qilish oldingi paragrafdagiga o'xshash bo'lgani sababli uni takrorlamaymiz.

Konkret tenglamalarni yechishda (1.2.7) munosabatlarga asoslanib u_i larni ($i = 0, 1, 2, \dots$) topish va ularning ifodalarini (1.2.6) qatorga qo'yib chiqish kifoya.

Misol 1.2.1. Ushbu tenglamani yeching:

$$u(x) = x + \int_0^x (t-x)u(t)dt$$

bunda

$$f(x) = x \text{ va } \lambda = 1$$

Endi (1.2.7) munosabatlardagi hadlarni hisoblab chiqamiz:

$$u_0(x) = f(x) = x$$

$$u_1(x) = \int_0^x (t-x)t dt = \left[\frac{t^3}{3} - x \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=x} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} = -\frac{x^3}{3!}$$

$$u_2(x) = \int_0^x (t-x) \left(-\frac{t^3}{3!} \right) dt = \frac{x^5}{5!}$$

$$u_3(x) = \int_0^x (t-x) \left(\frac{t^5}{5!} \right) dt = -\frac{x^7}{7!}$$

va hokazo. Bu ifodalarning hosil bo'lishidagi qonuniyat ko'rinib turibdi. Ularni (1.2.6) qatorga qo'ysak izlanayotgan yechim hosil bo'ladi:

$$u(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sin x$$

Xulosa

Integral tenglamalar haqida umumiy ma'lumotlar berilgan. Fredgol'm va Vol'terra integral tenglamalar turlari ta'riflari keltirilgan. Integrallarni yechishga zarur teoremlar isbotlari bilan keltirilgan. Integral tenglamalarni yechish usullaridan ba'zilaridan foydalanib misollar yechib ko'rsatilgan.

II. Singulyar integral tenglamalar

2.1. Singulyar integral tenglamalar haqida tushuncha.

Umumiy mulohozalar va misollar

Ushbu

$$\varphi(x) - k \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (2.1.1)$$

integral tenglamani qaraymiz. Agar (2.1.1) tenglamaning yadrosi $K(x, y)$ asosiy $\{a \leq x, y \leq b\}$ (a, b cheksiz ham bo'lishi murnkin) kvadratda kvadrati bilan jamlanuvchi bo'lsa, ya'ni

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, y) dx dy < +\infty \quad (2.1.2)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (2.1.1) tenglama uchun Fredgolmning teoremlari o'rinli bo'ladi. Xususan, (2.1.1) tenglamaning spektri, ya'ni xos sonlarining to'plami diskret bo'lib, har bir xos songa chekli sondagi xos funksiyalar mos keladi (xos sonlar chekli karrali boladi). Agar (2.1.2) shart bajarilmasa, (2.1.1) integral tenglamaning spektri uzluksiz bo'lishi mumkin, ya'ni xos sonlar butun oraliqni toldirishi mumkin va xos sonlar cheksiz karrali bolishi mumkin. Bu aytganlarimizni misollarda ko'rsatamiz.

Quyidagi Lalesko-Pikar tenglamasini tekshiramiz:

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} \varphi(y) dy = f(x) \quad (2.1.3)$$

Bu tenglamaning yadrosi $K(x, y) = e^{-|x-y|}$ (2.1.2) shartni qanoatlantirmaydi, u cheksiz normaga ega bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x-y|} dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x-y|} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\int_{-\infty}^x e^{-2x} e^{2y} dy + \int_x^{\infty} e^{2x} e^{-2y} dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{ e^{-2x} [e^{2y}]_{-\infty}^x - e^{2x} [e^{-2y}]_x^{\infty} \} dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \end{aligned}$$

(2.1.3) integral tenglamani

$$\varphi(x) - \lambda \left[e^{-x} \int_{-\infty}^x e^x \varphi(y) dy + e^x \int_x^{\infty} e^{-y} \varphi(y) dy \right] = f(x)$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Agar $f(x)$ va $\phi(x)$ funksiyalar ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsa, berilgan tenglama

$$\varphi''(x) + (2\lambda - 1)\varphi(x) = f''(x) - f(x)$$

oddiy differensial tenglamaga ekvivalent bo‘ladi. Bu tenglamaning $f(x)=0$ bo‘lgan holdagi umumiy yechimi

$$\varphi(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x} \quad (2.1.4)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi, bunda $\mu = \sqrt{1-2\lambda}$, C_1, C_2 esa ixtiyoriy o‘zgarmaslar. (2.1.3) tenglamaning chap tomonidagi integralning mavjud bo‘lishi uchun $|\operatorname{Re} \mu| < 1$ boiishi, haqiqiy λ lar uchun $\lambda > 0$ bolishi zarurdir. Demak, haqiqiy sonlar sohasida (2.1.3) tenglamaning spektri $1 < \lambda < \infty$ oraliqdan iborat. Bu oraliqning har bir nuqtasi (2.13) tenglama uchun ikki karrali xos son bo‘ladi, ya’ni har bir $\lambda \in (0, \infty)$ ga ikkita chiziqli bog‘liq bo‘lmagan silliq $e^{\mu x}$ va $e^{-\mu x}$ xos funksiyalar mos keladi. Ammo, ishonch hosil qilish qiyin emaski, bu xos funksiyalar $L_2(-\infty, \infty)$ sinfga tegishli bo‘lmaydi. $\lambda > 1/2$ — bo‘lganda (2.1.4) ga asosan $\sin \sqrt{2\lambda-1} x, \cos \sqrt{2\lambda-1} x$ lar xos funksiyalar bo‘ladi. $\lambda = 1/2$ da $\varphi(x) = C_1 + C_2 x$ ga ega bo‘lamiz.

