

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI**

**Qo'lyozma huquqida
UDK**

Abdullayev Behzod Rajabovich

**SOBOLEV FAZOSIDA DAVRIY BO'LMAGAN FUNKSIYALAR UCHUN
OPTIMAL INTERPOLYATSION FORMULALAR QURISH**

***Mutaxassislik:* 5A130202-"Amaliy matematika va axborot texnologiyalari"**

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan

DISSERTATSIYA

**Ilmiy rahbar:
dots. I.O.Jalolov**

Buxoro-2017y.

MUNDARIJA

ASOSIY BELGILASHLAR RO'YXATI.....	3
KIRISH.....	4
I. BOB. INTERPOLYATSION KVADRATUR FORMULALAR.....	11
1.1. Interpolyasion kvadratur formulalar.....	11
1.2. Umumlashgan kvadratur formulalar.....	21
II.BOB. INTERPOLYATSION KUBATUR FORMULALAR.....	32
2.1. Interpolyatsion kvadratur formulalar uchun algoritm va dasturlar.....	32
2.2. Interpolyatsion kubatur formulalar	50
III. BOB. SOBOLEV FAZOSIDA DAVRIY BO'LMAGAN FUNKSIYALAR UCHUN OPTIMAL INTERPOLYATSION FORMULALAR QURISH.....	47
3.1. Sobolev fazosi va unda kubatur formulalar	47
3.2. Sobolev fazosida kubatur formulaning xatolik funksionali normasini hisoblash va ekstremal funksiyani aniqlash	58
3.3. Davriy bo'lmagan funksiyalar uchun optimal interpolyatsion formulalar qurish.....	63
XOTIMA.....	68
ADABIYOTLAR RO'YXATI.....	69

Asosiy belgilashlar ro'yxati.

R^n – n – o'lchovli Evklid fazosi

R - haqiqiy sonlar to'plami

mes Ω - Ω sohani o'lchovi

$L_p^{(m)}(\Omega)$ - S.L. Sobolevning factor fazosi

B – Banax fazosi

C - uzluksiz funksiyalar fazosi

$C^{(m)}(\Omega)$ – Ω sohada m marta differensiallanuvchi uzluksiz funksiyalar fazosi.

$C^\infty(\Omega)$ – Ω sohada cheksiz marta differensiallanuvchi uzluksiz funksiyalar fazosi.

$\ell(x)$ – umumlashgan funksiya, $\varphi(x)$ – asosiy funksiya

$\langle \ell(x), \varphi(x) \rangle$ - $\ell(x)$ funksionalning $\varphi(x)$ funksiyaga ta'siri

$$\gamma^\alpha = \prod_{j=1}^n \gamma_j^{\alpha_j}$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} - \text{diferensiallash operatori}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \alpha \in Z^n \text{ va } \alpha_i \geq 0$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

C_λ^0 - kubatur (kvadratur) formulaning optimal koefitsiyenlari

$\delta(x)$ - Dirakning delta funksiyasi

$Y_{k,\ell}(\theta)$ – k - tartibli ℓ ko'rinishdagi ortonormallangan sferik garmonikalar

$\sigma(n, k)$ – k - tartibli chiziqli bog'liq bo'lmagan sferik garmonikalar soni

S – n – o'lchovli birlik sfera

$P_k \cos(\theta)$ - Lejandr ko'phadi

$\psi_\ell(o, \varphi)$ – ekstremal funksiya

$$|k| = \left(\sum_{j=1}^n k_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Kirish.

Globallashuv asrida biron bir faoliyat sohasini axborot-kommunikatsiya texnologiyalarisiz tasavvur qilib bo'lmaydi. Mamlakatimizda birinchi Prezidentimiz Islom Karimov tashabbusi bilan 2002-2010 yillarda kompyuterlashtirish va axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini rivojlantirish dasturi ishlab chiqilib, bosqichma-bosqich amalga tatbiq etilmoqda. O'zbekistonda xalqaro huquq me'yorlarini hisobga olgan holda, AKT sohasidagi milliy qonunchilik muntazam takomillashtirilmoqda. Ushbu qonunchilik bugun mualliflik va boshqa turdosh huquqlar, elektron imzo, tijorat, to'lovlar, hujjat aylanishi sohasidagi munosabatlarni tartibga solmoqda. Axborot xavfsizligini ta'minlash iqtisodiy, ijtimoiy va madaniy rivojlanishning milliy ustuvorliklarini hurmat qilish tamoyillari asosida ochiq axborot jamiyatini tashkil etishda muhim masala hisoblanadi.

O'zbekiston Respublikasi Oliy Majlisi axborotlashtirish xizmatlarining yangi turlarini rivojlantirish va boshqaruvning huquqiy asoslarini ta'minlash maqsadida 2003-2004 yillarda O'zbekiston Respublikasining "Elektron raqamli imzo to'g'risida", "Elektron hujjat aylanishi to'g'risida" va "Elektron tijorat to'g'risida"gi qonunlarini, shuningdek, yangi tahrirdagi "Axborotlashtirish to'g'risida"gi qonunni qabul qildi.

Vatanimizning kelajagi xalqimizning ertangi kuni, mamlakatimizning jahon hamjamiyatidagi obro'-e'tibori avvalambor farzandlarimizning unib-o'sib, ulg'ayib, qanday inson bo'lib hayotga kirib borishiga bog'liqdir. Biz bunday o'tkir haqiqatni hech qachon unutmasligimiz kerak. Respublikamiz mustaqillikka erishgach, ta'lim tizimida tub o'zgarishlar sodir bo'ldi. Jamiyat taraqqiyotini yoshlar hayotida ishlab chiqarish milliy hamda umuminsoniy munosabatlarda zamonaviy qarash imkoniyatlari kengaydi. Yoshlar ta'lim tarbiyasi bilan mashg'ul bo'ladigan ijtimoiy institutlar son va sifat jihatdan o'sdi. Davlat standartlari tanlanib, pedagogik amalyotda tatbiq etila boshlandi. Mustaqillik yillarida axborot texnologiyalari sohasida juda katta o'zgarishlar yuz bermoqda, shu bilan bir qator

bu yoshlarga keng imkoniyatlar yaratilmoqda. Ijtimoiy hayotning barcha sohalarida axbarot texnologiyalari har yerda jadallik bilan kirib kelmoqda va bilimlarni oshishi jamiyat a'zolarini o'z ustlarida ko'proq ishlashga yangi-yangi o'zgarishlar bilan undashga olib kelmoqda.

Mustaqil Respublikamizda yuz berayotgan siyosiy, iqtisodiy, ilmiy-texnikaviy va madaniy o'zgarishlar Oliy ta'lim tizimida ham o'z aksini topmoqda. O'zbekistonda uzluksiz ta'lim-tarbiya tizimini yaratish, shu asosida ta'lim sifatini jahon andozalari darajasiga yetkazish ta'lim sistemasining eng dolzarb vazifasiga aylandi. Bu esa barcha mutaxassisliklar qatori kompyuter texnologiyalari bo'yicha kadrlar tayyorlash sifatini oshirishni ham taqazo etadi. Shu maqsadda Kadrlar tayyorlash milliy modeli talablariga muvofiq hamda yangi Davlat ta'lim standartlari asosida ishlab chiqilgan "Uzluksiz ta'lim tizimi uchun o'quv adabiyotlarini yangi avlodini yaratish kontseptsiyasi" ning asosiy vazifasi qilib o'quv adabiyotlarining yaratish uchun ilmiy-g'oyaviy, uslubiy-didaktik, psixologik-pedagogik, sanitariya-gigienik talablarni ishlab chiqish, elektron darsliklardan to'g'ri va ratsional foydalanish maqsadida ularning mavjud shakllari va turlariga aniq ta'riflar berish hamda mamlakatimiz miqiyosida zamonaviy elektron darsliklar tayyorlash bo'yicha strategik masalalar ko'lamini aniqlash belgilangan.

2005-yil 2-iyunda O'zbekiston Respublikasi birinchi Prezidentining "Axborot texnologiyalari sohasida kadrlar tayyorlash tizimini takomillashtirish to'g'risida"gi qarori qabul qilindi. Bu qarorlarning davomi sifatida O'zbekiston Respublikasi "Axborot erkinligi prinsiplari va kafolatlari to'g'risida" qonuni 2012-yil 12-dekabrda qabul qilindi. Ushbu qonun 16 moddadan tashkil topgan bo'lib, unda ushbu qonunning asosiy vazifalari, axborot erkinligi prinsiplari va kafolatlari to'g'risidagi qonun hujjatlari, axborot erkinligining asosiy prinsiplari axborotning ochiqligi va oshkoraligi, axborotni olish tartibi, shaxsning, jamiyatning, davlatning axborot borasidagi xavfsizligi, shu kabi bir qator moddalarni o'z ichiga olgan. Inson uchun axborotlarni to'plashda uning barcha sezgi organlari xizmat qilsa, uzoq masofadagi axborotlarni to'plash uchun bu esa yetarli emas, buning uchun

maxsus texnik vositalar talab qilinadi. Bugungi kunda ya'ni axborot asri bo'lmish XXI asrda O'zbekiston Respublikasining butun dunyo orasida o'z mavqei, obro'-e'tiborga ega ekanligi quvonarli holdir.

Bu borada biribchi prezidentimiz I.A. Karimov ta'kidlaganlaridek: "Bugungi kunda milliy axborot tizimini shakllantirish jarayonida internet va boshqa global axborot tizimlaridan foydalanish, ayniqsa, muhim ahamiyatga ega.

Mavzuning dolzarbligi va o'rganilganlik darajasi. Hisoblash matematikasi sohasida nazariy izlanishlar asosan, tipik matematik masalalarni yechishning sonli metodlar atrofida guruhlanadi. Bu sohaning klassik masalalaridan biri bu integrallarni taqribiy hisoblash formulalarini qurishdan iborat.

Bir karrali integrallarni son qiymatlari geometrik nuqtai nazardan qisqacha kvadratura deb ataladi.

Bunday masalalar bilan ko'pincha buyuk olimlar shug'ullanganlar. Masalan: Gauss, Chebishev, Eyler, Nyuton va boshqalar.

Kvadratur formular deganda quyidagi taqribiy tenglikni tushunamiz:

$$\int_B f(x) dx \approx \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} f(x^{(\lambda)}), \quad (0.1)$$

bu yerda C_{λ} - kvadratur formulaning koeffitsientlari, $x^{(\lambda)}$ - tugun nuqtalari, N - tugun nuqtalar soni.

Faraz qilaylik $f(x)$ uzluksiz funksiyani $[a, b]$ kesmada aniq integralni taqribiy hisoblovchi formulani qurish talab qilinsin.

Integralning eng sodda taqribiy ifodasi asosan $[a, b]$ kesma balandligi $f(x)$ ning $\frac{a+b}{2}$ nuqtadagi $f(\frac{a+b}{2})$ qiymatiga teng bo'lgan to'g'ri turtburchak yuzasining kattaligidan iborat.

Quyidagi kvadratur formulani hosil qilamiz.

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad (0.2)$$

Katta nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo'lgan kvadratur formulalar bilan bog'liq hisoblash algoritmlarini optimizatsiyalash masalalari bilan ko'pgina olimlar shug'ullanib kelgan. Bulardan S.L.Sobolev, A.N.Kolmogorov, S.M.Nikolskiy va boshqalar.

Kvadratur formulani $p(x)$ - vazn funksiyasi bilan qaraydigan bo'lsak

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} f(x^{(\lambda)}), \quad (0.3)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu holda xatolik funksionali quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\ell(x) = p(x)\varepsilon_{[a,b]}(x) - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} \delta(x - x^{(\lambda)}).$$

Integrallarni taqribiy hisoblash uchun formula qurish hisoblash matematikasi va sonlar nazariyasining bir sinf masalasini tashkil qiladi. Bunday masalalarni yechish bilan juda ko'p taniqli matematiklar shug'ullanishgan, shuning uchun ham juda ko'p formulalar ularning nomlari bilan ataladi, masalan Nyuton, Eyler, Gauss, Chebishev, Markov formulalarini misol keltirish mumkin.

Integrallarni taqribiy hisoblashda integral ostidagi funksiya bir o'zgaruvchili bo'lsa unda kvadratur formula deyiladi, bunday masalalar bilan birinchi bo'lib Sard, Nikolskiylar shug'ullangan, agar integral ostidagi funksiya ikki va undan ortiq o'zgaruvchili bo'lsa unda kubatur formula deyiladi, bunday masalalar bilan birinchi bo'lib Sobolev shug'ullangan.

Quyidagi kubatur formula berilgan bo'lsin.

$$\int_{\Omega} f(x) dx \cong \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} f(x^{(\lambda)}), \quad (0.4)$$

Ω - Evklid fazosidagi qandaydir soha

C_{λ} - kubatur formulaning koeffitsientlari,

$x^{(\lambda)} = (x_1^{(\lambda)}, x_2^{(\lambda)}, \dots, x_n^{(\lambda)})$ - tugun nuqtalar. N – tugun nuqtalar soni.

(0.4) ko'rinishdagi kubatur formulaning xatoligi deganda biz quyidagi ayirmani tushinamiz.

$$\langle \ell^N, f \rangle = \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} f(x^{(\lambda)}) = \int_{R^n} \ell^N(x) f(x) dx, \quad (0.5)$$

bu yerda

$$\ell^N(x) = \varepsilon_{\Omega}(x) - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} \delta(x - x^{(\lambda)}) \quad (0.6)$$

$\ell^N(x)$ - kubatur formulaning xatolik funksionali deyiladi.

$\varepsilon_{\Omega}(x)$ - xarakteristik funksiya

Sobolev fazosida optimal interpolatsion formulalar qurish nazariyasi va algoritmi o'rganildi.

Tadqiqot ob'yekti. Sobolev fazosi, kvadratur va kubatur formulalar, kubatur formulaning xatolik funksionali, optimal interpolatsion formulalar.

Tadqiqot predmeti. Hisoblash matematikasi, umumlashgan funksiyalar nazariyasi, funksional fazolar, kvadratur va kubatur formulalar.

Tadqiqot maqsadi.

1. Kvadratur formulalarni o'rganish.
2. Kubatur formulalarni o'rganish
3. Sobolev fazosi va uning xossalari o'rganish.
4. $L_2^{(m)}(S)$ Sobolev fazosida kubatur formulalar uchun xatolik funksionali va ekstremal funksiyani aniqlash.
5. Sobolev fazosida optimal interpolatsion formulalar qurishni o'rganish.

Tadqiqot vazifalari. Tadqiqot maqsadidan kelib chiqqan holda quyidagi tadqiqot vazifalari belgilandi. Integrallarni taqribiy hisoblash nazariyalarini o'rganish. optimal interpolatsion formulalar qurishni o'rganish. $L_2^{(m)}(S)$ Sobolev fazosini o'rganish. Ekstremal funksiyani topishni algoritmini o'rganish. Funksiyani normasini hisoblash algoritmini o'rganish.

Tadqiqotning metodologik asosi. Tadqiqotning metodologik asosi sifatida hisoblash matematikasining asosiy metodlari, umumlashgan funksiyalar va ularning qo'llanilishi, kvadratur va kubatur formulalar qurish metodlari, xatolik

funksionali uchun norma va ekstremal funksiyani topish va optimal interpolatsion formulalar qurish algoritmlari asos qilib olindi.

Olingan asosiy natijalar.

1. Kvadratur formulalarni o'rganildi.
2. Kubatur formulalarni o'rganildi.
3. Sobolev fazosi va uning xossalarini o'rganildi.
4. $L_2^{(m)}(S)$ Sobolev fazosida kubatur formulalar uchun xatolik funksionali va ekstremal funksiyani aniqlash o'rganildi..
5. Sobolev fazosida optimal interpolatsion formulalar qurishni o'rganildi.

Natijalarning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati. Interpolatsion kadratur va kubatur formulalar uchun algoritm va dasturlar tuzildi. Ushbu formulalarning xatoliklari baholandi. Ushbu dissertasiya ishida esa $L_2^{(m)}(S)$ Sobolev fazosida kvadratur va kubatur formulalar uchun yuqorida keltirilgan masalalar qarab chiqilgan.

Tadbiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi. Dissertasiya nazariy xarakterga ega. Amaliyotda juda ko'p masalalar aniq integrallarni hisoblashga to'g'ri keladi. Lekin har doim ham aniq integrallarni analitik usulda aniq yechib bo'lmaydi. Shuning uchun taqribiy hisoblashga to'g'ri keladi. Funksiyalarni integrallashda, agar funksiya jadval ko'rinishda berilgan bo'lsa, integral tenglamalarni yechishda foydalanish mumkin.

Ishning hajmi va tuzilishi. Ushbu magistrlik dissertasiyasi 74 betdan iborat bo'lib, asosiy belgilashlar, kirish, 3 ta bob, xotima, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

I. BOB. INTERPOLYATSION KVADRATUR FORMULALAR

1.1. Interpolyasion kvadratur formulalar.

Ma'lumki, ba'zi bir obyektlarni matematik modellashtirishda jism sirti va hajmini, jism og'irlik markazi va inersiya momentini, biror kuch ta'sirida bajarilgan ish miqdorini aniqlashga to'g'ri keladi. Bu kattaliklarni aniqlash, masalaning berilishiga bog'liq ravishda berilgan analitik funktsiyani biror oraliqda aniq integrallashga keltiriladi. Shu bilan birga qaralayotgan masalaning xususiyatiga bog'liq ravishda integrallanuvchi funktsiya shunday ko'rinishni oladiki, natijada uni aniq integrallash imkoni har doim ham mumkin bo'lavermaydi.

