

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI
URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI**

Qo‘l yozma huquqida

UDK _____

Obidjonov Islombek Nuriddin Xo‘ja o‘g‘li

***a* - subgarmonik funksiyalar va ularning xossalari**

5A130101 - Matematika (Matematik analiz)

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan

DISSERTATSIYA

Ilmiy rahbar:

f.-m.f.n. M.D.Vaisova

Urganch - 2017

MUNDARIJA

KIRISH

0.1.	Dissertatsiya ishining umumiy tavsifi.....	3
0.2.	Dissertatsiya ishining mazmuni.....	6
I BOB. Funktsiyalarning ba'zi muhim sinflari		13
1.1.	Garmonik funktsiyalar va ularning xossalari.....	13
1.2.	Subgarmonik funktsiyalar	16
1.3.	Plyurisubgarmonik funktsiyalar va ularning xossalari.....	23
II BOB. a - garmonik funktsiyalar.....		27
2.1.	Musbat aniqlangan differensial forma va oqimlar.....	27
2.2.	$dd^c u$ operator va a - garmonik funktsiyalar.....	37
III BOB. a - subgarmonik funktsiyalar		43
3.1.	a - subgarmonik funktsiyalar va ularning sodda xossalari.....	43
3.2.	a - subgarmonik funktsiyalarning Riss tasviri.....	48
Xulosa.....		54
Adabiyotlar.....		55

KIRISH

0.1. Dissertatsiya ishining umumiy tavsifi.

1.1. Mavzuning dolzarbligi. Magistrlik dissertatsiyasi potentsiallar nazariyasida yangi bir sinfni tashkil etuvchi a - subgarmonik funksiya va uning xossalari o'rganishga bag'ishlanadi.

Ma'lumki, garmonik va subgarmonik funksiyalar sinfi funksiyalar nazariyasida muhim o'rin tutib, matematik fizika, geometriya masalalarida ko'p qo'llaniladi. Klassik Dirixle masalasi biror $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada $Du = 0, u|_{\partial D} = j$ tenglamaning yechimlari xususida bo'lib, bunday yechimning mavjudligi, yagonaligi, ularning xossalari garmonik analizning asosini tashkil qiladi. C^n

fazoda Laplas operatori $dd^c u$ differensial forma bilan $dd^c u \wedge \omega^{n-1} = (n-1)! Du \wedge V$ kabi bog'lanishga ega, bu yerda

$b = dd^c |z|^2, d = \partial + \bar{\partial}, d^c = \frac{\partial - \bar{\partial}}{4i}$. U holda C^n fazoda subgarmonik funksiya

umumlashgan ma'noda $dd^c u \wedge \omega^{n-1} \geq 0$ tengsizlik bilan ifodalanadi: ya'ni u yuqoridan yarim uzluksiz, $\lim_{w \rightarrow z} u(w) \leq u(z)$ va " $w \in \mathbb{C}, w \in F^{(0,0)}$ " uchun

$dd^c u \wedge \omega^{n-1}(w) = T u dd^c w \wedge \omega^{n-1} \geq 0$ tengsizlik bajarilsa, u funksiya

$D \subset \mathbb{R}^n$ sohada subgarmonik bo'ladi, bu yerda

$F^{(p,p)} = \left\{ w \in \mathcal{F}^{(p,p)}(D) \cap C^1(D) : \sup_D p w \leq M D \right\}$ - silliq va finit differensial

formalar fazosi. Keyingi paytlarda standart Keller formasi $b = dd^c |z|^2$ o'rniga ixtiyoriy musbat a formani olish zaruriyati yuzaga keldi. Bunday holat, jumladan, m - sh funksiyalar sinfini o'rganish (B. Abdullayev [17], va boshqalar) p - plyurisubgarmonik funksiyalar va kalibrlangan geometriya masalalarida (F. Harvey, H. Lawson [18,19,20]), T-subgarmonik funksiyalarda ko'zga tashlanadi. Shu sabab a - subgarmonik funksiyalar nazariyasini qurish

muammosi dolzarb hisoblanadi.

1.2. Ishning maqsadi. a - subgarmonik funksiyalarning xossalarini o'rganish.

1.3. Ishning vazifalari. Dissertatsiyada quyidagi asosiy masalalar qaraladi:
- qat'iy musbat differensial forma yordamida yangi $dd^c u$ IIIa operatorning elliptikligini tadqiq qilish

- a - subgarmonik funksiyalar sinfi xossalarini o'rganish.

1.4. Tadqiqot ob'yekti. Qat'iy musbat differensial formalar, elliptik operatorlar.

1.5. Tadqiqot predmeti. a - subgarmonik funksiyalar.

1.6. Tadqiqot usullari. Ko'p kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va kompleks potentsiallar nazariyasi usullari.

1.7. Tadqiqot natijalarining ilmiy jihatdan yangilik darajasi. Mazkur tadqiqot ishida yangi natijalar olingan.

1.8. Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati va tadbiqu. Olingan natijalar nazariy xarakterga ega. Natijalar va usullarni matematik analiz, funksional analiz va funksiyalar nazariyasining tadbiquorida foydalanish mumkin.

1.9. Ish tuzilishi va tarkibi. Dissertatsiya ishi kirish, uchta bob hamda adabiyotlar ro'yhatidan iborat. Har bir bob bo'limlardan tuziladi.

0.2. Dissertatsiya ishining mazmuni.

Dissertatsiya ishining birinchi bobida tayanch tushunchalar keltiriladi. Bunda potentsiallar nazariyasi asosini tashkil etuvchi garmonik funksiyalar, subgarmonik funksiyalar, plyurisubgarmonik funksiyalarning xossalari o'rganiladi.

Dissertatsiya ishining ikkinchi bobi $dd^c u \llcorner \mathbb{Q}$ operator va a - garmonik funksiyalarni o'rganishga bag'ishlanadi. Ikkinchi bobning birinchi bo'limi musbat aniqlangan differensial forma va oqimlarni o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, unda differensial forma, musbat differensial forma, oqim tushunchalari batafsil o'rganiladi.

Ikkinchi bobning ikkinchi bo'limida $dd^c u \llcorner \mathbb{Q}$ operator kiritilib, uning elliptik operator ekanigi isbotlanadi. Bu operator yordamida a - garmonik funksiya tushunchasi kiritiladi.

J^n kompleks fazoda $(n-1, n-1)$ -bidarajali qat'iy musbat a differensial formani tayinlaymiz.

2.2.1-teorema. $dd^c u \llcorner \mathbb{Q}$ elliptik operator bo'ladi.

2.2.1-ta'rif. $D \in J^n$ sohada $dd^c u \llcorner \mathbb{Q} = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi ikki marta silliq $u(z) \in OC^2(D)$ funksiyaga a - garmonik funksiya deyiladi.

Xususiyl holda a - garmonik funksiya tushunchasi kiritilib, uning o'rta qiymat haqidagi xossasi o'rganiladi.

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \check{Y}_+^n$ vektor uchun,

$$j(z) = a_1 z_1 \bar{z}_1 + a_2 z_2 \bar{z}_2 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n$$

funksiyani olamiz va ushbu formani qaraymiz:

$$dd^c j = \frac{i}{2} (a_1 dz_1 \llcorner \bar{z}_1 + a_2 dz_2 \llcorner \bar{z}_2 + \dots + a_n dz_n \llcorner \bar{z}_n).$$

$$a = \left(dd^c j \right)^{n-1} \text{ deb olib, } dd^c u \llcorner \mathbb{Q} = (n-1)! \underset{j}{\mathbf{e}} \overset{j}{\mathbf{b}} a_1 a_2 \dots a_n \frac{\mathbb{Q}^2 u}{\mathbb{Q} z_j \mathbb{Q} \bar{z}_j} dV$$

$\underset{j}{\mathbf{b}}$ operatorni qaraymiz. Bu yerda ... belgi shu ko'paytmada j -had qatnashmasligini bildiradi.

2.2.2-ta'rif.
$$\prod_{j=1}^n a_j \prod_{j=1}^n \frac{\|u\|^2}{\|z_j\| \|\bar{z}_j\|} = 0 \quad \text{ tenglikni qanoatlantiruvchi}$$

$u \in OC^2(D)$ funksiyaga a - garmonik funksiya deyiladi.

Ushbu teorema a - garmonik funksiyalarning geometrik xususiyatini ifodalaydi:

2.2.2-teorema. Agar $u(z)$ funksiya D sohada a - garmonik bo'lsa, u holda

$z^0 \in D$ nuqta va

$$E(z^0, r) = \left\{ z \in D : a_1 |z_1 - z_1^0|^2 + \dots + a_n |z_n - z_n^0|^2 = r^2 \right\} \text{ MMD gipershar uchun}$$

$$u(z^0) = \frac{1}{V(r)} \int_{E(z^0, r)} u(t) dV(t)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $V(r)$ - gipershar hajmi va $dV(t)$ - hajm elementi.

Shuningdek quyidagi teoremani o'rinli ekanligini ko'rish mumkin.

2.2.3-teorema. Agar $u(z)$ funksiya D sohada a - garmonik bo'lsa, u holda

$z^0 \in D$ nuqta va

$$E(z^0, r) = \left\{ z \in D : a_1 |z_1 - z_1^0|^2 + \dots + a_n |z_n - z_n^0|^2 = r^2 \right\} \text{ MMD}$$

uchun

$$u(z^0) = \frac{1}{S_n r^{2n-1}} \int_{E(z^0, r)} u(x) ds(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $ds(x)$ - sirt elementi va S_n - birlik gipersharning sirt yuzasi.

Dissertatsiya ishining uchinchi bobi a - subgarmonik funksiyalar va ularning xossalari o'rganishga bag'ishlanadi. Ushbu bobning birinchi bo'limida umumiy holda a - subgarmonik funksiya ta'rifini kiritilib, so'ngra xususiyl holda kiritilgan a - subgarmonik funksiyalarning xossalari o'rganiladi.

a - qat'iy musbat, yopiq, cheksiz silliq koeffisientli bo'lgan holda biz quyidagi a - subgarmonik funksiya ta'rifini beramiz.

3.1.1-ta'rif. $D \in \mathbb{C}^n$ sohada berilgan $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ funksiya uchun quyidagi shartlar

$$1) \text{ } u \text{ yuqoridan yarim uzluksiz, ya'ni } \overline{\lim_{z \rightarrow z^0}} u(z) = \lim_{e \rightarrow 0} \sup_{B(z^0, e)} u(z) \leq u(z^0);$$

2) umumlashgan funksiya (oqim) ma'nosida

$$\int_D dd^c u \wedge \alpha \wedge \beta(w) = \int_D u \wedge \alpha \wedge dd^c \beta(w), \quad w \in F(D), \quad (1)$$

musbat, ya'ni $\int_D dd^c u \wedge \alpha \wedge \beta(w) \geq 0$, $w \in F(D)$ bajarilsa, bu yerda $F(D)$ - asosiy finit funksiyalar fazosi, u ga α - subgarmonik funksiya deyiladi.