Shunday qilib, $\lambda > 1/2$ bo‘lganda $(-\infty, \infty)$ oraliqda chegaralangan xos funksiyalar mavjud bo‘ladi, lekin ular $L_2(-\infty, \infty)$ sinfga tegishli bo‘lmaydi. Bu misoldan integral tenglamaning yechimi qaysi sinfdan izlanishi muhim ekanligi ko‘rinayapti. Yana bir misol ko‘ramiz. $(\varphi(x))$ funksiya $[0, \infty)$ oraliqda absolyut integrallanuvchi uzluksiz bo‘lib, Ox o‘qning ixtiyoriy chekli oralig‘ida chekli sonda maksimum va minimumlarga ega bo‘lsin. Bu funksiya uchun Furiyening kosinus-almashtirishini tuzamiz:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(x) \cos t x dx$$

U holda

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi_1(t) \cos tx dt$$

Bu ikki formulani qo'shib,

$$\varphi(x) + \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} [\varphi(y) + \varphi_1(y)] \cos xy dy$$

tenglikni hosil qilamiz, ya'ni yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi

($\varphi(x)$) funksiya ixtiyoriy tanlanganda $\psi(x) = \varphi(x) + \varphi_1(x)$ funksiya,

$\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ xos qiymatga mos

$$\psi(x) = \lambda \int_0^{+\infty} \psi(y) \cos xy dy \quad (2.1.5)$$

integral tenglamaning xos funksiyasidan iborat bo'ladi. Demak, ($\varphi(x)$) ixtiyoriy funksiya bo'lgani uchun, λ ning ko'rsatilgan qiymatida (2.1.5) tenglama cheksiz ko'p chiziqli bog'liq bo'lmagan xos funksiyalarga

ega bo'ladi. Masalan, $\varphi(x) = e^{-ax}$ ($a > 0$) bo'lsin. Bu holda

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos xtdt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2}$$

Shu sababli

$$\psi(x) = \varphi(x) + \varphi_1(x) = e^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2} \quad (2.1.6)$$

$\psi(x)$ funksiyaning bu qiymatini (2.1.5) tenglamaga qo'yamiz:

$$e^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2} = \lambda \left[\int_0^{+\infty} e^{-ay} \cos xy dy + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{a \cos xy}{a^2 + y^2} dy \right]$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi integrallarning qiymatlari ma'lum:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ay} \cos xy dy = \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + y^2} dy = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}$$

Demak, avvalgi tenglikdan

$$e^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2} = \lambda \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-ax} + \frac{a}{a^2 + x^2} \right)$$

tenglik kelib chiqadi. Bundan, agar $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ bo'lsa, $\psi(x) = e^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+x^2} \neq 0$ funksiya (2.1.5) integral tenglamaning yechimi ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Shunday qilib, $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ son (5) tenglamaning xos soni bo'lib, $\psi(x)$ funksiya mos xos funksiya bo'ladi. $a > 0$ — ixtiyoriy haqiqiy son bo'lgani uchun $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ xos songa cheksiz ko'p chiziqli bogliq bo'lmagan (2.1.6) xos funksiyalar to'g'ri keladi.

Koshi tipidagi integral. Kompleks o'zgaruvchili Z tekisligida L — silliq yopiq egri chiziq bo'lsin. Ma'hmiki, silliq egri chiziq yoki silliq kontur deganda, o'zi-o'zi bilan kesishmaydigan, urinmasi uzluksiz o'zgaradigan va qaytish nuqtalariga ega bo'lmagan yopiq yoki ochiq chiziq tushuniladi. L egri chiziq bilan chegaralangan sohani D^+ orqali, $D^+ + L$ ning barcha kompleks tekislikkacha to'ldiruvchisini D^- orqali belgilaymiz.

Agar $f(z)$ funksiya D^+ sohada analitik va $D^+ + L$ da uzluksiz funksiya bo'lsa, kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasidan ma'lum bolgan Koshi formulasiga asosan

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{f(z)}{T-z} dT = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Agar $f(z)$ funksiya D sohada analitik, $D + L$ da uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{f(z)}{T-z} dT = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+ \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^- \end{cases} \quad (2.18)$$

Koshi formulasi, agar funksiyaning soha chegarasidagi qiymati ma'lum bo'lsa, uni sohaning ixtiyoriy nuqtasidagi qiymatini hisoblashga imkon beradi; qisqa qilib aytganda Koshi formulasi analitik funksiyalar uchun chegaraviy masalani hal qiladi. (2.1.7) va (2.1.8) formulalar chap tomonidagi integral Koshi integrali deyiladi. Endi L yopiq yoki ochiq silliq chiziq, τ uning

nuqtalarining kompleks koordinati va $(\varphi(\tau))$ bu chiziqdagi uzluksiz funksiya bo'lsin. u holda

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau-z} d\tau \quad (2.1.9)$$

integral Koshi tipidagi integral deyiladi, $(\varphi(\tau))$ funksiya uning zichligi, $\frac{1}{\tau-z}$ esa, yadrosi deyiladi.

Ravshanki, $\Phi(z)$ funksiya L egri chiziqning nuqtalaridan tashqari barcha kompleks tekislikda analitik funksiya, shu bilan birga $\Phi(\infty) = 0$. Demak, L chiziq $\Phi(z)$ funksiya uchun maxsus chiziq bo'ladi. Koshi tipidagi integralning z nuqta L egri chiziqqa yaqinlashganda va unda yotgandagi holati to'g'risidagi muhim masalalarni keyinroq bayon qilamiz.

Agar L — ochiq egri chiziq bo'lsa, $\Phi(z)$ maxsus L chiziqqa ega bo'lgan barcha tekislikda analitik funksiya bo'ladi. L — endi yopiq egri chiziq bo'lsin. Bu holda ikkita mustaqil funksiya ajraladi: D^+ sohada aniqlangan $\Phi^+(z)$ va D^- soha nuqtalari uchun aniqlangan $\Phi(z)$. Bu ikkita funksiya, umuman aytganda, biri ikkinchisining analitik davomi bo'lmaydi.

Bir-birini to'la tekislikka to'ldiruvchi D^+ , D^- sohalarda ikkita mustaqil $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ ifodalar bilan aniqlanadigan $\Phi(z)$ analitik funksiya odatda bo'lak-bo'lak analitik funksiya deyiladi

2.1.1-misol. $L=ab$ yoy, $\varphi(z) = 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{d\tau}{\tau-z} = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{b-z}{a-z} = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z-b}{z-a},$$

bu yerda

$$\ln \frac{b-z}{a-z} = \ln \frac{z-b}{z-a}$$

deb, ab yoy bo'yicha kesilgan tekislikda analitik, cheksizlikda nolga aylanuvchi funksiya tushuniladi.