Amaliy va nazariy masalarning ko'pchiligi biror $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funktsiyadan olingan $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralni hisoblashga keltiriladi. Ammo integral hisobining asosiy formulasi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

(bu yerda $F(x)$ funktsiya $f(x)$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi) amaliyotda ko'pincha ishlatilmaydi. Chunki ko'p hollarda $F(x)$ ni elementar funktsiyalarning chekli konbinatsiyasi orqali ifodalab bo'lmaydi. Bundan tashqari amaliyotda $f(x)$ jadval ko'rinishda berilgan bo'lishi ham mumkin, bunday holda boshlang'ich funktsiya tushunchasining o'zi ma'noga ega bo'lmay qoladi. Shuning uchun ham aniq integrallarni taqribiy hisoblash metodlari katta amaliy ahamiyatga ega. Bu hollarda integrallarni taqribiy integrallash usullaridan foydalanishga to'g'ri

keladi. Aniq integrallarni taqribiy hisoblashning bir necha usullari mavjud bo'lib, ulardan ayrimlarining algoritmlari bilan tanishib chiqaylik.

Biz $f(x)$ funksiyalarning yetarlicha keng sinfi uchun $\int_a^b f(x)dx$ aniq integrallarning taqribiy qiymatini integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqning chekli songa olingan nuqtalaridagi qiymatlarining chiziqli kombinatsiyasiga keltiriladigan metodlarni ko'rib chiqamiz.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}). \quad (1.1)$$

Bu yerda $x_k^{(n)}$ ($k=1,2,\dots,n$) kvadratur formulaning tugunlari $A_k^{(n)}$ kvadratur formulaning koeffisientlari va $\sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$ kvadratur yig'indi deyiladi. Kvadratur formulaning tugunlari $x_k^{(n)}$ va koeffisientlari $A_k^{(n)}$ funksiyaning tanlanishiga bog'liq bo'lmasligi talab qilinadi.

Ushbu

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

ifoda esa kvadratur formulaning qoldiq hadi yoki xatosi deyiladi. Odatda (1.1) formulaga nisbatan umumiyroq kvadratur formula qaraladi.

Quyida $[a,b]$ oraliqni chekli deb faraz qilib, biz kvadratur formula tuzishning ayrim yo'nalishlarini qisqacha ko'rib chiqamiz.

1. Ko'pincha kvadratur formula tuzish uchun $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda n ta $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ nuqtalar yordamida interpolyatsiyalanadi:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{x - x_j^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_j^{(n)}} f(x_k^{(n)}) + r_n(f, x).$$

Endi buni $\rho(x)$ ga ko'paytirib integrallasak,

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + \int_a^b \rho(x) r_n(f, x) dx$$

Kelib chiqadi, bu yerda

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \rho(x) \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{x - x_j^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_j^{(n)}} dx$$

Shu usulda tuzilgan kvadratur formulalar *interpolyatsion formulalar* deyiladi.

2. Veyeshtas teoremasiga asosan, chekli oraliqda uzluksiz funksiyalarni algebraik ko'phadlar bilan yetarlicha yuqori aniqlikda yaqinlashtarish mumkin. Shu bilan birga ko'phad darajasi qancha yuqori bo'lsa, aniqlik ham shuncha yuqori bo'ladi. Shuning uchun ham (1.1) formulada $A_k^{(n)}$ va $x_k^{(n)}$ parametrlarni shunday tanlashga harakat qilinadiki, bu tenglik yetarlicha yuqori darajali algebraik ko'phadlar uchun aniq bo'lsin. Shu usul bilan tuzilgan (1.1) formula $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan ko'p funksiyalarni integrallashda aniqlik jihatidan yaxshi natija beradi. Odatda, (1.1) formula barcha darajali ko'phadlar uchun aniq bo'lib, $f(x) = x^{m+1}$ uchun aniq bo'lmasa, u holda uning *algebraik aniqlik darajasi* m ga teng deyiladi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya davriy funksiya bo'lib, uning davri 2π ga teng bo'lsin va $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ integralni hisoblash talab qilinsin. U holda (1.1) formulaga $A_k^{(n)}$ va $x_k^{(n)}$ parametrlarni shunday tanlashga harakat qilinadiki, u imkon boricha yuqori tartibli trigonometrik ko'phadlarni aniq integrallasin. Aniqlik darajasi (tartibi) eng yuqori bo'lgan kvadratur formulalar katta ahamiyatga ega. Bunday formulalar *Gauss tipidagi kvadratur formulalar* deyiladi.

3. Kvadratur formulalar tuzishda elliginchi yillarning oxirlaridan boshlab yangi bir yo'nalish rivojlana boshladi. Uning mohiyati quyidagidan iborat. Bizga $f(x)$ funksiyalarning biror sinfi F berilgan bo'lsin. Butun F sinf uchun aniqlikni tavsiflaydigan miqdor sifatida quyidagi aniq yuqori chegara

$$R_n = \sup |R_n(f)| = \sup \left| \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right|$$

olinadi. Bu yerda $[a, b]$ da $x_k^{(n)}$ tugunlarini va $A_k^{(n)}$ koeffisientlarni shunday tanlash talab qilinadiki, R_n o'zining eng kichik qiymatiga erishsin. Bunday formulalar,

tabiiy ravishda, funksiyalarning F sinfiga eng kichik xatoga ega bo'lgan formulalar deyiladi.

Masalani boshqacha tarzda ham qo'yish mumkin, ya'ni $A_k^{(n)}$ yoki $x_k^{(n)}$ larga nisbatan ayrim shartlar bilan, masalan, koeffisientlarning o'zaro teng bo'lishlari

$$A_1^{(n)} = A_2^{(n)} = \dots = A_n^{(n)} = A^{(n)}$$

yoki tugunlarning bir xil uzoqlikda joylashgan bo'lishligi kabi va hokazo.

Integrallarni (1.1) formula yordamida hisoblashda, kvadratur yig'indi umuman taqribiy ravishda hisoblanadi. Odatda $f(x_k^{(n)})$ o'rnida biror $f_1(x_k^{(n)})$ ga ega bo'lamiz, demak

$$f(x_k^{(n)}) = f_1(x_k^{(n)}) + \varepsilon_k^{(n)}$$

bu yerda $\varepsilon_k^{(n)}$ – yaxlitlash xatosi. Faraz qilaylik, barcha $k=1,2,\dots,n$ uchun $|\varepsilon_k^{(n)}| \leq \varepsilon$ bo'lsin. Agar ko'paytmalarning yig'indisi $\sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f_1(x_k^{(n)})$ aniq hisoblansa, uholda kvadratur yig'indini hisoblashda yaxlitlash xatosi $\varepsilon \sum_{k=1}^n A_k^{(n)}$ dan ortmaydi, xususan teng bo'lishi ham mumkin.

Faraz qilaylik, (1.1) formula $f(x) \equiv 1$ ni aniq integrallasin, ya'ni,

$$\sum_{k=1}^n A_k^{(n)} = \int_a^b \rho(x) dx$$

Bundan, ravshanki $\sum_{k=1}^n A_k^{(n)}$ eng kichik qiymatini qabul qilishi uchun barcha $k = \overline{1, n}$ lar uchun $A_k^{(n)} > 0$ bo'lishi kerak. Bu esa musbat koeffisientlarni kvadratur formulalar katta ahamiyatga ega ekanligini ko'rsatadi.

Eng sodda kvadratur formulalarni oddiy mulohazalar asosida qurish

mumkin. Aytaylik, $\int_a^b f(x) dx$ integralni hisoblash talab qilinsin. Agar qaralayotgan oraliqda $f(x) = \text{const}$ bo'lsa u vaqtda

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

deb olishimiz mumkin. Bu formula to'g'ri turtburchaklar formulasi deyiladi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya chiziqli funksiyaga yaqin bo'lsin. u holda tabiiy ravishda integralning balandligi $b-a$ va asoslari $f(a)$ va $f(b)$ ga teng bo'lgan trapestiya yuzi bilan almashtirish mumkin. U holda

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)), \quad (1.2)$$

deb olishimiz mumkin. Bu formula trapestiya formulasi deyiladi.

Nihoyat $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda kvadratik formulaga yaqin bo'lsin,

u holda $\int_a^b f(x)dx$ ni taqribiy ravishda Ox o'qi va $x=a$, $x=b$ to'g'ri

chiziqlar hamda $y=f(x)$ funksiya grafigining absstissalari

$x=a$, $x=\frac{a+b}{2}$, $x=b$ bo'lgan nuqtalardan o'tuvchi ikkinchi tartibli

parabola orqali chegaralagan yuza bilan almashtirish mumkin. U holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \left\{ f(a) - f\left(\frac{b-a}{2}\right) + f(b) \right\}, \quad (1.3)$$

Bu formulani ingliz matematigi **Simpson** 1743 yilda taklif etgan edi. Bu formulani hosil qilinish uslubidan ko'rinib turibdiki, u barcha ikkinchi darajali

$$\ell_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Ko'phadlar uchun aniq formuladir. Shunday qilib, biz uchta eng sodda kvadratur formulaga ega bo'ldik.

(1.1) formulani chizishda u o'zgarmas son $f(x)=c$ ni aniq integrallashni talab qilgan edik. Lekin u $f(x)=a_0+a_1x$ chiziqli funksiyasi ham aniq

integrallaydi, chunki $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ balandligi va o'rta chizig'i $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ bo'lgan ixtiyoriy trapestiya yuziga teng.

Shunga o'xshash Simpson formulasi ham biz kutgandan ko'ra ham yaxshiroq formuladir. U uchunchi darajali

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = P_2(x) + a_3x^3$$

u vaqtda

$$\int_a^b P_3(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx + a_3 \int_a^b x^3 dx = \int_a^b P_2(x)dx + \frac{a_3}{4}(b^4 - a^4), \quad (1.4)$$

Lekin bizga ma'lumki,

$$\int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{2}[P_2(a) + 4P_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_2(b)], \quad (1.5)$$

Ikkinchi tomondan

$$\frac{a_3}{4}(b^4 - a^4) = \frac{b-a}{2}\{a_3a^3 + 4a_3\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + a_3b^3\}, \quad (1.6)$$

ayniyat o'rinlidir. Endi (1.5)-(1.6) ni (1.4) ga qo'shib,

$$\int_a^b P_3(x)dx = \frac{b-a}{2}\{P_3(a) + 4P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_3(b)\}$$

ni hosil qilamiz.

Shunday qilib biz uchta kvadratur formulani qurdik. Ulardan ikkitasi to'g'riturtburchak va trapestiya formulalari- birinchi darajali ko'phad uchun aniq formula bo'lib, Simpson formulasi uchunchi darajali ko'phad uchun aniq formuladir.

Buyuk matematik Gauss kvadratura nazariyasiga butunlay yangi va juda muhim g'oyani kiritdiki, u amaliy analizning kop sohalari rivojlanishi uchun asos bo'lib qoldi. Faraz qilaylik, ba'zi bir $y = f(x)$ integrallanuvchi funksiya x o'zgaruvchining uzluksiz oraliqni har bir nuqtasida emas balkim, shu oraliqda etuvchi maxsus tanlangan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nuqtalarda berilgan bo'lsin. Biz bu

yerda faqat chekli oraliqni qaraymiz. Shuning uchun uni darhol normalab qo'yamiz.

Oraliqni

$$-1 \leq x \leq 1$$

ga keltiramiz va $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nuqtalar ham qaysikim, $y = f(x)$ funksiya berilgan oraliqda tegishli bo'lsin. Umuman olganda n ning katta bo'lishidan qat'iy nazar,

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$$

ordinatalar $f(x)$ funlstiyani aniqlash uchun yetarli emas. Lekin biz $f(x)$ funksiyaning oraliq nuqtalari uchun integrallashga harakat qilamiz. Shu maqsadda x ning darajali funksiyalaridan foydalanamiz. Biz shunday $n-1$ darajali $P_{n-1}(x)$ ko'phad topishimiz mumkinki, u ham x_n nuqtalarda y_n qiymatga ega bo'ladi. Odatda chekli ayirmalarni hisoblashda berilgan $x = x_n$ nuqtalar teng taksimlangan qilib taksimlanadi.

Gaussning g'oyasi shundan iboratki nuqtalarning holatini oldindan belgilamasdan ushunday sondagi ordinatalar bilan yuqori aniqlikka erishish mumkinligi kabi, bu yerda nuqtalar shunday joylashtiriladiki natijada eng yaxshi natijalar olinadi. Bu yo'lda Gauss kvadratur formulalarning nafaqat eng yuqori aniqlikka erishdi, balkim bu jarayon ko'phadlar bilan teng taqsimli interpoliyastiyalashda xavfdan ham holidir. Qaysikim bu xavf u davrda ham ma'lum emasdi. Faraz qilaylik $x = x_k$ interpoliyastiyalash nuqtalari tamoman erkin bo'lsin va biz bu nuqtalarda $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ qiymatlarni qabul qiladigan $U = P_{n-1}(x)$ ko'phadni topamiz. Bu masalani hal qiladigan formula Lagranjning interpoliyastion formulasi sifatida ma'lum. U

$$F_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

fundamental ko'phadni qurishga va uni ketma-ket har bir n ta ikki hadlga bo'lishga asoslangandir.

Shunday qilib biz quyidagi xossalarga ega bo'lgan

$$Q_i(x) = \frac{F_n(x)}{F_n'(x_i)(x - x_i)} \quad (i=1,2,\dots,n),$$

ko'phadni oldik. $Q_i(x)$ $x = x_i$ nuqtadan tashqari barcha $x = x_k$ nuqtalarda nolga teng, $x = x_i$ da esa birga teng. Agar f_{ik} - **Kroneker** simvolini kiritsak, ya'ni

$$Q_i(x_k) = f_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{agar } i = k \\ 0, & \text{agar } i \neq k \end{cases},$$

Bu holda kurish mumkinki,

$$P_{n-1}(x) = y_1 Q_1(x) + y_2 Q_2(x) + \dots + y_n Q_n(x),$$

Ko'phad qo'yilgan shartni kanoatlantiradi: yani $x = x_k$ nuqtalarda $y = y_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) qiymatlarni qabul qiladi.

$P_{n-1}(x)$ - ko'phadning yagonaligi shu dalildan kelib chikadiki, $P_{n-1}(x)$ ko'phad bilan ikkinchi gipotetik $\overline{P}_{n-1}(x)$ ko'phad o'rtasidagi ayirma birga $x = x_k$ nuqtalarda nolga aylanadi. Lekin $P_{n-1}(x) - \overline{P}_{n-1}(x)$ ayirma ham yana $n-1$ darajali ko'phad bo'lib, u esa aynan nolga aylanmasdan $n-1$ tadan ko'p ildizga ega bo'lmaydi: bu esa

$$P_{n-1}(x) = \overline{P}_{n-1}(x)$$

ekanligini bildiradi.

Endi agar biz $P_{n-1}(x)$ ni $y = f(x)$ fuknstiyaga yetarlicha yaqinlashgan deb hisoblasak,

$$\overline{A} = \int_{-1}^1 P_{n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n y_k \int_{-1}^1 Q_k(x) dx, \quad (1.7)$$

hisoblasak, amaliyotda noma'lum $f(x)$ egrilik ostidagi yuzaga ega bo'lamiz. Berilgan ayrim taksimlangan $x = x_k$ nuqtalar uchun $Q_k(x)$ ko'phadlar bir qiymatli aniqlangan va shuning uchun ham

$$\int_{-1}^1 Q_k(x) dx = \omega_k, \quad (1.8)$$

aniq integrallar ba'zi bir sonli qiymatlarga ega bo'ladiki, qaysikim ular uchun jadvallar tuzish mumkin.

Bizni qiziktiruvchi yuza uchun bu qiymatlar tamoman $y = f(x)$ funksiyaning tabiatiga bog'lik emas.

Oldingi $x = x_i$ nuqtalarni o'zgartirmasdan yangi $x = x_{n+1}$ qo'shimcha nuqtani qo'shamiz. Qo'shimcha $x - x_{n+1}$ ikki hadni kiritib, $Q_{n+1}(x)$ - qo'shimcha ko'phadni hosil qilamiz. Ta'rifdan $Q_i(x)$ uchun kelib chiqadiki, $Q_{n+1}(x)$ ko'phad $F_n(x)$ ko'phadga proporstionaldir, qaysikim $(x - x_{n+1})$ yangi ko'paytuvchi qiskarib ketadi. Xuddi shunday yangi y_{n+1} ordinata ko'paytiriladigan vaznli ω_{n+1} vaznli ko'paytuvchi

$$\int_{-1}^1 F_n(x) dx, \quad (1.9)$$

aniq integralga proporstionaldir.

Shunga uxshash, agar yangi

$$x = x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m} \quad (1.10)$$

nuqtalarni ularni ordinalari bilan kiritsak, u holda ularga mos

$\omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \dots, \omega_{n+m}$ vaznlar

$$\omega_{n+i} = \int_{-1}^1 F_n(x) \xi_{m-1}^i(x) dx \quad (1.11)$$

integral bilan aniqlanadi, bu yerda $\xi_{m-1}^i(x)$ - ayrim $m-1$ darajali ko'phadlardir. Ixtiyoriy $\xi_{m+1}(x)$ ko'phad, $x^0, x^1, x^2, \dots, x^{m-1}$ darajali funksiyalarning chiziqli superpozitsiyasidan iborat ekanligidan, agar $F_n(x)$ quyidagi integrallarni qanoatlantirsa, bu hamma vaznlar avtomatik ravishda nolga aylanadi.

$$\int_{-1}^1 F_n(x) dx = 0, \dots, \int_{-1}^1 F_n(x) x^{m-1} dx = 0,$$

haqiqattan ham bizning talablarimiz $m = n$ gacha borib,

$$\int_{-1}^1 F_n(x) x^\alpha dx = 0 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (1.12)$$

integral shartining bajarilishidir.