Endi xususiy holda α - subgarmonik funksiyalar sinfi xossalarni o'rganamiz.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n_+ \text{ vektor, } j(z) = a_1 z_1 \bar{z}_1 + a_2 z_2 \bar{z}_2 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n$$

funksiya va $D \in \mathbb{C}^n$ sohada berilgan $u \in C^2$ funksiya uchun quyidagi operatorni qaraymiz:

$$dd^c u \wedge \alpha = dd^c u \wedge (dd^c j)^{n-1} = (n-1)! \sum_j a_1 a_2 \dots a_n \frac{\|u\|^2}{\|z_j\| \|\bar{z}_j\|} dV,$$

bu yerda $\sum_j$ belgi shu ko'paytmada j -had qatnashmasligini bildiradi.

3.1.2-ta'rif. $D \in \mathbb{C}^n$ soha berilgan bo'lsin. Ushbu

$$\sum_{j=1, n} a_1 a_2 \dots a_n \frac{\|u\|^2}{\|z_j\| \|\bar{z}_j\|} \geq 0$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $u \in C^2(D)$ funksiyaga α - subgarmonik funksiya deyiladi.

α - subgarmonik funksiya quyidagi xossalarga ega.

a) α - subgarmonik funksiyaning musbat koeffitsientli chiziqli

kombinatsiyasi yana a -subgarmonik funksiya bo'ladi ya'ni

$$u_k(z) \in a - sh(D), b_k \in R_+ \text{ } \forall b_1 u_1(z) + b_2 u_2(z) + \dots + b_m u_m(z) \in a - sh(D)$$

$$k = \overline{1, m}$$

Bu yerda ham subgarmonik funksiyaning xossasi kabi xossa o'rinli.

3.1.1-teorema. Agar $u(z)$ funksiya D sohada a - subgarmonik bo'lsa, u holda $z^0 \in D$ nuqta va

$$E(z^0, r) = \left\{ z \in D : a_1 |z_1 - z_1^0|^2 + \dots + a_n |z_n - z_n^0|^2 \leq r^2 \right\} \text{ MMD gipershar uchun}$$

$$u(z^0) \leq \frac{1}{V(r)} \int_{E(z^0, r)} u(t) dV(t)$$

tenglilik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $V(r)$ - gipershar hajmi va $dV(t)$ - hajm elementi.

Bu o'rta qiymat haqidagi teorema yordamida a - subgarmonik funksiyalarning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

b) Chekli sondagi a - subgarmonik funksiyaning maksimumi ham a - subgarmonik funksiya bo'ladi, ya'ni $u_1(z), u_2(z), \dots, u_m(z) \in a - sh(D)$ $\forall \max \{u_1(z), u_2(z), \dots, u_m(z)\} \in a - sh(D)$.

c) Monoton kamayuvchi a - subgarmonik funksiyalar ketma-ketligining limiti a - subgarmonik funksiya bo'ladi, ya'ni

$$u_j(z) \in a - sh(D), u_j(z) \geq u_{j+1}(z) \text{ } \forall j \in \mathbb{N} \text{ } \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(z) \in a - sh(D), j = 1, 2, \dots, n.$$

d) Tekis yaqinlashuvchi a -subgarmonik funksiyalar ketma-ketligi yana a - subgarmonik funksiyaga yaqinlashadi, ya'ni

$$u_j(z) \in a - sh(D), u_j(z) \xrightarrow{\mathbb{R}} u(z) \text{ } \forall u(z) \in a - sh(D), (k = 1, 2, 3 \dots)$$

e) *Maksimum prinsipi.* Agar $u(z) \in a - sh(D)$ funksiya biror $z^0 \in D$ nuqtada o'zining maksimumiga erishsa, ya'ni

$$u(z^0) = \sup_{x \in D} u(x)$$

bo'lsa, u holda $u(z) = \text{const}$ bo'ladi.

Uchinchi bobning ikkinchi bo'limida a - subgarmonik funksiyalarning Riss tasviri isbotlanadi. Bunda $K_a(z, w): dd^c K_a \llcorner \mathbb{Q} = d(z - w)$ fundamental yechimning mavjudligi izohlanib, u yordamida Riss tasviri o'rinli bo'lishi ko'rsatiladi.

3.2.1-teorema. Agar $u \in O_a - sh(D)$ bo'lsa, u holda istalgan $G \subset MMD$ kompakt qism sohada quyidagi tasvir o'rinli:

$$u(z) = \int_G K_a(z - w) dm_w + F(z), \quad z \in G, \quad (2)$$

bu yerda $F(z)$ - G sohadagi biror a - garmonik funksiya.

$$\text{Xususiyl holda kiritilgan } dd^c u \llcorner \mathbb{Q} = (n - 1)! \prod_j^j a_1 a_2 \dots a_n \frac{\|u\|^2}{\|z_j\| \|\bar{z}_j\|} dV$$

operator uchun Riss yadrosining aniq ko'rinishi quyidagicha bo'lishi ko'rsatiladi.

3.2.2-teorema. Berilgan $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \check{Y}_+^n$, $n \geq 2$ vektor uchun ushbu

$$K(z) = \frac{1}{(n - 1)! (a_1 z_1 \bar{z}_1 + a_2 z_2 \bar{z}_2 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^{n-1}}$$

funksiya quyidagi

$$dd^c u \llcorner \mathbb{Q} = 0$$

elliptik tenglamaning fundamental yechimi bo'ladi.

I - BOB. FUNKSIYALARNING BA'ZI MUHIM SINFLARI

1.1 Garmonik funksiyalar va ularning xossalari.

$D \subset \mathbb{R}^n$ sohada ushbu

$$\Delta u = 0$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $u \in C^2(D)$ funksiya *garmonik funksiya* deyiladi, bunda

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Laplas operatori.

Barcha garmonik funksiyalar to'plami $H(D)$ kabi belgilanadi.

1.1.1 – teorema. Agar $u(x)$ funksiya $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada garmonik bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x^0 \in D$ nuqta va $S(x^0, r) \subset D$ sfera uchun

$$u(x^0) = \frac{1}{s_n r^{n-1}} \int_{S(x^0, r)} u(x) ds \quad (1.1.1)$$

bo'ladi, bunda s_n - birlik sferaning yuzi.

Aksincha, agar D dan olingan har bir $x^0 \in D$ nuqta va yetarlicha kichik r ($0 < r \leq r_0(x^0)$) lar uchun (1.1.1) formula o'rinli bo'lsa, u holda $u(x) \in H(D)$ bo'ladi.

Endi garmonik funksiyalarning ba'zi bir xossalarini keltiramiz.

a) Agar $u, v \in H(D)$ bo'lib, $l, m \in \mathbb{R}$ bo'lsa, u holda

$$lu + mv \in H(D)$$

bo'ladi;

b) agar umumlashgan funksiya f uchun $\Delta f = 0$, ya'ni ixtiyoriy $f \in F(D)$ da $f(\Delta f) = 0$ tenglik bajarilsa, u holda f garmonik funksiya bo'ladi, aniqroq qilib aytganda, shunday $v(x) \in C^2(D)$, $\Delta v = 0$ bo'lgan funksiya mavjudki,

$$f(f) = v(f) = \int_V v(x)f(x)dV$$

bo'ladi;

v) agar $u(x)$ funksiya $B(x_0, r)$ sharda garmonik, uning yopig'ida esa uzluksiz, ya'ni

$$u(x) \in H(B(x_0, r)) \cap \overline{C(B(x_0, r))}$$

bo'lsa, u holda

$$u(x) = \int_{S(x^0, r)} u(y)P(x, y)ds(y)$$

formula o'rinli bo'ladi, bunda

$$P(x, y) = \frac{r^2 - |x - x^0|^2}{s_n r |x - y|^n}, \quad n \geq 2.$$

Puasson yadrosi, s - R^n dagi birlik sfera yuzi, $n \geq 2$. Ikkinchi tomondan, agar $f(y)$ funksiya $S(x^0, r)$ sferada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$u(x) = \int_{S(x^0, r)} f(y)P(x, y)ds(y)$$

funksiya $B(x^0, r)$ sharda Dirixle masalasi $Du = 0$, $u|_{S(x^0, r)} = f(y)$ ning yechimi bo'ladi.

Dirixle masalasini chegarasi silliq bo'lgan ixtiyoriy $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada ham qarash mumkin: $f(y) \in C(\overline{D})$ uchun yagona $u(x) \in C(\overline{D})$ mavjudki,

$Du = 0$, $u|_{\partial D} = f(y)$ bajariladi;

g) kompleks tekislik $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ da garmonik funksiyalar holomorf funksiyalarga bevosita bog'langandir.

Agar $z = x + iy$ deyilsa, unda

$$D = \frac{\rho^2}{\rho^2 x^2} + \frac{\rho^2}{\rho^2 y^2} = 4 \frac{\rho^2}{\rho^2 z \bar{z}}$$

bo'ladi va har bir holomorff $f \in H(D)$ funksiya uchun

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2}, \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i}$$

tengliklardan

$$D \operatorname{Re} f = 0, \quad D \operatorname{Im} f = 0,$$

ya'ni $\operatorname{Re} f$ va $\operatorname{Im} f$ larning garmonik funksiyalar ekanligi kelib chiqadi.

Shuningdek, agar $u(z) \in H(D)$ bo'lsa, u holda har bir $z^0 \in D$ nuqta va uning atrofi $B(z^0, r) \subset D$ uchun shunday $f \in H(D)$ funksiya topiladiki,

$$\operatorname{Re} f(z) = u(z), \quad z \in B(z^0, r) \text{ bo'ladi.}$$

Haqiqatan ham, $z^0 = 0$ deb $B = B(0, r)$ doirada Poisson formulasini ushbu

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \frac{r^2 - |z|^2}{|x - z|^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \operatorname{Re} \frac{x + z}{x - z} dt,$$

bunda $x = re^{it}$ ko'rinishda ifodalaymiz. Bu formuladan $B(0, r)$ da holomorff

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \frac{x + z}{x - z} dt \quad (1.1.2)$$

funksiyasi uchun $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ ekanligi kelib chiqadi.

(1.1.2) formula holomorff funksiyani uning haqiqiy qismi orqali ifodalashda ham ishlatiladi: ixtiyoriy $f(z) \in H(B) \cap C(\bar{B})$ uchun ushbu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \frac{x + z}{x - z} dt + i \operatorname{Im} f(0)$$

formula o'rinlidir.

1.2. Subgarmonik funksiyalar

Faraz qilaylik, $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada aniqlangan lokal integrallanuvchi

$$u : D \rightarrow [-\Gamma, +\Gamma]$$

funksiya berilgan bo'lsin: $u \in L^1_{loc}(D)$.

Agar bu funksiya quyidagi ikki shartni bajarsa:

1) $u(x)$ yuqoridan yarim uzluksiz:

$$\text{ya'ni } x^0 \in D \text{ uchun } \lim_{x \rightarrow x^0} \overline{u(x)} = u(x^0)$$

(bundan $u(x)$ funksiyaning D ga tegishli ixtiyoriy kompaktda yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi);

2) har bir $x^0 \in D$ nuqta uchun shunday $r(x^0) > 0$ topiladiki, $r \in (0, r(x^0))$ uchun

$$u(x^0) \leq \frac{1}{S_n r^{n-1}} \int_{S(x^0, r)} u(x) ds \quad (1.2.1)$$

u holda $u(x)$ funksiya D sohada *subgarmonik funksiya* deyiladi.