2.1.2- misol $L: |z|=1$ birlik aylana, $\varphi(\tau) = \frac{2}{\tau(\tau-2)}$ bo'lsin. U holda

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2}{\tau(\tau-2)} \frac{d\tau}{\tau-2} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{(\tau-2)} \frac{d\tau}{\tau-2} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{\tau-2}$$

D^+ sohada $\frac{1}{z-2}$ funksiya analitik, $-\frac{1}{z}$ esa, D^- da analitik va cheksizlikda nolga aylanadi. Shuning uchun ham ayvalgi tenglikdagi ikkinchi integral (2.1.7) formulaga asosan $z \in D^+$ uchun $\frac{1}{z-2}$ ga teng, ikkinchi integral esa (2.18) formulaga binoan $z \in D^+$ uchun $\frac{1}{z}$ gat eng, $z \in D^+$ uchun esa nolga teng. Bundan

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z-2}, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{z}.$$

Koshi tipidagi integralning bosh qiymati (singulyar integral).

Matematik analiz kursidan ma'lumki, integral yig'indilarning limiti sifatida aniqlangan integral faqat chegaralangan funksiyalar uchun ma'noga ega. Agar integral ostidagi funksiya chegaralanmagan bo'lsa, u holda xosmas integral tushunchasi kiritiladi. Buni eslatib o'tamiz.

$f(x)$ funksiya $a < x < b$ kesmada aniqlangan bo'lib, bu kesmaning c nuqtasi atrofida chegaralanmagan bo'lsin. Lekin musbat ε_1 va ε_2 sonlar qanday kichik bo'lmasin $f(x)$ funksiya $a \leq x \leq c - \varepsilon_1, c + \varepsilon_2 \leq x \leq b$ kesmalarning har birida integrallanuvchi bolsin. Ushbu

$$\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \quad (2.1.10)$$

yigindmi tuzamiz. Agar bu yig'indi ε_1 va ε_2 bir-biriga bogliq bo'lmay nolga intilganda limitga ega bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning **xosmas integrali** deyiladi

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \right]$$

(2.1.10) yig'indi ε_1 , va ε_2 bir-biriga bog'liq bo'lmay nolga intilganda limitga ega bo'lmayligi, lekin ε_1 , va ε_2 biror munosabat bilan bog'liq bo'lib nolga intilganda limiti mavjud bo'lishi mumkin. Misol uchun $f(x) = \frac{1}{x-c}$ $a < c < b$ funksiyani tekshiramiz. (2.1.10) yig'indini tuzib,

$$\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (2.1.11)$$

tenglikka ega bo'lamiz. (11) miqdor ε_1 , va ε_2 nolga intilganda limitga intilmaydi, chunki nisbat bu holda ixtiyoriy o'zgarishi mumkin. Agar ε_1 , va ε_2 biri-biriga bog'liq bo'lsa, masalan $\varepsilon_1 = k\varepsilon_2$, bunda k musbat o'zgarmas, u holda (2.1.11) yig'indi limitga ega bo'lib, bu limit $\ln \frac{b-c}{c-a} + \ln k$ ga teng boladi. Xususiylashtirishda desak, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right] = \ln \frac{b-c}{c-a}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu misoldan so'ng quyidagi ta'rifni kiritamiz. $f(x)$ funksiya $a < x < b$ kesmada aniqlangan bo'lib, musbat ε son qanday kichik bo'lmasin bu funksiya $a \leq x \leq c-\varepsilon$ va $c+\varepsilon \leq x \leq b$ kesmalarda integrallanuvchi bo'lsin.

2.1.1-Ta'rif. Ushbu

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right]$$

limit (agar mavjud bo'lsa) $f(x)$ funksiyadan $a < x < b$ oraliqda olingan integralning **Koshi ma'nosidagi bosh qiymati** deyiladi. "Integralning bosh qiymati" o'rniga ko'pincha **singulyar (maxsus) integral** deb aytiladi.

Bosh qiymat tushunchasi va atamaning o'zi ham Koshi tomonidan kiritilgan. Biz singulyar integralni oddiy

$$\int_a^b f(x) dx$$

simvol bilan belgilaymiz. Singulyar integralni ifodalashda

$$v.p \int_a^b f(x)dx; \int_a^{b^-} f(x)dx; \int_a^{b^+} f(x)dx;$$

simvollar ham ishlatiladi, bunda v va p fransuzcha *voleur principale* soʻzlarining birinchi harflari bolib, oʻzbekchada "bosh qiymat" ni bildiradi. Agar oddiy (xos yoki xosmas) integral mavjud boʻlsa, singulyar integral bu oddiy integral bilan ustma-ust tushadi. (2.1.11) fomuladan ushbu

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a} \quad (2.1.12)$$

singulyar integralning mavjudligi kelib chiqadi. Bu koʻrilgan misoldan umumiyroq integralni tekshirish maqsadida Gyolder yoki N sinfga tegishli funksiyalar tushunchasini eslatib oʻtamiz.

$f(x)$ funksiya $a < x < b$ kesmada aniqlangan boʻlsin. Agar $a < x < b$ kesmaning ixtiyoriy ikkita x_1 va x_2 nuqtasi uchun

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|^\alpha$$

shart bajarilsa, $f(x)$ funksiya $a < x < b$ kesmada Gyolder(N) shartini qanoatlantiradi deyiladi, bundagi, α , A — musbat oʻzgarmas sonlar, shu bilan birga $0 < \alpha < 1$. A — Gyolder oʻzgarmasi, α — Gyolder koʻrsatkichi deb yuritiladi.

Agar α birdan katta bolsa, Gyolder shartidan $f(x)$ ning (a,b) oraliqda nolga tengligi kelib chiqadi va funksiya oʻzgarmasga aynan teng boʻlib qoladi. Agar $\alpha = 1$ boʻlsa, u holda Gyolder sharti maʼlum Lipshis sharti bilan ustma-ust tushadi. Bu taʼrifda $f(x)$ funksiya kesmada berilgan edi. Ammo funksiya biror ochiq yoki yopiq egri chiziqda berilishi ham mumkin.

L — silliq egri chiziq boʻlib, $\varphi(\tau)$ — bu egri chiziq nuqtalarining funksiyasi boʻlsin. Agar L egri chiziqning ixtiyoriy ikkita t_1 va t_2 nuqtalari uchun

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^\alpha$$

shart bajarilsa, $\varphi(\tau)$ funksiya L egri chiziqda Gyolder shartini qanoatlantiradi deyiladi, bu yerda ham A va α — oʻzgarmaslar, $0 < \alpha < 1$. L egri chiziqda berilgan funksiya koʻp oʻzgaruvchili boʻlishi ham mumkin.

