МИНИСТЕРСТВО ПО РАЗВИТИЮ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОММУНИКАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НУКУССКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ИМЕНИ МУХАММАДА АЛ-ХОРАЗМИ

Кафедра информационные образовательные технологии

«Профессиональное образования в сфере ИКТ»

Допуск к защите

зав. кафедрой________

2017 г. «____» __________

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему **«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ЯЗЫКЕ С++»**

Выпускник: Жолдасбаев А.

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Алламуратов Ш.

Рецензент: д.т.н. Отениязов Р.

НУКУС - 2017 г.

МИНИСТЕРСТВО ПО РАЗВИТИЮ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
И КОММУНИКАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НУКУССКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ИМЕНИ
МУХАММАДА АЛ-ХОРАЗМИ

Кафедра информационные образовательные технологии

У Т В Е Р Ж Д А Ю
Зав. кафедрой ___________
«____» __________ 2017 г.

ЗАДАНИЕ

на выпускную квалификационную работу студента Жолдасбаева Азамата на тему «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ЯЗЫКЕ C++»

Тема утверждена приказом НФ ТУИТ от «____» __________ 2017г.
Срок сдачи законченной работы «____» _____________ 2017 г.
Исходные данные к работе: материалы дипломной практики, лекционные материалы, научные книги и материалы из интернета
Содержание расчётно-пояснительной записки (перечень подлежащих к разработке вопросов)
Введение
Гл.1. Понятие о дифференциальном уравнении
Гл.2. Приближенные методы решения задачи Коши
Гл.3. Численные методы решения краевых задач в обыкновенных дифференциальных уравнениях.
Заключение

Дата выдачи задания «____» __________ 2017 г.

Руководитель __________

Задание принял __________

Консультанты по отдельным разделам выпускной работы

Наименование Раздела	Консультант	Подпись, дата	
		Задание выдал	Задание получил
1	Алламуратов Ш		
2	Алламуратов Ш		
3	Алламуратов Ш		

График выполнения работы

№	Наименование раздела	Срок выполнения	Подпись руководителя (консультанта)
1.	Гл.1. Понятие о дифференциальном уравнении	12.03.2017 г.	
2.	Гл.2. Приближенные методы решения задачи Коши	03.04.2017 г.	
3.	Гл.3. Численные методы решения краевых задач в обыкновенных дифференциальных уравнениях.	10.05.2017 г.	

Выпускник _________________ «____»___________2017 г.

Руководитель _________________ «____»___________2017 г.

АННОТАЦИЯ

В данной выпускной квалификационной работе рассмотрены обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка и постановка задачи Коши. Кроме того приведены численные методы решения дифференциальных уравнении первого порядка на языке C++

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение, интегральная кривая, порядок уравнения, задачи Коши, решения уравнения, методы Адамса, метод Эйлера и Эйлера-Коши, метод прогонки.

ANNOTATSIYA

Mazkur bitiruv malakaviy ishida birinchi tartibli oddiy differentsial tenglama va unga qo'yilgan Koshi masalasi qaralgan. Bundan tashqari birinchi tartibli differentsial tenglamalarni echishning sonli usullari keltirilgan va S++ tilida sonli echilgan.

Kalit swzlar: Differentsial tenglama , integral` egri chiziq, tenglama tartibi, Koshi masalasi , tenglama echimi, Adams metodi , Eyler metod va Eyler-Koshi metodi , haydash metodi .

SUMMARY

In the given final qualifying work the ordinary differential equations of the first order and statement of a task Koshi are considered. Besides the numerical methods of the decision the differential equation of the first order in language C ++ are given.

Key words: the differential equation, integrated curve, order of the equation, task Kashi, decisions of the equation, methods Adams, method Eyler and Eyler-Koshi.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Актуальность темы: Многие задачи техники и природы приводится к нахождению неизвестный функции от изучаемого процесса или явления. Это в свою очередь приводит к решению дифференциального уравнения в начальных и граничных условиях.

Во многих случаях в поставленных граничных условиях аналитическую решении уравнении не возможно найти и решения находится с помощью численных методов приближённо. Приближённые методы достаточно не изучены. По этой причине тема с научной и практической точки зрении является актуальной.

Объект исследования: Объектом исследования является обыкновенные дифференциальные уравнения и граничные задачи поставленные на них. Методы приближённых решений обыкновенных дифференциальных уравнений приводится в литературах [ ].

Практическое значимость: Материалы выпускной работы можно использовать в качестве методических указаний к предметам «методы вычисления», «вычислительная математика» в лабораторных и практическим занятиям.

Например: Материальная точка с массой m падает вниз влиянием силой притяжения. Надо найти закон движения материальной точки [2].

Состояния материальной точки определяется координатой OM=S и он меняется в зависимости от времени t. По второму закону Ньютона:

$$ma = F$$

где

m - масса матеральной точки

a - ускорение

F – действующая сила

На материальную точку действует только сила притяжения:

$$F = m \cdot g$$

g – ускорение силы притяжения

a – ускорения это производный второго порядка

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = mg \quad \text{или} \quad \frac{d^2S}{dt^2} = g \qquad (1)$$

(1) -это уравнение содержащий вторую производную от неизвестной функции.

Если эту уравнению дважды интегрировать по t мы находим искомую функцию:

$$\frac{dS}{dt} = gt + c_1 \qquad (2)$$

$$S = \frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2 \qquad (3)$$

Где c_1 и c_2 называется интегральными постоянными. Их можно определит зная начальную значение и начальную скорость материальной точки [10]. Пуст скорость материальной точки в начальной момент t=0 времени равно V_0 а его расстояние от начало координаты равно S_0. Из (2) уравнения находим $C_1=V_0$. Из (3) находим $C_2=S_0$. Тогда закон движения будет

$$S = \frac{gt^2}{2} + V_0 t + S_0$$

Состав работы: Данная выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключении и списка использованных литератур.

В первом параграфе приведены общие понятие о дифференциальных уравнениях, во втором параграфе задача Коши и его постановка и метод Адамса.

В третьем параграфе приведены численные методы решения краевых задач в обыкновенных дифференциальных уравнениях как метод коллокации, метод прогонки, и метод Галеркина. В пункте 3.3 для задачи Коши на языке С++ было построено программное обеспечение.

ГЛАВА 1. ПОНЯТИЕ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Опредление: Дифференциальным уравнением называется такое уравнение, которое содержит искомую функцию, производные от искомой функции и независимую переменную.

Если неизвестная функция зависит только от одной переменной то такое уравнение называется обыкновенной дифференциальной уравнением.

Если неизвестная функция зависит от двух или несколько переменных то такое уравнения называется дифференциальное уравнения в частных производных.

Определение: Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком этого уравнения.

Например:

$y'' - y' cosx - x^2 y = 0$ - дифференциальное уравнение второго порядка.

$x(1-y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$ - дифференциальное уравнение первого порядка.

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (4)$$

дифференциальное уравнение n- го порядка, где x – свободный переменный, y – неизвестная функция $y', y'', ..., y^{(n)}$ - производные от неизвестных функции.

Определение: Всякая функция $y = \varphi(x)$, определенная и непрерывная в интервале (a,b) вместе со своими производными до порядка, равного порядку данного дифференциального уравнения, и обращающая это уравнение в тождество, справедливое при всех значениях x из интервала (a,b), называется решением этого уравнения в интервале (a,b).

Например: Является ли функции $y=3e^x$ и $y=4e^{-x}$ решением данного дифференциального уравнения ?

а) $y=3e^x$; $y'=3e^x$; $y''=3e^x$.

$y''-y=0$, $3e^x-3e^x = 0$; $0=0$

Значит, $y=3e^{x}$ функция является решением уравнения

b) $y=4e^{-x}$; $y'=-4e^{-x}$; $y''=4e^{-x}$.

$y''-y = 0 \Rightarrow 4e^{-x}-4e^{-x}=0; \Rightarrow 0=0$

Значит, $y=4e^{-x}$ функция тоже является решением данного уравнения.

Определение: График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения.

Процесс нахождения решении дифференциального уравнения называется интегрированием. Согласно определению, данному выше, уравнение первого порядка имеет следующий вид:

$$F(x,y,y')=0 \qquad (5)$$

Если можно решит в отношении y' то его можно написать следующим образом:

$$y'=f(x,y) \qquad (6)$$

Или

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy \qquad (7)$$

Такой надпись называется симметрическим, потому что переменные x и y равноправные.