Subgarmonik funksiyalar sinfi $Sh(D)$ kabi belgilanadi. Kelgusida qulaylik uchun biz trivial $u(z) \equiv -\Gamma$ funksiyasi ham D da $Sh(D)$ ga tegishli deb qaraymiz. Endi subgarmonik funksiyalarning xossalari keltiramiz.

a) subgarmonik funksiyalarning musbat koeffisientli chiziqli kombinatsiyasi subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$u_k(x) \in Sh(D), \quad a_k \in \mathbb{R}_+ \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad \text{yo} \\ \text{yo } a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \dots + a_m u_m(x) \in Sh(D);$$

b) chekli sondagi subgarmonik funksiyalarning maksimumi subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x) \in Sh(D) \quad \text{yo} \\ \text{yo } \max \{u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)\} \in Sh(D);$$

v) monoton kamayuvchi subgarmonik funksiyalar ketma – ketligining limiti subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$u_j(x) \in Sh(D), u_j(x) \leq u_{j+1}(x) \quad (j = 1, 2, \dots) \text{ va} \\ \text{va } \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \in Sh(D);$$

g) tekis yaqinlashuvchi subgarmonik funksiyalar ketma-ketligi subgarmonik funksiyaga yaqinlashadi:

$$u_j(x) \in Sh(D) \quad (k = 1, 2, 3, \dots), u_j(x) \leq u(x) \text{ va } u(x) \in Sh(D).$$

a) – g) xossalarning isbot bevosita yuqorida keltirilgan ta'rifdan kelib chiqadi.

d) *Maksimumlar prinsipi*. Agar $u(x) \in Sh(D)$ funksiya biror $x^0 \in D$ nuqtada o'zining maksimumiga erishsa, ya'ni

$$u(x^0) = \sup_{x \in D} u(x) \quad (1.2.2)$$

bo'lsa, u holda $u(x) \in \text{const}$ bo'ladi.

Ushbu

$$M = \{x \in D : u(x) = u(x^0)\}$$

to'plamni qaraylik. $u(x)$ funksiyaning yuqoridan yarim uzluksiz bo'lganligidan va (1.2.2) shartdan M to'plamning D da yopiqqligi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, ixtiyoriy $p \in M$ uchun (1.2.1) formulaga ko'ra

$$u(x^0) = u(p) + \frac{1}{S_n r^{n-1}} \int_{S(p,r)} u(x) ds - u(x^0), \quad r \in (p),$$

bo'ladi. Bu munosabatdan $u|_{S(p,r)} \leq u(x^0)$, ya'ni p ning $B(p, r(p))$ atrofida

$u(x) = u(x^0)$ bo'lishini ko'ramiz. Bu esa M to'plamning D da ochiq ekanligini ko'rsatadi. Demak, $M = D$.

e) Agar $J(x) \in Sh(D)$, $u(x) \in H(D)$ funksiyalar uchun $S(x^0, r)$ MMD sferada

$$J|_S \leq u|_S$$

bo'lsa, u holda $B(x^0, r)$ sharda $J(x) \leq u(x)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bu xossaning isboti yuqoridagi d) xossadan kelib chiqadi;

e) – xossadan quyidagi muhim xulosaga kelamiz. Faraz qilaylik,

$$J(x) \in Sh(D) \cap C(D)$$

berilgan bo'lib, $B(x^0, r)$ MMD bo'lsin. Ushbu

$$u(x) = \int_{S(x^0, r)} J(y) P(x, y) ds(y), \quad x \in B(x^0, r),$$

Puasson integralini qaraylik. $u(x) \in h(B)$, $u|_S = J|_S$ bo'lib, e) – xossaga

ko'ra $B = B(x^0, r)$ da $J(x) \equiv u(x)$ bo'ladi. Uzluksiz funksiyalar uchun isbotlangan bu xossa ixtiyoriy $J \in Sh(D)$ uchun ham o'rinlidir: $J(x) \equiv u(x)$ va deyarli barcha $x \in S$ lar uchun $J(x) = u(x)$ o'rinlidir;

j) aytaylik, $u(x) \in Sh(D)$ funksiya va $x^0 \in D$ nuqta berilgan bo'lsin.

Ushbu

$$m(x^0, r) = \frac{1}{S_n r^{n-1}} \int_{S(x^0, r)} u(x) ds$$

va

$$n(x^0, r) = \frac{1}{V_n r^n} \int_{B(x^0, r)} u(x) dV,$$

bunda $V_n r^n$ miqdor $B(x^0, r)$ ning hajmi, integrallarni (o'rta qiymatlarni) qaraylik.

1.2.1 – teorema. Faraz qilaylik, $u(x) \in Sh(D)$ va $u(x) \notin \Gamma$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $x^0 \in D$ uchun

$$u(x^0) \leq n(x^0, r) \leq m(x^0, r), \quad n(x^0, r) > -\infty, \quad 0 < r < r(x^0, \partial D),$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari, agar r monoton kamayib nolga intilsa, unda $n(x^0, r)$ va $m(x^0, r)$ o'rta qiymatlar monoton kamayib, $u(x^0)$ ga intiladi.

1.2.1 – teoremdan ushbu muhim natijaga ega bo‘lamiz: $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada subgarmonik $u(x) \in C^1$ funksiya D da lokal integrallanuvchidir, ya’ni ixtiyoriy $B \subset D$ uchun $\int_B u(x) dV$ integral mavjuddir;

z) subgarmonik funksiya D sohaning har bir nuqtasida uzilishga ega bo‘lishi mumkin. Ayni paytda, quyidagi teorema o‘rinli bo‘ladi.

1.2.2 – teorema. Agar $u(z) \in Sh(D)$ bo‘lsa, u holda shunday monoton to‘plamlar

$$D_j \subset D_{j+1} \subset D, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j = D$$

ketma – ketligi va shunday monoton kamayuvchi funksiyalar

$$u_j(x) \in Sh(D_j) \cap C^1(D_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

ketma – ketligi mavjudki,

$$u(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \quad (x \in D)$$

bo‘ladi.

Isboti. Ushbu

$$K(x) = \begin{cases} c - \frac{1}{1-|x|^2}, & \text{agar } |x| < 1 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } |x| > 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya $C^1(\mathbb{R}^n)$ sinfga tegishli bo‘lib, uning havzasi $\text{supp } K(x) = B(0,1)$ dir. Endi $K(x)$ ning ifodasidagi o‘zgarmas c ni shunday tanlab olamizki,

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x) dV = 1$$

bo‘lsin. $u(x) \in C^1$ deb, bu yadro yordamida ushbu

$$u_d(x) = \frac{1}{d^n} \int_{|y-x| \leq d} u(y) K\left(\frac{|y-x|}{d}\right) dV, \quad d > 0, \quad (1.2.3)$$

integralni qaraylik. $u_d(x)$ funksiyasi

$$D_d = \{x \in D : r(x, \partial D) < d\}$$

ochiq to'plamda aniqlangan bo'lib, $x \in D_d$ da

$$u_d(x) = \frac{1}{d^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) K\left(\frac{|y-x|}{d}\right) dV = \int_{\mathbb{R}^n} u(x+dy) K(y) dV$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdagi birinchi integral $C^\Gamma(D_d)$ sinfga, ikkinchi integral esa $Sh(D_d)$ sinfga tegishli bo'ladi. Binobarin,

$$u_d(x) \in Sh(D_d) \cap C^\Gamma(D_d).$$

$u(x)$ ning subgarmonik funksiya ekanligidan, u_d ning $d \rightarrow 0$ da, monoton kamayuvchi bo'lishligi va

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x) dV = 1$$

tenglikdan, $u_d(x)$ ning $u(x)$ ga intilishini topamiz.

Teorema isbotlandi.

i) Subgarmonik funksiyalar umumiy holda C^2 sinfga tegishli bo'lmasligidan, Du - Laplas operatorini faqat umumlashgan funksiya sifatida qarash mumkin bo'ladi:

$$Du(f) = \int_{\mathbb{R}^n} u Df, \quad f \in F(D).$$

1.2.3-teorema. Har qanday subgarmonik funksiya $u(x) \in Sh(D)$, $u \notin \Gamma$, uchun umumlashgan ma'noda $Du \equiv 0$ bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy $f \in F(D)$, $f \equiv 0$ uchun $\int_{\mathbb{R}^n} u Df \equiv 0$ munosabat o'rinlidir.

Jumladan, $u(x)$ funksiya C^2 sinfga tegishli bo'lib, $u(x)$ subgarmonik bo'lsa,

$$u \in Sh(D) \cap C^2(D), \text{ u holda } Du = \frac{\|u\|^2}{\|x_1\|^2} + \dots + \frac{\|u\|^2}{\|x_n\|^2} \geq 0 \text{ dir.}$$

Yuqorida keltirilgan teoremaning aksi ham o'rinli: agar umumlashgan funksiya u uchun

$$Du(f) = \sum_{i=1}^n u Df_i \geq 0, \quad f \in F(D), \quad f \geq 0,$$

munosabat bajarilsa, u holda u subgarmonik funksiya bo'ladi.

1.3. Plyurisubgarmonik funksiyalar.

1.3.1. Plyurigarmonik funksiyalar.

$\mathbb{C}^n$ kompleks fazodagi $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada $u(z)$ funksiya berilgan bo'lib, $u(z) \in C^2(D)$ bo'lsin.

Agar ixtiyoriy $z^0 \in D$ va bu nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy kompleks to'g'ri chiziq $l: z = z^0 + wx, \quad w \in \mathbb{C}^n, \quad x \in \mathbb{C}$ uchun ushbu

$j(x) = u/l = u(z^0 + wx)$ kesim-funksiya $x = 0$ nuqtada garmonik, ya'ni $x = 0$

da $\frac{\|f\|^2}{\|x\|^2} = 0$ bo'lsa, $u(z)$ funksiya D da *plyurigarmonik funksiya* deyiladi.

Plyurigarmonik funksiyalar sinfi $Ph(D)$ kabi belgilanadi. Aytaylik, $u(z) \in Ph(D)$ bo'lsin. Unda

$$\frac{\|u(z^0 + wx)\|^2}{\|x\|^2} = 0$$

bo'lib, murakkab funksiyaning differensiallashtirish qoidasidan

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\|u\|^2}{\|z_j\|^2 \|z_k\|^2} w_j \overline{w_k} = 0, \quad w \in \mathbb{C}^n, \text{ ekanligini ko'ramiz. Bundan va } w \in \mathbb{C}^n$$

vektorning ixtiyoriyligidan

$$\frac{\|u\|^2}{\|z_j\| \|z_k\|} = 0 \quad (k, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.3.1)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, plyurigarmonik funksiyalar sinfi (1.3.1) tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi va ba'zan bu sistema plyurigarmonik funksiyaning ta'rif sifatida ham qaraladi.

1.3.1-teorema. Agar $f(z) = u(z) + iv(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada golomorf bo'lsa, u holda

$$\operatorname{Re} f(z) = u(z), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(z)$$

funksiyalar D sohada plyurigarmonik bo'ladi va aksincha, agar $u(z)$ funksiya D sohada plyurigarmonik bo'lsa, u holda ixtiyoriy $B(z^0, r) \cap D$ atrofda $u(z)$ funksiya biror $f(z) \in O(B(z^0, r))$ golomorf funksiyaning haqiqiy qismi bo'ladi: $u(z) \in \operatorname{Re} f(z)$.