Masalan, ikki o'zgaruvchili $\varphi(t, \tau)$ bo'lsin. Agar L da yotuvchi ikki juft (t_1, τ_1) va (t_2, τ_2) nuqtalar uchun $\varphi(t_1, \tau_1) - \varphi(t_2, \tau_2)$ funksiya L da Gyolder shartini qanoatlaniradi deb aytiladi, bunda K, μ, ν — musbat o'zgarmaslar, shu bilan $\mu < 1, \nu < 1$. Agar μ va ν sonlaming eng kichigi α bo'lsa, shunday o'zgarmas C ni topish mumkinki,

$$|\varphi(t_1, \tau_1) - \varphi(t_2, \tau_2)| \leq C(|t_1 - t_2|^\alpha + |\tau_1 - \tau_2|^\alpha)$$

tengsizlik bajariladi. Endi

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx \quad (2.1.13)$$

integralni tekshiramiz, bunda $\varphi(x)$ Gyolder shartini qanoatlantiruvchi biror funksiya. Bu integralni

$$\int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{x-c} = \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} dx + \varphi(c) \int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integral xosmas integral sifatida mavjud, chunki Gyolder shartiga asosan

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} \right| < \frac{A}{|x-c|^{1-\alpha}}$$

ikkinchi integral esa (2.1.12) integral bilan ustma-ust tushadi, ya'ni u singulyar integraldir. Shunday qilib, funksiya Gyolder shartini qanoatlantirsa, (2.1.13) integral Koshi bo'yicha bosh qiymat ma'nosida mavjud bo'lib, u quyidagiga teng bo'ladi:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx = \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} dx + \varphi(c) \ln \frac{b-c}{c-a}$$

Singulyar integral tushunchasi egri chiziqli integrallar uchun ham xuddi yuqoridagiday kiritiladi. L — bo'laklari silliq yopiq yoki ochiq egri chiziq bo'lib, τ, t — uning nuqtalarining kompleks koordinatlari bo'lsin. r nuqtani markaz qilib yetarli kichik ε radiusli $\gamma: |t - \tau| = \varepsilon$ aylana chizamiz L_n —

yopiq $|t - \tau| = \varepsilon$ doiradan tashqarida yotuvchi L ning qismi bo'lsin. Ravshanki,

$$\partial_i(\tau) = \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t - \tau} dt$$

integral oddiy tushunchada ma'noga ega. Agar

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\tau) = J(\tau)$$

limit mavjud bo'lsa, u integralning Koshi ma'nosidagi bosh qiymati yoki singulyar integral deyiladi. Buni ham, xuddi yuqoridagidek, integralning oddiy simvoli bilan belgilaymiz:

$$J(\tau) = \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t - \tau} \quad (2.1.14)$$

Bu holda ham, agar $\varphi(\tau)$ funksiya Gyolder shartini qanoatlantirsa, (2.1.14) singulyar integral mavjud bo'ladi.

Endi kompleks o'zgaruvchili funksiyalar kursidan ma'lum bo'lgan Soxoskiy—Plemel formulalarini eslatib o'tamiz.

L -yopiq silliq egri chiziq bo'lsin $\Phi^+(t)$ orqali z nuqta L ning ichidan turib L dagi t nuqtaga intilgandagi (9) Koshi tipidagi integral bilan ifodalangan $\Phi(z)$ funksiyaning limit qiymatini, $\Phi^-(z)$ orqali L ning tashqarisidan intilgandagi limit qiymatini belgilaymiz. Agar $\varphi(t)$ funksiya L da Gyolder shartini qanoatlantirsa, u holda

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

formulalar o'rinli bo'ladi, bundagi integrallar singulyar integrallardir (2.1.15) formulalarni bir-biridan ayirib va bir-biriga qo'shib, ularga teng kuchli formulalarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) - \Phi^-(t) &= \varphi(t), \\ \Phi^+(t) + \Phi^-(t) &= \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

(2.1.16) formulalar Soxoskiy—Plemel formula lari deb ataladi.

Bu formulalar to'g'risida ayrim fikrlarni aytib o'tamiz. L egri chiziq bo'ylab soat miliga qarshi harakat qilinganida, bu bilan chegaralangan soha chap tomonda qoladi deb faraz qilamiz. z nuqta t ga intilishi to'g'risida gapirilganda, z nuqta harakati davomida chizilgan egri chiziq L egri chiziqqa urinmaydi deb hisoblaymiz, aks holda bu formulalar to'g'ri bo'lmasligi mumkin.

Agar L yopiq egri chiziq bo'lmay, oddiy yoydan iborat bo'lsa, "sohaning ichidan" va "sohaning tashqarisidan" tushunchalari ma'noga ega bolmaydi, shunga qaramasdan (2.1.15) formulalar o'z kuchini saqlab qoladi. Bu holda L biror L yoy bilan soat miliga qarshi aylanib o'tiladigan yopiq egri chiziqqacha to'ldiriladi. D — bu egri chiziq bilan chegaralangan soha bo'lsin. U holda (2.1.15) formulalardagi "+" va "-" belgilarni mos ravishda D sohaning ichidan yoki tashqarisidan (ya'ni L egri chiziqning chapidan va o'ngidan) yo'nalish deb tushuniladi.

2.2. Singulyar integral tenglama turlari va ularni yechish usullari.

Singulyar integrallar kompozitsiyasining formulasi. L — yopiq egri chiziq bo'lib,

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

bo'lsin, $\varphi_2(t)$ funksiyaning bevosita $\varphi(\tau)$ orqali qanday ifodalanishini topamiz. Shu maqsadda Koshi tipidagi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_1(z)}{\tau - t} d\tau$$

integrallarni tekshiramiz. (2.1.15) formulalarning birinchisiga asosan:

$$f^+(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

$$f_1^+(t) = \frac{1}{2} \varphi_1(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

Bulardan, $\varphi_1(t)$ va $\varphi_2(t)$ funksiyalarning aniqlanishiga ko'ra

$$\varphi_1(t) = f^+(t) - \frac{1}{2} \varphi_1(t) \quad (2.2.1)$$

tengliklarni hosil qilamiz. (2.2.1) dan $\varphi_1(t)$ ning qiymatini $f_1(z)$ ga olib borib qo'yamiz:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f^+(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (2.2.2.)$$