Дифференциальную уравнению могут удовлетворить не одно функция а целый класс функции.

$$y(x_0)=y_0 \qquad (8)$$

называется начальной условием для дифференциального уравнения [3].

Определение: Общим решением $y'=f(x,y)$ дифференциального уравнения первого порядка называется $y=\varphi(x,c)$ функция удовлетворяющая следующих условий: (где c –произвольная постоянная)

a) Он в любом значении c удовлетворяет дифференциального уравнения

b) В любом начальном условии $y(x_0)=y_0$ можно найти для c – произвольной постоянной такое значение c_o , который $y=\varphi(x,c_0)$ функция удовлетворяет начальную условию $y_0=\varphi(x_0,c_0)$

Определение: Из общего решения при любом значения произвольной постоянной можно получить частное решения.

1.1. Уравнение с разделяющимися переменными.

Рассмотрим уравнение вида

$$P(x)dx+Q(y)dy=0 \qquad (9)$$

в котором коэффициент при dx является функцией только от x, а коэффициент при dy- функцией от y. В подобных случаях говорят, что в дифференциальном уравнении переменные разделены.

Будем предполагать, что функции $P(x)$ *и* $Q(y)$ непрерывны при рассматриваемых значениях x и y.

Общий интеграл можно записать в виде:

$$\int (P(x)dx+Q(y)dy)=\int odx$$

$$\int P(x)dx+\int Q(y)dy=C$$

Пример 1. $xdx+ydy = 0$ проинтегрировав получим общую решению

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{2}=C \quad \cdot 2$$

$$x^2+y^2=2C$$

Если взять $2S = C_1^2$, то получим $x^2+y^2=C_1^2$. Это концентрические круги с центром в начале координат и радиусом C_1 .

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)dy=0 \qquad (10)$$

то оно называется уравнением с разделяющимися переменными.

Будем предполагать, что все функции, входящие в уравнение (10) непрерывны при рассматриваемых значениях x и y. Чтобы разделить переменные в уравнении (10), надо разделить обе его части на «лишние» множители, т.е. на произведение $Q_1(y)\cdot P_2(x)\neq 0$

Получим

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0$$

Интегрируя, находим общий интеграл.

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C$$

Памятка: Уравнение вида $y'=f_1(x)f_2(y)$ так же называется уравнение с разделяющимися переменными. Его можно привести к виду

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$$

и умножая обе части на $\frac{dx}{f^2(y)}$ разделим переменных. $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$ Интегрируя обе части находим общий интеграл.

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + c$$

Пример 2. $x(1+y_2)dx-y_2(1+x_2)dy = 0$

$x(1+y_2)dx=y_2(1+x_2)dy$

$$\frac{y^2}{1+y^2}dy = \frac{x}{1+x}dx$$

Интегрируя , $$\int \frac{y^2+1-1}{1+y^2}dy = \int \frac{d(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2})}{1+x^2}$$

$$\int dy - \int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2}$$

$$y - arctgy = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

Пример 3: Найти частное решение дифференциального уравнение $y'y = \frac{e^x}{1+e^x}$ в следующих начальных условиях y(0) = √2;

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln\left|1+e^x\right| + \ln c$$

$$y = \sqrt{2\ln\left[c\cdot(1+e^x)\right]}$$ -общая решение

Находим $\sqrt{2} = \sqrt{2\ln\left[c(1+e^0)\right]}; c = \dfrac{e}{2}$

тогда $y = \sqrt{2\ln\dfrac{e}{2}(1+e^x)}$ - частное решение .

Однородное уравнение.

Однородная функция двух независимых переменных определяется следующим образом: функция f(x,y) называется однородной функцией степени n, если в результате умножения обоих ее аргументов x и y на одну и ту же величину t она приобретает множитель t^n :

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) \tag{12}$$

Если при умножении x и y на t функция f(x,y) сохраняет своё значение:

$$f(tx,ty) = f(x,y)$$

в формуле (12) n=0 то она называется однородной функцией нулевой степени.

Всякая однородная функция нулевой степени является функцией от отношения ее аргументов:

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Действительно, полагая в соотношении (12) $t = \dfrac{1}{x}$ получим

$$f\left(1,\ \frac{y}{x}\right) = f(x,y)$$

Но $f\left(1,\ \dfrac{y}{x}\right)$ есть функция от $\dfrac{y}{x}$: обозначив ее через $\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ получим

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Например если дифференциальное уравнение y’=f(x,y) правая сторона содержить однородную функцию нулевой степени то его можно записать в следующем виде

$$y'=\varphi(\frac{y}{x}) \tag{13}$$

Обозначим

$\frac{y}{x}=u$ *тогда* $y=u\cdot x$; и получим $y'=u'x+u$ поставив на (13)

получим: $\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$; проинтегрировав $\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$ потом на месте u вставляя $\frac{y}{x}$ и получим общую решению.

Пример 4. Найти общую решению однородного уравнение $y'=\frac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}$ или $y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}$

$$\frac{y}{x}=u.;y=ux;y'=u'x+u$$

$$u'x+u=u+\sqrt{1-u^2};\frac{du}{dx}\cdot x=\sqrt{1-u^2}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x};\ \arcsin u=\ln x+\ln c;u=Sin(\ln(cx));\ u=\frac{y}{x}$$

Отсюда ,

$$\frac{y}{x}=Sin(\ln Cx);y=x\cdot Sin(\ln Cx)$$

Дифференциальное уравнение приводящаяся к однородным

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} \tag{14}$$

Называется приводящимися к однородным уравнениям .

Если $c=c_1=0$ то делаем замену переменных,

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \alpha \\ y &= y_1 + \beta \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

dx=dx₁; *dy=dy₁* ; $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$ эти поставляя к (16) ,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{(ax_1 + by_1 + (a\alpha + b\beta + c)}{(a_1x_1 + b_1y_1) + (a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1)} \qquad (16)$$

получим .

$$\left.\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Решаем в отношении α и β.

Если $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ то система (17) не имеет решении. Уравнение (16) приводится к уравнению разделяющимися переменным после замены $z=ax+by$.

Пример 5: Найти общую решению уравнении $y' = \frac{x+y-3}{x-y-1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \qquad \begin{cases} x = x_1 + \alpha \\ y = y_1 + \beta \end{cases}$$

Делаем замену переменных:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + \alpha + \beta + 3}{x_1 - y_1 + \alpha - \beta - 1}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 3 = 0 \\ \alpha - \beta - 1 = 0 \end{cases}$$

Решая получим, $\alpha=2$; $\beta=1$

В итоге получим однородное уравнение $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$. Интегрируя получим,

$$arctgu - \frac{1}{2}\ln(x_1 + u^2) = \ln x_1 + \ln c; \quad cx_1\sqrt{1+u^2} = e^{arctg\frac{y_1}{x_1}}$$

$u = \frac{y_1}{x_1}$ подставляя получим, $cx_1\sqrt{1+\frac{y_2}{x_2}} = e^{arctg\frac{y-1}{x-2}}$

где $x_1=x-2;\ y_1=y-1$

Пример 6. Найти общую решению уравнения $y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ значит, $\left.\begin{matrix} x = x_1+\alpha \\ y = y_1+\beta \end{matrix}\right\}$ замену делать невозможно

Делая замену переменных с помощью функции $2x+y=z$ получим уравнению с разделяющимися переменными $y' = z'-2; z'-2 = \frac{z-1}{2z+5}$ или

решая $z' = \frac{5z+9}{2z+5}$ получим $\frac{2}{5}z + \frac{7}{25}\ln|5z+9| = x+c$

Подставляя $z=2x+y$, находим общую решению.

$10y-5x-c = 7\ln|10x+5y+9|$.

1.2. Линейное уравнение первого порядка

Уравнение вида

$$y' + P(x)\, y = Q(x) \tag{18}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ известные функции от x, которое содержит искомую функцию y и ее производную только в первых степенях и не содержит произведения их, является линейным уравнением.

Если $Q(x) = 0$ то уравнение называется однородным $y' + P(x)\, y = 0$

Ее можно решать разделяя переменных. Пусть $Q(x) \neq 0$ тогда (18) уравнению можно решить с двумя способами.