Natijada bizning boshida berilgan n ta nuqtani ixtiyoriy ravishda qo'shsak ham baribir hech bir yangi ordinata oldingi natijalarni o'zgartirmaydi.

Oldingi natija shundan iboratki, xuddi biz $2n$ ta ordinata bilan ish ko'rib, haqiqattan esa biz n ta ordinatadan foydalanamiz, yangi qurilgan ordinatalar esa hisoblanayotgan yuzaga hech nima qo'shmaydi.

Bu jarayonda biz

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^{2n} y_k \omega_k$$

yig'indiga n ta hadni tejayimz. Bu fikrlashlar yuqoridagi mulohazalar uchun yetarlicha emasdir. To'liqroq bo'lishi uchun quyidagi mulohazani tavsiya etamiz.

Haqiqattan ham yangi $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$ nuqtalarning berilishi nafaqat $Q_{n+m}(x)$ ($m = 1, 2, \dots, n$) yangi ko'phadlarni qo'shadi, xatto oldingi

$Q_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ko'phadlar ham o'zgaradi: har bir yangi x_{n+m} nuqta

$Q_i(x)$ ga qo'shimcha $\frac{x - x_{n+m}}{x_i - x_{n+m}}$ ko'paytuvchini kiritadi.

Shunday qilib, yangi m ta $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ nuqtalarning kiritilishi oldingi $Q_i(x)$ ko'phadni

$$Q_i^*(x) = Q_i(x) \frac{x - x_{n+1}}{x_i - x_{n+1}} \cdot \frac{x - x_{n+2}}{x_i - x_{n+2}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{n+m}}{x_i - x_{n+m}}, \quad (1.13)$$

ko'phadga aylantiradi.

Yuqoridagi mulohazalarning haqiqat ekanligi shakli o'zgartirilgan $Q_i^*(x)$ ko'phadlarning quyidagi xossalarga ega ekanligidan kelib chiqadi:

$$1^0. \quad Q_i^*(x) = \delta_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

$$2^0. \quad \int_{-1}^1 Q_i^*(x) dx = \int_{-1}^1 Q_i(x) dx = \omega_i$$

endi bu xossalarni isbotini ko'ramiz.

Birinchi xossa bevosita (1.13) munosabatdan kelib chiqadi. Ikkinchisi uchun esa

$$\frac{x - x_{n+k}}{x_i - x_{n+k}} = 1 + \frac{x - x_i}{x_i - x_{n+k}}$$

dan foydalanamiz.

Bundan shuni xulosa qilamizki, (1.13) tenglikning o'ng tomonidagi qo'shimcha ko'paytuvchilarni ko'paytirishni $1 - \xi_{m-1}^i(x)$ ko'rinishda tasvirlash mumkin ekan, bu yerda $\xi_{m-1}^i(x)$ — $m-1$ darajali ko'phad. (1.12) shartning kuchiga asosan 2^0 - tenglik bajariladi. Isbotlangan 1^0 va 2^0 lar ko'rsatadiki yangi ordinatalar oldingi olingan natijalarni o'zgartirmaydi.

Muhimrog'i shundan iboratki, bizlar qo'shimcha $y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{2n}$ ordinatalarni bilishimiz shart emas.

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^n y_k \omega_k, \quad (1.14)$$

Yig'indi n ordinata yordami bilan shunday aniqlikdagi yuzani beradiki, agar biz $2n$ - ordinata olsak ham o'zgarmaydi.

(1.12) - tipdagi integral shart ortogonallashtirish sharti deyiladi. Biz ko'rsatamizki, $F_n(x)$ ko'phad $1, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$ darajali funksiyalarga ortogonaldir. Bunday shartlarni oldin ortogonal funksiyalar sistemasini ko'rib chiqqanda o'rganganmiz.

Biz Yakobi ko'phadlarini tekshirib chiqdikki, u (1.12) shart ma'nosida ko'phad darajasidan past bo'lgan barcha x ning darajalariga ortogonallik xossalriga egadir. Ammo ortogonallik sharti umumiy holda yana $\rho(x)$ vazn ko'paytuvchini ham integral ostiga oladi. Faqat maxsus hollarda "Lejandr ko'phadlari" da bu vazn ko'paytuvchi 1 ga teng bo'ladi va shunday qilib, ortogonallik oddiy ortogonallikka aylanib qoladi. Shunday qilib, $F_n(x)$ funksiyani tanlash masalasi hal qilinadi:

Gauss metodi $F_n(x)$ ni n - Lejandr ko'phadlari bilan mos qo'yishni talab qiladi: bu ko'phad ildizlari bizga shunday nuqtalarni beradiki, qaysikim $f(x)$ funksiya qiymatlari berilgan bo'ladi. ω_i koeffitsientlarning sonli qiymatlari bilan birga shu ildizlarning juda aniq jadvallari borki, u (1.8) formula bilan hisoblanadi.

Bizga ma'lumki, $[a, b]$ da n nuqtali interpolatsion formulaning

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (1.15)$$

tugun nuqtalari $[a, b]$ oraliqda qanday joylashganliklaridan qat'iy nazar, $(n-1)$ - darajali ko'phadlar aniq integrallanishi qaraladi. Chekli $[a, b]$ oraliq va $\rho(x) \equiv 1$ uchun Gauss quyidagi masalani qaragan edi. $x_1, x_2, \dots, x_n$

tugunlar shunday tanlanganki, (1.15) formula mumkin qadar darajasi eng Yuqori bo'lgan ko'phadlarni aniq integrallasin. (1.15) formula n ta parametr - tugunlarni maxsus ravishda tanlash yo'li bilan uning aniqlik darajasini n birlikka ortirishni ko'rish mumkin. Haqiqattan ham $x_1, x_2, \dots, x_n$ tugunlarni maxsus ravishda tanlash orqali (1.15) formulaning darajasini $2n - 1$ dan ortmaydigan barcha $f(x)$ ko'phadlar uchun aniq bo'lishga erishishni Gauss ko'rsatdi.

Qanchalik Gaussning natijasi ixtiyoriy oraliq va vazn funksiyalar uchun umumlashtirildi. Bunday formulalar Gauss tipidagi kvadratur formulalar deyiladi. Qulaylik uchun x_n tugunlar o'rnida

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

ko'phad bilan ish ko'ramiz. Agar x_k lar ma'lum bo'lsa, u holda $\omega_n(x)$ ham ma'lum bo'ladi va aksincha. Lekin x_n larni topishni $\omega_n(x)$ ni topish bilan almashtirsak, u holda biz $\omega_n(x)$ ni ildizlari haqiqiy, har xil va ularning $[a, b]$ oraliqda yotishini ko'rsatishimiz shart.

Teorema 1.1.1 (1.15) kvadratur formula darajasi $2n - 1$ dan ortmaydigan barcha ko'phadlarni aniq integrallashi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va etarlidir:

1) U interpolystion va 2) $\omega_n(x)$ ko'phad $[a, b]$ oraliqda $\rho(x)$ vazn bilan darajasi n dan kichik bo'lgan barcha $Q(x)$ ko'phadlarga ortogonal bo'lishi kerak.

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n(x) Q(x) dx = 0, \quad (1.16)$$

Isbot. Zarurligi. Faraz qilaylik, (1.15) formula darajasi $2n - 1$ dan oshmaydigan barcha ko'phadlarni aniq integrallasin. U holda u interpolystiondir.

Endi darajasi n dan kichik bo'lgan ixtiyoriy $Q(x)$ ko'phadni olib, $f(x) = \omega_n(x)Q(x)$ deb olamiz. Shuning uchun ko'rinib turibdiki, $f(x)$ darajasi $2n-1$ dan ortmaydigan ko'phad. Shuning uchun ham uni (1.15) formula aniq integrallaydi:

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n(x) Q(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega_n(x_k) Q(x_k).$$

Bu yerda, $\omega_n(x_k) = 0$ ($k = \overline{1, n}$) ni hisobga olsak (1.16) tenglik kelib chiqadi, chunki $r(x)$ darajasi n dan kichik ko'phad va (1.15) formula interpolatsiondir.

Demak,

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k), \quad (1.17)$$

lekin (1.17) ga ko'ra $r(x) = f(x)$. Shuning uchun

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Shu bilan birga teoremaning yetarli sharti isbot bo'ldi.

$\omega_n(x)$ ko'phad $\rho(x)$ vazn bilan $[a, b]$ oraliqda darajasi n dan kichik bo'lgan barcha ko'phadlar bilan ortogonal va bosh koeffitsienti birga teng bo'lishi uchun, bunday $\omega_n(x)$ ko'phad yagona hamda uning ildizlari haqiqiy, har xil va $[a, b]$ oraliqda yotadi. Demak, agar $\rho(x)$ vazn $[a, b]$ oraliqda uz ishorasini saklasa, u holda har bir $n = 1, 2, \dots$ uchun $2n-1$ darajali ko'phadlarni aniq integrallaydigan yagona (1.15) kvadratur formula mavjud.

Faraz qilaylik bizga $f(x)$ funktsiyaning $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nuqtalardagi $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n)$ qiymatlari berilgan bo'lib, maqsad shu

nuqtalar bo'yicha $\int_a^b f(x) dx$ integralning taqribiy qiymatini mumkin qadar

Yuqori aniqlikda topishdan iboratdir. Demak, A_k koefitsientlar aniqlanishi kerak. Buning uchun $f(x)$ ni uning berilgan qiymatlaridan foydalanib, $(n-1)$ -darajali ko'phad bilan interpolyasiyalaymiz:

$$f(x) = L_{n-1}(x) + r_n(f, x) = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} f(x_k) + r_n(f, x), \quad (1.18)$$

endi bu tenglikni $\rho(x)$ ga ko'paytirib, a dan b gacha integrallaylik:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_a^b \rho(x) r_n(f, x) dx, \quad (1.19)$$

qoldiq hadni tashlasak,

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

$$A_k = \int_a^b \rho(x) \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad (1.20)$$

kvadratur formulalarga ega bo'lamiz.

Bu formula qurilish usuliga ko'ra interpolystation formula deyiladi. Bunday formulalar uchun ushbu teorema o'rinlidir.

Teorema 1.1.2 Quyidagi

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (1.21)$$

kvadratur formulaning interpolystation bo'lishi uchun uning barcha $(n-1)$ -darajali algebraik ko'phadlarni aniq integrallashi zarur va kifoyadir.

Isbot. Zarurligi. Agar $f(x)$ $(n-1)$ -darajali ko'phad bo'lsa, u holla (1.18) tenglikda $r_n(f, x) \equiv 0$ bo'lib,

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} f(x_k)$$

tenglik urinli bo'ladi va (1.21) hamda interpolystion bo'lganidan (1.20) ga ko'ra:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_a^b \rho(x) \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Demak, (1.21) formula $(n-1)$ - darajali $f(x)$ ko'phadni aniq integrallaydi.

Yetarlīgi. (1.21) formula $(n-1)$ - darajali ixtiyoriy ko'phad uchun aniq formuladir. Xususiy holda, u $(n-1)$ - darajali ushbu

$$\omega_m(x) = \prod_{i=1, i \neq m}^n \frac{x - x_i}{x_m - x_i} \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

ko'phad uchun ham aniq bo'ladi.

Agar $\omega_m(x_k) = 0$ ($k \neq m$) va $\omega_m(x_m) = 1$ ekanligini hisobga olsak,

$$\int_a^b \rho(x) \prod_{i=1, i \neq m}^n \frac{x - x_i}{x_m - x_i} dx = \int_a^b \rho(x) \omega_m(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega_m(x_k) = A_m$$

kelib chiqadi. Demak, (1.21) ham interpolystiondir, shu bilan teorema isbot bo'ldi.

Bu teoremadan ko'rinadiki, n nuqtali interpolystion kvadratur formulaning algebraik aniqlik darajasi $n-1$ dan kichik bo'lmasligi kerak. Bularga asosan, ishonch hosil qilish mumkinki, to'g'ri turtburchak, trapeستيya va Simpson formulalari interpolystion kvadratur formulalardir.

1.2. Effektiv kvadratur formulalar.

Amaliy analizning ko'pgina masalalari differensial tenglamalar orqali aniqlanadi. Agar bunday funksiyalarni integrallash kerak bo'lsa, u holda faqat oraliqning chetki nuqtalarida funksiya va uning hosilalarining qiymatlaridan foydalanish maqsadga muvofiq deb hisoblanadiki, agar chetki nuqtalarda chegaraviy nuqtalarni biz bilsak, ketma-ket hosilalarning qiymatlarini funksiyan

aniqlovchi differentsial tenglamalardan osongina hisoblashimiz mumkin. Shuning uchun bizning asosiy maksadimiz shundan iboratki, effektiv kvadratur formulalarni hosil qilish uchun biz ichki ordinatalardan emas, balkim chegaraviy ordinatalardan va bu nuqtalarda hosilalarning qiymatlaridan foydalanamiz. Bunday formulalar aniqlikni oshirish uchun emas, balki integralarni hisoblash uchun chegaraviy axborotlardan foydalaniladi. Quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema 1.2.1 Agar ikkita $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda aniqlangan, uzluksiz va m -tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi;

$$\int_a^b u(x)v^{(m)}(x)dx = \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} u^{(\alpha)}(x)v^{(m-\alpha-1)}(x)(-1)^\alpha \right] \Big|_a^b + R_m(x), \quad (1.22)$$

bu yerda,

$$R_m(x) = \int_a^b (-1)^m v(x)u^{(m)}(x)dx \quad (1.23)$$

va α -hosila tartibi.

Isbot: Har bir $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda differentsiallanuvchi va undan tashqari bu oraliqda $u(x)v'(x)$ funksiya uchun boshlangich funksiya mavjud bo'lsin. U holda $[a, b]$ oraliqda $u(x)v'(x)$ funksiya uchun boshlangich funksiya mavjud bo'lib, bo'laklab integrallash formulalari o'rinlidir. Ya'ni

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx, \quad (1.24)$$

yoki boshqacha yozsak

$$\int_a^b u(x)v'(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)dx, \quad (1.25)$$

Shunday qilib (1.22) formulaning ung tomoni uchun (1.25) formulani m marta qo'llasak quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\int_a^b u(x) v^{(m)}(x) - \int_a^b (-1)^m v(x) u^{(m)}(x) dx = \left[u(x) v^{(m-1)}(x) - u'(x) v^{(m-2)}(x) + \dots + \right]_a^b =$$

$$= \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} u^{(\alpha)}(x) v^{(m-\alpha-1)}(x) (-1)^\alpha \right]_a^b \quad (1.26)$$

Bundan esa quyidagini olamiz.

$$\int_a^b u(x) v^{(m)}(x) dx = \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} u^{(\alpha)}(x) v^{(m-\alpha-1)}(x) (-1)^\alpha \right]_a^b + \int_a^b (-1)^m u^{(m)}(x) v(x) dx, \quad (1.27)$$

va teorema shu bilan isbotlanadi.

(1.22) formuladan biz quyidagicha foydalanamiz. Integrallash oraligini (0,1) oraliqgacha normallaymiz. Ya'ni quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

$$u(x) = f(x),$$

$$v(x) = \frac{g_m(x)}{\beta_m^m m!} \quad (1.28)$$

Bu yerda

$$g_m(x) = \beta_m^m x^m + \beta_{m-1}^m x_{m-1} + \dots + \beta_0^m, \quad (1.29)$$

ko'phadni erkin tanlaymiz

$u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarni bunday tanlashlar natijasida (1.22) formula quyidagi ko'rinishda yozilishi mumkin.

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{\beta_m^m m!} \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} f^{(\alpha)}(x) g_m^{(m-\alpha-1)}(x) (-1)^\alpha \right]_0^1 + R_m, \quad (1.30)$$

Bu yerda

$R_m(x)$ - quyidagi aniq integralni bildiradi:

$$R_m = (-1)^m \int_0^1 \frac{g_m(x)}{\beta_m^m m!} f^{(m)}(x) dx, \quad (1.31)$$

(1.30) formulani biz quyidagicha tushunamiz va u shundan iboratki oraliqning chetki nuqtalarida egri chiziqlarning chegaraviy qiymatlari va hosilalarining qiymatlari uchun tegishli yuzani hisoblaydigan kvadratur formulani ifodalaydi.

$$g_m \frac{1}{\beta_m^m m!} \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} f^{(\alpha)}(x) g_m^{m-\alpha-1}(x) (-1)^\alpha \right] \Big|_0^1, \quad (1.32)$$

Shu vaqtda (1.31) formuladagi qiymat kvadratur formulaning R_m qoldigini tasvirlaydi.

Shunday qilib biz funksiya va uning hosilalarining chegaraviy qiymatlarida hisoblanadigan kvadratur formulalar va uning qoldiq hadiga ega bo'ldik.

Odatda xos qiymat deb ataluvchi nomalum doimiy λ parametrni o'z ichiga olgan chiziqli differensial tenglama berilgan bo'lsin. Yani shunday bir jinsli chegaraviy shartlar berilganki, tenglamaning yechimi faqat λ parametrni tanlash bilan topish mumkin. Masala shundan iboratki, shunday λ eng kichik qiymatni yoki bir nechta λ eng kichik qiymatlarni topish mumkin bo'lsaki, masala yechimga ega bo'lsin.

Bunday xos qiymatlar bilan bog'liq masalalarni yechish uchun effektiv kvadratur formulalarning qo'llanilishi yaqqol yordam berishi mumkin, chunki u faqat oraliqning chetki nuqtalarida funksiya va uning hosilalarini bilishga asoslangandir. Bu qiymatlar esa berilgan differensial tenglamalar va chegaraviy shartlar asosida olinadi.