(2.2.2) dagi birinchi integral Koshi integralidir, chunki uning $f^+(\tau)$ zichligi L egri chiziq ichida analitik $f(z)$ funksiyaning limit qiymati. Demak, bu integral $f(z)$ ga teng. (2.2.2) dagi ikkinchi integral esa, ravshanki, $f(z)$ ga teng. Shunday qilib,

$$f_1(z) = \frac{1}{2} f(z) \text{ va } f_1^+(t) = \frac{1}{2} f^+(t)$$

Endi (2.2.1) tenglikdan

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2} f^+(t) - \frac{1}{2} \left[f^+(t) - \frac{1}{2} \varphi(t) \right] = \frac{1}{4} \varphi(t)$$

$f(t)$ funksiyaning ifodasini

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(s)}{s - t} ds$$

ko'rinishda yozib olsak, singulyar integralning kompozitsiyasi bo'lgan ushbu

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \int_L \frac{\varphi(s)}{s - \tau} ds = \frac{1}{4} \varphi(t) \quad (2.2.3)$$

Puankare—Bertran formulasini hosil qilamiz. (2.2.3) formulada ikki karrali singulyar integralda integrallash tartibini o'zgartirish mumkin emas; agar integrallash tartibini o'zgartirsak,

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_L \varphi(s) ds \int_L \frac{d\tau}{(s - \tau)(\tau - t)}$$

integral hosil bo'ladi, bu integral esa nolga teng. Haqiqatan ham, agar $g \pm t$ bo'lsa,

$$\int_L \frac{d\tau}{(s-\tau)(\tau-t)} = \frac{1}{s-t} \left[\int_L \frac{d\tau}{\tau-t} - \int_L \frac{d\tau}{\tau-s} \right]$$

(2.1.9) formulada bo'lsin. Agar z nuqta L egri chiziqning ichida yotsa, $0 < \arg(z) < 2\pi$ bo'ladi. Bu holda, (2.1.15) formulaning birinchisidan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau-t} = \frac{1}{2}$$

Xuddi shunday

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau-s} = \frac{1}{2} \quad \int_L \frac{d\tau}{(s-\tau)} = 0 \quad s \neq 0$$

Agar funksiya L da Gyolder shartini qanoatlantirsa, (2.2.3) ga nisbatan umumiyroq

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{\varphi(\tau, s)}{s-\tau} ds = -\pi^2 \varphi(t, t) + \int_L ds \int_L \frac{\varphi(\tau, s)}{(\tau-t)(s-\tau)} d\tau$$

Puankare—Bertran formulasi to'g'ri bo'ladi. Agar $\varphi(\tau, \zeta)$ funksiya τ ga bog'liq bo'lmasa, avvalgi formuladan darhol (2.2.3) kelib chiqadi.

Ushbu $\frac{1}{\tau-t}$ ifoda, bunda τ va t — L egri chiziqning nuqtalari, Koshi yadrosi, $\cotg \frac{\sigma-s}{2}$ esa, Gilbert yadrosi deb ataladi, bu yerda σ va s — $[0, 2\pi]$ oraliqda o'zgaradigan haqiqiy o'zgaruvchilar.

Koshi yadroli singulyar integral tenglamalar. Agar chiziqli

$$\varphi(t) + \int_L K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t)$$

integral tenglamaning yadrosi

$$K(t, \tau) = \frac{M(t, \tau)}{|\tau-t|^a}, 0 \leq a < 1$$

ko'rinishga ega bo'lsa (bu yerda $M(t, \tau)$ uzluksiz funksiya), bizga ma'lumki, uni iteratsiya yordamida uzluksiz yadroli integral tenglamaga

keltirish mumkin. Bunday tenglama Fredgolm tenglamasining barcha xossalriga ega bo'ladi.

Agar $\alpha = 1$ bo'lsa, u holda integral singulyar integraldan iborat bo'ladi va tenglamani Fredgolm integral tenglamasiga keltirish usuli o'z kuchini yo'qotadi. Integral tenglamaning $K(t, \tau)$ yadrosi $t = \tau$ bo'lganda cheksizlikka aylanib, integral Koshi bo'yicha bosh qiymat ma'nosida mavjud bo'lsa, bunday integral tenglama **singular integral tenglama** deb yuritiladi. Koshi yadroli integral tenglama

$$K\varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi} \int_i^\infty \frac{K(t, \tau)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau = f(t) \quad (2.2.4)$$

ko'rinishda yoziladi, bundagi L — ochiq yoki yopiq silliq egri chiziq. $K\varphi$ operatorni **singulyar operator** deyiladi.

L da berilgan $a(t), f(t)$ va $K(t, \tau)$ funksiyalarni Gyolder shartini qanoatlantiradi deb hisoblaymiz. (2.2.4) tenglamaning yadrosini

$$\frac{K(t, \tau)}{\tau - t} = \frac{K(t, \tau) - K(t, t)}{\tau - t} + \frac{K(t, t)}{\tau - t}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Ushbu

$$K(t, t) = b(t), \quad \frac{1}{\pi i} \frac{K(t, \tau) - K(t, t)}{\tau - t} = k(t, \tau) \quad (2.2.5)$$

belgilashlarni kiritsak, (2.2.4) tenglama

$$K\varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_i \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_i k(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t) \quad (2.2.6)$$

ko'rinishda yoziladi. (2.2.5) formulalardan to'rinayaptiki, funksiya barcha L da, $K(t, \tau)$ esa, $t = \tau$ nuqtadan tashqari hamma joyda Gyolder shartini qanoatlantiradi va

$$|K(t, \tau)| < \frac{A}{|\tau - t|^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. (2.2.6) tenglamani **to‘la singular integral tenglama** deyiladi.

$$K^+ \varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (2.2.7)$$

ifodani to‘la integral tenglamaning xarakteristik, $\int_L K(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau$ ifodani L esa regular qismi deb yuritiladi. Ushbu

$$K^+ \varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t) \quad (2.2.8)$$

tenglama (2.2.7) to‘la tenglamaga **mos xarakteristik tenglama** deyiladi.

Agar $f(t)$ funksiya aynan nolga teng bo‘lmasa, (2.2.7) tenglama bir jinsli bo‘lmagan, aks holda bir jinsli tenglama deb ataladi.