1. Метод вариации произвольной постоянной.

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

В (18) уравнении взяв $y'+P(x)y=0$ соответствующую однородную уравнению решаем $y'=-P(x)y$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx; \ \ln y = -\int P(x)dx + \ln c; \quad y = Ce^{-\int P(x)dx},$$

где с=$c(x)$. тогда

$$y' = ce^{-\int P(x)dx} \cdot (-\int P(x)dx)' + c' \cdot e^{-\int P(x)dx} = -cP(x)e^{-\int P(x)dx} + c'^{e-\int P(x)dx} = (c' - cp(x))e^{-\int P(x)dx}$$

y и y’ поставим на (18)

$$-cP(x)e^{-\int P(x)dx} + c'e^{-\int P(x)dx} + P(x)ce^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$c'e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$dc = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

Проинтегрировав получим

$$c = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

Значит $y = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \cdot e^{-\int P(x)dx}$ общий интеграл.

Второй метод.

Решению уравнении (18) представим в виде

$$y=u(x)\cdot v(x) \tag{19}$$

берём производную :

$$y'=u'v+uv'$$

у и у’ подставим на (18):

$$u'v+uv'+P(x)uv=Q(x)$$

$$u'v+u(v'+pv)=Q(x) \tag{20}$$

берем в виде:

$$v'+pv=0 \tag{21}$$

Тогда из (20) приходим к следующему:

$$u'v = Q \tag{22}$$

Сначала из (21) находим *v* .

$$\frac{dv}{dx}=-Pv; \quad \frac{dv}{v}=-Pdx; \quad \ln v=-\int Pdx; v=e-\int Pdx,$$

Зададим с=1, $v=e^{-\int Pdx}$

Поставляя это на (22)

$$\frac{du}{dx}\cdot e^{-\int Pdx}=Q, \; du=Qe^{\int Pdx}dx, \; u=\int Qe^{\int Pdxdx}dx+c$$

Тогда общий интеграл (18) уравнения:

$$y=u\cdot v=e^{-\int Pdx}(\int Qe^{\int Pdx}dx+c)$$

Пример 1

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{sinx}{x}; \qquad y=uv; y'=u'v+uv'; \; u'v+uv'+\frac{1}{x}uv=\frac{sinx}{x}$$

$$u'v+u(v'+\frac{1}{x}v)=\frac{sinx}{x};$$

$$1)v'+\frac{1}{x}v=0; \; \frac{dv}{dx}=-\frac{1}{x}v; \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$$

$$\ln v=-\ln v; \; v=-\frac{1}{x};$$

$$2)-u'-\frac{1}{x}=\frac{sinx}{x}; \; \frac{du}{dx}=-sinx; \; du=-sinxdx; \; u=cosx+c$$

Значит общая решения $y=-\frac{1}{x}(cosx+c)$

Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$y'+Py=Qy^n \tag{23}$$

называется уравнением Бернулли. где P,Q – непрерывные функции от x.

$$y'+Py=Qy^n \;/: y^n$$

$$y^{-n}y'+Py^{-n+1}=Q$$

Зделаем замену переменных взяв $z=y^{-n+1}$. Тогда получим линейную уравнению вида.

$$z'+(-n+1)Pz=(-n+1)Q$$

Найдя его общее решение, получим общее решение уравнения Бернулли по формуле

$$y = z^{\frac{1}{1-m}}$$

Уравнение в полных дифференциалах

Если левая часть дифференциального уравнения

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (24)$$

является полным дифференциалом некоторой функции u(x,y), т.е.

$$du= P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (25)$$

то уравнение (24) называется уравнением в полных дифференциалах. И он вычисляется формулой (26).

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy \qquad (26)$$

Сравнивая формул (25) и (26)

$$\frac{du}{dx} = P(x,y); \frac{du}{dy} = Q(x,y)$$

Отсюда находим частные производные

$$\frac{dP}{dy} = \frac{d^2u}{dxdy};$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2u}{dydx}.$$

Откуда

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \qquad (27)$$

Значит (24) уравнение только тогда будет в полных дифференциалах когда выполняется условия (27). Общая решения уравнении в полных дифференциалах находится по формуле

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt \qquad (28)$$

Общий интеграл

$$\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt=C \qquad (29)$$

точка (x_0,y_0) любая точка из области G.

Пример 2. Найти общий интеграл $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2xy}{3y^2+x^2}$.

$$(2xy-1)dx+(3y^2+x^2)dy=0$$

$P(x,y)=2xy-1;\quad Q(x,y)=3y^2+x^2$;

$$\frac{dP}{dy}=2x;\quad \frac{dQ}{dx}=2x$$

Значит уравнение в полных дифференциалах. Поставив $x_0=y_0=0$ с помощью формулы (29) находим общий интеграл уравнений:

$$\int_{x_0}^{x}(2t\cdot 0-1)dt+\int_{0}^{y}(3t^2+x^2)dt=C$$

$$\left[-t\right]_0^x+\left[t^3+x^2t\right]_0^y=C$$

или $-x+y^3+x^2y=C$

ГЛАВА 2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \quad , \tag{30}$$

и поставлено начальное условие

$$y(x_0) = y_0 . \tag{31}$$

Чтобы решить эту задачу применим метод последовательных приближений (метод Пикара)

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt ,$$

$$y_0(t) \equiv y_0 , \quad n = 1,2,...$$

Или разложим решение вокруг точки x_0 в ряд Тейлора и получаем приближенно - аналитическую решению.

$$y(x) \approx y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y^{(i)}(x_0) \frac{(x - x_0)^i}{i!} . \tag{32}$$

Эти оба методы имеет недостатков, во первом методе в каждом новом приближении должен вычисляться интеграл а во втором $|x - x_0|$ должен быт достаточно малой величиной. Иначе (32) ряд не сходится. По этой причине задачу Коши (30)-(31) изучаем решать другими методами.

Разностные методы

Пусть требуется решить задачу (30)-(31) на отрезке $[x_0, X]$. Заданной отрезок делим на N равных частей.

$$x_i = x_0 + ih, \; i = 1,2,..., N, \; N = \frac{X - x_0}{h}, \qquad h > 0$$

Решение задачи Коши (30)-(31) равносильно решению уравнении

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{33}$$

Но в (33) под интегралом присутствует неизвестная функция и это осложняет задачу. Последовательно в двух точках выполняется соотношение

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx. \tag{34}$$

Чтобы найти $y(x_{n+1})$, $y(x_n)$ и $y'(x) = f(x, y(x))$ должен находится на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$. По этому приходится вычислять приближенно интеграл в правой стороне (34).

2.1. Экстраполяционные и интерполяционные методы Адамса

Пусть известно значение функции $y(x)$ в точках $x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}$. Сделаем замену переменных $x = x_n + uh$. Тогда уравнение (34) примет следующий вид.

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x_n + uh)du. \tag{35}$$

Заменим $y'(x_n + uh)$ на интерполяционному формулу Ньютона.

$$y'(x_n + uh) = y'(x_n) + \frac{u}{1!}\Delta y'(x_{n-1}) + \frac{u(u+1)}{2!}\Delta^2 y'(x_{n-2}) + ... +$$

$$+ \frac{u(u+1)...(u+k-1)}{k!}\Delta^k y'(x_{n-k}) + r_k(u), \tag{36}$$

где

$$r_k(u) = h^{k+1}\frac{u(u+1)...(u+k)}{(k+1)!}y^{(k+2)}(\xi), \ \ x_{n-k} < \xi = \xi(u) < x_{n+1}, \qquad 0 \le u \le 1.$$

(36) подставляя в (35) и выполним операцию интегрирование получим

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\Big[y'(x_n) + \frac{1}{2}\Delta y'(x_{n-1}) + \frac{5}{12}\Delta^2 y'(x_{n-2}) +$$

$$+\frac{3}{8}\Delta^3 y'(x_{n-3})+...+C_k\Delta^k y'(x_{n-k})\Bigg]+R_k, \qquad (37)$$

где

$$C_k=\int_0^1\frac{u(u+1)...(u+k-1)}{k!}du, \qquad (38)$$

$$R_k=h\int_0^1 r_k(u)du=h^{k+2}\int_0^1\frac{u(u+1)...(u+k)}{(k+1)!}y^{(k+2)}(\xi)du.$$

Сохраняется знак $u(u+1)...(u+k)$, поэтому на основе теоремы о среднем значении и непрерывности $y^{(k+2)}(x)$ получаем.

$$R_k=h^{k+2}C_{k+1}y^{(k+2)}(\bar{\xi})du, \qquad x_{n-k}\le(\bar{\xi})\le x_{n+1}$$

Если взять $M_{k+2}=\max\limits_{x_{n-k}\le x\le x_n}\left|y^{(k+2)}(x)\right|$ то $C_k>0$ будеть

$$|R_k|=h^{k+2}C_{k+1}M_{k+2} \qquad (39)$$

Если $h>0$ достаточно малый $R_k=O(h^{k+2})$ и не пренебрегая ошибки, имеем экстраполяционную формулу Адамса:

$$y_{n+1}=y_n+h\left[y'_n+\frac{1}{2}\Delta y'_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 y'_{n-2}+\frac{3}{8}\Delta^3 y'_{n-3}+...+C_k\Delta^k y'_{n-k}\right]. \qquad (40)$$

Если в (40) $k=0$, то $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ - получаем метод Эйлера.