Bu metodni qo'llanishini namoyish qilish uchun biz oddiy bir misol olamiz. Lekin metod esa murakkab shartlar asosida qo'llaniladi. Bizning asosiy maqsadimiz metodning jiddiy qirralarini o'rganishdan iborat bo'ladi. Murakkablashgan texnik qiyinchiliklari bundan mustasnodir. Shuning uchun biz o'zgarmas koeffisientli ikkinchi tartibli differensial tenglamaga to'xtalamiz.

$$y'' + y' + \lambda y = 0, \quad (1.33)$$

Chegaraviy shartlari quyidagicha

$$y(0), = y(1) = 0, \quad (1.34)$$

Berilgan oraliq $[0,1]$ ga keltirilgan. Bir jinsli chiziqli differentsial tenglama o'zgarmas amplitudali ko'paytuvchi qoldirganligidan $x = 0$ nuqtadagi hosila uchun ixtiyoriy $y'(0) = 1$ qiymatni yozish mumkin. Bu shartlar bilan (1.33) differentsial tenglama $x = 0$ nuqtada barcha hosilalarning qiymatlarini aniqlaydi. Biz ularni ketma-ket differentsiallash bilan yoki uni quyidagi $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ darajali qatorga yoyib va o'rniga qo'yib olamiz. Barcha o'xshash hadlarni to'playmiz va x^k oldidagi olingan koefitsientlarni nolga tenglashtiramiz. Bizning oddiy misolimizda $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1-\lambda}{6}$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = -1$, $y'''(1) = 1 - \lambda$ ni topamiz.

Agar biz koefitsientlarni ketma-ket topishni qancha davom ettirsak, shuncha katta aniqlikni kutishimiz mumkin. Bizning maqsadimiz uchun bu yerda biz a_3 ga to'xtalamiz. Boshqa chetki nuqta uchun xuddi shunday

$$x = 1 + \xi, \quad y = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3$$

deb olamiz.

Oldingiga o'xshagan differentsial tenglamaga etib qo'yish metodidan foydalansak, biz b_0 ni emas balki, barcha keyingi koefitsientlar b_0 koefitsientning chiziqli funksiyasi bo'lar ekan.

$$b_0 = b_1, \quad b_2 = -\frac{\lambda b_0}{2}, \quad b_3 = -\frac{\lambda b_0}{6}$$

$$y(+1) = b_0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = -\lambda b_0, \quad y'''(1) = \lambda b_0 \quad (1.36)$$

Endi biz $y''(x)$ ni $f(x)$ boshlangich funksiya sifatida qabul qilamiz va kvadratur formulani qo'llaymiz. Xuddi shunday $f(x) = y''(x)$ va $f'(x) = y'''(x)$ ikkala chetki nuqtalarda berilgan.

$$f(0) = -1 \quad f(1) = -\lambda b_0$$

$$f'(0) = 1 - \lambda \quad f'(1) = \lambda b_0$$

$n = 2$ bo'lganda effektiv kvadratur formula

$$\int_0^1 y''(x) dx = y'(1) - y'(0) = \frac{6(-1 - \lambda b_0) + 1(1 - \gamma - \gamma b_0)}{12};$$

$$-1 = \frac{-5 - 7\lambda b_0 - \lambda}{12}$$

ni hosil qilamiz, bu quyidagi munosabatga olib keladi.

$$b_0 = \frac{7 - \lambda}{7\lambda}, \quad (1.37)$$

Endi biz yana bir marta $y'(x)$ ni $f(x)$ sifatida olib, effektiv kvadratur formuladan foydalanamiz;

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0$$

$$f'(0) = 1, \quad f'(1) = -\lambda b_0$$

$$f''(0) = 1 - \lambda, \quad f''(1) = \lambda b_0$$

Hozir biz ikkala chetkilar uchun uch juft berilganlarga egamiz va formulani $n = 3$ bo'lganda qo'llaymiz.

$$\int_0^1 y'(x) dx = y(1) - y(0) = \frac{60(1 + 0) + 12(-1 + \lambda b_0) + (1 - \lambda + \lambda b_0)}{120}$$

$$b_0 = \frac{49 - \lambda + 13\lambda b_0}{120}$$

Bu esa yangi munosabatni beradi.

$$b_0 = \frac{49 - \lambda}{120 - 13\lambda} \quad (1.38)$$

(1.37) va (1.38) larning o'ng tomonlarini tenglashtirib λ -xos qiymatni aniqlash uchun quyidagi kvadrat tenglamani olamiz.

$$20\lambda^2 - 554\lambda + 840 = 0$$

Biz ikkita

$$\lambda_1 = 1,6095, \quad \lambda_2 = 26,0905, \quad (1.39)$$

ildizlarga ega bo'lamiz.

Faqat kichik ildizning o'ziga xos qiymati bor, kattasini olsak, hisoblashlarda katta o'zgarishlar bo'ladi. Kichik ildiz uchun biz differensiallash jarayonini davom ettirsak, unda o'zgarish bo'lmaydi. Biz $y'''(x)$ ga kelib qoldiq. Agar biz yana bir qadam bajarsak, $y'''(0)$ va $y'''(1)$ ni kiritsak, effektiv kvadratur formulaning birinchi yaqinlashishi $n = 3$ da ikkinchisi esa $n = 4$ da bo'ladi. Bu uchun biz ikkita munosabatni olamiz.

$$b_0 = \frac{71 - 10\lambda}{\lambda(73 - \lambda)} \quad \text{va} \quad b_0 = \frac{679 - 18\lambda}{168 - 201\lambda + \lambda^2}$$

Va ular λ ni aniqlash uchun

$$28\lambda^3 - 4074\lambda^2 + 80638\lambda - 119280 = 0$$

kub tenglamani beradi. Bu yerda yechimi

$$\lambda_1 = 1,608467,$$

dan iborat bo'ladi. λ_1 qiymatning kichkina o'zgarishi, (1.39) da topilganga nisbattan ko'rsatadiki, birinchi qo'pol yaqinlashish haqqatga juda yaqin ekanki, aniqlik 0,07% gacha bo'ldi. Ko'rgan oddiy misolimizda natijalarimizni tekshirishimiz mumkin. λ_1 - nazariy jihatdan

$$\lambda = \frac{1}{4} + \theta^2, \tag{1.40}$$

$$\theta \text{ esa } \operatorname{tg} \theta = 2\theta$$

transtendent tenglamani echimidir. Bu tenglamaning eng kichik ildizi

$$\theta_1 = 1,1655618 \quad \text{eki} \quad \lambda_1 = 1,608534 \quad \text{ni beradi.}$$

Shunday qilib $n = 2,3$ uchun yaqinlashish xatoligi $\eta = -0,0010$ ga, $n = 3,4$ da esa $\eta = 0,000067$ ga teng bo'ldi.

Xuddi shunday silliq $f(x) = y''(x)$ $n = 3$ funksiyalar uchun uni qo'llasak yaqinlashish juda tez bo'ladi.

Ma'lumki xos qiymatlarni olish uchun Rem- Ritst metodi ba'zi bir integrallarni minimallashtirishga asoslangandir, shuning uchun ham u metod faqat o'ziga qo'shma differensial operatorlarga qo'llanishi mumkin.

Tavsiya etilgan metod uchun esa differensial operator va chegaraviy shartlar o'z-o'ziga qo'shma bo'lishi talab qilinmaydi. Shuning uchun bu metod ancha umumiy hollarda ham qo'llaniladi va xatto bu metodik qo'llash uchun differensial tenglamaning chiziqli bo'lishi shart emas.

Bu g'oyani yana ham ilgari suradigan bo'lsak shunday xulosaga kelamizki, effektiv kvadratur jarayoni nafaqat xos qiymatlarni topish uchun balkim, differensial tenglamalarning haqiqiy yechimlarini topishga ham qo'llanilishi mumkin.

Nyuton – Kotes kvadratur formulalari:

Nyuton – Kotes formulalari eng dastlabki interpolatsion kvadratur formulalardan hisoblanadi. Bu formulalarda oraliq chekli, vazn funksiyasi $\rho(x) \equiv 1$ va x_i tugunlar teng uzoqlikda joylashgandir. Lekin aksariyat adabiyotlarda Nyuton – Kotes formulasi (1.1) ko'rinishida emas, balki boshqa ko'rinishda keltiriladi. Biz ham shu ko'rinishda qaraymiz. Buning uchun $[a, b]$ oraliqni

$$x_k^{(n)} = a + kh, \quad k = \overline{0, n} \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$(n+1)$ ta nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz va $A_k^{(n)}$ koeffisientlarni tegishli ko'rinishga keltirish uchun

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}} dx$$

integralda $x = a + th$ almashtirish bajaramiz,

$$x - x_i^{(n)} = (t - i)h, \quad x_k^{(n)} - x_i^{(n)} = (k - i)h,$$

bo'lganligi uchun

$$\prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}} dx = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \prod_{i=0, i \neq k}^n (t - i)$$

demak,

$$A_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} h \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (t-j) dt.$$

Endi

$$B_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (t-j) dt.$$

deb olsak, u holda Nyuton – Kotes formulasi quyidagicha yoziladi:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^{(n)} f(a+kh).$$

bundagi $B_k^{(n)}$ koeffisientlar $[a,b]$ oraliqda bog'liq emas.

Kotes tomonidan $B_k^{(n)}$ koeffisientlar $n=1,2,...,10$ uchun hisoblangan. R.O. Kuzmin $B_k^{(n)}$ lar uchun $n \longrightarrow \infty$ da asimptotik formulalarni topgan edi. Bu formulalardan jumladan, $n \longrightarrow \infty$ da $\sum_{k=1}^n |B_k^{(n)}| \longrightarrow \infty$ kelib chiqadi. Endi

$\sum_{k=1}^n |B_k^{(n)}| = \frac{1}{b-a} \int_a^b 1 dx = 1$ ekanligini hisobga olsak, bundan n yetarlicha katta bo'lganda

koeffisientlar orasida manfiylari ham, musbatlari ham mavjudligi ravshan bo'lib qoladi. Hatto, $n=8$ va $n=10$ bo'lganda ham $B_k^{(n)}$ lar orasida manfiylari mavjuddir. Shuning uchun ham Nyuton-Kotes formulalarini katta n larda qo'llash maqsadga muvofiq emas. Ravshanki, $n=1$ va $n=2$ bo'lganda formuladan mos ravishda trapetsiya va Simpson formulalari kelib chiqadi. To'g'ri to'rtburchak formulasi esa $\rho(x) \equiv 1$ va $n=1$ bo'lganda

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2} \sum_{k=0}^n B_k f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k\right).$$

formuladan kelib chiqadi. $n=3$ bo'lganda (1.1) dan “Sakkizdan uch qoidasi” deb ataluvchi Nyuton formulasiga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} \left[f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + \frac{2}{3}(b-a)\right) + f(b) \right].$$

Nyuton – Kotes formulasi bilan tanishib chiqdik. Endi Mathcad dasturida formulaning yechimini va qoldiq hadini ko'ramiz.

Nyuton - Kotes formulasining dasturi:

$$T(f, a, b) := \begin{cases} h \leftarrow \frac{b - a}{8} \\ s \leftarrow 3 \cdot f\left(a + \frac{b - a}{3}\right) + 3 \cdot f\left[a + \frac{2 \cdot (b - a)}{3}\right] \\ d \leftarrow f(a) + f(b) \\ (d + s) \cdot h \end{cases}$$

$$f(x) := x \cdot \ln(1 + x)$$

$$y(x) := e^{-x^2}$$

$$M1 := T(f, 0.4, 1.2)$$

$$M2 := T(y, 0, 1)$$

$$M1 = 0.3948276735$$

$$M2 = 0.7469923196$$

$$N1 := \int_{0.4}^{1.2} f(x) \, dx$$

$$N2 := \int_0^1 y(x) \, dx$$

$$N1 = 0.3947789587$$

$$N2 = 0.7468241328$$

$$R1 := |N1 - M1|$$

$$R2 := |N2 - M2|$$

$$R1 = 0.000049$$

$$R2 = 0.000168$$

Interpolyatsion kvadratur formulalar va umumlashgan kvadratur formulalar bilan tanishdik. Endi bu formulalar ya'ni to'g'ri to'rtburchak, trapetsiya, Simpson formulalarning dasturlarini Mathcad dasturlash tilida yechimini va qoldiq hadini ya'ni xatosini ko'ramiz.

Dasturda qatnashgan o'zgaruvchilar:

M1, M2 – biz tuzgan dasturning chiqargan natijasi.

N1, N2 – Mathcad dasturining chiqargan natijasi.

R1, R2 – qoldiq hadi.

To'g'ri to'rtburchak formulasining dasturi:

$$T(f, a, b, n) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b - a}{n} \\ s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1 .. n - 1 \\ \quad s \leftarrow s + f(a + i \cdot h) \\ \frac{b - a}{n} \cdot s \end{array} \right.$$

$$y(x) := e^{x^2}$$

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{3 + x^2}}$$

$$M1 := T(y, -1, 1, 100)$$

$$M2 := T(f, 0.4, 1.2, 100)$$

$$M1 = 2.8713002687$$

$$M2 = 0.4136909658$$

$$N1 := \int_{-1}^1 y(x) \, dx$$

$$N2 := \int_{0.4}^{1.2} f(x) \, dx$$

$$N1 = 2.9253034918$$

$$N2 = 0.4178397619$$

$$R1 := |N1 - M1|$$

$$R2 := |N2 - M2|$$

$$R1 = 0.054$$

$$R2 = 0.00415$$

Trapetsiya formulasining dasturi :

$$T(f, a, b, n) := \left\{ \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b - a}{n} \\ s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1 .. n - 1 \\ \quad s \leftarrow s + 2 \cdot f(a + i \cdot h) \\ s \leftarrow s + f(a) + f(b) \\ \frac{b - a}{2 \cdot n} \cdot s \end{array} \right.$$

$$y(x) := \frac{\sin(x)}{x}$$

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{3 + x^2}}$$

$$M1 := T(y, -1, 1, 100)$$

$$M2 := T(f, 0.4, 1.2, 100)$$

$$M1 = \blacksquare$$

$$M2 = \blacksquare$$

$$N1 := \int_{-1}^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$$

$$N2 := \int_{0.4}^{1.2} \frac{1}{\sqrt{3 + x^2}} dx$$

$$N1 = \blacksquare$$

$$N2 = \blacksquare$$

$$R1 := |N1 - M1|$$

$$R2 := |N2 - M2|$$

$$R1 = \blacksquare$$

$$R2 = \blacksquare$$

Simpson formulasining dasturi:

$$T(f, a, b, n) := \left\{ \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b - a}{2n} \\ k \leftarrow \frac{b - a}{6 \cdot n} \\ s \leftarrow 0 \\ d \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1 \dots 2n \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} s \leftarrow s + 4 f(a + i \cdot h) \text{ if } \text{mod}(i, 2) = 1 \\ d \leftarrow d + 2 f(a + i \cdot h) \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ k \cdot (s + d + f(a) + f(b)) \end{array} \right.$$

$$y(x) := e^{0.6 \cdot x} \cdot \cos(x)$$

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{3 + x^2}}$$

$$M1 := T\left(y, 0, \frac{\pi}{2}, 10\right)$$

$$M2 := T(f, 0.4, 1.2, 10)$$

$$M1 = \blacksquare$$

$$M2 = \blacksquare$$

$$N1 := \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(x) \, dx$$

$$N2 := \int_{0.4}^{1.2} f(x) \, dx$$

$$N1 = \blacksquare$$

$$N2 = \blacksquare$$

$$R1 := |N1 - M1|$$

$$R2 := |N2 - M2|$$

$$R1 = \blacksquare$$

$$R2 = \blacksquare$$

Xulosa chiqaradigan bo'lsak, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+x^2}}$ funksiya orqali uchta kvadratur formulaning chiqargan natijasini ko'rdik. Demak, qoldiq hadlarni hisobga oladigan

bo'lsak, to'g'ri to'rtburchakdan trapetsiya, trapetsiyadan Simpson kvadratur formulasi yaxshi natija berdi.

Chebyshev kvadratur formulas i:

$$\begin{aligned}
 & \text{ORIGIN} \equiv 1 \\
 & n := 7 \\
 & k := 1 .. n \\
 & f(x) := e^{x^2} \\
 & x := \begin{pmatrix} -0.8838617008 \\ -0.5296567753 \\ -0.3239118105 \\ 0 \\ 0.3239118105 \\ 0.5296567753 \\ 0.8838617008 \end{pmatrix} \\
 & a := -1 \qquad b := 1 \\
 & \int_a^b f(x) \, dx = \blacksquare \\
 & \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k) = \blacksquare
 \end{aligned}$$

1-bob bo'yicha qisqacha xulosa

Dissertasiyani 1-bobida kvadratur formulalar haqida na'lumotlar keltirilgan. Interpolyatsion kvadratur formulalar kurib chiqilgan, ularni xatoliklari tahlil qilinib, effektivligi ko'rib chiqilgan va umumlashgan kvadratur formular uchun algoritm va dastur tuzilib misollarda qo'llanilgan.

II.BOB. INTERPOLYATSION KUBATUR FORMULALAR.

2.1. Interpolyatsion kvadratur formulalar uchun algoritm va dasturlar.

Buyuk matematik Gauss kvadratura nazariyasiga butunlay yangi va juda muhim g'oya'ni kiritdiki, u amaliy analizning tub sohalari rivojlanishi uchun asos bo'lib qoldi. Faraz qilaylik, ba'zi bir $y = f(x)$ integrallanuvchi funksiya x o'zgaruvchining uzliksiz oraliqni xar bir nuqtasida emas balkim, shu oraliqda yotuvchi maxsus tanlangan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nuqtalarda berilgan bo'lsin. Biz bu yerda faqat chekli oraliqni qaraymiz. Shuning uchun uni darhol normalab qo'yamiz.