1.3.2. Plyurisubgarmonik funksiyalar

Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada aniqlangan $u(z) : D \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya quyidagi ikki shartni bajarsa:

- 1) $u(z)$ yuqoridagi yarim uzluksiz;
- 2) ixtiyoriy l kompleks to'g'ri chiziq uchun $u|_l$ funksiya $l \cap D$ da subgarmonik bo'lsa, $u(z)$ funksiya D sohada *plyurisubgarmonik* funksiya deyiladi.

Plyurisubgarmonik funksiyalar to'plami $Psh(D)$ kabi belgilanadi.

$D \subset \mathbb{C}^n$ sohada plyurisubgarmonik bo'lgan funksiya $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ da aniqlangan funksiya sifatida subgarmonik funksiya bo'ladi. Uni subgarmonik funksiyalarning 2 - shartini bajarishini ko'rish qiyin emas. Binobarin, subgarmonik funksiyalarning xossalari plyurisubgarmonik funksiyalar uchun ham saqlanadi.

Endi plyurisubgarmonik funksiyalarning xossalarini keltiramiz:

- a) plyurisubgarmonik funksiyalarning musbat koeffitientli chiziqli

kombinativiyasi plyurisubgarmonik funksiya bo'ladi;

b) agar $u(z) \in OPsh(D)$ funksiya $z^0 \in D$ nuqtada maksimumga erishsa, ya'ni $u(z^0) = \max_{z \in D} u(z)$ bo'lsa, u holda $u(z) \in const$ bo'ladi;

v) monoton kamayuvchi yoki tekis yaqinlashuvchi plyurisubgarmonik funksiyalar ketma – ketligining limiti plyurisubgarmonik funksiya bo'ladi;

g) agar $u(z) \in OPsh(D)$ bo'lsa, u holda $u_d(z)$ funksiya $Psh(D_d) \cap C^1(D_d)$ sinfga tegishli bo'lib, $d \rightarrow 0$ da $u_d(z) \rightarrow u(z)$ bo'ladi;

d) D sohada plyurisubgarmonik funksiyalar sinfi $\{u_a\}_{a \in \Omega}$ berilgan bo'lib, $u = \sup_{a \in \Omega} u_a$ yuqoridan yarim uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda $u(z)$ plyurisubgarmonik funksiya bo'ladi, $u \in OPsh(D)$. Jumladan, $u_j(z) \in OPsh(D)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) bo'lsa,

$$\sup \{u_1(z), u_2(z), \dots, u_k(z)\} \in OPsh(D)$$

bo'ladi;

e) agar $f(z) \in O(D)$ bo'lsa, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bo'lsa, $a \ln |f(z)| \in OPsh(D)$ bo'ladi, bunda $a \neq 0$;

j) agar $u(z) \in OPsh(D)$ bo'lsa, u holda $e^{u(z)} \in OPsh(D)$ dir, agar $u(z) \in OPsh(D)$, $u|_D < 0$ bo'lsa, u holda $-\ln[-u(z)] \in OPsh(D)$ dir.

z) D sohada aniqlangan $u(z) \in OC^2(D)$ funksiyaning D da plyurisubgarmonik bo'lishi uchun ushbu

$$L(u, w) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\|u\|^2}{\|z_j\| \|z_k\|} w_j \bar{w}_k \quad (1.3.2)$$

kvadratik formaning (Levi formasining) ixtiyoriy $z \in D$ da musbat aniqlangan bo'lishi zarur va yetarlidir. (1.3.2) munosabatda $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ bo'lib, kvadratik formaning musbat aniqlanganligi $w \in \mathbb{C}^n$ da $L(u, w) > 0$ bo'lishini

anglatadi.

Agar " $w \in C^n$ ", $w \neq 0$ da $L(u, w) > 0$ bo'lsa, $u(z)$ funksiya z nuqtada **qat'iy plyurisubgarmonik** funksiya deyiladi; agar $u(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida qat'iy plyurisubgarmonik bo'lsa, $u(z)$ **sohada qat'iy plyurisubgarmonik** funksiya deyiladi.

II BOB. a - garmonik funksiyalar

2.1. Musbat aniqlangan differensial formalar va oqimlar

2.1.1. Differensial formalar. $f \in C^1(G)$ funksiya $G \subset \mathbb{C}^n$ sohada berilgan bo'lsin.

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

differensial 1-darajali differensial formaga misol bo'ladi.

Umuman aytganda

$$w = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_j$$

ko'rinishdagi ifoda 1-darajali differensial forma deyiladi, $\deg w = 1$.

Yuqori darajali differensial formalarni ta'rifini berish uchun II-tashqi ko'paytma tushunchasini kiritamiz. Bu ko'paytma quyidagi xossalarni qanoatlantiradi:

$$a) \quad a(x) \wedge dx_j = dx_j \wedge a(x) = a(x) dx_j$$

$$b) \quad dx_k \wedge dx_j = - dx_j \wedge dx_k$$

bu yerdan $dx_j \wedge dx_j = 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

2.1.1-ta'rif. Ushbu

$$w = \sum_{0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n} a_{j_1 j_2 \dots j_p} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$$

Ifodaga p darajali differensial forma deyiladi, bu yerda $a_{j_1 j_2 \dots j_p}(x)$ G da aniqlangan funksiya va $\deg w = p$.

p -darajali differensial formalar to'plami $F^p(G)$ orqali belgilanadi. $w \in F^p(G)$ differensial formani quyidagi ekvivalentlik formada yozish qulay

$$w = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n} a_{j_1 j_2 \dots j_p} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} = \sum_J a_J dx_J$$

bu yerda $dx_J = dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_p)$, $1 \leq j_1, j_2, \dots, j_p \leq n$ - multindeks 0-darajali differensial forma-bu $a(x)$ skalyar funksiya, n -darajali differensial forma esa $w = a(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ko'rinishga ega. $p > n$ da p -darajali forma nolga teng bo'ladi.

Differensial formalarning tashqi ko'paytmasi yig'indini ko'paytirish qoidasiga bo'ysunadi.

$$\sum_J a_J dx_J \wedge \sum_I b_I dx_I = \sum_{I,J} a_J b_I dx_J \wedge dx_I$$

Shunday qilib 2 ta formaning $w_1 \wedge w_2$ ko'paytmasida, bu yerda $\deg w_1 = n$, $\deg w_2 = p$ bo'lsa, biz 0 ga ega bo'lamiz. Agar w differensial formaning barcha koeffitsientlari C^k sinfdan olingan bo'lsa, u holda w forma C^k sinfga tegishli deyiladi, $w \in C^k$ bilan belgilanadi. Silliqlik formalari differensiallashga ruhsat beradi.

Agar

$$w = \sum_J a_J dx_J$$

bo'lsa, u holda

$$dw = \sum_J da_J(x) \wedge dx_J = \sum_J \left(\frac{\partial a_J}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial a_J}{\partial x_k} dx_k \right) \wedge dx_J = \sum_J \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_J}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_J$$

faqat bu yerda o'xshash differensiallarni tartibga keltirish kerak.

Buning uchun $dx_J \wedge dx_J$ ko'rinishdagi tashqi ko'paytma qatnashgan qo'shiluvchilarni nolga tenglash kerak. Ta'rifdan ko'rinadiki, p -darajali w differensial formaning differensial $p+1$ -darajali differensial formani ifodalaydi:

$$D : F^p(G) \otimes F^{p+1}(G).$$

Differensiallash operatori quyidagi xossalarni qanoatlantiradi:

$$a) d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2$$

$$b) d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^{\deg w_1} w_1 \wedge dw_2$$

$$v) d(dw) = d^2 w = 0$$

$\mathbb{C}^n \gg \check{Y}^{2n}$ kompleks fazoda differensial formalarni dz_j va $\overline{dz_j}$ lardan foydalanib yozish mumkin.

$z = (z_1, \dots, z_n)$ lar $\mathbb{C}^n \gg \check{Y}^{2n}$ dagi kompleks koordinatalar bo'lsin,

$$z_j = x_j + ix_{n+j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

U holda,

$$dx_j = \frac{dz_j + \bar{dz}_j}{2},$$

$$dx_{n+j} = \frac{dz_j - \bar{dz}_j}{2i}$$

va

$w = \oint_J a_J(x) dx_J$ differensial formani dz_j va $\bar{dz}_k$ larning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalash mumkin.

Bunda har bir hadda dz_j va $\bar{dz}_k$ lar soni turlicha bo'lishi mumkin.

Masalan, $J^2 \gg \check{Y}^4$ da

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \frac{i}{4} (-dz_1 \wedge dz_2 \wedge \bar{dz}_1 + dz_2 \wedge \bar{dz}_1 \wedge dz_1)$$

bo'lishi mumkin.

Ba'zan w da barcha qo'shiluvchilarda dz_1 larning soni bir xil p ga va $\bar{dz}_k$ larning soni q ga teng bo'ladi. Bunday hollarda biz w differensial forma (p, q) bidarajaga ega deb ataymiz va $w \in F^{p, q}$ deb yozamiz.

Agar

$$\P a = \frac{\P a}{\P z_1} dz_1 + \dots + \frac{\P a}{\P z_n} dz_n$$

va

$$\bar{\P} a = \frac{\bar{\P} a}{\bar{\P} z_1} \bar{dz}_1 + \dots + \frac{\bar{\P} a}{\bar{\P} z_n} \bar{dz}_n$$

deb belgilasak, u holda differensiallash operatori $d = \P + \bar{\P}$ ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerda shuni ta'kidlaymizki

$$d^2 w = ddw = (\P + \bar{\P})(\P + \bar{\P})w = \P^2 w + \bar{\P}^2 w$$

Bu yerdan $d^2 w = 0$ ligidan $\P^2 w + \bar{\P}^2 w = 0$ tenglik istalgan w differensial forma uchun bajarilishi kelib chiqadi. Shu bilan birga $w \in F^{p, q}$ bo'lsa, u holda $d^2 w \in F^{p+2, q}$ va $\P^2 w \in F^{p, q+2}$ va $\P^2 w + \bar{\P}^2 w = 0$

tenglikdan $\P^2 w = 0, \bar{\P}^2 w = 0$ ekani kelib chiqadi.

Quyidagi qo'shma differensiallash operatorini kiritamiz:

$$d^c = \frac{\P - \bar{\P}}{4i} = \frac{1}{4} \oint_{j=1}^n \left(-\frac{\P}{\P y_j} dx_j + \frac{\P}{\P x_j} dy_j \right)$$

U holda

$$dd^c |z|^2 = \frac{i}{2} (dz_1 \wedge \bar{dz}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge \bar{dz}_n)$$

va

$$\begin{aligned} (dd^c |z|^2)^n &= dd^c |z|^2 \wedge \dots \wedge dd^c |z|^2 = \left(\frac{i}{2}\right)^n (dz_1 \wedge \bar{dz}_1 + \dots + dz_n \wedge \bar{dz}_n) = \\ &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = dV \end{aligned}$$

$J^n \gg \check{Y}^{2n}$ dagi hajm elementi hosil bo'ladi.