Если $k\ge 1$, $y_n,y_{n-1},...,y_{n-k}$ объявляя известными из (40) последовательно находится

$$y_{n+1},y_{n+2},...$$

Этот метод без труда можно применить к систему дифференциальных уравнении первого порядка для задачи Коши. Это продемонстрируем в следующей задаче:

$$y'=f(x,y,z), \qquad y(x_0)=y_0,$$

$$z'=\varphi(x,y,z), \qquad z(x_0)=z_0,$$

$$y_{n+1}=y_n+h\left[y'_n+\frac{1}{2}\Delta y'_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 y'_{n-2}+\frac{3}{8}\Delta^3 y'_{n-3}+...+C_k\Delta^k y'_{n-k}\right],$$

$$z_{n+1}=z_n+\tau\left[z'_n+\frac{1}{2}\Delta z'_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 z'_{n-2}+\frac{3}{8}\Delta^3 z'_{n-3}+...+C_k\Delta^k z'_{n-k}\right].$$

Интерполяционный метод Адамса.

Пусть нам известно решение задачи Коши (30)-(31) в точках $x_{n-k+1},...,x_{n+1}$ (неизвестно $y_{n+1}=y(x_{n+1})$). Значению решении в точке x_{n+1} напишем $y(x_{n+1})=y(x_n)+h\int_{-1}^{0}y'(x_{n+1}+uh)du$ и меняя $y'(x_{n+1}+uh)$ на конечную таблицу интерполяционную формулу Ньютона, выполняя интегрирования имеем следующую формулу.

$$y_{n+1}=y_n+h\left[y'_{n+1}-\frac{1}{2}\Delta y'_n-\frac{1}{12}\Delta^2 y'_{n-1}-\frac{1}{24}\Delta^3 y'_{n-2}+...+C_k\Delta^k y'_{n-k+1}\right], \quad (41)$$

где

$$C_k=\int_{-1}^{0}\frac{u(u+1)...(u+k-1)}{k!}du.$$

Ошибка (41) формулы

$$R_k=h^{k+2}C_{k+1}y^{k+2}(\xi), \qquad x_{n-k+1}\le\overline{\xi}\le x_{n+1}.$$

Обычно при решении задачи Коши (30)-(31) поступает следующим образом.

Значение решение в начале таблицы в точках $x_{n-k},x_{n-k+1},...,x_n$ надо выбирать формулу Адамса с такой точностью который значение решений совпало. Кроме этого формула (41) в отношении y_{n+1} он нелинейное уравнение вида $y_{n+1}=\varphi(y_{n+1})$. Поэтому из (40) находим y'_{n+1} и поставим на правую сторону (41), обозначим $\varphi(y''_{n+1})=y''_{n+1}$. Если y'_{n+1} и y''_{n+1} совпадает с заданной точностью то взяв $y_{n+1}=y''_{n+1}$ вычислению продолжим по формуле (40). Если y'_{n+1} и y''_{n+1} не выполняет условию выше приведенного тогда взяв $y_{n+1}=y'_{n+1}$ продолжим вычисление и на следующем шагу вычисляется y'_{n+2} и сравнивается с y''_{n+2} , если еще раз поставленная точность не выполняеися , то вычислению продолжим с шагом $\frac{h}{2}$, и взяв $y''_{n+2} = y_{n+2}$.

Во многих случаях чтобы полегчить процесс вычисления в формулах (40), (41) конечно- разностные формулы заменяется на значение функции и на данном k имеем следующие формулы:

$$k = 0, \qquad y_{n+1} = hf(x_n, y_n),$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$k = 1, \qquad y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{3}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1}\right],$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n\right],$$

$$k = 2, \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}[23 f_n - 16 f_{n-1} + 5 f_{n-2}],$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}[5 f_{n+1} + 8 f_n - f_{n-1}],$$

$$k = 3, \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}],$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}].$$

В точке x_{n+1} решение находится с участием нескольких значении функции в заданных точках. По этому метод Адамса называется много шаговыми.

Метод Рунге Кутта

Для решения задачи (30), (31) перепишем (34) следующим образом

$$y(x+h) = y(x) + \int_x^{x+h} y'(t)dt = y(x) + h\int_0^1 f\left[(x+\alpha h), y(x+\alpha h)\right]d\alpha$$

или

$$y(x+h) - y(x) = \Delta y = h\int_0^1 f\left[(x+\alpha h), y(x+\alpha h)\right]d\alpha . \qquad (42)$$

Интеграл в (42) приближенно заменим на конечную сумму:

$$\Delta y_i = \sum_{i=1}^{r} p_i \overline{\overline{K}}_i \, , \tag{43}$$

где

$$\overline{\overline{K}}_1 = hf(x,y), \qquad \overline{\overline{K}}_2 = hf(x+\alpha_2 h, y+\beta_2 \overline{\overline{K}}_1), \ldots$$

$$\ldots \overline{\overline{K}}_r = hf(x+\alpha_r h, y+\beta_r \overline{\overline{K}}_1 + \ldots + \beta_{2r-1} \overline{\overline{K}}_{r-1}).$$

Неизвестные α_i, β_{ii-1} $(i = 2,3,\ldots,r)$ и p_i $\left(i = 1,2,\ldots,r\right)$ находится из левой и правой стороны (43) по степеням h и разложении по Тейлору.

Внизу приведем формулы вычисления разного порядка по методу Рунге- Кутта:

$r = 1$. *метод первого порядка*

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y).$$

$r = 2$. *Метод второго порядка*

1) $$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}\left[f(x,y) + f(x+h, y+hf(x,y))\right],$$

2) $$y(x+h) = y(x) + hf\left[(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2} f(x,y)\right],$$

3) $$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{4}\left[f(x,y) + f\left(x+\frac{2}{3}h, y+\frac{2h}{3} f(x,y)\right)\right].$$

$r = 3$. *Методы третьего порядка*

1) $$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3),$$

$$k_1 = hf(x,y), \; k_2 = hf(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_1}{2}), \; k_3 = hf(x+h, y-k_1+2k_2).$$

2) $$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2),$$

$$k_1 = hf(x,y), \; k_2 = hf(x+\frac{h}{3}, y+\frac{k_1}{3}), \; k_3 = hf(x+\frac{2h}{3}, y+\frac{2k_2}{3}).$$

$r = 4$. *Методы четвертого порядка*

$$1)\qquad y(x+h)=y(x)+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4),$$

$$k_1=hf(x,y),\qquad k_2=hf(x+\frac{h}{2},y+\frac{k_1}{2}),$$

$$k_3=hf(x+\frac{h}{2},y+\frac{k_2}{20}),\qquad k_4=hf(x+h,y+k_3)$$

$$2)\qquad y(x+h)=y(x)+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}k_1+\frac{3}{2}k_2+\frac{1}{2}k_3+\frac{1}{2}k_4\right],$$

$$k_1=hf(x,y),\qquad k_2=hf(x+\frac{h}{2},y+\frac{k_1}{2}),$$

$$k_3=hf(x+\frac{h}{2},y-\frac{k_1}{2}+k_2),\qquad k_4=hf\left[x+h,y+\frac{1}{2}k_2+\frac{1}{2}k_3\right].$$

Пример. $y'=\frac{2y}{x}+x$, $y(1)=0$ решению задачи Коши найти в точках $x=1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3$ с методом Рунге-Кутта а в точках $x=1{,}4;\ 1{,}5$ найти методом Адамса.