Oraliqni

$$-1 \leq x \leq 1 \quad (2.1)$$

ga keltiramiz va $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nuqtalar ham qaysikim, $y = f(x)$ funksiya berilgan oraliqda tegishli bo'lsin. Umuman olganda n ning katta bo'lishidan qat'iy nazar,

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n) \quad (2.2)$$

ordinatalar $f(x)$ funksiyaning aniqlash uchun yetarli emas. Lekin biz $f(x)$ funksiyaning oraliq nuqtalari uchun integrallashga harakat qilamiz. Shu maqsadda x ning darajali funksiyalaridan foydalanamiz. Biz shunday $n-1$ darajali $P_{n-1}(x)$ ko'phad topishimiz mumkinki, u ham x_n nuqtalarda y_n qiymatga ega bo'ladi. Odatda chekli ayirmalarni hisoblashda berilgan $x = x_n$ nuqtalar teng taqsimlangan qilib taqsimlanadi.

Gaussning g'oyasi shundan iboratki nuqtalarning holatini oldindan belgilamasdan o'shanday sondagi ordinatalar bilan yuqori aniqlikka erishish mumkinligi kabi, bu yerda nuqtalar shunday joylashtiriladiki, natijada eng yaxshi natijalar olinadi. Bu yo'lda Gauss kvadratur formulalarning nafaqat eng yuqori aniqlikka erishdi, balkim bu jarayon ko'phadlar bilan teng taqsimli interpolyatsiyalashda xavfdan ham xolidir. Qaysikim bu xavf u davrda ham

ma'lum emasdi. Faraz qilaylik $x = x_k$ interpolatsiyalash nuqtalari tamoman erkin bo'lsin va biz bu nuqtalarda $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ qiymatlarni qabul qiladigan $U = P_{n-1}(x)$ ko'phadni topamiz. Bu masalani hal qiladigan formula Lagranjning interpolatsion formulasi sifatida ma'lum. U

$$F_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n). \quad (2.3)$$

fundamental ko'phadni qurishga va uni ketma-ket xar bir n ta ikki hadlga bo'lishga asoslangandir.

Shunday qilib biz quyidagi xossalarga ega bo'lgan

$$Q_i(x) = \frac{F_n(x)}{F'_n(x_i)(x - x_i)} \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (2.4)$$

ko'phadni oldik. $Q_i(x)$ $x = x_i$ nuqtadan tashqari barcha $x = x_k$ nuqtalarda nolga teng, $x = x_i$ da esa birga teng. Agar f_{ik} - **Kroneker** simvolini kiritsak,

$$Q_i(x_k) = f_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{agar } i = k \\ 0, & \text{agar } i \neq k \end{cases}, \quad (2.5)$$

Bu holda qurish mumkinki,

$$P_{n-1}(x) = y_1 Q_1(x) + y_2 Q_2(x) + \dots + y_n Q_n(x), \quad (2.6)$$

ko'phad qo'yilgan shartni qanoatlantiradi: ya'ni $x = x_k$ nuqtalarda $y = y_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) qiymatlarni qabul qiladi.

$P_{n-1}(x)$ - ko'phadning yagonaligi shu dalildan kelib chiqadiki, $P_{n-1}(x)$ ko'phad bilan ikkinchi gipotetik $\overline{P}_{n-1}(x)$ ko'phad o'rtasidagi ayirma birga $x = x_k$ nuqtalarda nolga aylanadi. Lekin $P_{n-1}(x) - \overline{P}_{n-1}(x)$ ayirma ham yana $n-1$ darajali ko'phad bo'lib, u esa aynan nolga aylanmasdan $n-1$ tadan tub ildizga ega bo'lmaydi: bu esa $P_{n-1}(x) = \overline{P}_{n-1}(x)$ ekanligini bildiradi.

Endi agar biz $P_{n-1}(x)$ ni $y = f(x)$ funksiyaga yetarlicha yaqinlashgan deb hisoblasak,

$$\overline{A} = \int_{-1}^1 P_{n-1}(x)dx = \sum_{k=1}^n y_k \int_{-1}^1 Q_k(x)dx, \quad (2.7)$$

hisoblasak, amaliyotda noma'lum $f(x)$ egrilik ostidagi yuzaga ega bo'lamiz. Berilgan ayrim taqsimlangan $x = x_k$ nuqtalar uchun $Q_k(x)$ ko'phadlar bir qiymatli aniqlangan va shuning uchun ham

$$\int_{-1}^1 Q_k(x)dx = \omega_k, \quad (2.8)$$

aniq integrallar ba'zi bir sonli qiymatlarga ega bo'ladiki, qaysikim ular uchun jadvallar tuzish mumkin.

Bizni qiziqtiruvchi yuza uchun bu qiymatlar tamoman $y = f(x)$ funksiyaning tabiatiga bog'liq emas.

Oldingi $x = x_i$ nuqtalarni o'zgartirmasdan yangi $x = x_{n+1}$ qo'shimcha nuqtani qo'shamiz. Qo'shimcha $x = x_{n+1}$ ikki hadni kiritib, $Q_{n+1}(x)$ - qo'shimcha ko'phadni xosil qilamiz. (2.4) ta'rifdan $Q_i(x)$ uchun kelib chiqadiki, $Q_{n+1}(x)$ ko'phad $F_n(x)$ ko'phadga proporsionaldir, qaysikim $(x - x_{n+1})$ yangi ko'paytuvchi qisqarib ketadi. Xuddi shunday yangi y_{n+1} ordinata ko'paytiriladigan vaznli ω_{n+1} vaznli ko'paytuvchi

$$\int_{-1}^1 F_n(x)dx, \quad (2.9)$$

aniq integralga proporsionaldir. Shunga o'xshash, agar yangi

$$x = x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m} \quad (2.10)$$

nuqtalarni ularni ordinalari bilan kiritsak, u holda ularga mos

$$\omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \dots, \omega_{n+m}$$

$$\text{vaznlar} \quad \omega_{n+i} = \int_{-1}^1 F_n(x) \xi_{m-1}^i(x) dx \quad (2.11)$$

integral bilan aniqlanadi, bu yerda $\xi_{m-1}^i(x)$ ayrim $m-1$ darajali ko'phadlardir. Ixtiyoriy $\xi_{m+1}(x)$ ko'phad, $x^0, x^1, x^2, \dots, x^{m-1}$ darajali funksiyalarning chiziqli superpozitsiyasidan iborat ekanligidan, agar $F_n(x)$ quyidagi integrallarni qanoatlantirsa, bu hamma vaznlar avtomatik ravishda nolga aylanadi.

$$\int_{-1}^1 F_n(x) dx = 0, \dots, \int_{-1}^1 F_n(x) x^{m-1} dx = 0, \quad (2.12)$$

haqiqatdan ham bizning talablarimiz $m = n$ gacha borib,

$$\int_{-1}^1 F_n(x) x^\alpha dx = 0 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (2.13)$$

integral shartining bajarilishidir.

Natijada bizning boshida berilgan n ta nuqtani ixtiyoriy ravishda qo'shsak ham baribir xech bir yangi ordinata oldingi natijalarni o'zgartirmaydi.

Oldingi natija shundan iboratki, xuddi biz $2n$ ta ordinata bilan ish ko'rib, haqiqatdan esa biz n ta ordinatadan foydalanamiz, yangi qurilgan ordinatalar esa hisoblanayotgan yuzaga hech nima tushmaydi.

Bu jarayonda biz
$$\bar{A} = \sum_{k=1}^{2n} y_k \omega_k$$

yigindiga n ta hadni tejaymiz. Bu fikrlashlar yuqoridagi muloxazalar uchun yetarlicha emasdir. To'liqroq bo'lishi uchun quyidagi muloxazani tavsiya etamiz.

Haqiqatdan ham yangi $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$ nuqtalarning berilishi nafaqat $Q_{n+m}(x)$ ($m = 1, 2, \dots, n$) yangi ko'phadlarni qo'shadi, xatto oldingi $Q_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ko'phadlar ham o'zgaradi: xar bir yangi x_{n+m} nuqta

$Q_i(x)$ ga qo'shimcha $\frac{x - x_{n+m}}{x_i - x_{n+m}}$ ko'paytuvchini kiritadi.

Shunday qilib, yangi m ta $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ nuqtalarning kiritilishi oldingi $Q_i(x)$ ko'phadni

$$Q_i^*(x) = Q_i(x) \frac{x - x_{n+1}}{x_i - x_{n+1}} \cdot \frac{x - x_{n+2}}{x_i - x_{n+2}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{n+m}}{x_i - x_{n+m}}, \quad (2.14)$$

ko'phadga aylantiradi.

Yuqoridagi muloxazalarning haqiqat ekanligi shakli o'zgartirilgan $Q_i^*(x)$ ko'phadlarning quyidagi xossalarga ega ekanligidan kelib chiqadi:

$$1^0. \quad Q_i^*(x) = \delta_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

$$2^0. \quad \int_{-1}^1 Q_i^*(x) dx = \int_{-1}^1 Q_i(x) dx = \omega_i$$

endi bu xossalarni isbotini ko'ramiz.

Birinchi xossa bevosita (α) munosabatdan kelib chiqadi. Ikkinchisi uchun esa

$$\frac{x - x_{n+k}}{x_i - x_{n+k}} = 1 + \frac{x - x_i}{x_i - x_{n+k}}$$

dan foydalanamiz.

Bundan shuni xulosa qilamizki, (α) tenglikning o'ng tomonidagi qo'shimcha ko'paytuvchilarni ko'paytirishni $1 - \xi_{m-1}^i(x)$ ko'rinishda tasvirlash mumkin ekan, bu yerda $\xi_{m-1}^i(x) - m - 1$ darajali ko'phad. (2.13) shartning kuchiga asosan 2^0 - tenglik bajariladi. Isbotlangan 1^0 va 2^0 lar ko'rsatadiki yangi ordinatalar oldingi olingan natijalarni o'zgartirmaydi.

Muhimrog'i shundan iboratki, bizlar qo'shimcha $y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{2n}$ ordinatalarni bilishimiz shart emas.

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^n y_k \omega_k,$$

yigindi n ordinata yordami bilan shunday aniqlikdagi yuzani beradiki, agar biz $2n$ - ordinata olsak ham o'zgarmaydi.

(2.13) - tipdagi integral shart ortogonallashtirish sharti deyiladi. Biz ko'rsatamizki, $F_n(x)$ ko'phad $1, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$ darajali funksiyalarga ortogonaldir. Bunday shartlarni oldin ortogonal funksiyalar sistemasini ko'rib chikkanda o'rganganmiz.

Biz Yakobi ko'phadlarini tekshirib chiqdikki, u (2.13) shart ma'nosida ko'phad darajasidan past bo'lgan barcha x ning darajalariga ortogonallik xossalriga egadir. Ammo ortogonallik sharti umumiy holda yana $\rho(x)$ vazn ko'paytuvchini ham integral ostiga oladi. Faqat maxsus hollarda "Lagranj ko'phadlari" da bu vazn ko'paytuvchi birga teng bo'ladi va shunday qilib, ortogonallik oddiy ortogonallikka aylanib qoladi. Shunday qilib, $F_n(x)$ funksiyani tanlash masalasi hal qilinadi:

Gauss metodi $F_n(x)$ ni n - Lagranj ko'phadlari bilan mos qo'yishni talab qiladi: bu ko'phad ildizlari bizga shunday nuqtalarni beradiki, qaysikim $f(x)$ funksiya qiymatlari berilgan bo'ladi. ω_i koefitsientlarning sonli qiymatlari bilan birga shu ildizlarning juda aniq jadvallari borki, u (2.8) formula bilan hisoblanadi. Bizga ma'lumki, $[a, b]$ da n nuqtali interpolyatsion formulaning

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (2.15)$$

tugun nuqtalari $[a, b]$ oraliqda qanday joylashganliklaridan qat'iy nazar, $(n-1)$ - darajali ko'phadlar aniq integrallanishi qaraladi. Chekli $[a, b]$ oraliq va $\rho(x) \equiv 1$ uchun Gauss quyidagi masalani qaragan edi. $x_1, x_2, \dots, x_n$ tugunlar shunday tanlanganki, (2.15) formula mumkin qadar darajasi eng yuqori bo'lgan ko'phadlarni aniq integrallasin. (2.15) formula n ta parametr - tugunlarni maxsus ravishda tanlash yo'li bilan uning aniqlik darajasini n birlikka ortirishni kutish mumkin. Haqiqatdan ham $x_1, x_2, \dots, x_n$ tugunlarni maxsus ravishda tanlash orqali (2.15) formulaning darajasini $2n-1$ dan ortmaydigan barcha $f(x)$ ko'phadlar uchun aniq bo'lishga erishishni Gauss ko'rsatdi. Qanchalik Gaussning natijasi ixtiyoriy oraliq va vazn funksiyalar uchun umumlashtirildi. Bunday formulalar Gauss tipidagi kvadratur formulalar deyiladi. Qulaylik uchun x_n tugunlar o'rnida

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

ko'phad bilan ish ko'ramiz. Agar x_k lar ma'lum bo'lsa, u holda $\omega_n(x)$ ham ma'lum bo'ladi va aksincha. Lekin x_n larni topishni $\omega_n(x)$ ni topish bilan almashtirsak, u holda biz $\omega_n(x)$ ni ildizlari haqiqiy, har xil va ularning $[a, b]$ oraliqda yotishini ko'rsatishimiz shart.

Teorema. (2.1) kvadratur formula darajasi $2n - 1$ dan ortmaydigan barcha ko'phadlarni aniq integrallashi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir: 1) u interpolatsion va 2) $\omega_n(x)$ ko'phad $[a, b]$ oraliqda $\rho(x)$ vazn bilan darajasi n dan kichik bo'lgan barcha $Q(x)$ ko'phadlarga ortogonal bo'lishi kerak.

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n(x) Q(x) dx = 0, \quad (2.16)$$

Isbot. Zarurligi. Faraz qilaylik, (2.15) formula darajasi $2n - 1$ dan oshmaydigan barcha ko'phadlarni aniq integrallasin. U holda u interpolatsiondir. Endi darajasi n dan kichik bo'lgan ixtiyoriy $Q(x)$ ko'phadni olib, $f(x) = \omega_n(x)Q(x)$ deb olamiz. Shuning uchun ko'rinib turibdiki, $f(x)$ darajasi $2n - 1$ dan ortmaydigan ko'phad. Shuning uchun ham uni (1) formula aniq integrallaydi:

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n(x) Q(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega_n(x_k) Q(x_k).$$

Bu yerda, $\omega_n(x_k) = 0$ ($k = \overline{1, n}$) ni hisobga olsak (2.16) tenglik kelib chiqadi, chunki $r(x)$ darajasi n dan kichik ko'phad va (2.15) formula interpolatsiondir.

Yetarliligi. Faraz qilaylik (1) formula interpolatsion va $\omega_n(x)$ ko'phad darajasi n dan kichik bo'lgan barcha ko'phadlarga $\rho(x)$ vazn bilan ortogonal bo'lsin. Endi (2.15) formula darajasi $2n-1$ dan ortmaydigan barcha $f(x)$

ko'phadlarni aniq integrallashini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham $f(x)$ ni $\omega_n(x)$ ga bo'lib,

$$f(x) = \omega_n(x)Q(x) + r(x) \quad (2.17)$$

ni hosil qilamiz, hosil qilamiz, bu yerda $Q(x)$ va $r(x)$ larni darajalari n dan kichik. Bu tengliklarning har ikkala tomonini $\rho(x)$ ga ko'paytirib, a dan b gacha integrallaymiz:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \int_a^b \rho(x)\omega_n(x)Q(x)dx + \int_a^b r(x)\rho(x)dx$$

Teorema shartiga ko'ra o'ng tomondagi birinchi integral nolga teng, ikkinchi

$$\int_a^b r(x)\rho(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k)$$

integral esa

Chunki $r(x)$ darajasi n dan kichik ko'phad va (2.15) formula interpolatsiondir.

Demak,

$$\int_a^b \rho(x) f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k),$$

lekin (2.17) ga ko'ra $r(x) = f(x)$. Shuning uchun

$$\int_a^b \rho(x) f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Shu bilan birga teoremaning yetarli sharti isbot bo'ldi.

$\omega_n(x)$ ko'phad $\rho(x)$ vazn bilan $[a, b]$ oraliqda darajasi n dan kichik bo'lgan barcha ko'phadlar bilan ortogonal va bosh koeffisienti birga teng bo'lishi uchun ish natijalariga ko'ra, bunday $\omega_n(x)$ ko'phad yagona hamda uning ildizlari haqiqiy, har xil va $[a, b]$ oraliqda yotadi. Demak, agar $\rho(x)$ vazn $[a, b]$ oraliqda o'z ishorasini saqlasa, u holda xar bir $n = 1, 2, \dots$ uchun $2n - 1$ darajali ko'phadlarni aniq integrallaydigan yagona (2.2.1) kvadratur formula mavjud.

Teorema 2.2 Agar $\rho(x)$ vazn $[a, b]$ oraliqda o'z ishorasini saqlasa, u holda x_k va A_k lar qanday tanlanganda ham (2.15) tenglik $2n$ darajali barcha ko'phadlar uchun aniq bo'la olmaydi.

Isbot. Kvadratur formulaning tugunlarini $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar orqali belgilab, quyidagi

$$f(x) = \omega_n^2(x) = [(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)]^2$$

2n- darajali ko'phadni qaraymiz.

Ko'rinib turibdiki, (1) formula bu ko'phad uchun aniq emas, chunki

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) dx > 0$$

va ixtiyoriy A_k koeffisientlar uchun $\sum_{k=1}^n A_k \omega_n^2(x_k) = 0$.