Yuqorida differensial forma tushunchasi J^n Evklid fazosida kiritildi.

$X = j(y)$ o'zgaruvchi almashtirishda bu yerda $j(y) = (j_1(y), \dots, j_2(y))$ o'rniga qo'yish va differensiallash qonunlariga muvofiq hisoblanadi.

Agar

$$W(x) = \int a_J dx_J = \int_{J_1 < J_2 < \dots < J_n} a_J dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$$

bo'lsa, u holda yangi koordinatalarda

$$\overline{w}(x) = \int_{J_1 < J_2 < \dots < J_n} a_J(j(y)) \left(\int_{i=1}^n \frac{j_{j_1}}{y_i} dy_i \right) \wedge \dots \wedge \left(\int_{i=1}^n \frac{j_{j_p}}{y_i} dy_i \right) = dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$$

2.1.2-ta'rif. Ushbu

$$w = \sum_{j=1}^p \frac{i}{2} dl_j \wedge \bar{l}_j$$

ko'rinishdagi differensial forma (p, p) bidarajali bosh kuchli musbat differensial

forma deyiladi, bu yerda $l_j = a_{j_1} dz_1 + \dots + a_{j_n} dz_n - (dz_1, \dots, dz_n)$ bazis bo'yicha

chiziqli kombinatsiya, $a_{jk} \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, p, k = 1, 2, \dots, n$

Bunday formalarning ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi kuchli musbat differensial forma deb ataladi, ya'ni kuchli musbat differensial forma bu-

$$w = \int_s l_s(z) \sum_{j=1}^p \frac{i}{2} dl_{j_s} \wedge \bar{l}_{j_k}$$

ko'rinishdagi formadir, bu yerda $l_s(z)$ - qaralayotgan $G \subset \mathbb{C}P^n$ sohadagi manfiy bo'lmagan funksiya.

Agar $z_j = x_j + ix_{n+j}$ kompleks koordinatalardan x_j, x_{n+j} , $j = 1, 2, \dots, n$

haqiqiy koordinatalarga o'tsak, unda ushbu

$$\sum_{j=1}^p dz_1 \wedge \overline{dz_1} \wedge \dots \wedge dz_p \wedge \overline{dz_p} = dx_1 \wedge dx_{n+1} \wedge \dots \wedge dx_p \wedge dx_{n+p}$$

ifoda $\mathbb{C}^{2n}$ fazoda $2p$ darajali musbat forma bo'ladi.

(n, n) bidarajali differensial forma (kuchli) musbat bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, qachonki u

$$w = l(z) \sum_{j=1}^n \frac{i}{2} dz_j \wedge \overline{dz_j} = l(z) dx_1 \wedge dx_{n+1} \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dx_{2n}$$

ko'rinishga ega bo'lsa, bu yerda $l(z)$ - musbat funksiya.

(n, n) bidarajali $W = \sum_{j=1}^n \frac{i}{2} dz_j \wedge \overline{dz_j} = dV$ differensial forma J^n da hajm formasi rolini o'ynaydi.

$p = 1$ da $w = \sum_{jk} l_{jk} dz_j \wedge \overline{dz_k}$ - differensial forma musbat bo'ladi, faqat va faqat

shu holdaki, qachonki $\sum_{jk} l_{jk} x_j x_k$ - ermit kvadratik formasi musbat bo'lsa.

Shuningdek, ixtiyoriy $z^0 \in OG$ tayinlangan nuqtada unitar almashtirish yordamida uni

$$w = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n m_j dz_j \wedge \overline{dz_j}, \quad m_j \geq 0$$

ko'rinishda yozish mumkin.

2.1.3-ta'rif. $w \in F^{p,p}$ differensial forma kuchsiz musbat yoki musbat deyiladi, agar ixtiyoriy kuchli musbat $n \in F^{n-p, n-p}$ forma uchun $w \wedge \eta \in F^{n,n}$ forma musbat bo'lsa.

$p = 0, 1, n-1, n$ da kuchli musbatlik kuchsiz musbatlikka ekvivalent. Biroq boshqa p lar uchun bu sinflar ustma-ust tushmaydi. Buni aniq tushunish uchun kuchli musbat formani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\begin{aligned}
w &= e_s^{l_s(z)} \prod_{j=1}^p \frac{i}{2} dl_{j_s} \prod_{j=1}^p \bar{dl}_{j_s} = \frac{i^{p^2}}{2^p} e_s^{l_s(z)} \prod_{j=1}^p \frac{i}{2} dl_{j_s} \prod_{j=1}^p \bar{dl}_{j_s} = \\
&= \frac{i^{p^2}}{2^p} e_s^{l_s(z)} \prod_{j=1}^p dl_{j_s} \prod_{j=1}^p \bar{dl}_{j_s}
\end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Agar $q = e_s^{m_s(z)} dl_s$ formani qarasak, bunda m_s - kompleks qiymatli funksiya,

unda $\frac{i^{p^2}}{2^p} q \prod_{j=1}^p \bar{dl}_{j_s}$ ko'rinishdagi forma (kuchsiz) musbat bo'ladi, biroq

$2 \leq p \leq n-2$ da u har doim ham (1.3.3) ko'rinishga ega bo'lavermaydi.

2.1.2. Oqimlar. M ko'pxillikdagi oqimni koeffitsiyentlari umumlashgan funksiyalardan iborat differensial forma deb qarash mumkin.

Tayinlangan $G \subset \mathbb{C}^n$ soha uchun asosiy differensial formalar fazosi quyidagicha aniqlanadi:

$$F^p = F^p(G) = \left\{ w \in F^p(G) \mid C^{\Gamma}(G): \text{supp } w \subset MG \right\}$$

F^p da topologiya asosiy funksiyalar fazosidagi topologiya kabi aniqlanadi:

2.1.4-ta'rif. F^p fazodagi uzluksiz chiziqli (kompleks qiymatli) T funksional $n - p = q$ darajali oqim deyiladi. Barcha q - darajali oqimlar fazosini

B^q orqali belgilaymiz. B^q oqimlar fazosi umumlashgan funksiyalarning barcha xossalarini qanoatlantiradi. Xususan, ular uchun kuchsiz yaqinlashish, kuchsiz

chegaralanganlik tushunchalarini kiritish mumkin va $T_d \subset B^q \subset C^{\Gamma}$

o'ramani aniqlash mumkinki, $d \in \mathbb{R}$ da oqim sifatida T da yaqinlashadi,

ya'ni $T_d \circ w \in T \circ w$, $w \in B^p$. Undan tashqari T oqimni differensial forma

kabi differensiallashimiz mumkin: $dT \circ w = (-1)^p T \circ dw$

2.1.5-ta'rif. Agar $F^p = \left\{ w \in B^p(G) \mid C^{\Gamma}(G): \text{supp } w \subset MG \right\}$ fazodan

olingan T oqim (funktional) $\left\{ w \in B^p(G) \mid C^m(G): \text{supp } w \subset MG \right\}$ fazoga

uzluksiz davom qilsa, unda T oqim m dan ko'p bo'lmagan singulyarlikka ega deyiladi bunda $0 \leq m \leq \Gamma$. Agar undan tashqari T oqim

$$\left\{ w \in F^p(G) \cap C^{m-1}(G) : \text{supp } w \subset \text{MMG} \right\}$$

fazoga davom qilmasa, unda T oqim aniq m singulyarlikka ega deyiladi.

$$T = \sum_{|k|=q} b_k dx_k \text{ ko'effitsiyentlari umumlashgan funksiya bo'lgan differensial}$$

forma oqimni ifodalaydi.

2.1.1-teorema. Ixtiyoriy q - darajali oqim ko'effitsiyentlari umumlashgan funksiya bo'lgan differensial forma bo'ladi, shu bilan birga singulyarligi nolga teng bo'lgan oqim o'lchov tipidagi oqim bo'ladi va uni barcha ko'effitsiyentlari kompleks qiymatli o'lchov bo'ladi.

O'lchov tipidagi oqimlar fazosini B_0^q orqali belgilaymiz. B_0^q nafaqat $G \subset \mathbb{R}^n$ soha uchun, balki ixtiyoriy $E \subset \mathbb{R}^n$ borel to'plami uchun ham aniqlangan. Xususan, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt uchun differensial forma ko'effitsiyentlaridan tashkil topgan vektorlarni $F_0^q(K) = F_0^q(K) \cap C(K)$ fazoga qo'shma fazo bo'lgani uchun u Banach fazosi bo'ladi. $T \in B_0^q$ oqim uchun o'lchov tipidagi oqim $T \circ w = m(z)W$ bo'ladi, bu yerda m - kompleks qiymatli o'lchov bo'lib, u $w \in B_0^p$ ga bog'liq va $W = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, shu bilan birga funksional qiymati $T \circ w = \int_G dm$ bo'ladi.

Xuddi o'lchovlar fazosi kabi quyidagi xossalari o'rinli:

a) $\{T_j\} \subset B_0^q$ oqimlar ketma-ketligi T ga kuchsiz yaqinlashadi, ya'ni

$$\lim_{j \rightarrow \infty} T_j \circ w = T \circ w, \quad w \in B_0^p \text{ faqat va faqat shu holda, qachon unga mos } T_j$$

dan olingan ko'effitsiyentlardan tuzilgan o'lchovlar ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'lsa.

b) $\{T_j\} \in MB_0^q$ oqimlar ketma-ketligi T ga kuchsiz yaqinlashadi, faqat va faqat shu holdaki, qachon T_j norma bo'yicha chegaralangan bo'lsa

$\|T_j\|_k \leq C, \quad \forall K \in MG, j = 1, 2, \dots$ va $j \rightarrow \infty$ da $T_j \rightarrow T$ limitik

munosabat hamma yerda zich biror $E \in MB_0^p(K)$ to'plamdan olingan barcha w lar uchun o'rinli bo'lsa, masalan barcha cheksiz differensiallanuvchi

$w \in F^p \cap C^r(K)$ lar uchun

d) ixtiyoriy kuchsiz chegaralangan $E \in MB_0^q(K)$ qiymatlar to'plami ham kuchsiz kompakt ya'ni uni ixtiyoriy ketma-ketligi kuchsiz yaqinlashuvchi qisman ketma-ketligi $\{T_j\} \in ME$ ni o'zida saqlaydi.

2.1.6-ta'rif. q - darajali differensial forma (oqim) yopiq deyiladi, agar uni differensialni nolga teng bo'lsa; u aniq deyiladi, agar u biror $q - 1$ darajali formani (oqimni) differensialini ifodalash. Aniq formalar (oqimlar) yopiq bo'ladi, teskari tasdiq uchun G sohaga qo'shimcha geometrik shartlarni qo'yish zarur.

Endi J^n da asosiy differensial formalar fazosini qaraymiz:

$$B^{p,p} = B^{p,p}(G) \{w \in B^{p,p}(G) \cap C^r(G) : \text{supp } w \in MG\}$$

2.1.7-ta'rif. $F^{p,p}$ fazoda uzluksiz chiziqli (kompleks qiymatli) T funksionalga $(n - p, n - p) = (q, q)$ bidarajali oqim deyiladi.

2.1.2-teorema. Musbat oqimlar o'lchov tipidagi oqimlar bo'ladi.