Решение. Когда $k=3$ в методе Адамса используем формулу (40), (41). В методе Рунге Кутта для $r=4$ используем первую формулу. Обычно нахождение решения на начале таблицы порядок метода не должен быт меньше порядка метода Адамса (или шаг h должен быт меньший чем шаг метода Адамса).

В нашем примере шаг h одинаковый, по этому $k=3$ и $r=4$.

$$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}(k_1^{(i)}+2k_2^{(i)}+2k_3^{(i)}+k_4^{(i)}),$$

где

$$k_1^{(i)}=hf(x_i,y_i),\qquad k_2^{(i)}=hf(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{k_1^{(i)}}{2}),$$

$$k_3^i = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}), \qquad k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})$$

С помощъю формул взяв $i = 0,1,2$, вычисляем $y_1, y_2 y_3$, потом с помощью формулы (40) вычислим

$$y_4^{'} = y_3 + \frac{h}{24}[55 f_3 - 59 f_2 + 37 f_1 - 9 f_0]$$

Тепер найденное $y_4^{'}$ поставив в (41) на правую сторону, в результате обозначим $y_4^{''}$.

$$y_4^{''} = y_3 + \frac{h}{24}[9 f(x_4, y_4^{'}) + 19 f(x_3, y_3) - 5 f(x_2, y_2) + f(x_1, y_1)]$$

Если в заданной точности $y_4^{''} \approx y_n^{'}$ то взяв $y_4 = y_4^{'}$ находим y_5 из формулы (40). Иначе взяв $y_4 = y_4^{''}$, y_5 вычисляется из формулы (40). Результат приведен ниже в таблице:

x_k	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_k	0	0,1153	0,2625	0,4434	0,6595	0,9123

2.2. Метод Эйлера и Эйлера-Коши

Приближенное значение решение задачи (30), (31) $y(x_i) \cong y_i$ определит следующим образом

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0,1,...$$

то это было бы методом Эйлера (В методах Адамса и Рунге Кутта случай когда $k = 0$).

Приведем следующие модификации метода Эйлера:

$$\text{I. } y_{i+1} = y_i + hf_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 0,1,... \tag{44}$$

где $$f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, \quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f_i .$$

$$\text{II. } y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f_i + \bar{f}_{i+1}\right), \; i = 0,1,... \tag{45}$$

где $$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf_i ,$$

$$\bar{f}_{i+1} = f\left(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}\right).$$

Если в (30), (31) приближенную решению взяв

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf\left(x_i, y_i\right)$$

и по итерационной формуле

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left(f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}\right)\right), \; k = 1,2,.... \tag{46}$$

решению можно найти в данной точности, если $\left|y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)}\right| < \varepsilon$, тогда $y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}$, потом для решении в следующей точки строится (46) итерационный процесс.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

3.1. Метод коллокации.

Пусть на отрезке $a \le x \le b$ для дифференциального уравнение

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{47}$$

задан следующие граничные условие

$$\begin{aligned} l_a(y) &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ l_b(y) &= \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{aligned} \tag{48}$$

где $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0, \quad \beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$.

Решению граничных задач (47), (48) ищем следующим образом:

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x), \tag{49}$$

где $\varphi_0(x)$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} l_a(\varphi_0) &\equiv \alpha_1 \varphi_0'(a) + \alpha_0 \varphi_0(a) = A, \\ l_b(\varphi_0) &\equiv \beta_1 \varphi_0'(b) + \beta_0 \varphi_0(b) = B \end{aligned}$$

$\varphi_k(x)$ $(k = \overline{1,n})$ удовлетворяющие условии функции

$$l_a(\varphi_k) = l_b(\varphi_k) = 0$$

Кроме того для системы функции $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ потребуем выполнение условии:

1. $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ - линейно независимо;

2. $\varphi_k(x) \in C_2[a,b], \;\; k = \overline{0,n}$;

3. $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ система функции должен быть полным в дважды дифференцируемых классах функции.

$$\left| y^{(s)}(x) - y_n^{(s)}(x) \right| < \varepsilon, \; s = 0,1,2; \quad x \in [a,b], \; \forall y(x) \in C_2[a,b], \quad \varepsilon > 0.$$

Для произвольного c_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$, $\varphi_k(x)$ по выбору удовлетворяет условии (49) и (48). Подставив (49) в (47) получаем следующие

$$R(x, c_1, c_2, ..., c_n) = L(y_n) - f(x) = L(\varphi_0) - f(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k L(\varphi_k). \tag{50}$$

Теперь берем точки $x_1, x_2, \ldots x_n$ из промежутка [a,b] называемый точками коллокации и для нахождения коэффициентов $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$\begin{aligned} &R(x_1, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \\ &R(x_2, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &R(x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \end{aligned} \tag{51}$$

составим систему уравнении. Из (51) находим $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и получим решению приближенно –аналитическом виде (49).

Пример 1. Найти решению граничной задачи для уравнении второго порядка.

$$\begin{gathered} y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 2, \\ y'(0) = -2, \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{gathered}$$

Решения. Будем искать $\varphi_0(x)$ в виде $\varphi_0(x) = b + cx$.

$$\varphi_0'(x) = c \text{ и } \varphi_0'(0) = -2 \quad \Rightarrow \quad c = -2.$$

$y(1) + y'(1) = 0 \Rightarrow b - 2 - 2 = 0 \Rightarrow b = 4.$ Значить , $\varphi_0(x) = 4 - 2x$.

Функции $\varphi_k(x)$ $(k = 1,2,\ldots)$ удовлетворяют условию

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k'(0) = 0, \\ \varphi_k(1) + \varphi_k'(1) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Если положить $\varphi_k(x) = b_k + x^{k+1}$ то коэффициентов, b_k находим из второго уравнении.

Значить,

$$b_k = -(k+2) \Rightarrow \varphi_k(x) = x^{k+1} - (k+2).$$

$$\begin{gathered} \varphi_1(x) = x^2 - 3, \\ \varphi_2(x) = x^3 - 4, \\ \ldots \\ \varphi_n(x) = x^{n+1} - (n+2). \end{gathered}$$

Возьмем в (49), $n = 2$, тогда

$$y_2(x) = 4 - 2x + c_1(x^2 - 3) + c_2(x^3 - 4).$$

Находим $L(\varphi_0)$, $L(\varphi_1)$, $L(\varphi_2)$, и создадим $R(x,c_1,c_2)$

$$\varphi_0(x)=4-2x,\quad \varphi_0'(x)=-2,\quad \varphi_0''(x)=0,$$

$$L(\varphi_0)=\varphi_0''(x)+2x\varphi_0'(x)-2\varphi_0(x)=2x\cdot(-2)-2(4-2x)=-4x-8+4x=-8,$$

$$\varphi_1(x)=x^2-3,\quad \varphi_1'(x)=2x,\quad \varphi_1''(x)=2,$$

$$L(\varphi_1)=\varphi_1''(x)+2x\varphi_1'(x)-2\varphi_1(x)=2+2x\cdot 2x-2\left(x^2-3\right)=2x^2+8,$$

$$\varphi_2(x)=x^3-4,\quad \varphi_2'(x)=3x^2,\quad \varphi_2''(x)=6x,$$

$$L(\varphi_2)=\varphi_2''(x)+2x\varphi_2'(x)-2\varphi_2(x)=6x+2x\cdot 3x^2-2\left(x^3-4\right)=$$

$$=6x+6x^3-2x^3+8=4x^3+6x+8\,.$$

$$R(x,c_1,c_2)=L(\varphi_0(x))-f(x)+c_1L(\varphi_1(x))+c_2L(\varphi_2(x))\,.$$

Если точки коллокации взять, $x_1=\frac{1}{4},\ x_2=\frac{3}{4}$ то появится следующие значения.

$$L(\varphi_0(x_1))=-8,\quad L(\varphi_0(x_2))=-8,$$

$$L(\varphi_1(x_1))=2\cdot\frac{1}{16}+8=\frac{1}{8}+8=8\frac{1}{8},$$

$$L(\varphi_1(x_2))=2\cdot\frac{9}{16}+8=\frac{9}{8}+8=9\frac{1}{8},$$

$$L(\varphi_2(x_1))=4\cdot\frac{1}{64}+6\cdot\frac{1}{4}+8=\frac{1}{16}+\frac{3}{2}+8=9\frac{9}{16},$$

$$L(\varphi_2(x_2))=4\cdot\frac{27}{64}+6\frac{3}{4}+8=\frac{27}{16}+\frac{9}{12}+8=14\frac{3}{16}.$$

В итоге имеем следующую уравнению:

$$\left.\begin{aligned}\frac{65}{8}c_1+\frac{153}{16}c_2&=10\\ \frac{73}{8}c_1+\frac{227}{16}c_2&=10\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad c_1=1{,}6510;\quad c_2=-0{,}3570.$$

Тогда $y_2(x)=4-2x+1{,}6510\left(x^2-3\right)-0{,}3570\left(x^3-4\right)$.