Gauss tipidagi kvadratur formula koeffisientlarining xossasi. Gauss tipidagi kvadratur formulaning barcha koeffisientlari A_k musbatdir. Haqiqatdan ham, 2n-2

darajali

$$f(x) = \varphi_{k,n}^2(x) = \frac{\omega_n(x)^2}{x - x_k}$$

Ko'phad uchun quyidagi tengliklar bajarilishi ayondir. Bu ko'phad uchun Gauss tipidagi formula aniqdir:

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_{k,n}^2(x) dx = A_k [\omega_n'(x_k)]^2.$$

Bundan:

$$A_k = \frac{\int_a^b \rho(x) \varphi_{k,n}^2(x) dx}{[\omega_n'(x_k)]^2} \quad (2.18)$$

O'z navbatida bundan barcha A_k larning musbatligi kelib chiqadi.

Gauss tipidagi kvadratur formulaning qoldiq hadi:

Teorema 2.3. Agar $[a,b]$ oraliqda $f(x)$ funksiya 2n-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda shunday $\varepsilon \in [a,b]$ nuqta topiladiki, Gauss tipidagi kvadratur formulaning qoldiq hadi

$$R_n(f) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

uchun quyidagi tenglik o'rinlidir:

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\varepsilon)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) dx. \quad (2.19)$$

Gauss kvadratur formulasining qoldiq hadi:

$$R_n(f) = \frac{1}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) f^{2n}(\mu) dx.$$

Gauss kvadratur formula bilan tanishdik, endi bu formulani Mathcad dasturida yechimini ko'ramiz.

Gauss tenglamasining dasturi:

ORIGIN $\equiv 1$

$n := 6$

$$P(x) := \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad \text{simplify} \rightarrow \frac{231}{16} \cdot x^6 - \frac{315}{16} \cdot x^4 + \frac{105}{16} \cdot x^2 - \frac{5}{16}$$

$$a := P(x) \text{ coeffs } , x \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{5}{16} \\ 0 \\ \frac{105}{16} \\ 0 \\ -\frac{315}{16} \\ 0 \\ \frac{231}{16} \end{pmatrix} \quad T(x) := \frac{2}{\left[1 - (x)^2\right] \cdot \left(\frac{d}{dx} P(x)\right)^2}$$

$$x := \text{polyroots}(a) \quad k := 1 .. n$$

$$A_k := T(x_k)$$

$$x = \begin{pmatrix} -0.9324695142 \\ -0.6612093864 \\ -0.2386191861 \\ 0.2386191861 \\ 0.6612093865 \\ 0.9324695142 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0.1713244923 \\ 0.3607615731 \\ 0.4679139346 \\ 0.4679139346 \\ 0.360761573 \\ 0.1713244924 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := \frac{\sin(x^2)}{e^x} \quad a := 0 \quad b := 1$$

$$\int_a^b f(x) dx = 0.1509125672$$

$$t_k := \frac{b-a}{2} \cdot x_k + \frac{b+a}{2}$$

$$\frac{b-a}{2} \cdot \sum_{k=1}^n A_k \cdot f(t_k) = 0.1509125672$$

2.2. Interpolyatsion kubatur formulalar.

Matematikaning o'zida va uning tadbirlarida ko'pincha karrali integrallarni taqribiy hisoblashga ehtiyoj tug'iladi. Kvadratur formulalar kabi bu yerda ham karrali integralning qiymatini integral ostidagi funksiyaning chekli miqdordagi $P_1, P_2, \dots, P_N$ nuqtalardagi qiymatlarining chiziqli kombinatsiyasi yordamida aniqlaydigan ushbu

$$\int \dots \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \sum_{k=1}^N A_k f(P_k) + R(f)$$

formula *kubatur formula* deyiladi. Bundagi

$$P_1, P_2, \dots, P_N \left(P_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \Omega \right)$$

nuqtalarning to'plami integrallash to'ri, $A_k \left(k = \overline{1, N} \right)$

kubatur formulaning koeffitsiyentlari va $R(f)$ *qoldiq had* deyiladi.

Bu paragrafda kubatur formulalarni tuzishning ayrim usullarini qisqacha ko'rib chiqamiz. Biz asosan ikki karrali integrallarni qaraymiz.

1. **Kvadratur formulalarni ketma-kit qo'llash.** Kubatur formula tuzishning eng soda usuli, bu karrali integralni takroriy integral shaklida tasvirlab, bir karrali integrallar uchun qurilgan kvadratur formulalarni qo'llashdan iboratdir.

Faraz qilaylik, integrallash sohasi Ω to'g'ri burchakli to'rtburchak $\{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ bo'lsin. Ushbu

$$I = \int \int_{\Omega} f(x, y) dx dy \quad (2.20)$$

Integralni hisoblash uchun Simpson formulasini ikki marta qo'llaylik. Buning uchun $[a, b]$ va $[c, d]$ oraliqlarning har birini quyidagi nuqtalar bilan ikkiga bo'lamiz:

$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h = b; y_0 = c, y_1 = c + k, y_2 = c + 2k = d$,
bu yerda

$$h = \frac{b-a}{2}, \quad k = \frac{d-c}{2}$$

Shunday qilib, hammasi bo'lib to'qqizta (x_i, y_j) ($i, j = 0, 1, 2$) nuqtaga ega bo'lamiz.

Endi (2.20) integralda
$$I = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

ichki integralni hisoblash uchun Simpson formulasini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} I &\approx \int_a^b \frac{k}{3} [f(x, y_0) + 4f(x, y_1) + f(x, y_2)] dx = \\ &= \frac{k}{3} \left[\int_a^b f(x, y_0) dx + 4 \int_a^b f(x, y_1) dx + \int_a^b f(x, y_2) dx \right] \end{aligned}$$

Har bir integralga yana Simpson formulasini qo'llasak, u holda

$$I = \frac{hk}{9} \left\{ [f(x_0, y_0) + 4f(x_1, y_0) + f(x_2, y_0)] + 4[f(x_0, y_1) + 4f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1)] + [f(x_0, y_2) + 4f(x_1, y_2) + f(x_2, y_2)] \right\}$$

yoki

$$I \approx \frac{hk}{9} \left\{ [f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_0, y_2) + f(x_2, y_2)] + 4[f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_2, y_1) + f(x_1, y_2)] + 16f(x_1, y_1) \right\} \quad (2.21)$$

hosil bo'ladi. Bu formulani qisqacha quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$I \approx \frac{hk}{9} \sum_{i,j=0}^2 \lambda_{ij} f(x_i, y_j).$$

Bu yerda λ_{ij} quyidagi uchinchi tartibli

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

matritsaning elementidir.

Ko'rsatish mumkinki, (2.21) formulaning qoldiq hadi

$$R(f) = -\frac{h^5 k}{45} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta)}{\partial x^4} - \frac{hk^5}{45} \frac{\partial^4 f(\xi_1, \eta_1)}{\partial y^4} - \frac{h^5 k^5}{90^2} \frac{\partial^8 f(\xi_2, \eta_2)}{\partial x^4 \partial y^4} \quad (2.22)$$

$$(a < \xi_i < b; \quad c < \eta_i < d)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Qoldiq handing bu ko'rinishidan ma'lum bo'ldiki, 9 nuqtali (2.21) formula darajasi uchdan ortmagan ko'phadlarni aniq integrallaydi.

Misol. Simpson formulasi yordamida

$$I = \int_4^5 \int_0^1 \frac{dx dy}{(x+y)^2}$$

hisoblansin. Bu yerda

$$h = \frac{5-4}{2} = 0,5; \quad k = \frac{1-0}{2} = 0,5$$

deb olamiz. Integral ostidagi funksiya $f(x, y) = (x+y)^{-2}$ qiymatlari quyidagi jadvalda keltirilgan

$y_j \backslash x_i$	4	4,5	5
0	0,0625000	0,0493827	0,0400000
0,5	0,0493827	0,0400000	0,0330688
1	0,0400000	0,0330688	0,1666667

(2.21) kubatur formulani qo'llaymiz:

$$I \approx \frac{0,5 \cdot 0,5}{9} [(0,0625000 + 0,0400000 + 0,0400000 + 0,1666667) + 4(0,0493827 + 0,0493827 + 0,0330688 + 0,0330688) + 16 \cdot 0,0400000] = 0,044688.$$

Bir o'lchovli holdagidek bu yerda ham aniqlikni orttirish maqsadida $\Omega = \{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ to'g'ri to'rtburchakning tomonlarini mos ravishta m va n bo'lakchalarga bo'lib, hosil bo'lgan mn ta kichik to'g'ri to'rtburchaklarning har birida Simpson formulasini hosil qilish mumkin. Faraz qilaylik,

$$h = \frac{b-a}{2m} \quad \text{va} \quad k = \frac{d-c}{2n}$$

bo'lsin, u holda tugunlarning to'ri quyidagi koordinatalarga ega bo'ladi:

$$x_i = x_0 + ih, \quad x_0 = a, \quad i = \overline{0, 2m};$$

$$y_j = y_0 + jk, \quad y_0 = c, \quad j = \overline{0, 2n}.$$

Qulaylik uchun $f(x_i, y_j) = f_{ij}$ deb olib, har bir kichik to'g'ri to'rtburchakka (2.21) formulani qo'llasak, u holda

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n [(f_{2i, 2j} + f_{2i+2, 2j} + f_{2i+2, 2j+2} + f_{2i, 2j+2}) + 4(f_{2i+1, 2j} + f_{2i+2, 2j+1} + f_{2i+1, 2j+2} + f_{2i, 2j+1}) + 16 f_{2i+1, 2j+1}]$$

ga ega bo'lamiz yoki o'xshash hadlarni ixchamlasak,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^{2m} \sum_{j=0}^{2n} \lambda_{ij} f_{ij},$$

bu yerda λ_{ij} quyidagi matritsaning elementidir:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & \dots & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 8 & \dots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & 8 & 4 & \dots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 2 & 8 & 4 & 8 & 4 & \dots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 8 & \dots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & \dots & 4 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Biz ichki va tashqi integrallarning har ikkalasi uchun ham Simpson formulasini qo'lladik. Ichki integralni bir kvadratur formula bilan hisoblab, tashqi integralni esa boshqa formula bilan ham hisoblash mumkin edi.

Agar Ω soha

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$$

tengsizliklar bilan aniqlangan bo'lsa, bu holda ham (2.20) integralni yuqoridagi usul bilan hisoblash mumkin:

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \int_a^b F(x) dx,$$

bu yerd
$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

Biror kvadratur formulani qo'llab, $\int_a^b F(x) dx$ ni hisoblaymiz:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n A_i F(x_i) \quad (2.23)$$

O'z navbatida

$$F(x_i) = \int_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x_i, y) dy$$

integralni boshqa biror kvadratur formula bilan hisoblash mumkin:

$$F(x_i) \cong \sum_{j=1}^{m_i} B_{ij} f(x_i, y_j)$$

Buni (2.23) ga qo'yib quyidagi

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} A_i B_{ij} f(x_i, y_j) \quad (2.24)$$

kubatur formulani hosil qilamiz. Biz qaragan (2.23) va (2.24) formulalarda ko'p tugunlar qatnashadi. Bu yo'l bilan borsak integral karrasi ortgan sari tugunlar soni ham tez ortib boradi. Agar integrallash sohasi n o'lchovli kub bo'lib, har bir o'zgaruvchi bo'yicha integrallash uchun m tadan muqta olinsa, u holda tuzilgan kubator formulaning tugunlari soni $N = m^n$ ta bo'ladi. Shuning uchun ham, kubatur formulalar nazariyasida eng yuqori aniqlikka ega bo'lgan formulalar tuzishga harakat qilinadi.

Interpolyatsion kubatur formulalar.

Integral ostidagi funktsiyani 2 o'lchovli interpolyatsion ko'phad bilan almashtiramiz

Agar $L_i(x, y)$ ko'phadlarni quyidagicha

$$L_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & \text{agar } i = j, \\ 0, & \text{agar } i \neq j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, N}$$

aniqlab olsak, u holda

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) L_i(x, y) \quad (2.25)$$

ko'phad (x_j, y_j) nuqtada $f(x_j, y_j)$ qiymatni qabul qiladi. Integral ostidagi funktsiyani (2.25) bilan almashtiramiz:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \approx \iint_{\Omega} L(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N A_i f(x_i, y_i),$$

Bu yerda $A_i = \iint_{\Omega} L_i(x, y) dx dy$

bo'lib, uni murakkab bo'lmagan sohalar uchun hisoblash qiyin emas.

Faraz qilaylik, Ω soha to'g'ri to'rtburchak bo'lsin: $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

Integrallash to'ri sifatida

$$x_i = a + ih, \quad y_j = c + jk \quad (i = \overline{0, m}; j = \overline{0, n}), \quad h = \frac{b-a}{m}, \quad k = \frac{d-c}{n}$$

to'g'ri chiziqlarning kesishishlaridan hosil bo'lgan nuqtalar to'plamini olamiz, u holda quyidagi interpolyatsion formulaga ega bo'lamiz:

$$f(x, y) \approx \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f(x_i, y_j) \prod_{\substack{t=0 \\ t \neq i}}^m \frac{x - x_t}{x_i - x_t} \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^n \frac{y - y_s}{y_j - y_s}.$$

Buni to'g'ri to'rtburchak bo'ylab integrallasak,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n A_{ij} f(x_i, y_j)$$

hosil bo'ladi, bu yerda

$$A_{ij} = \int_a^b \prod_{\substack{t=0 \\ t \neq i}}^m \frac{x - x_t}{x_i - x_t} dx \int_c^d \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^n \frac{y - y_s}{y_j - y_s} dy$$

yoki $A_{ij} = (b-a)(d-c) I_{i,m+1} \cdot I_{j,n+1}$

o'rinishda yozish mumkin, $I_{i,m+1}$ va $I_{j,n+1}$ lar esa Nyuton-Kotes formulasining koeffitsiyentlaridir.

Kubatur formulanini Simpson formulasi orqali hisoblash

$$f(x, y) := \frac{1}{(x + y)^2}$$

$$a := 4 \quad b := 5 \quad c := 0 \quad d := 1$$

$$Z := \int_4^5 \int_0^1 f(x, y) \, dx \, dy$$

$$x_0 := a \quad x_1 := \frac{(a + b)}{2} \quad x_2 := b$$

$$y_0 := c \quad y_1 := \frac{(c + d)}{2} \quad y_2 := d$$

$$Z = \blacksquare$$

Z dastur chiqargan natija

$$h := \frac{(b - a)}{2} \quad k := \frac{(d - c)}{2}$$

T Simpson formulasining kubatur formulada chiqargan natijasi

$$I := \frac{h \cdot k}{9}$$

R1 xatoligi

$$P := f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_0, y_2) + f(x_2, y_2) + [4 \cdot (f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_2, y_1) + f(x_1, y_2)) + 16 \cdot f(x_1, y_1)]$$

$$T := I \cdot P$$

$$R1 := |Z - T|$$

$$T = \blacksquare$$

$$R1 = \blacksquare$$

2-bob bo'yicha qisqacha xulosa

Dissertasiyani ikkinchi bobida interpolatsion kubatur formulalar kurib chiqilgan, ularni xatoliklari tahlil qilinib, effektivligi ko'rib chiqilgan va interpolatsion kubatur formular uchun algoritm va dastur tuzilib misollarda qo'llanilgan.

III. BOB. SOBOLEV FAZOSIDA DAVRIY BO'LMAGAN FUNKSIYALAR UCHUN OPTIMAL INTERPOLYATSION FORMULALAR QURISH.

3.1. Sobolev fazosi va unda kubatur formulalar

Oxirgi vaqtlarda integrallarni taqribiy hisoblash uchun kubatur formulalar qurishda sfera sirtida, sferik garmonikalar nazariyasidan foydalaniladi. Bunda integral ostidagi funksiya sferik garmonikalar bo'yicha qatorlarga yoyiladi. Bu bobda esa asosan oddiy va vaznli kubatur formulalarni qarab chiqamiz. Quyidagi oddiy kubatur formulani qarab chiqamiz

$$\int_S f(\theta) d\theta \approx \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} f(\theta^{(\lambda)}), \quad (3.1)$$

$L_2^{(m)}(S)$ fazoda va uning xatolik funksionalini normasini hisoblaymiz.

$L_2^{(m)}(S)$ fazo berilgan bo'lsin

$$\theta = \frac{x}{|x|} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}).$$

$$D^{\alpha} \bar{f}(\theta) = \frac{\partial^{|\alpha|} \bar{f}(\theta)}{\partial \theta_1^{\alpha_1} \dots \partial \theta_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} \Big|_{|\theta|=1}$$

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \in S, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}),$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} \quad \text{è} \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_{n-1}!;$$

Ta'rif 3.1.1. $L_2^{(m)}(S)$ fazo quyidagicha aniqlangan funksiyalar fazosi, S birlik sferada berilgan va m tartibli umumlashgan hosilalari kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar fazosi, funksiya normasi quyidagicha kiritilgan.

$$\|f\|_{L_2^{(m)}(S)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m \quad (3.2)$$

$L_2^{(m)}(S)$ fazoda aslida Sobolev ta'rifi bo'yicha norma quyidagicha kiritilgan.

$$\|f\|_{L_2^{(m)}(S)} = \left\{ \int_S \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^{\alpha} f)^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3)$$

Shubday qilib $L_2(S)$ - S birlik sferada berilgan va kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar fazosini bildiradi.

Agar funksiya $L_2(S)$ fazoga tegishli bo'lsa $f(\theta) \in L_2(S)$, unda uni ortonormallangan sferik garmonikalar bo'yicha qatorga yoyish mumkim [1]

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta),$$

bu yerda

$a_{k,\ell} = \int_S f(\theta) Y_{k,\ell}(\theta) d\theta$, k - tartibli ℓ ko'rinishdagi ortonormallangan sferik garmonikalar ;

$\sigma(n,k) = (2k+n-2) \frac{(k+n-3)!}{(n-2)!k!}$ - k - tartibli chiziqli bog'liq bo'lmagan sferik garmonikalar soni.