Singular integral tenglamalarni yechish. 1. Xarakteristik tenglamani yechish. Ushbu

$$K^+ \varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t) \quad (2.2.9)$$

xarakteristik tenglamani tekshiramiz, bu yerda L chizmada ko‘rsatilgan umumiy nuqtalarga ega bo‘lmagan yopiq silliq egri chiziqlardan tashkil topgan chiziq, $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ lar Gyolder sinfiga tegishli funksiyalar. Noma’lum $\varphi(t)$ funksiyani ham shu sinfdan izlaymiz. Zichligi xarakteristik tenglamaning izlanayotgan yechimidan iborat bo‘lgan Koshi tipidagi integral bilan berilgan bo‘lak-bo‘lak analitik funksiya kiritamiz:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z}$$

Soxotskiy—Plemel formulalariga asosan quyidagi tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t),$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) \quad (2.2.10)$$

Bularni (2.2.9) tenglamaga qo'yib, $\Phi(z)$ funksiyaning ushbu

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + \frac{f(t)}{a(t) + b(t)} \quad (2.2.11)$$

Riman masalasining yechimidan iborat bo'lishi kelib chiqadi, bunda

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}$$

Izlanayotgan $\Phi(z)$ funksiya Koshi tipidagi integral bilan ifodalangani uchun

$$\Phi^-(\infty) = 0$$

shartni qanoatlantirishi kerak. (2.2.11) Riman masalasi $\frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}$ koefitsientining indeksini (2.2.9) integral tenglamaning indeksi deyiladi. (2.2.11) chegaraviy masalani yechib, (2.2.10) formulaga asosan (2.2.9) tenglamaning yechimini topamiz. Tenglama bilan chegaraviy masalaning teng kuchli ekanligini ko'rsatish uchun, teskarisini, ya'ni chegaraviy masalani yechish natijasida (2.2.10.) formulalarning birinchisidan topilgan $\varphi(t)$ funksiya (2.2.9) tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatish kerak. Bu holda $\Phi(z)$ funksiya Koshi tipidagi integral bilan tasvirlanadi, demak, (2.2.10) formulalardan ikkinchisi ham o'rinli boladi, bu esa, $\varphi(t)$ funksiyaning berilgan (2.2.8) tenglamaning yechimi ekanligini ko'rsatadi. (2.2.11) Riman masalasiga mos xarakteristik funksiya $X(z)$ bo'lsin. U holda (2.2.11) masalaning cheksizlikda nolga aylanuvchi yechimi $z \geq 0$ bo'lganda

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{[a(t) + b(t)]X^+(\tau)(\tau - z)} - \frac{1}{2} X(z) P_{z-1}(z) \quad (2.2.12)$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda keyinchalik qulay bolishi uchun darajasi z^{-1} dan katta bo'lmagan ixtiyoriy ko'phad $-\frac{1}{2} P_{z-1}(z)$ ko'rinishda olinadi, shu bilan birga $z = 0$ bo'lganda $P_{z-1}(z) = 0$ bo'ladi. $z < 0$ bo'lganda yechim faqat

$$\int_L \frac{t^k f(\tau) d\tau}{[a(\tau)+b(\tau)]X^+(\tau)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, -x-1$$

shartlar bajarilgandagina mavjud bo'лади; agar bu shartlar bajarilsa, u holda yagona bo'lgan (2.2.12) $P_{z-1}(z) = 0$ formula bilan aniqlanadi. Tekshirilayotgan (2.2.8) integral tenglamaning yechimini

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t),$$

formulaga asosan topamiz. Buning uchun $\Phi^+(t)$ va $\Phi^-(t)$ chegaraviy qiymatlarni Soxotskiy—Plemel formulasi bilan hisoblaymiz:

$$\Phi^+(t) = \frac{f(t)X^+(t)}{2[a(t)+b(t)]X^+(t)} + \frac{X^+(t)}{2\pi i} * \int_L \frac{f(\tau)d\tau}{[a(\tau)+b(\tau)]X^+(\tau)(\tau-t)} - \frac{1}{2}X^-(t)P_{z-1}(t),$$

$$\begin{aligned} \Phi^-(t) = & -\frac{f(t)X^-(t)}{2[a(t)+b(t)]X^+(t)} + \frac{X^-(t)}{2\pi i} \\ & * \int_L \int_L \frac{f(\tau)d\tau}{[a(\tau)+b(\tau)]X^+(\tau)(\tau-t)} - \frac{1}{2}X^-(t)P_{z-1}(t) \end{aligned}$$

Demak,

$$\begin{aligned} \varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = & \frac{X^+(t)+X^-(t)}{2[a(t)+b(t)]X^+(t)} f(t) + \\ & \frac{X^+(t)+X^-(t)}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)d\tau}{[a(\tau)+b(\tau)]X^+(\tau)(\tau-t)} - \frac{1}{2}[X^+(t) + X^-(t)]P_{z-1}(t), \end{aligned}$$

(2.2.13)

Xarakteristik $X(z)$ funksiyasining aniqlanishiga asosan

$$\frac{X^+(t)}{X^-(t)} = G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}$$

Tenglikka ega bo'lamiz. Buni e'tiborga olib quyidagilarni hosil qilamiz

$$\frac{X^+(t) + X^-(t)}{2[a(t) + b(t)]X^+(t)} = \frac{1}{2[a(t) + b(t)]} + \frac{1}{2[a(t) + b(t)]} \frac{X^-(t)}{X^+(t)} = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)},$$

$$\begin{aligned} X^+(t) + X^-(t) = X^+(t) \left[1 - \frac{X^-(t)}{X^+(t)} \right] &= \frac{2b(t)X^+(t)}{a(t) - b(t)} \\ &= \frac{-2b(t)[a(t) + b(t)]X^+(t)}{a^2(t) - b^2(t)} \end{aligned}$$

Endi ushbu

$$a^* = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)}, b^* = \frac{b(t)}{a^2(t) - b^2(t)}$$

$$Z(t) = [a(t) + b(t)]X^+(t) = [a(t) - b(t)]X^-(t)$$

$$K^*f = a(t)f(t) - \frac{b^*(t)Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)d\tau}{Z(t)(\tau-t)}$$

belgilashlarni kiritib, (2.2.13) yechimni

$$\varphi(t) = K^*f + b^*(t)Z(t)P_{z-1}(t) \quad (2.2.14)$$

ko‘rinishda yozishimiz mumkin. $Z(t)$ funksiyani (2.2.8) tenglamaga mos kanonik funksiya deyiladi. (2.2.14) formula (2.2.8) integral tenglamaning $\lambda \geq 0$ bo‘lganda umumiy yechimini beradi.