3.2. Метод прогонки

Пусть на отрезке $a \le x \le b$ требуется найти решение

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{52}$$

дифференциального уравнения в следующих граничных условиях

$$\begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{aligned} \tag{53}$$

где $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$. Простой метод решение этой граничной задачи это привести его к систему уравнении в конечных разностей. С этой целью отрезок $[a,b]$ разделим на N равных частей с шагом h. Точки деления ($\{x_k\}$ узловые точки сетки) задается формулой $x_k = a + kh$ $\left(h = \dfrac{b-a}{N},\ k = \overline{0,N}\right)$.

Неизвестная функцию $y = y(x)$ и его производных $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$ в сетке $\{x_k\}$ имеет значение соответственно

$$y_k = y(x_k), \quad y'_k = y'(x_k), \quad y''_k = y''(x_k)$$

Точно так используем обозначение

$$p_k = p(x_k), \quad q_k = q(x_k), \quad f_k = f(x_k)$$

Дифференциальную уравнению (52) во внутренних точках аппроксимируем с помощью одностороннe правый разностной схемой

$$\frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{h^2} + p_k \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + q_k y_k = f_k \quad \left(k = \overline{1,N-1}\right) \tag{54}$$

Или симметричной разностной схемой в виде

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + q_k y_k = f_k \quad \left(k = \overline{1,N-1}\right) \tag{55}$$

Это состоит из системы $N-1$ разностной уравнении и с его помощью аппроксимируется уравнение (52).

Граничные условия аппроксимируется

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A,$$
$$\beta_0 y_N + \beta_1 \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = B \qquad (*)$$

разностными тождествами. Систему линейных алгебраических уравнений для определении $N+1$ неизвестных и состоящий из N+1 разностных уравнений зададим следующим образом:

$$A_k y_{k+1} - B_k y_k + C_k y_{k-1} = -F_k \quad (k = \overline{1, N-1}), \qquad (56)$$

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1,$$
$$y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2. \qquad (57)$$

Система (56)-(57) –трехдиогональная линейная алгебраическая система уравнений (где все $i = \overline{1, N-1}$, $A_i \neq 0,\ B_i \neq 0$). Таким образом краевая задача (52)-(53) приводится к решению линейных алгебраических уравнений (56)-(57). Метод решения этих алгебраических систем уравнений называется методом прогонки. В методе прогонки решение во внутренних точках сетки вычисляется реккурентной формулой.

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \ \left(i = \overline{N-1,\ 1}\right) \qquad (58)$$

Где коэффициенты $\alpha_i,\ \beta_i$ определяется со следующего уравнения (здесь предположим $C_i - \alpha_i A_i \neq 0$):

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,N-1; \qquad (59)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,N-1. \qquad (60)$$

Для того чтобы начинать вычисления и определить $\alpha_i,\ \beta_i$ из формул (59)-(60) надо знать значение $\alpha_1,\ \beta_1$. Эти значение определяется со следующих выражений. Предположим в (58) $i = 0$ и будем иметь (левая граничная условия) уравнению

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$$

и поэтому эту равенству сравнивая первой граничной условием (57) будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \chi_1, \\ \beta_1 &= \mu_1 \end{aligned} \tag{61}$$

Тепер с помощью определенных α_i, β_i $\left(i=\overline{1,N-1}\right)$ решение по реккурентной формуле (58) определить и начинать вычисление надо знать значение y_N. В (58) взяв $i = N-1$, получим равенство

$$y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$$

Эту равенству подставляя во вторую граничную условию в (57) и с учетом $1-\alpha_N\chi_2 \neq 0$ находим

$$y_N = \frac{\mu_2 + \chi_2\beta_N}{1-\alpha_N\chi_2} \tag{62}$$

Зная значение y_N для остальных $i = N-1, N-2, ..., 3, 2, 1, 0$ находим решению всех остальных по реккурентной формуле (58)

Теперь приводим условию устойчивости метода прогонки для задач (56)-(57):

$$|C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \quad i = 1,2,...,N-1,$$

$$|\chi_\alpha| \leq 1, \ \alpha = 1,2, \qquad |\chi_1| + |\chi_2| < 2.$$

Выполнение этих условии для всех $i = 1,2,...,N$ эквивалентно выполнением условии

$$|\alpha_i| \leq 1.$$

Пример 2. Найти решению граничной задачи методом прогонки.

$$\begin{gathered} y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 2, \\ y'(0) = -2, \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{gathered}$$

Решение. Аппроксимируем дифференциальную уравнению с помощью разностных уравнений в внутренних точек сетки $\{x_k\}$ $\left(h = 0{,}1; \ \ N = 10\right)$:

$$\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}+2x_k\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}-2y_k=2 \quad \left(k=\overline{1,N-1}\right).$$

Граничную условию аппроксимируем следующим разностным уравнением

$$\frac{y_1-y_0}{h}=-2,$$

$$y_N+\frac{y_N-y_{N-1}}{h}=0$$

Группируя похожие члены из системы разностного уравнения приходим к виду систем уравнении (56)-(57):

$$(1-x_k h)y_{k-1}-2\left(1+h^2\right)y_k+(1+x_k h)y_{k+1}=-\left(-2h^2\right) \quad \left(k=\overline{1,N-1}\right),$$

$$y_0=y_1+2h,$$

$$y_N=\frac{\beta_N}{1+h-\alpha_N}.$$

Для коэффициентов из системы уравнения приходим к следующему выводу

$$A_k=1-x_k h, \quad C_k=2\left(1+h^2\right), \quad B_k=1+x_k h, \quad F_k=-2h^2 \quad \left(k=\overline{1,N-1}\right)$$

Условия устойчивости для метода прогонки выполняется

$$|C_k|\geq|A_k|+|B_k|, \quad k=1,2,...,N-1,$$

Значит для решения систем алгебраических уравнения используем метод прогонки. $\alpha_1=1,\ \beta_1=2h$ и значение y_N нам известно. Тепер можно составит программу и результат возьмем в виде таблицы.

x[0]10	y[0]10.602483840	Y0[0] 10.475000000
x[1]10,1	y[1]10.402483840	Y1[1]10.291153000
x[2]10,2	y[2]10.234216193	Y2[2]10.138184000
x[3]10,3	y[3]10.096747595	Y3[3]10.013951000
x[4]10,4	y[4] -0.011417053	Y4[4] 0.083688000
x[5]10,5	y[5] -0.092250134	Y5[5] -0.156875000

x[6]10,6	y[6] -0.148094352	Y6[6] -0.207752000
x[7]10,7	y[7] -0.181542892	Y7[7] -0.238461000
x[8]10,8	y[8] -0.195316724	Y8[8] -0.251144000
x[9]10,9	y[9] -0.192148446	Y9[9] -0.247943000
x[10]11	y[10] -0.174680405	Y10[10] -0.23100000

Где $x[i]$ $\left(i=\overline{0,10}\right)$ -узловые точки сетки, $y[i]$ $\left(i=\overline{0,10}\right)$ решение задачи методом прогонки и Y[i] (i=1,10) методом коллокации и аналитическое решения для сравнения

$$y_2(x)=4-2x+1{,}6510\left(x^2-3\right)-0{,}3570\left(x^3-4\right)$$

Метод наименьших квадратов

Пусть, H - вещественная пространство Гильберта. Обозначим в H определенный в компактной множестве $D(A)$ линейную оператор A.