2.1.1-misol. Koeffitsiyentlari L^1_{loc} sinfdan olingan ixtiyoriy $T \in F^{q,q}$ differensial forma (q, q) bidarajali oqim bo'ladi.

T o'w funksional $T \circ w = \int_G T \wedge w, \quad \forall w \in F^{p,p}$ kabi aniqlanadi. Bunday

oqimlar regulyar oqim deyiladi.

2.1.2-misol. $A \in J^{n-p}$ o'lchamli analitik to'plam bo'lsin. U holda

$\int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial \nu} = \int_A w$ integral (q, q) bidarajali oqimni aniqlaydi. Ko'rish qiyin

emaski, $\int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial \nu}$ musbat oqim bo'ladi.

2.2. $dd^c u$ $\mathbb{H}^n$ operator va a - garmonik funksiyalar

$\mathbb{H}^n$ kompleks fazoda $(n-1, n-1)$ -bidarajali qat'iy musbat a differensial formani tayinlaymiz.

2.2.1-teorema. $dd^c u$ $\mathbb{H}^n$ elliptik operator bo'ladi.

Isbot. a differensial forma quyidagi ko'rinishda tasvirlanadi deb faraz qilamiz:

$$a = \frac{(i)^{(n-1)^2}}{2^{n-1}} e^{a_{j,k}(z)} dz_1 \wedge \dots \wedge \overline{dz_n}, \quad (2.2.1)$$

Bu yerda $dz_1 \wedge \dots \wedge \overline{dz_n}$ belgilash $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge \overline{dz_1} \wedge \dots \wedge \overline{dz_n}$ ko'paytmada dz_j va $\overline{dz_k}$ differensiallar tushib qolishini bildiradi. .

Ma'lumki, istalgan musbat forma w haqiqiy bo'ladi, ya'ni $\overline{w} = w$ tenglik o'rinli bo'ladi. Lokal koordinatalarda agar $w = i^{p^2} e^{a_{I,J}} dz_I \wedge \overline{dz_J}$ bo'lsa, u holda $|I|=|J|=p$

koeffisientlar ermit skalyar ko'paytmani qanoatlantiradi: $\overline{a_{I,J}} = a_{J,I}$ (q. [18]).

Binobarin, (2.2.1) formada quyidagi tenglik o'rinli: $\overline{a_{j,k}(z)} = a_{k,j}(z)$.

Endi ixtiyoriy musbat $(1,1)$ - bidarajali formani olamiz:

$w = \frac{i}{2} e^{a_{j,k}} dz_j \wedge \overline{dz_k}$. Formaning musbatligiga ko'ra va

$idz_1 \wedge \overline{dz_1} \wedge \dots \wedge idz_n \wedge \overline{dz_n} = i^{n^2} dz_1 \wedge \overline{dz_1} \wedge \dots \wedge dz_n \wedge \overline{dz_n}$ o'rin almashtirish qoidasidan foydalanib biz quyidagiga ega bo'lamiz:

$$a \wedge w = \frac{i^{(n-1)^2}}{2^{n-1}} e^{a_{j,k}(z)} dz_1 \wedge \dots \wedge \overline{dz_n} \wedge \frac{i}{2} e^{a_{j,k}} dz_j \wedge \overline{dz_k} = ,$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,k=1}^n (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \mathbf{e}_{j,k} (-1)^{3n-j-k-1} a_{jk} a_{jk}(z) dz \wedge \bar{dz} = \\
&= \mathbf{e}_{j,k} (-1)^{2n-j-k} a_{jk} a_{jk}(z) dV > 0, \tag{2.2.2}
\end{aligned}$$

bu yerda $dV = \sum_{j,k=1}^n dz_1 \wedge \bar{dz}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge \bar{dz}_n$ - J^n dagi hajm elementi.

$\mathbf{R}^{2n}$ fazodagi m tartibli chiziqli differensial operator $P(x, \mathcal{D})u = \sum_{|a| \leq m} a^a(x) \mathcal{D}^a u$ bilan beriladi, bu yerda $x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n}$,

$a = (a_1, \dots, a_{2n})$ - multiindeks, $|a| = a_1 + \dots + a_{2n}$, $\mathcal{D}^a = \mathcal{D}_1^{a_1} \mathcal{D}_2^{a_2} \dots \mathcal{D}_{2n}^{a_{2n}}$,

$\mathcal{D}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = \overline{1, 2n}$.

Istalgan $u(z) \in C^2(D)$ uchun $dd^c u \wedge \omega$ operator quyidagi ko'rinishda tasvirlanadi:

$$dd^c u \wedge \omega = P(z, \mathcal{D})u(z),$$

$$\text{bu yerda } dd^c u \wedge \omega = \frac{i}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge \bar{dz}_k \wedge \sum_{j,k} \frac{(n-1)^2}{2^{n-1}} \mathbf{e}_{j,k} a_{jk}(z) dz \wedge \bar{dz} =$$

$$= \sum_{j,k=1}^n (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \mathbf{e}_{j,k} (-1)^{n+k+j-3} a_{jk}(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz \wedge \bar{dz} =$$

$$= \sum_{j,k=1}^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathbf{e}_{j,k} (-1)^{k+j-2} a_{jk}(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz \wedge \bar{dz} = \mathbf{e}_{j,k} (-1)^{k+j-2} a_{jk}(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dV$$

$$= \frac{1}{4} \mathbf{e}_{j,k} (-1)^{k+j-2} a_{jk}(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - i \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial x_k} + i \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial x_j} \right) u(z) dV =$$

$$= \frac{1}{4} \mathbf{e}_{j,k} (-1)^{k+j-2} a_{jk}(z) (\mathcal{D}_j - i \mathcal{D}_{n+j})(\mathcal{D}_k + i \mathcal{D}_{n+k}) u(z) dV.$$

Bu yerda $z_k = x_k + ix_{n+k}$, $k = 1, \dots, n$ deb o'zgaruvchilarni almashtirdik.

Endi $dd^c u$ operatorning xarakteristik formasini tuzamiz. U quyidagi ko'rinishga ega bo'lib, $x \in \mathbb{R}^{2n}$ ning ikkinchi darajasi bo'yicha bir jinsli ko'phadni ifodalaydi:

$$P(z, x) = \sum_{j,k} (-1)^{k+j-2} a_{jk}(z) (x_j - ix_{n+j})(x_k + ix_{n+k}).$$

Bu yerda $\overline{a_{jk}(z)} = a_{kj}(z)$ shartga ko'ra $\overline{P(z, x)} = P(z, x)$ tenglikni olamiz. .

Binobarin, $P(z, x)$ ko'phad haqiqiy va u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$P(z, x) = \sum_{j,k} (-1)^{k+j-2} a_{jk}(z) x_j x_k + \sum_{j,k} (-1)^{k+j-2} a_{jk}(z) x_{n+j} x_{n+k}$$

Agar biz $w_1 = \sum_{j,k} x_j x_k dz_j \wedge d\bar{z}_k$ va $w_2 = \sum_{j,k} x_{n+j} x_{n+k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ formalarni

qarasak, bu formalar bosh musbat formalarni aniqlashini ko'ramiz. Bu yerdan (2.2.2) munosabatga asosan $P(z, x) > 0$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan $P(z, x) = 0$ tenglik faqat va faqat $0 = x \in \mathbb{R}^{2n}$ da bajarilishi kelib chiqadi. Bu $dd^c u$ operatorning elliptikligini ko'rsatadi (q. [14]).

2.2.1-ta'rif. $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada $dd^c u = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi

ikki marta silliq $u(z) \in C^2(D)$ funksiyaga a - garmonik funksiya deyiladi.

Endi quyidagi xususiy hol uchun a - garmonik funksiyalar sinfini o'rganamiz. $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \check{Y}_+^n$ vektor uchun,

$$j(z) = a_1 z_1 \bar{z}_1 + a_2 z_2 \bar{z}_2 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n$$

funksiyani olamiz va ushbu formani qaraymiz:

$$dd^c j = \frac{i}{2} \bar{\partial} \partial j = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 j}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k =$$

$$= \frac{i}{2} (a_1 dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + a_2 dz_2 \wedge d\bar{z}_2 + \dots + a_n dz_n \wedge d\bar{z}_n).$$

$a = (dd^c j)^{n-1}$ deb olsak, u $(n-1, n-1)$ bidarajali qat'iy musbat differensial formani beradi. $D(D \wedge j^n)$ sohada berilgan $u \in OC^2$ funksiya uchun quyidagi operatorni qaraymiz:

$$dd^c u \wedge a = dd^c u \wedge (dd^c j)^{n-1}.$$

$$(dd^c j)^{n-1} = (n-1)! \prod_{j=1}^n a_1 a_2 \dots a_n \prod_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$$

Bu yerda ... belgi shu ko'paytmada j -had qatnashmasligini bildiradi.

$$(dd^c u) = \prod_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k \text{ tengliklardan}$$

$$dd^c u \wedge a = (n-1)! \prod_j a_1 a_2 \dots a_n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} dV$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Oxirgi tenglikdan ko'rinadiki u funksiya uchun $dd^c u \wedge a = 0$ tenglikni bajarilishi

$$\prod_j a_1 a_2 \dots a_n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} = 0 \quad (2.2.3)$$

tenglikni bajarilishi bilan ekvivalent ekan.

2.2.2-ta'rif. (2.2.3) tenglikni qanoatlantiruvchi $u \in OC^2(D)$ funksiya a - garmonik funksiya deyiladi.

a - garmonik funksiya sinfi $a \in h(D)$ kabi belgilanadi. $a = dd^c |z|^2$ bo'lgan holda bu o'zimizga ma'lum garmonik funksiya sinfiga ega bo'lamiz. a - garmonik funksiylarning ko'pchilik xossalari garmonik funksiylarning

xossalari kabi bo'lib, biz ularni keltirib o'tirmaymiz.

Ushbu teorema a - garmonik funksiyalarning geometrik xususiyatini ifodalaydi:

2.2.2-teorema. Agar $u(z)$ funksiya D sohada a - garmonik bo'lsa, u holda

z^0 OD nuqta va

$$E(z^0, r) = \left\{ z \in J^n : |z_1 - z_1^0|^2 + \dots + |z_n - z_n^0|^2 \leq r^2 \right\} \text{ MMD gipershar uchun}$$

$$u(z^0) = \frac{1}{V(r)} \int_{E(z^0, r)} u(t) dV(t)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $V(r)$ - gipershar hajmi va $dV(t)$ - hajm elementi.