Agar $\lambda < 0$ bo‘lsa, biz bilamizki, (2.2.11) Riman masalasi, demak, (2.2.8) tenglama ham, umuman aytganda, yechimga ega bo‘lmaydi. Uning yechimga ega bo‘lish shartlari

$$\int_L \frac{t^k f(t)}{Z(t)} dt = 0, \equiv 0, 1, 2, \dots - \lambda - 1$$

tengliklarning bajarilishidan iborat. Agar yechimga ega bo‘lish shartlari bajarilsa, u holda (2.2.8) bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning yechimi $P_{z-1}(t) = 0$ bo‘lgan (2.2.14) formula bilan aniqlanadi. Agar $f(t) = 0$ bo‘lsa, ya’ni tenglama bir jinsli bo‘lgan holda, oldingi natijalardan ko‘rinadiki, $\lambda < 0$ bo‘lsa, bir jinsli tenglama noldan farqli yechimlarga ega bo‘lmaydi, $\lambda > 0$ bo‘lganda esa, roppa-rosa λ chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlarga ega bo‘lib, ularning to‘plami

$$\varphi(t) = b^*(t)Z(t)P_{z-1}(t)$$

formula bilan aniqlanadi, bunda $P_{z-1}(t)$ — darajasi $\lambda - 1$ dan katta bo‘lmagan ixtiyoriy ko‘phad. Shunday qilib, biz quyidagi natijalarga keldik. Γ .

1°. Agar $\lambda > 0$ bo‘lsa, bir jinsli $K^0\varphi = 0$ tenglama roppa-rosa X chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlarga ega bo‘ladi.

2°. Agar $\lambda \leq 0$ bo‘lsa, bu tenglama noldan farqli yechimlarga ega bo‘lmaydi.

3°. Agar $\chi \geq 0$ bo'lsa, bir jinsli bo'lmagan $K^0 \varphi = f$ tenglama ixtiyoriy f funksiya uchun yechimga ega bo'ladi va uning umumiy yechimi ta ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liq bo'ladi.

4°. Agar $\chi < 0$ bo'lsa, bu tenglamaning o'ng tomonidagi f funksiya

$$\int_L f(t) \Psi_k(t) dt = 0, k = 0, 1, \dots, -\chi - 1$$

ko'rinishdagi χ ta shartlarni qanoatlantirgan holda va faqat shu holdagina yechimga ega bo'ladi, bu yerdagi $\Psi_k(t) = \frac{t^k}{z(t)}$ chiziqli $Z(t)$ bog'liq bo'lmagan funksiyalar.

Bu shartlar bajarilganda tenglama bitta va faqat bitta yechimga ega bo'ladi.

2. Xarakteristik tenglamaga qo'shma bo'lgan tenglamani yechish.

Endi $K^0 \varphi = f$ tenglamaga qo'shma bo'lgan

$$K^a \Psi \equiv a(t) \Psi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \Psi(\tau) d\tau}{\tau - t} = g(t) \quad (2.2.15)$$

tenglamani tekshiramiz. (2.2.15) tenglamani sodda usul bilan Riman masalasiga keltirish mumkin. Shu maqsadda cheksizlikda nolga aylanuvchi bo'lak-bo'lak analitik

$$\Psi(z) = 2 \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \Psi(\tau) d\tau}{\tau - t}$$

funksiyani kiritamiz. Ushbu

$$b(t) \Psi(t) = \Psi^+ - \Psi^-,$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \Psi(\tau) d\tau}{\tau - t} = \Psi^+ - \Psi^-$$

formulalarga va (2.2.15) tenglamaga asosan

$$a(t) \Psi(t) = \Psi^+(t) - \Psi^-(t) + g(t)$$

$$b(t) \Psi(t) = \Psi^+(t) - \Psi^-(t)$$

yoki

$$(a+b) \Psi(t) = 2 \Psi^+(t) + g(t)$$

$$(a-b) \Psi(t) = 2^{(a-b)} \Psi(t) = 2\Psi^-(t) + g(t) \quad (2.2.16)$$

tenglamlarni hosil qilamiz. Bularga asosan quyidagi Riman masalasiga kelamiz:

$$\Psi^+(t) = \frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)} \Psi^-(t) + \frac{b(t)g(t)}{a(t)-b(t)} \quad (2.2.17)$$

(2.2.16) tenglamaga mos (2.2.17) masalaning koeffitsienti (2.2.8) tenglamaga mos (2.2.10) masala koeffitsientining teskarisiga teng bolgan miqdordan iborat. Demak,

$$X = \ln d \frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)} = -\ln d \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)} = -X$$

(2.2.17) dan

$$\Psi(z) = \frac{[X(z)-1]}{2\pi i} \int_L \frac{X^+(\tau)b(\tau)g(\tau)d\tau}{[(\tau)-b(\tau)](\tau-z)} + [X(z)] - 1 P_{Z-1}^{(z)} \quad (2.2.18)$$

ko'rinishda ifodalanadi, bunda $P_{z-1}(t)$ — darajasi χ^{-1} dan katta bo'lmagan ixtiyoriy ko'phad $\chi = 0$ $P_{z-1} = 0$ bo'ladi). Keyinchalik qulay bo'lishi uchun bu ko'phad oldiga $1/2$ ko'paytuvchi qo'ydik. $\chi < 0$ (ya'ni, $\chi > 0$) bo'lganda, masala yechimga ega bo'lishining zarur va yetarli

$$\int_L \frac{X^+(t)b(t)g(t)t^k dt}{a(t)-b(t)} = 0, \quad k = 0, 1 \dots -\chi - 1$$

shartlari bajarilsa, yechim $P_{z-1}(z) = 0$ bo'lgandagi yana o'sha (2.2.18) formula bilan aniqlanadi. Soxotskiy—Plemel formulasiga asosan (2.2.18) dan $\Psi^+(t)$ ni hisoblaymiz:

$$\Psi^+(t) = \frac{b(t)g(t)}{2[a(t)-b(t)]} + \frac{[X^+(t)]^{-1}}{2\pi i} \int_L \frac{X^+(\tau)b(\tau)g(\tau)d\tau}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)} + \frac{1}{2}[X^+(t)]^{-1} P_{Z-1}^{(t)}$$