Рассмотрим следующую уравнению

$$Ay=f \tag{63}$$

Где $f\in H$ и решение $y\in D(A)$. Пусть уравнение (63) имеет решение. К уравнению (63) сопоставим следующего функционала

$$J(y)=\|Ay-f\|^2 \tag{64}$$

Решению задачи (63) заменим на отыскание минимума функционала в множестве $D(A)$.

$$\min_{y\in D(A)} J(y)=J(y^*)=0$$

Из равенства ясно что решение уравнение $Ay=f$ будеть y* . Для того чтобы решит уравнение $Ay=f$ нахождение минимума функционала (64) называется методом наименьших квадратов для уравнения $Ay=f$

$J(y)$ функционал достигает минимума следующим образом. Берем линейную свободную систему функции $\{\varphi_k(x)\}$ из множеств $D(A)$ и к решению уравнению (63) n-го приближения ищем в виде.

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \tag{65}$$

Где неизвестные коэффициенты c_k находится из условии

$$J(y_n) = \|Ay_n - f\|^2$$

чтобы он достиг минимум.

Мы приведем схему решения линейную граничную задачу с методом наименьших квадратов

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{66}$$

$$\begin{aligned} l_a(y) &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ l_b(y) &= \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{aligned} \tag{67}$$

Выбираем систему функции $\varphi_k(x)$ $(k = 0,1,...)$ удовлетворяющего следующих условии:

1. $\varphi_k(x) \in C_2[a,b]$;
2. $l_a(\varphi_0(x)) = A, \quad l_b(\varphi_0(x)) = B, \quad l_a(\varphi_k(x)) = l_b(\varphi_k(x)) = 0 \quad (k = 1,2,...)$;
3. для произвольного n функции $\varphi_k(x)$ линейно независимо;
4. $\varphi_k(x)$ $(k = 1,2,...)$ представляеть полную систему в $C_2[a,b]$.

Приближенную решению граничных задач (66)-(67) возьмем в виде (65). Функция (65) удовлетворяет граничных условии (67) при любом n и $c_1, c_2, ..., c_n$. Выбираем $c_1, c_2, ..., c_n$ так, что

$$J(y_n) = \|L(y_n) - f\|^2$$

достигал минимум.

Мы знаем ,

$$\|L(y_n) - f\|^2 = (L(y_n) - f, L(y_n) - f) =$$

$$= \int_a^b \left[L(\varphi_0) + \sum_{k=1}^{n} c_k L(\varphi_k) - f \right]^2 dx = J(c_1, c_2, ..., c_n).$$

Из этого для всех $i = 1,2,...,n$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial c_i} = \int_a^b \left[L(\varphi_0) + \sum_{k=1}^{n} c_k L(\varphi_k) - f \right] \cdot L(\varphi_i) dx = 0 .$$

Перепишем   в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} c_k = -B_i, \quad i = 1,2,...,n, \tag{68}$$

где

$$A_{ik} = A_{ki} = \int_a^b L(\varphi_k) L(\varphi_i) dx, \;\; B_i = \int_a^b \left(L(\varphi_0) - f \right) L(\varphi_i) dx \quad (i,k = 1,2,...,n).$$

Матрица системы уравнении (68)   это матрица Грамма для системы функции $\{L(\varphi_k)\}_{k=1}^{n}$.

Если

$$L(y) = 0, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0$$

граничная задача   имеет нулевую   решению, то система уравнении   (68) имеет единственную решению.

Пример 3 . граничную задачу   решит методом меньших квадратовпри n=2.

$$L(y) \equiv y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 2$$

$$l_0(y) \equiv y'(0) = -2,$$
$$l_1(y) \equiv y(1) + y'(1) = 0$$

Решение.

Ранше методом коллокации было найдено $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, и вычислено $L(\varphi_0(x))$, $L(\varphi_1(x))$, $L(\varphi_2(x))$ используя их вычислим коэффициенты системы (68):

$$A_{11} = \int_0^1 L^2(\varphi_1(x)) dx = \int_0^1 (2x^2 + 8)^2 dx = \int_0^1 (4x^4 + 32x^2 + 64) dx = \frac{4}{5} + \frac{32}{3} + 64 = \frac{1132}{15},$$

$$A_{12} = A_{21} = \int_0^1 (2x^2 + 8)(4x^3 + 6x + 8) dx = \int_0^1 (8x^5 + 16x^3 + 16x^2 + 48x + 64) dx =$$

$$= \frac{8}{6} + \frac{16}{4} + \frac{16}{3} + \frac{48}{2} + 64 = \frac{296}{3},$$

$$A_{22} = \int_0^1 (4x^3 + 6x + 8)^2 dx = \int_0^1 (16x^6 + 48x^4 + 64x^3 + 36x^2 + 96x + 64) dx =$$

$$= \frac{16}{7} + \frac{48}{5} + 16 + 12 + 48 + 64 = \frac{5316}{35},$$

$$B_1=\int_0^1\left(L(\varphi_0(x)-2)L(\varphi_1(x))\right)dx=\int_0^1(-2-2)(2x^2+8)^2\,dx=-4\left(\frac{2}{3}+8\right)=-\frac{104}{3},$$

$$B_2=\int_0^1\left(L(\varphi_0(x)-2)L(\varphi_2(x))\right)dx=\int_0^1(-4)(4x^3+6x+8)^2\,dx=-4(1+3+8)=-48.$$

Теперь составим систему уравнении (68).

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1132}{15}c_1+\dfrac{296}{3}c_2=-\dfrac{104}{3}\\[2ex]\dfrac{296}{3}c_1+\dfrac{5316}{35}c_2=-48\end{array}\right\}\Rightarrow\quad\begin{array}{l}c_1\cong-0{,}30648\\c_2\cong-0{,}11693\end{array}.$$

Значить приближенное решение граничной задачи

$$y_2(x)=4-2x-0{,}30648\left(x^2-3\right)-0{,}11693\left(x^3-4\right)$$

Метод Галеркина

В этом методе тоже принимаем что условия (66)-(67) наименьших квадратов будет выполнено. Коэффициенты приближенного решения в виде (65) $c_1,c_2,...,c_n$ в этом методе находится из условии:

$$\left(L(y_n(x))-f(x),\varphi_i(x)\right)=0\qquad(i=1,2,...,n).$$

Перепишем

$$\sum_{k=1}^{n}c_k\left(L(\varphi_k(x)),\,\varphi_i(x)\right)=\left(f-L(\varphi_0(x)),\,\varphi_i(x)\right)\qquad(i=1,2,...,n).\tag{69}$$

Пример 4. $y''+y+x=0$ решит уравнение в граничных условиях методом Галеркина

$$y(0)=0,\qquad y(1)=0$$

Решения. Для качестве функции $\varphi_i(x)$ возьмем :

$$\varphi_0(x)\equiv0,\quad\varphi_1(x)\equiv x(1-x),\quad\varphi_2(x)\equiv x^2(1-x),\quad...,\quad\varphi_n(x)\equiv x^n(1-x).$$

Приближенное решение ищем в виде

$$y_n(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)=\sum_{k=1}^{n}c_kx^k(1-x)$$

Данную задачу решаем при $n=2$:

$$\varphi_1(x)=x-x^2,\quad \varphi_1'(x)=1-2x,\quad \varphi''(x)=-2,\quad L(\varphi_1(x))=-2+x-x^2,$$

$$\varphi_2(x)=x^2-x^3,\quad \varphi_1'(x)=2x-3x^2,\quad \varphi''(x)=2-6x,\quad L(\varphi_2(x))=2-6x+x^2-x^3,$$

$$L(y_2(x))=c_1L(\varphi_1(x))+c_2L(\varphi_2(x))=c_1\left(-2+x-x^2\right)+c_2\left(2-6x+x^2-x^3\right).$$

Пишем систему уравнении (69):

$$c_1\left(\left(-2+x-x^2\right),\left(x-x^2\right)\right)+c_2\left(\left(2-6x+x^2-x^3\right),\left(x^2-x^3\right)\right)=\left(-x,\ x-x^2\right)$$

$$c_1\left(\left(-2+x-x^2\right),\left(x^2-x^3\right)\right)+c_2\left(\left(2-6x+x^2-x^3\right),\left(x^2-x^3\right)\right)=\left(-x,\ x^2-x^3\right).$$

Вычислив скалярное произведение, уравнении зависящие от коэфициентов c_1 и c_2 приведем к следующему виду

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{10}c_1+\frac{3}{20}c_2=\frac{1}{12}\\[2ex] \frac{3}{20}c_1+\frac{13}{105}c_2=\frac{1}{20}\end{array}\right\}.$$

Решив эту систему определим коэффициенты c_1 и c_2:

$$c_1=\frac{71}{369},\quad c_2=\frac{7}{41}.$$

Приближенное решение .

$$y_2(x)=x(1-x)\left(\frac{71}{369}+\frac{7}{41}x\right)$$

3.3. Численные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка на языке C++

Приведем несколько примеров решению дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера и Эйлера-Коши.