Isbot: Umumiylikni buzmagani holda $z^0 = (0, 0, \dots, 0)$ OD bo'lsin deb olishimiz mumkin. Teoremaning isboti quyidagi sodda tasdiqdan kelib chiqadi: Agar u $Oa - h(D)$ bo'lsa, u holda

$$v(z_1, \dots, z_n) = u \left(\sqrt{a_2 \dots a_n} z_1, \dots, \sqrt{a_1 \dots a_n} z_j, \dots, \sqrt{a_1 \dots a_{n-1}} z_n \right)$$

funksiyaning D sohaning yuqoridagi chiziqli akslantirish natijasida hosil bo'lgan obrazi D^* da garmonik bo'ladi. Demak, v garmonik funksiya uchun o'rta qiymat haqidagi teorema asosan ixtiyoriy

$$B(0, r) = \left\{ z \in J^n : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq r^2 \right\} \text{ MMD}^* \text{ shar uchun}$$

$$v(0) = \frac{1}{V(r)} \int_{B(0, r)} v(x) dV(x)$$

Ushbu integralda o'zgaruvchini quyidagicha almashtiramiz:

$$\sqrt{a_1 \dots a_n} x_j = t_j \text{ yoki } dx_j = (\sqrt{a_1 \dots a_n})^{-1} dt_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

va $a_1 |t_1|^2 + \dots + a_n |t_n|^2 = r^2$ tenglikda $r^2 = r^2 a_1 \dots a_n$ deb belgilab

olamiz va bundan $r = \frac{r}{\sqrt{a_1 \dots a_n}}$ kelib chiqadi. Ellipsoidning hajmi uchun

$$\int_{E(0,r)} dV(t) = \int_{B(0,r)} (a_1 \dots a_n)^{n-1} dV(x) = (a_1 \dots a_n)^{n-1} V(r)$$

munosabat o'rinli bo'lishidan, quyidagi tenglik kelib chiqadi

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{1}{V(r)(a_1 \dots a_n)^{n-1}} \int_{a_1 |t_1|^2 + \dots + a_n |t_n|^2 \leq r^2} u(t_1, \dots, t_n) dV(t) = \\ &= \frac{1}{\int_{E(0,r)} dV(t)} \int_{a_1 |t_1|^2 + \dots + a_n |t_n|^2 \leq r^2} u(t_1, \dots, t_n) dV(t). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Shunday qilib, (2.2.4) integral ellipsoid bilan chegaralangan soha bo'yicha o'rta qiymatni bildiradi. Teorema isbot bo'ldi.

Shuningdek quyidagi teoremani o'rinli ekanligini ko'rish mumkin.

2.2.3-teorema. Agar $u(z)$ funksiya D sohada a - garmonik bo'lsa, u holda z^0 OD nuqta va

$$E(z^0, r) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : a_1 |z_1 - z_1^0|^2 + \dots + a_n |z_n - z_n^0|^2 = r^2 \right\}$$

uchun

$$u(z^0) = \frac{1}{s_n r^{2n-1}} \int_{\partial E(z^0, r)} u(x) ds(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $ds(x)$ - sirt elementi va s_n - birlik gipersharning sirt yuzasi.

III-BOB. a - subgarmonik funksiyalar

3.1. a - subgarmonik funksiyalar va ularning sodda xossalari

$D \subset \mathbb{C}^n$ sohada qat'iy musbat $(n-1, n-1)$ bidarajali differensial formani va $dd^c u \wedge \alpha$ operatorni qaraymiz. Bu operator elliptik operator bo'lishini yuqorida ko'rib o'tdik.

a - qat'iy musbat, yopiq, cheksiz silliq koeffisientli bo'lgan holda biz quyidagi a - subgarmonik funksiya ta'riflarini beramiz.

3.1.1-ta'rif. $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada berilgan $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ funksiya uchun quyidagi shartlar

$$1) u \text{ yuqoridan yarim uzluksiz, ya'ni } \overline{\lim_{z \rightarrow z^0}} u(z) = \lim_{e \rightarrow 0} \sup_{B(z^0, e)} u(z) \leq u(z^0);$$

2) umumlashgan funksiya (oqim) ma'nosida

$$\int_D dd^c u \wedge \alpha_{n-1}(w) = \int_D u \wedge dd^c w, \quad w \in F(D), \quad (3.1.1)$$

musbat, ya'ni $\int_D dd^c u \wedge \alpha_{n-1}(w) \geq 0$, $w \geq 0$ bajarilsa, bu yerda $F(D)$ - asosiy finit funksiyalar fazosi, u ga a - subgarmonik funksiya deyiladi.

Bu yerda agar $a = \frac{1}{2} dd^c |z|^2$ bo'lsa, biz mos ravishda potentsiallar nazariyasidagi yaxshi tadqiq qilingan subgarmonik funksiya ta'rifiga ega bo'lamiz.

a - subgarmonik funksiyalar sinfini a - $sh(D)$ orqali belgilaymiz. (3.1.1) dan $u \in a - sh(D)$ uchun $dd^c u \wedge \alpha$ oqim (umumlashgan funksiya) musbat va shuning uchun u musbat borel o'lchovini ifodalashi kelib chiqadi: $dd^c u \wedge \alpha = m$. m o'lchov $u(z)$ funksiyaning assosirlangan o'lchovi deyiladi.

Endi xususiylashtirilgan holda a - subgarmonik funksiyalar sinfi xossalarni

o'rganamiz.

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \text{ vektor, } j(z) = a_1 z_1 \bar{z}_1 + a_2 z_2 \bar{z}_2 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n$$

funksiya va $D(D \text{ MJ}^n)$ sohada berilgan $u \in C^2$ funksiya uchun quyidagi operatorni qaraymiz:

$$dd^c u \wedge \omega = dd^c u \wedge (dd^c j)^{n-1} = (n-1)! e^{-j} a_1 a_2 \dots a_n \frac{\omega^2 u}{\omega_{z_j} \omega_{\bar{z}_j}} dV.$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu yerda $\dots$ belgi shu ko'paytmada j -had qatnashmasligini bildiradi.

3.1.2-ta'rif. $D \text{ MJ}^n$ soha berilgan bo'lsin. Ushbu

$$e^{-j} a_1 a_2 \dots a_n \frac{\omega^2 u}{\omega_{z_j} \omega_{\bar{z}_j}} \geq 0$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $u \in C^2(D)$ funksiyaga a - subgarmonik funksiya deyiladi.

a - subgarmonik funksiya quyidagi xossalarga ega.

a) a - subgarmonik funksiyaning musbat koeffitsientli chiziqli kombinatsiyasi yana a -subgarmonik funksiya bo'ladi ya'ni

$$u_k(z) \in a - sh(D), b_k \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow b_1 u_1(z) + b_2 u_2(z) + \dots + b_m u_m(z) \in a - sh(D)$$

$$k = \overline{1, m}$$

Bu yerda ham subgarmonik funksiyaning xossasi kabi xossa o'rinli.

3.1.1-teorema. Agar $u(z)$ funksiya D sohada a - subgarmonik bo'lsa, u

holda $z^0 \in D$ nuqta va

$$E(z^0, r) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : a_1 |z_1 - z_1^0|^2 + \dots + a_n |z_n - z_n^0|^2 \leq r^2 \right\} \text{ MMD gipershar uchun}$$

$$u(z^0) \leq \frac{1}{V(r)} \int_{E(z^0, r)} u(t) dV(t)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $V(r)$ - gipershar hajmi va $dV(t)$ - hajm elementi.

Bu o'rta qiymat haqidagi teorema yordamida a - subgarmonik funksiyalarning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

b) Chekli sondagi a - subgarmonik funksiyaning maksimumi ham a - subgarmonik funksiya bo'ladi ya'ni

$u_1(z), u_2(z), \dots, u_m(z)$ O a - $sh(D)$ IO $\max\{u_1(z), u_2(z), \dots, u_m(z)\}$ O a - $sh(D)$.

c) Monoton kamayuvchi a - subgarmonik funksiyalar ketma-ketligining limiti a - subgarmonik funksiya bo'ladi ya'ni

$u_j(z)$ O a - $sh(D)$, $u_j(z)$ i $u_{j+1}(z)$ IO $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(z)$ O a - $sh(D)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

d) Tekis yaqinlashuvchi a -subgarmonik funksiyalar ketma-ketligi yana a - subgarmonik funksiya ga yaqinlashadi ya'ni

$u_j(z)$ O a - $sh(D)$, $u_j(z) \xrightarrow{\mathbb{R}} u(z)$ IO $u(z)$ O a - $sh(D)$, ($k = 1, 2, 3, \dots$)

e) *Maksimum prinsipi*. Agar $u(z)$ O a - $sh(D)$ funksiya biror z^0 O D nuqtada o'zining maksimumiga erishsa, ya'ni

$$u(z^0) = \sup_{x \in D} u(x)$$

bo'lsa, u holda $u(z) = \text{const}$ bo'ladi..

f) a - subgarmonik funksiyalar fazosida metrika quyidagi ko'rinishga yega:

$$r(z, w) = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i |z_i - w_i|^2}$$

$D \subset \mathbb{C}^n$ sohada aniqlangan

$$u : D \rightarrow [-\infty, \infty)$$

funksiya berilgan bo'lsin.

3.1.3-ta'rif. Quyidagi ikkita shart o'rinli bo'lsa:

1) $u(z)$ yuqoridan yarim uzluksiz, ya'ni

" $z^0 \in D$ uchun $\lim_{z \rightarrow z^0} u(z) = u(z^0)$ "

2) har bir $z^0 \in D$ nuqta uchun shunday $r(z^0) > 0$ topiladiki, $r \in (r(z^0), r(z^0) + \delta)$ uchun

$$u(z^0) \leq \frac{1}{V(r)} \int_{B(z^0, r)} u(t) dV(t) + \frac{1}{r^2} \int_{\partial B(z^0, r)} u(t) dS(t)$$

shartni qanoatlantirsa, u holda $u(z)$ funksiya D sohada a - subgarmonik funksiya deyiladi.

a - subgarmonik funksiya va subgarmonik funksiyalarni farqli jihatlarini ko'rsatuvchi misollarni ko'rib o'tamiz.

3.1.1-misol: $\mathbb{C}^3$ fazoda bizga $a = (3, 1, 2) \in \mathbb{C}_+^3$ vektor berilgan bo'lsin.

$u = -5|z_1|^2 + 6|z_2|^2 - 2|z_3|^2$ bu funksiya subgarmonik funksiya emas, lekin a - subgarmonik funksiya bo'ladi.

Haqiqatan ham,

$$\Delta u = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z_3 \partial \bar{z}_3} = 4(-5 + 6 - 2) = -4 < 0$$

bundan ko'rinib turibdiki u funksiya subgarmonik funksiya emas ekan, lekin quyidagiga asosan

$$\Delta_a u = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial z_3 \partial \bar{z}_3} = 4(-10 + 36 - 6) = 80 > 0$$

ya'ni u a - subgarmonik funksiya ekan.

3.2. a - subgarmonik funksiyalarning Riss tasviri

Elliptik operatorlar nazariyasidan yaxshi ma'lumki, $dd^c u$ operator ikkinchi tartibli elliptik operator bo'lgani uchun $\mathbb{C}^n$ fazoda tayinlangan $w \in \mathbb{C}^n$ nuqtaga nisbatan $K_a(z, w)$ fundamental yechim mavjud: $dd^c K_a = d(z - w)$, bu yerda $d(z - w)$ - $w \in \mathbb{C}^n$ nuqtadagi Dirak o'lchovi va shu bilan birga $K_a(z, w)$ $\mathbb{C}^n$ da $z = w$ dan tashqarida cheksiz silliq funksiyani ifodalaydi va shu bilan birga $z = w$ nuqta atrofida quyidagi baholash

o‘rinli: (q. [1], [13])

$$\left| D^b K_a(z, w) \right| \leq \begin{cases} \text{const} |z - w|^{-2n - |b| + 2}, & 2n + |b| > 2 \\ \ln |z - w|, & n = 1, b = 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

$K_a(z)$ fundamental yechim $dd^c u$ operator subyechimining Riss tasviri yadrosi bo‘lib xizmat qiladi.