Endi (2.2.15) formulalarning birinchisiga asosan (2.2.16) tenglamaning yechimini topamiz:

$$\Psi(t) = K^a g + \frac{P_{Z-1}^{(t)}}{Z(t)} \quad (2.2.19)$$

bu yerda K^* orqali avvalgi banddagi K^* operatorga qo'shma bo'lgan operator belgilandi, ya'ni

$$K^*g = a^{(*)}(t)g(t) + \frac{1}{\pi i Z(t)} \int_L \frac{Z(\tau)b^{(*)}(\tau)g(\tau)d\tau}{\tau - t}$$

shu bilan birga $a^*(t)$, $b^*(t)$, $Z(t)$ avvalgi banddagi belgilashlarning o'zidir. Agar (2.2.18) dan $\Psi^-(t)$ ni hisoblab, (2.2.15) formulalarning ikkinchisidan $\Psi^+(t)$ ni topsak ham yana (2.2.19) formula hosil bo'ladi. Bir jinsli ($g = 0$) tenglamaning umumiy yechimi $\chi > 0$ da

$$\Psi(t) = \frac{P_{Z-1}(t)}{Z(t)}$$

formula bilan aniqlanadi. Demak, $\chi > 0$ bo'lganda bir jinsli tenglama roppa-rosa χ chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarga ega bo'ladi; $\chi < 0$ bo'lganda esa bir jinsli tenglama noldan farqli yechimlarga ega bo'lmaydi. Shunday qilib, $K^0\varphi = f$ tenglama qanday xossalarga ega bo'lsa $K^0\psi = g$ tenglama ham shunday xossalarga ega bo'ladi. Endi biz ko'rayapmizki $K^0\varphi = f$ tenglamaning yechimga ega bo'lishi uchun 4°- xossadagi shartlarda qatnashgan ψ_k funksiyalar qo'shma bir jinsli $K^0\psi = 0$ tenglamaning chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarining to'la sistemasidan iborat ekan. Keyinchalik isbot qilinadigan muhim umumiy teoremaning xususiy holi bo'lgan quyidagi fikrni qayd qilib o'tamiz: bir jinsli $K^0\varphi = 0$ tenglama chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarining soni k , qo'shma bir jinsli $K^0\psi = 0$ tenglama chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarining soni k' ga teng bo'lsa, bu sonlarning ayirmasi K^0 operatorning indeksiga teng bo'ladi, ya'ni

$$k - k' = \chi$$

Haqiqatan ham $\chi \geq 0$ bo'lganda $k = \chi$, $k' = 0$; $\chi \leq 0$ da $k = 0$, $k' = -\chi$ bo'ladi.

Xulosa

Matematik fizikaning bir qator masalalarini yechishda integral tenglamalarga keltiriladi. Singulyar integral tenglamalar nisbatan kam o'rganilgan soha hisoblanadi. Ushbu bobda singulyar integral tenglamalarning turlari va yechish usullari o'rganilgan.

Xotima

Matematik fizikaning bir qator masalalarini yechishda integral tenglamalarga keltiriladi. Integral tenglamalarni yechish usullarini chuqur o'rganish dastlabki matematik fizikaning masalasini yechishga imkon beradi. Shu tufayli ushbu masala BMI da o'rganilgan.

Ushbu bitiruv malakaviy ishida integral tenglamalar, ularning turlari, Fredgol'm va Volterra integral tenglamalar haqida umumiy ma'lumotlar keltirilgan. Integral tenglamalarni yechish usullari o'rganilgan.

Singulyar integral tenglamalar nisbatan kam o'rganilgan soha hisoblanadi. BMIda singulyar integral tenglamalarning turlari va yechish usullari o'rganilgan.

BMI referativ xarakterga ega bo'lib, ham amaliy ham nazariy ahamiyatga ega. Ushbu bitiruv malakaviy ishidan barcha oliy o'quv yurtlari «Matematika» va «Fizika» ta'lim yo'nalishlari o'qituvchilari va talabalari muhim qo'llanma sifatida foydalanishlari mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. I.A.Karimov “ Inson baxt uchun tug’iladi “. Toshkent, “ Sharq”, 2001y,127 b.4
2. Ўзбекистон Республикасининг Таълим тўғрисидаги Қонун // Олий таълим: Меъёрий ҳужжатлар тўплами / Тузувчилар: Б.Ҳ.Рахимов, Ш.Д.Жонбоев, В.У.Ёдгоров ва бошқ.: Акад. С.С.Ғуломов таҳрири остида. – Тошкент : Шарқ, 2001.-18-52 б
3. Erkin va farovon,demokratik O’zbekiston davlat birgalikda barpo etamiz.O’zbekiston Respublikasi Prezidenti lavozimiga kirishish tantanali marosimga bag’ishlangan Oliy Majlis palatalarining qo’shma majlisidagi nutq/Sh.M.Mirziyoyev-Toshkent O’zbekiston,2016-56b
4. Salohiddinov M. Integral tenglamalar, Toshkent, "Yangiyul Poligraph service" 2007
5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики, Москва, "Наука", 1982.
6. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения, Москва, Физматлит. 2002.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, Москва, "Наука", 1971.
8. М.С. Салоҳиддинов “ Математик физика тенгламалари ”. Тошкент. “ Ўзбекистон ”, 2002й , 448 б.
9. Краснов МЛ. Интегральные уравнения, Москва, "Наука" 1975.
10. Курант Р. И., Гельберг Д. Методы математической физики, т. I, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1951, Ленинград.

11. Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1957.
12. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1959.
13. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1962.
14. Мюнтц Г. Интегральные уравнения, Государственное технико-теоретическое издательство, Ленинград, 1934, Москва.
15. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1951, Ленинград.
16. Привалов И.И. Интегральные уравнения, Объединенное научно-техническое издательство, Москва, 1935, Ленинград.
17. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами, Ташкент, "Universitet", "Yangiyol poligraf servis", 2005.
18. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. IV, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1951, Ленинград.
19. Соболев С.Л. Уравнения математической физики, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1954.
20. Трикоми Ф. Интегральные уравнения, Издательство иностранной литературы, Москва, 1960.