$L_2^m(S)$ fazo aniqlaydiki, $f(\theta) \in L_2(S)$, funksiyalar uchun yarim norma bo'lishini [1]:

$$\|f\|_{L_2^m(S)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m.$$

$L_2^m(S)$ fazo elementlarining tuzilishi bo'yicha $L_2^{(m)}(S)$ S.L.Sobolev fazosi bilan ustma ust tushadi [2].

(3.1) ko'rinishdagi kubatur formulaning xatolik funksionali quyidagicha bo'ladi.

$$\ell_N(\theta) = \varepsilon_S(\theta) - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}), \quad (3.4)$$

bu yerda δ - Dirakning delta funksiyasi, $\varepsilon_S(\theta)$ - S sohaning xarakteristik funksiyasi

$$\varepsilon_{(S)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \notin S \end{cases}$$

$$\langle \delta(x), f(x) \rangle = f(0)$$

Kubatur formulaning xatoligi deganda biz quyidagi ayirmani tushunamiz:

$$\langle \ell_N, f \rangle = \int_S f(\theta) d\theta - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda f(\theta^{(\lambda)}) = \int_{R^n} \ell_N(\theta) f(\theta) d\theta,$$

$$\ell_N(\theta) = \varepsilon_S(\theta) - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda \delta(\theta - \theta^{(\lambda)})$$

$$\varepsilon_{(S)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \notin S \end{cases}, \quad \langle \delta(x), f(x) \rangle = f(0)$$

(3.1) ko'rinishdagi kubatur formulaning xatoligi $L_2^m(S)$ fazoda chiziqli

funksionalni tashkil qiladi. Bundan $2m > n$, $L_2^{(m)}(S) \rightarrow C(S)$ kelib chiqadi [1].

Quyidagi teoremani qarab chiqamiz. Bu teorema G'.N. Salixov tomonidan kiritilgan va isbotlangan lekin isboti qisqa keltirilgan. Biz uning isbotini to'liq keltiramiz sababi keyingi olinadigan asosiy natijalarda ham biz undan foydalanamiz.

Teorema 3.1.1. (3.1) ko'rinishdagi kubatur formulaning xatolik funksionalini normasi $L_2^m(S)$ fazoda quyidagiga teng

$$\|\ell_N / L_2^{m*}(S)\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\sum_{\lambda=1}^N C_\lambda Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{1/2}. \quad (3.5)$$

Isboti. Ma'lumki agar funksiymiz $f(\theta) \in L_2^m(S)$ ga tegishli bo'lsa, unda quyidagi qator absolyut tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta),$$

bu yerda $Y_k(\theta)$ - k - tartibli sferik garmonikalar, bunda $2m > n$ shart bajarilishi yetarli.

Shunday qilib funksiyaning $f(\theta) \in L_2^m$ sferik garmonikalar bo'yicha absolyut tekis yaqinlashuvchi qatorga yoysak

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta), \quad (3.6)$$

bu yerda $Y_{k,\ell}(\theta)$ - sferik garmonikalar k - tartibli ℓ ko'rinishdagi.

Xatolik funksionali (3.4) va (3.6) dan foytalanib quyidagini topamiz

$$\begin{aligned}
\left| \langle \ell_N(\theta), f(\theta) \rangle \right| &= \left| \langle \varepsilon_s(\theta) - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) \rangle \right| = \\
&= \left| \langle \varepsilon_s(\theta), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) \rangle - \langle \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) \rangle \right| = \\
&= \left| \int_S \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \langle \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta) \rangle \right| = \\
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} \int_S Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda \langle \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}), Y_{k,\ell}(\theta) \rangle \right| = \\
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)}) \right|. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Agar (3.7) ni o'ng tomonidagi $a_{k,\ell}$ ni $k^{\frac{m}{2}}(k+n-2)^{\frac{m}{2}}$ ga ko'paytirib, yig'indini shu ko'paytuvchiga bo'lsak va Koshi tengsizligini qo'llasak, (3.2) ga asosan quyidagini olamiz

$$\begin{aligned}
\left| \langle \ell_N, f \rangle \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} k^{\frac{m}{2}}(k+n-2)^{\frac{m}{2}} \cdot \left[\sum_{\lambda=1}^N C_\lambda Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)}) \right] / k^{\frac{m}{2}}(k+n-2)^{\frac{m}{2}} \right| \leq \\
&\leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\sum_{\lambda=1}^N C_\lambda Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
&= \|f/L_2^m(S)\| \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\sum_{\lambda=1}^N C_\lambda Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

(3.8) dan quyidagi kelib chiqadi

$$\left\| \ell_N / L_2^{m*}(S) \right\| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.9)$$

Quyidagi funktsiyani qarab chiqamiz

$$U(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} b_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta), \quad (3.10)$$

bunda

$$b_{k,\ell} = \frac{\sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (n+k-2)^m}. \quad (3.11)$$

Sferik funktsiyalar uchun quyidagi baho o'rinli [1]

$$\max |Y_k(\theta)| \leq C(n) k^{-m+\frac{n}{2}-1} \|f(\theta)/L_2^m(S)\|,$$

(3.11) dan kelib chiqadiki (3.10) ning koeffitsiyetlari $U(\theta) \in L_2^m(S)$

Bu funktsiya uchun (3.8) kubatur formula xatoligini hisoblasak quyidagi tenglikni olamiz:

$$\begin{aligned} \left| \langle \ell_N, U \rangle \right| &= \left| \langle \varepsilon_s(\theta) - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (k+n-2)^m} Y_{k,\ell}(\theta) \rangle \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (k+n-2)^m} \cdot \left[\langle \varepsilon_s(\theta), Y_{k,\ell}(\theta) \rangle - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} \langle \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}), Y_{k,\ell}(\theta) \rangle \right] \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (k+n-2)^m} \cdot \left[\int_S Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)}) \right] \right| = \end{aligned}$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right| = \|U/L_2^m(S)\|^2. \quad (3.12)$$

(3.9) va (3.11) dan quyidagi kelib chiqadi.

$$\|\ell_N/L_2^{m*}(S)\| = \|U/L_2^m(S)\|,$$

bu yerda $U(\theta)$ funksiya (3.1) ko'rinishdagi kubatur formula uchun ekstremal funksiya bo'ladi. Bu teoremaga asosan (3.1) ko'rinishdagi kubatur formula xatolik funksionali uchun $L_2^m(S)$ fazoda quyidagi baho o'rinli bo'ladi:

$$|\langle \ell_N(\theta), f(\theta) \rangle| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 3.1.2. (3.12) tenglik shuni tasdiqlaydiki,

$$U(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\sum_{\lambda=1}^N \tilde{N}_{\lambda} Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (n+k-2)^m} Y_{k,\ell}(\theta)$$

$U(\theta)$ funksiya (3.1) ko'rinishdagi kubatur formula uchun ekstremal funksiya bo'ladi va $U(\theta) \in L_2^m(S)$, bu yerda $Y_{k,\ell}(\theta)$ - sferik garmonikalar k - tartibli ℓ ko'rinishdagi va $\sigma(n,k)$ - k - tartibli chiziqli bog'liq bo'lmagan sferik garmonikalar soni.

Endi $n+1=3$ hol uchun quyidagi formulani qarab chiqamiz.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \approx \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} f(\theta^{(\lambda)}, \varphi^{(\lambda)}). \quad (3.13)$$

Bubda $Y_{k,\ell}(\theta) = \sqrt{\frac{(2k+1)(k-|\ell|)!}{2(k+|\ell|)!}} e^{\pm i\ell\varphi} P_k^{|\ell|}(\cos\theta)$ ko'rinishda bo'ladi, bu yerda

$P_k^{|\ell|}(\cos\theta)$ - Lejandr funksiyasi. (3.5) ga asosan quyidagicha bo'ladi

$$\left\| \ell_N \left| L_2^{m*}(S) \right. \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=-k}^k \frac{\left(\sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} \sqrt{\frac{(2k+1)(k-|\ell|)!}{2(k+|\ell|)!}} e^{\pm i\ell\varphi^{(\lambda)}} P_k^{|\ell|}(\cos\theta^{(\lambda)}) \right)^2}{k^m (k+1)^m}. \quad (3.14)$$

Endi $L_2^{(m)}(S)$ fazoda xatolik funksionali normasini baholaymiz.

3.2. $L_2^{(m)}(S)$ Sobolev fazosida vaznli kubatur formulaning xatolik funksionali normasini hisoblash va ekstremal funksiyani aniqlash.

Bu bo'limda biz vaznli kubatur formulani qarab chuqamiz. Vaznli kubatur formula quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\int_S p(\theta) f(\theta) d\theta \cong \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} f(\theta^{(\lambda)}) \quad (3.15)$$

$L_2^m(S)$ - fazoda sfera sirtida, by yerda S - n - o'lchovli birlik sfera, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, $\|\theta\| = 1$, $p(\theta)$ - S sferada integrallanuvchi funksiya, ya'ni $\int_S p(\theta) d\theta < \infty$

va
$$\sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \hat{p}_{0,0} \quad \text{bunda} \quad \hat{p}_{k,\ell} = \int_S P(\theta) Y_{k,\ell}(\theta) d\theta,$$

bu yerda $Y_{k,\ell}(\theta)$ - sferik garmonikalar k - tartibli ℓ ko'rinishdagi $1 \leq \ell \leq \sigma(n, k)$.

$\sigma(n, k) = (2k + n - 2) \frac{(k + n - 3)!}{(k - 2)! k!}$ - k - tartibli chiziqli bog'liq bo'lmagan sferik

garmonikalar soni. $Y_{k,\ell}(\theta)$ funksiyani S sferada orthogonal deb hisoblaymiz.

(3.15) ko'rinishdagi vaznli kubatur formulaning xatolik funksionali quyidagicha bo'ladi:

$$\ell_N(\theta) = p(\theta)\varepsilon_S(\theta) - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}), \quad (3.16)$$

bu yerda $\delta(\theta)$ - Dirakning delta funksiyasi, C_λ va $\theta^{(\lambda)}$ - (3.15) ko'rinishdagi vaznli kubatur formulaning koeffitsiyentlari va tugun nuqtalari.

Teorema 3.2.1. (3.15) ko'rinishdagi vaznli kubatur formulaning xatolik funksionalini normasi $L_2^m(S)$ fazoda quyidagiga teng

$$\|\ell_N / L_2^{m*}(S)\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda Y_{k,\ell}(\theta) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{1/2},$$

bunda $\hat{p}_{k,\ell} = \int_S p(\theta) Y_{k,\ell}(\theta) d\theta.$

Ushbu teoremani to'liq isbotini keltiramiz.

Isboti. Ma'lumki agar funksiymiz $f(\theta) \in L_2^m(S)$ ga tegishli bo'lsa, unda quyidagi qator absolyut tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta),$$

bu yerda $Y_k(\theta)$ - k - tartibli sferik garmonikalar, bunda $2m > n$ shart bajarilishi yetarli.

Shunday qilib funksiyaning $f(\theta) \in L_2^m$ sferik garmonikalar bo'yicha absolyut tekis yaqinlashuvchi qatorga yoysak

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta), \quad (3.17)$$

bu yerda $Y_{k,\ell}(\theta)$ - sferik garmonikalar k - tartibli ℓ ko'rinishdagi;

$a_{k,\ell} = \int_S Y_{k,\ell}(\theta) f(\theta) d\theta$; $\sigma(n, k)$ - k - tartibli chiziqli bog'liq bo'lmagan sferik

garmonikalar soni: $\sigma(n, k) = \frac{(k+n-3)!}{k!(n-2)!} (n+2k-2).$

(3.15) ni chap qismiga (3.17) keltirib qo'ysak quyidagini topamiz :

$$\begin{aligned}
\langle \ell_N(\theta), f(\theta) \rangle &= \langle p(\theta) \varepsilon_S(\theta) - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) \rangle = \\
&= \langle p(\theta) \varepsilon_S(\theta), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) \rangle - \langle \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) \rangle = \\
&= \int_S p(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \langle \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta) \rangle = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} p(\theta) Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda \langle \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}), Y_{k,\ell}(\theta) \rangle = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} \left[\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)}) \right]. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Agar (3.18) ni o'ng tomonidagi $a_{k,\ell}$ ni $k^{\frac{m}{2}} (k+n-2)^{\frac{m}{2}}$ ga ko'paytirib, yig'indini shu ko'paytuvchiga bo'lsak va Koshi tengsizligini qo'llasak, (3.15) ga asosan quyidagini olamiz

$$\begin{aligned}
|\langle \ell_N, f \rangle| &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} k^{\frac{m}{2}} (k+n-2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)})}{k^{\frac{m}{2}} (k+n-2)^{\frac{m}{2}}} \leq \\
&\leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}} =
\end{aligned}$$

$$= \left\| f / L_2^m (S) \right\| \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell} \left(\theta^{(\lambda)} \right) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.19)$$

(3.19) dan quyidagi kelib chiqadi

$$\left\| \ell_N / L_2^{m*} (S) \right\| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell} \left(\theta^{(\lambda)} \right) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.20)$$

Quyidagi funksiyani qarab chiqamiz

$$U(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} b_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta), \quad (3.21)$$

bu yerda

$$b_{k,\ell} = \frac{\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell} \left(\theta^{(\lambda)} \right)}{k^m (n+k-2)^m}. \quad (3.22)$$

Sferik funksiyalar uchun quyidagi baho o'rinli [1]

$$\max |Y_k(\theta)| \leq C(n) k^{-m+\frac{n}{2}-1} \left\| f(\theta) / L_2^m(S) \right\|,$$

(3.22) dan kelib chiqadiki koefitsiyetlari $U(\theta) \in L_2^m(S)$ tegishli bo'ladi

Bu funksiya uchun (3.22) kubatur formula xatoligini hisoblasak quyidagi tenklikni olamiz:

$$\left| \langle \ell_N, U \rangle \right| = \left| \langle p(\theta) \varepsilon_S(\theta) - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell} \left(\theta^{(\lambda)} \right)}{k^m (k+n-2)^m} Y_{k,\ell}(\theta) \rangle \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (k+n-2)^m} \cdot \left[\langle p(\theta) \varepsilon_S(\theta), Y_{k,\ell}(\theta) \rangle - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} \langle \delta(\theta - \theta^{(\lambda)}), Y_{k,\ell}(\theta) \rangle \right] \right| = \\
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (k+n-2)^m} \cdot \left[\int_S p(\theta) Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)}) \right] \right| = \\
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right| = \|U/L_2^m(S)\|^2. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

(3.20) va (3.23) dan quyidagi kelib chiqadi

$$\|\ell_N/L_2^{m*}(S)\| = \|U/L_2^m(S)\|,$$

Bu yerda $U(\theta)$ funksiya (3.15) vaznli kubatur formula uchun ekstremal funksiya bo'ladi, ya'ni $\ell_N(\theta)$ xatolik funksionali uchun $U(\theta)$ - Ris funksiyasi bo'ladi, shunday qilib quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema 3.2.2. (3.23) tenglik tasdiqlaydiki,

$$U(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} Y_{k,\ell}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (n+k-2)^m} Y_{k,\ell}(\theta)$$

Haqiqatdan ham $U(\theta)$ funksiya (3.15) vaznli kubatur formula uchun ekstremal funksiya bo'ladi va $U(\theta) \in L_2^m(S)$, bunda $Y_{k,\ell}(\theta)$ - ortonormallangan sferik garmonika k - tartibli ℓ ko'rinishdagi va $\sigma(n,k)$ - k - tartibli chiziqli bog'liq bo'lmagan sferik garmonikalar soni:

3.3. Davriy bo'lmagan funksiyalar uchun optimal interpolyatsion formulalar qurish.

Quyidagi formula berilgan bo'lsin

$$\int_0^{\pi} f(\cos \theta) \sin \theta d\theta \approx \sum_{\lambda'=1}^{N'} C_{\lambda'} f(\cos \theta_{\lambda'}) \quad (3.24)$$

va

$$\int_0^{\pi} \cos^{\alpha} \theta d\cos \theta = \sum_{\lambda'=1}^{N'} C_{\lambda'} \cos^{\alpha} \theta_{\lambda'}, \quad (\alpha = 0, 1, \dots, m-1), \quad (3.25)$$

yoki

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \sum_{\lambda'=1}^{N'} C_{\lambda'} f(t_{\lambda'}) \quad (3.26)$$

va

$$\int_{-1}^1 t^{\alpha} dt = \sum_{\lambda'=1}^{N'} C_{\lambda'} t_{\lambda'}^{\alpha}, \quad (\alpha = 0, 1, \dots, m-1).$$

Belgilash kiritamiz:

$$\sum_{\lambda'=1}^{N'} C_{\lambda'} f(\cos \theta_{\lambda'}) = L(f; 0, \pi) \quad \text{yoki} \quad \sum_{\lambda'=1}^{N'} C_{\lambda'} f(t_{\lambda'}) = L(f; -1, 1).$$

Agar $f(t) \in L_2^{(m)}(-1, 1)$, unda

$$\int_{-1}^1 f(t) dt - L(f; -1, 1) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{-1}^1 F_m(u) f^{(m)}(u) du, \quad (3.27)$$

bu yerda

$$F_m(u) = \int_u^1 (t-u)^{m-1} dt - \sum_{\lambda'=1}^{N'} C_{\lambda'} k_m(t_{\lambda'} - u)$$

va

$$k_m(x) = \begin{cases} x^{m-1}, & x \geq 0 \quad \text{uchun} \\ 0, & x < 0 \quad \text{uchun} \end{cases}$$

(3.13) kubatur formulada, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, φ bo'yicha davriy bo'lganligi uchun

to'g'ri to'rtburchaklar formulasini qo'llaymiz, unda $x^{(\lambda)} = \frac{2\pi\lambda}{N}$,

$C_1 = C_2 = \dots = C_N = \frac{2\pi}{N}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ davriy bo'lmagan hol uchun yuqori darajali

kvadratur formulani qo'llaymiz.