3.2.1-teorema. Agar $u \in O_a - sh(D)$ bo‘lsa, u holda istalgan $G \subset M(D)$ kompakt qism sohada quyidagi tasvir o‘rinli:

$$u(z) = \int_G K_a(z - w) dm_w + F(z), \quad z \in G, \quad (3.2.2)$$

bu yerda $F(z)$ - G sohadagi biror a - garmonik funksiya.

Isbot. Bu teoremani isbotlash uchun quyidagi ayirmani qaraymiz:

$$F(z) = u(z) - \int_G K_a(z - w) dm_w.$$

Yuqorida aytib o‘tganimizdek, agar $u \in O_a - sh(D)$ bo‘lsa, u holda Riss-Markov teoremasiga (q. [6]) ko‘ra unga m assosiirlangan o‘lchov mos keladi:

$$dd^c u = m. \quad \text{Endi} \quad u_m(z) = \int_G K_a(z - w) dm_w \quad \text{deb belgilaymiz va}$$

$dd^c u_m = m$ ekanini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham, $K_a(z)$ fundamental yechim

uchun tayinlangan $w \in J^n$ nuqtaga nisbatan $dd^c K_a(z - w) = d(z - w)$

tenglikka ega bo‘lamiz. Istalgan $w \in F^{(0,0)}(D)$, $w \neq 0$ uchun a formaning yopiqligidan foydalanib,

$$\begin{aligned} \int_G dd^c u_m = \int_G dd^c \left(\int_G K_a(z - w) dm_w \right) &= \int_G \int_G dd^c K_a(z - w) dm_w = \int_G \int_G d(z - w) dm_w = \int_G d(z - w) dm_w = m \end{aligned}$$

tenglikni olamiz. Shuning uchun G sohada

$$dd^c F(z) \llcorner a = dd^c u(z) \llcorner a - dd^c u_m(z) \llcorner a = m - m = 0.$$

tenglikka egamiz. Binobarin $F(z)$ funksiya G sohada a - garmonik funksiyani ifodalaydi.

Endi bu tasvirning yagona ekanini ko'rsatamiz. Haqiqatan G sohada $u(z) = u_n(z) + F_G(z)$ tenglik o'rinli bo'lsin, bu yerda n - G sohadagi biror chekli o'lchov, $F_G(z) \in O(a - h(G))$, u holda

$$dd^c u \llcorner a = dd^c u_n \llcorner a + dd^c F_G(z) \llcorner a = n,$$

ya'ni $n(G) = m(G)$ ni olamiz. Bu yerdan $F(z) = F_G(z)$ ekani kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Endi 3.1 da kiritilgan hususiy hol uchun a - subgarmonik funksiyalar sinfida yuqoridagi masalani qarab chiqamiz.

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \check{Y}_+^n$ vektor uchun,

$$j(z) = a_1 z_1 \bar{z}_1 + a_2 z_2 \bar{z}_2 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n$$

funksiyani olamiz va $a = (dd^c j)^{n-1}$ bo'lgan holda quyidagi operatorni qaraymiz:

$$dd^c u \llcorner a = (n-1)! \sum_j a_1 a_2 \dots a_n \frac{\|u\|_{z_j}^2}{\|z_j\|_{\bar{z}_j}} dV,$$

bu yerda $\sum_j$ belgi shu ko'paytmada j -had qatnashmasligini bildiradi,

$$dV = \prod_{j=1}^n dz_j \wedge \bar{z}_j \wedge \dots \wedge dz_n \wedge \bar{z}_n \in \check{Y}^{2n}$$
 dagi hajm formasi.

Bu operator ham elliptik operator bo'lib, quyidagi teorema uning fundamental yechimi ko'rinishini aniq tasvirlash imkonini beradi.

3.2.2-teorema. Berilgan $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \check{Y}_+^n$, $n \geq 2$ vektor uchun ushbu

$$K(z) = \frac{1}{(n-1) \wp(a_1 z_1 \bar{z}_1 + a_2 z_2 \bar{z}_2 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^{n-1}} \quad (3.2.3)$$

funksiya quyidagi

$$dd^c u \equiv 0 \quad (3.2.4)$$

elliptik tenglamaning fundamental yechimi bo'ladi.

Isbot: Bu yadrodan xususiy hosilalarni olamiz:

$$\frac{\wp K(z)}{\wp z_1} = \frac{1}{(n-1)} \wp \frac{a_1 \bar{z}_1 (n-1)}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n} = \frac{a_1 \bar{z}_1}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n},$$

$$\frac{\wp K(z)}{\wp z_2} = \frac{1}{(n-1)} \wp \frac{a_2 \bar{z}_2 (n-1)}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n} = \frac{a_2 \bar{z}_2}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n},$$

... ..

$$\frac{\wp K(z)}{\wp z_n} = \frac{1}{(n-1)} \wp \frac{a_n \bar{z}_n (n-1)}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n} = \frac{a_n \bar{z}_n}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n}$$

endi bu xususiy hosiladan $\bar{z}_j$, ($j = 1, \dots, n$) bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{\wp^2 K(z)}{\wp z_1 \wp \bar{z}_1} = \frac{a_1}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n} - \frac{n a_1^2 z_1 \bar{z}_1}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^{n+1}},$$

$$\frac{\wp^2 K(z)}{\wp z_2 \wp \bar{z}_2} = \frac{a_2}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n} - \frac{n a_2^2 z_2 \bar{z}_2}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^{n+1}},$$

... ..

$$\frac{\wp^2 K(z)}{\wp z_n \wp \bar{z}_n} = \frac{a_n}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n} - \frac{n a_n^2 z_n \bar{z}_n}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^{n+1}}$$

Topilgan bu qiymatlarni (3.2.4) tenglikga qo'yamiz:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n a_1 a_2 \dots a_n \frac{\mathbb{U}^2 u}{\mathbb{U} z_j \mathbb{U} \bar{z}_j} = a_2 a_3 \dots a_n \frac{\mathbb{U}^2 u}{\mathbb{U} z_1 \mathbb{U} \bar{z}_1} + \dots + a_1 a_3 \dots a_{n-1} \frac{\mathbb{U}^2 u}{\mathbb{U} z_n \mathbb{U} \bar{z}_n} = \\
& = a_2 a_3 \dots a_n \frac{a_1}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n} - \frac{n a_1^2 z_1 \bar{z}_1}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^{n+1}} + \\
& + a_1 a_3 \dots a_n \frac{a_2}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n} - \frac{n a_2^2 z_2 \bar{z}_2}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^{n+1}} + \dots + \\
& + a_1 a_2 \dots a_{n-1} \frac{a_n}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n} - \frac{n a_n^2 z_n \bar{z}_n}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^{n+1}} = \\
& = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n} - \frac{n a_1^2 a_2 a_3 \dots a_n z_1 \bar{z}_1}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^{n+1}} + \\
& + \frac{a_1 a_2^2 a_3 \dots a_n}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n} - \frac{n a_1 a_2^2 a_3 \dots a_n z_2 \bar{z}_2}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^{n+1}} + \dots + \\
& + \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n} - \frac{n a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n^2 z_n \bar{z}_n}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^{n+1}} = \\
& = n a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \frac{1}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^n} - \frac{a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n}{(a_1 z_1 \bar{z}_1 + \dots + a_n z_n \bar{z}_n)^{n+1}} = 0
\end{aligned}$$

bundan esa (3.2.3) ning (3.2.4) ni fundamental yechimi ekanligi kelib chiqadi.

Xulosa

Ushbu magistrlik dissertatsiyasida subgarmonik funksiyalarning kengaytmasi bo'lgan a - subgarmonik funksiyalar sinfining ba'zi xossalari o'rganilgan. a - qat'iy musbat $(n - 1, n - 1)$ bidarajali differensial forma bo'lgan holda $dd^c u$ operatorning elliptikligi isbotlanib, bu operatorning subyechimi sifatida a - subgarmonik funksiyaning Riss tasviri o'rganildi. Xususiyl holda a - subgarmonik funksiyalarning o'rta qiymat haqidagi xossasi isbotlandi va Riss yadrosining aniq tasviri topildi.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Алимов Ш.А. Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций// Дифференц. уравнения. 1972. Т.8. с. 1609-1626.
2. Владимиров В.С. Методы теории функций многих комплексных переменных. – М.: Наука, 1964. – 411 с.
3. Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966.–515с.
4. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: ИЛ, 1957.– 256 с.
5. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
6. Садуллаев А. Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium Academic Publishing, Германия, 2012. -308 с.
7. Садуллаев А.С. Голоморфные функции многих переменных. – Ургенч: 2005. – 168 с.
8. Садуллаев А., Мадрахимов Р. Гладкость субгармонических функций. Матем.сб., том 181, №2, 1990, ст. 167-182.
9. Садуллаев А.С., Плюрисубгармонические функции// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНТИ, 1985.- Т. 8. - с. 65 – 111.
10. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. – М.: Наука, 1968. – 208 с.
11. Уэрмер Дж. Теория потенциала. М.,МИР, 1980.
12. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. –304 с.
13. Хёрмандер Л. О средних Рисса спектральных функций эллиптических дифференциальных операторов и соответствующих

- спектральных разложениях// Математика(Сб. переводов). 1968. Т.12. №5. С.91-130.
14. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. –380с.
 15. Чирка Е.М. Комплексные аналитические множества. – М.: Наука, 1985
 16. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. В 2-х ч. – М.: Наука, 1985. Часть 2.– 464 с.
 17. Abdullayev B.I. Subharmonic functions on complex Hyperplanes of J^n // Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, - Krasnoyarsk, 2013 №6(4), pp.409-416.
 18. Demailly J.P. Complex Analytic and differential geometry. Universite de Grenoble I Institut Fourier, UMR 5582, France,1997. -518 p.
 19. Harvey F. R. and Lawson H. B. Jr., An introduction to potential theory in calibrated geometry // Amer. J. Math. 131, 4.2009, pp.893-944.
 20. Harvey F. R. and Lawson H. B. Jr., Duality of positive currents and plurisubharmonic functions in calibrated geometry // Amer. J. Math. 131 no. 5, 2009, pp.1211-1240.
 21. Ваисова М. Теория плюрипотенциала a - субгармонических функций// УзМЖ – Ташкент, 2016 г., №3, с.46-52.
 22. Атамуратов А., Ваисова М., Обиджанов И. a - субгармоник функцияларнинг баъзи муҳим хоссалари// Илм сарчашмалари.-Урганч, 2016,-№6. –3-8 б
 23. Атамуратов А., Ваисова М., Обиджанов И. a - субгармоник функцияларнинг Рисс тасвири// Илм сарчашмалари.-Урганч, 2017,- №2. – - б

Internet manbalari:

1. <http://www.mathnet.ru> (Rossiya matematika sayti)

2. <http://www.arxiv.org> (yangi maqolalar sayti)
3. <http://www.eknigu.com/lib/mathematics/>
http://www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC
4. <http://www.rsl.ru/> - Российская государственная библиотека;
5. <http://www.msu.ru/> - Московский государственный университет;
6. <http://www.nlr.ru/> - Российская национальная библиотека;