Yuqoridagi fikrlarimizga asosan kubatur formula quyidagi ko'rinishda keladi.

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 f(t, \varphi) dt d\varphi \approx \frac{2\pi}{N_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} L\left(f\left(t_{\lambda_2}, \frac{2\pi\lambda_2}{N_2}\right); y_j, y_{j+1}\right), \quad (3.28)$$

bu yerda $L\left(f\left(t_{\lambda_2}, \frac{2\pi\lambda_2}{N_2}\right); y_j, y_{j+1}\right)$ - kvadratur formula:

$$y_{j+1} - y_j = h = \frac{2}{N_1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_1.$$

Shunday qilib (3.28) ko'rinishdagi kubatur formulani xatolik funksionali normasini baholaymiz: ma'lumki

$$\|\ell_N | L_2^{(m)*}(S) \|^2 = \|\Psi_\ell | L_2^{(m)}(S) \|^2 = |\langle \ell_N, \Psi_\ell \rangle| \quad (3.29)$$

(3.29) dan quyidagi kelib chiqadi

$$\begin{aligned} |\langle \ell_N, \Psi_\ell \rangle| &= \left| \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \Psi_\ell(t, \varphi) dt d\varphi - \frac{2\pi}{N_2} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_1} \Psi_\ell\left(t_{\lambda_1}, \frac{2\pi\lambda_2}{N_2}\right) \right| = \\ &= \left| \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \Psi_\ell(t, \varphi) dt d\varphi - \int_0^{2\pi} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1} \Psi_\ell(t_{\lambda_1}, \varphi) d\varphi + \right. \\ &+ \left. \int_0^{2\pi} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1} \Psi_\ell(t_{\lambda_1}, \varphi) d\varphi - \frac{2\pi}{N_2} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_1} \Psi_\ell\left(t_{\lambda_1}, \frac{2\pi\lambda_2}{N_2}\right) \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^{2\pi} \left[\int_{-1}^1 \Psi_\ell(t, \varphi) dt - \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1} \Psi_\ell(t_{\lambda_1}, \varphi) \right] d\varphi \right| + \\ &+ \left| \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1} \int_0^{2\pi} \Psi_\ell(t_{\lambda_1}, \varphi) d\varphi - \frac{2\pi}{N_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} \Psi_\ell\left(t_{\lambda_2}, \frac{2\pi\lambda_2}{N_2}\right) \right| \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left| \int_{-1}^1 \Psi_\ell(t, \varphi) dt - \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1} \Psi_\ell(t_{\lambda_1}, \varphi) \right| d\varphi + \\ &+ \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} |C_{\lambda_1}| \left| \int_0^{2\pi} \Psi_\ell(t_{\lambda_1}, \varphi) d\varphi - \frac{2\pi}{N_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} \Psi_\ell\left(t_{\lambda_2}, \frac{2\pi\lambda_2}{N_2}\right) \right|. \quad (3.30) \end{aligned}$$

endi (3.30) formulaning o'ng tomonidagi har bir qo'shiluvchini baholaymiz.

(3.27) ni hisobga olsak quyidagicha bo'ladi,

1)

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{-1}^1 \Psi_{\ell}(t, \varphi) dt - \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1} \Psi_{\ell}(t_{\lambda_1}, \varphi) \right| = \\
 & = \left| \int_{-1}^1 \Psi_{\ell}(t, \varphi) dt - \sum_{j=1}^{N_1} L(\Psi_{\ell}(t_j, \varphi); y_j, y_{j+1}) \right| = \\
 & = \left| \sum_{j=1}^{N_1} \left\{ \int_{y_j}^{y_{j+1}} \Psi_{\ell}(t, \varphi) dt - L(\Psi_{\ell}(t_j, \varphi); y_j, y_{j+1}) \right\} \right| = \\
 & = \left| \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{N_1} \left\{ \int_{-1}^1 \Psi_{\ell}(y_j + \frac{h}{2}(\vartheta + 1), \varphi) d\vartheta - \right. \right. \\
 & \left. \left. - L[\Psi_{\ell}(y_j + \frac{h}{2}(\vartheta + 1), \varphi); -1; 1] \right\} \right| = \\
 & = \left| \frac{h^{m+1}}{2^{m+1}(m-1)!} \sum_{j=1}^{N_1} \int_{-1}^1 F_m(\vartheta) \Psi_{\ell}^{(m)}(y_j + \frac{h}{2}(\vartheta + 1), \varphi) d\vartheta \right|. \tag{3.31}
 \end{aligned}$$

Koshi – Bunyakovski tengsizligini qo'llasak (3.31) ni o'ng tomoniga quyidagini olamiz.

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{-1}^1 \Psi_{\ell}(t, \varphi) dt - \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1} \Psi_{\ell}(t_{\lambda_1}, \varphi) \right| \leq \frac{h^{m+1}}{(m-1)! 2^{m+1}} \sum_{j=1}^{N_1} \left(\int_{-1}^1 |F_m(\vartheta)|^2 d\vartheta \right)^{1/2} \times \\
 & \times \left\{ \int_{-1}^1 |\Psi_{\ell}^{(m)}(y_j + \frac{h}{2}(\vartheta + 1), \varphi)|^2 d\vartheta \right\}^{1/2} = \frac{2^{1/2} h^{m+1-1/2}}{2^{m+1}} M \sum_{j=1}^{N_1} \left\{ \int_{y_j}^{y_{j+1}} |\Psi_{\ell}^{(m)}(t, \varphi)|^2 dt \right\}^{1/2} \leq \\
 & \leq \frac{h^{m+1/2}}{2^{m+1/2}} M \left\{ \sum_{j=1}^{N_1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} |\Psi_{\ell}^{(m)}(t, \varphi)|^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{j=1}^{N_1} 1^2 \right\}^{1/2} = \frac{M}{N_1^m} \left\{ \int_{-1}^1 |\Psi_{\ell}^{(m)}(t, \varphi)|^2 dt \right\}^{1/2}, \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

bu yerda

$$M = \frac{1}{2^{m+1}(m-1)!} \left(\int_{-1}^1 |F_m(\vartheta)|^2 d\vartheta \right)^{1/2}.$$

Shunday qilib $\Psi_\ell(t, \varphi) \in L_2^{(m)}(S)$, bundan kelib chiqadiki

$$\left\{ \int_{-1}^1 |\Psi_\ell^{(m)}(t, \varphi)|^2 dt \right\}^{1/2} \leq C_1 \|\Psi_\ell\|_{L_2^{(m)}(S)}, \quad C_1 - \text{o'zgarmas.} \quad (3.33)$$

(3.33) va (3.32) dan foydalanib quyidagini olamiz

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-1}^1 \Psi_\ell(t, \varphi) dt - \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1} \Psi_\ell(t_{\lambda_1}, \varphi) \right| \leq \\ & \leq \frac{M}{N_1^m} C_1 \|\Psi_\ell\|_{L_2^{(m)}(S)} = \frac{1}{N_1^m} M' \|\Psi_\ell\|_{L_2^{(m)}(S)}, \quad MC_1 = M'. \end{aligned} \quad (3.34)$$

2) (3.30) ning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchi uchun olingan natijalardan foydalansak quyidagicha bo'ladi.

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{2\pi} \Psi_\ell(t_{\lambda_1}, \varphi) d\varphi - \frac{2\pi}{N_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} \Psi_\ell\left(t_{\lambda_1}, \frac{2\pi\lambda_2}{N_2}\right) \right| \leq \frac{1}{N_2^m} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^{2m}} \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^{2\pi} |\Psi_\ell^{(m)}(t_{\lambda_1}, \varphi)|^2 d\varphi \right\}^{1/2} \leq \\ & \leq \frac{1}{N_2^m} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^{2m}} \right\}^{1/2} d \|\Psi_\ell\|_{L_2^{(m)}(S)}, \quad d - \text{o'zgarmas.} \end{aligned} \quad (3.35)$$

(3.34) va (3.35) ni (3.30) ga qo'ysak quyidagi bahoni olamiz:

$$\begin{aligned} & \left| \langle \ell_N, \Psi_\ell \rangle \right| \leq \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{N_1^m} M' \|\Psi_\ell\|_{L_2^{(m)}(S)} \right\} d\varphi + \\ & + \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} |C_{\lambda_1}| \frac{1}{N_2^m} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^{2m}} \right\}^{1/2} d \|\Psi_\ell\|_{L_2^{(m)}(S)} = \\ & = \|\Psi_\ell\|_{L_2^{(m)}(S)} \left\{ \frac{2\pi}{N_1^m} M' + \frac{d}{N_2^m} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^{2m}} \right\}^{1/2} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} |C_{\lambda_1}| \right\}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

yoki (3.36) dan quyidagi kelib chiqadi

$$\|\ell_N | L_2^{(m)*}(S)\| \leq \frac{2\pi M'}{N_1^m} + \frac{d}{N_2^m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^{2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1} \right|.$$

Ma'lumki kvadratur formulaning ko'ffisiyentlari musbat bo'lsa (masalan Gaus tipidagi kvadratur formulalar) quyidagicha bo'ladi.

$$\sum_{\lambda_1=1}^{N_1} |C_{\lambda_1}| = \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}.$$

Shunday qilib quyidagi lemmani isbotladik.

Lemma 3.3.1. $L_2^{(m)}(S)$, $(2m \geq 3)$ fazoda (3.28) ko'rinishdagi kubatur formulaning xatolik funksionali normasi uchun quyidagi baho o'rinli:

$$\|\ell_N | L_2^{(m)*}(S)\| \leq \frac{2\pi M'}{N_1^m} + \frac{d}{N_2^m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^{2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1} \right|, \quad (3.37)$$

bu yerda

$$M' = \frac{d_1}{(m-1)!} \left\{ \int_{-1}^1 |F_m(\vartheta)|^2 d\vartheta \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad F_m(\vartheta) = \begin{cases} \vartheta^{m-1}, & \vartheta \geq 0 \text{ uchun} \\ 0, & \vartheta < 0 \text{ uchun} \end{cases}, \quad d \text{ va } d_1$$

o'zgarmaslar.

Quyidagi o'rinli bo'lsin

$$N_1 = N_2 \quad \text{va} \quad N = N_1 \times N_2. \quad (2.38)$$

(3.38), va (3.37) dan foydalanib quyidagi bahoni olamiz

$$\|\ell_N | L_2^{m*}(S)\| \leq \frac{1}{N^{\frac{m}{2}}} \left\{ 2\pi M' + d \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^{2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} |C_{\lambda_1}| \right\}. \quad (3.39)$$

Baxvalov teoremasini keltiramiz.

Teorema. (N.S. Baxvalov.) Ω sohaga bog'liq bo'lgan shunday $K > 0$ o'zgarmas topiadiki quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi,

$$\|\ell_{\Omega} | L_p^{(m)*}\| \geq Kh^m, \quad (3.40)$$

bunda

$$h = \left(\frac{|\Omega|}{N} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad |\Omega| = \text{mes } \Omega.$$

Yuqoridagi Lemma 3.3.1 va Baxvalov teoremasidan quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema 3.3.2. (3.28) ko'rinishdagi kubatur formula $N_1=N_2$ va $N=N_1 \times N_2$ uchun $L_2^{(m)}(S)$ fazoda optimal formula bo'ladi.

ya'ni
$$\left\| \ell_N | L_2^{(m)*}(S) \right\| = O \left(N^{-\frac{m}{2}} \right).$$

3-bob bo'yicha qisqacha xulosa

Dissertasiyaning 3-bobida interpolyatsion kvadratur va kubatur formulalar o'rganilgan va shular asosida integrallarni taqribiy hisoblash uchun algoritmlar va dasturlar tuzilgan. Sobolev fazosi o'rganilib chiqilgan. Sobolev fazosida kubatur formulalar ko'rib chiqilgan. Turli xil ko'rinishdagi kubatur formulalar uchun xatolik funksionali aniqlangan va xatolik funksionalini normasi Sobolev fazosida hisoblangan. Kubatur formulalar uchun ekstremal funksiyaning ko'rinishi aniqlangan. Sobolev fazosida davriy bo'lmagan funksiyalar uchun interpolyatsion formulalar qurilgan.

XOTIMA

Integrallarni taqribiy hisoblash uchun formula qurish hisoblash matematikasi va sonlar nazariyasining bir sinf masalasini tashkil qiladi. Bunday masalalarni yechish bilan juda ko'p taniqli matematiklar shug'ullanishgan, shuning uchun ham juda ko'p formulalar ularning nomlari bilan ataladi bularga Nyuton, Eyler, Gauss, Chebishev, Markov formulalarini misol keltirish mumkin.

Integrallarni taqribiy hisoblashda integral ostidagi funksiya bir o'zgaruvchili bo'lsa unda kvadratur formula quriladi, agar integral ostidagi funksiya ikki va undan ortiq o'zgaruvchili bo'lsa unda kubatur formula quriladi. Kubatur formulalar qurish bilan birinchi bo'lib Sobolev shug'ullangan. Ushbu magistrlik dissertasiyasida ham interpolyatsion kvadratur va kubatur formula qurish uchun birinchi kvadratur va kubatur formulani xatolik funksionalini ko'rinishini aniqlash, xatolik funksionalini normasini hisoblash masalalari ko'rib chiqilgan. Dissertasiyani 1-bobida interpolyatsion kvadratur formulalar kurib chiqilgan, ularni xatoliklari tahlil qilinib, effektivligi ko'rib chiqilgan va umumlashgan kvadratur formular uchun algoritim va dastur tuzilib misollarda qo'llanilgan. Dissertasiyani ikkinchi bobida interpolyatsion kvadratur formulalar kurib chiqilgan, ularni xatoliklari tahlil qilinib, effektivligi ko'rib chiqilgan va interpolyatsion kubatur formular uchun algoritim va dastur tuzilib misollarda qo'llanilgan. uchinchi bobida esa asosiy olingan natijalar keltirilgan. Dissertasiyani bajarish davomida quyidagi natijalar olindi.

1. Kvadratur formulalarni o'rganildi.
2. Kubatur formulalarni o'rganildi.
3. Sobolev fazosi va uning xossalarini o'rganildi.
4. $L_2^{(m)}(S)$ Sobolev fazosida kubatur formulalar uchun xatolik funksionali va ekstremal funksiyani ko'rinishi topildi.
5. Sobolev fazosida optimal interpolyatsion formulalar qurishni o'rganildi.

ADABIYOTLAR

1. Karimov I. A. “Yuksak ma`naviyat –yengilmas kuch”: -T: Ma`naviyat, 2008y. -176b.
2. Исроилов М.И. «Ҳисоблаш методлари»: -Т:Ўқитувчи, 2000 й.
3. Самарский А.А. «Введение в численные методы»: –М: Наука, 1987 й.
4. Бахвалов Н.С. «Численные методы»: -М: Наука.1987 й.
5. Самарский А.А, Гулин А.В «Численные методы»: –М: Наука.1989 й.
6. Бабушка И. Оптимальные квадратурные формулы // ДАН СССР. - Москва, 1963. Т.149, № 2.- С. 227-229.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы.-М.:Наука, 1973.-631 с.
8. Жалолов О. И. Об оценке погрешности весовых кубатурных формул над фактор-пространством С.Л.Соболева $L_2^{(m)}(S_n)$ // Материалы республиканской научной конференции. 75 – летию профессора М.И Исроилова. 27-30 апреля 2009. –Ташкент, 2009. -С. 10-11.
9. Жалолов О.И.Практичные асимптотические оптимальные кубатурные формулы // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2010. - №2. -С.39- 47.
10. Жалолов О.И. Оптимальные по порядку сходимости кубатурные формулы в функциональных пространствах С.Л. Соболева: Дис... канд.физ.-мат.наук. –Ташкент, 2012. – 107с.
- 11.Жалолов О.И. Об одном классе оптимальных по порядку сходимости кубатурных формул над $L_2^{(m)}(S)$ / Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб.науч.тр.-Ташкент, ИМИТ АНРУз, 2010.- вып.125.-С.57-74.
- 12.Жалолов О. И. Весовые оптимальные по порядку сходимости кубатурные формулы над фактор-пространством С.Л. Соболева // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2011. -№ 1. -С. 40-50.

13. Салихов Г.Н. О гармонических полиномах и сферических функциях в четырехмерном пространстве// Докл. АН УзССР. Сер. Физмат. - Ташкент 1963. -№ 6. -С. 21-24.
14. Салихов Г.Н. Кубатурные формулы для многомерных сфер. – Ташкент: Фан, 1985.
15. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука, 1974. - 808 с.
16. Шадиметов Х.М. Весовые оптимальные кубатурные формулы в периодическом пространстве Соболева // Сиб. журн. вычисл. математики РАН. Сиб. отделение. –Новосибирск, 1999. -Т.2, №2. -С. 185-196.
17. Шадиметов Х.М. Об оптимальных решетчатых квадратурных и кубатурных формулах // Докл. РАН. –Москва, 2001.- Т. 376, № 5. -С. 597 - 599.
18. Шадиметов Х.М. Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева: Дис... докт.физ.-мат.наук. –Ташкент, 2002. – 218 с.
19. Шарипов Т.Х. Некоторые вопросы теории приближенного интегрирования: Дис... канд.физ.-мат.наук. –Ташкент, 1975. – 102с.
20. Sard A. Best approximate integration formulas, best approximate formulas. // American J. of Math. 1949. LXXI. -Pp. 80-91.
21. McLaren D.A. Optimal numerical integration a Sphere.- math.Comp.1963,t.83, -Pp.361-383.
22. Freedon W. An application of summation formula to numerical computation of integrals over the Sphere.- computing,1980,t.23,N2., - Pp.131-146.