Пример1. Найти решению задачи Коши на данном интервале методом Эйлера.

$$y'=3\sin 2y+x$$
$$y(0)=2$$

где [a,b]=[0,1], шаг h=0,1.

Напишем реккурентную формулу Эйлера

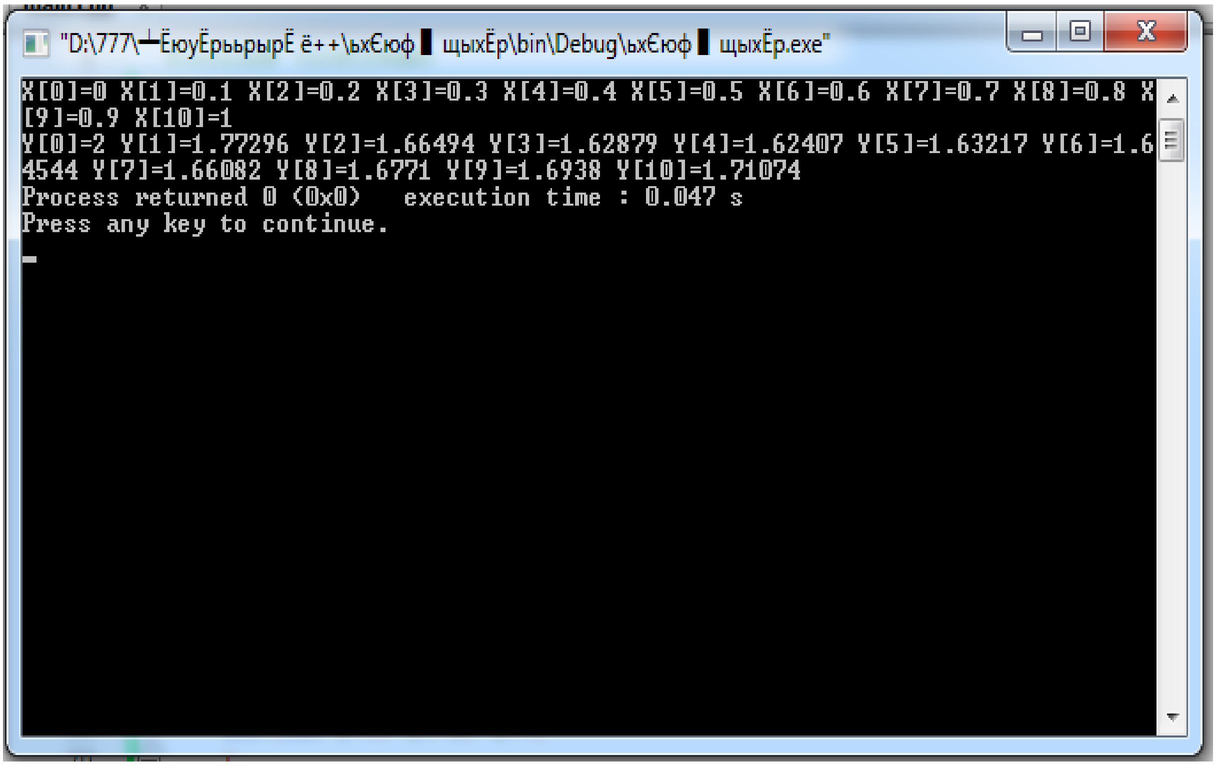
$$y_{i+1} = y_i + h \times f(x_i, y_i), \quad i = \overline{0,n}$$

$$x_i = x_0 + ih, \quad x_0 = 0; \quad x_n = 1; \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}, \quad n = \frac{1}{h} = \frac{1}{0,1} = 10.$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \;\; i = 0,1....$$

Тогда программа на C++

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
double F(double x, double y)
{
   return 3*sin(2*y)+x;
}
int main()
{
   double a=0; double b=1; double h=0.1;
   double n=(b-a)/h;
   double X[(int)n]; double Y[(int)n];
   X[0]=a; Y[0]=2;
   for(int i=1; i<=n; i++)
   {
      X[i]=a+i*h;
      Y[i]=Y[i-1]+h*F(X[i-1], Y[i-1]);
   }
   for(int i=0; i<=n; i++)
   {
      cout << "X[" <<i<<"]=" <<X[i]<<" ";
   }
   cout << endl;
   for(int i=0; i<=n; i++)
   {
      cout << "Y[" <<i<<"]=" <<Y[i]<<" ";
   }
   return 0;
}
```



Пример 2. Эту же задачу решаем методом Эйлера Коши

Если в (30), (31) приближенную решению взяв

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf\left(x_i, y_i\right)$$

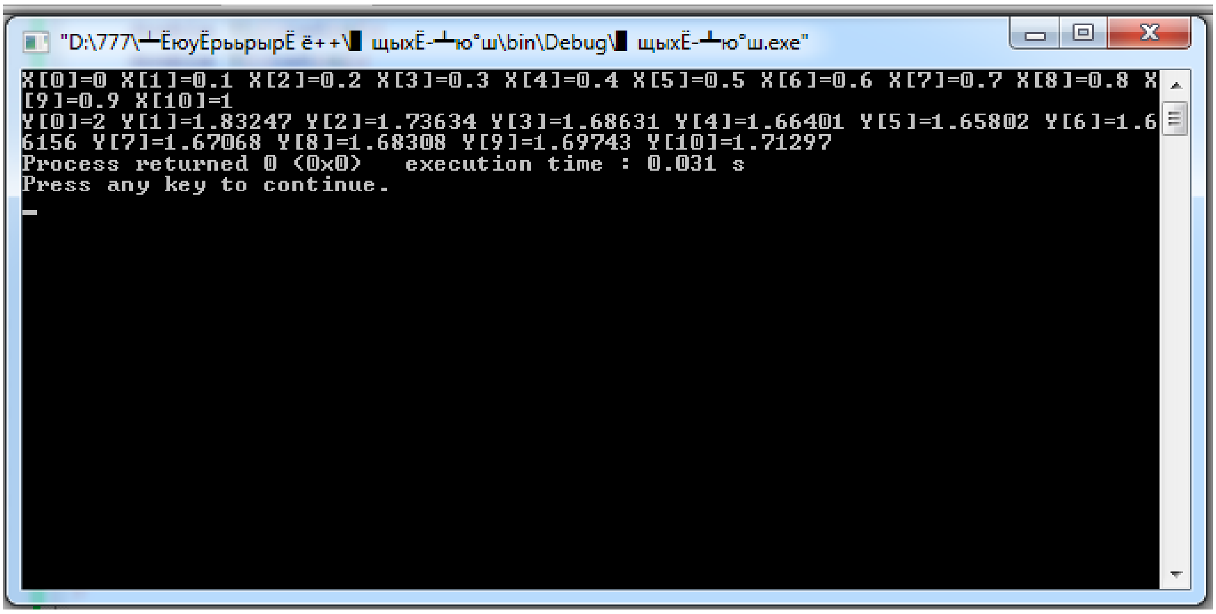
и по итерационной формуле

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left(f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}\right)\right), \quad k = 1,2,....$$

решению можно найти в данной точности.

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
double F(double x, double y)
{
return 3*sin(2*y)+x;
}
int main()
{
double a=0; double b=1; double h=0.1;
double n=(b-a)/h;
```

```
double X[(int)n];
double Y1[(int)n];
double Y[(int)n];
X[0]=a; Y[0]=2;
for(int i=1; i<=n; i++)
   {
      X[i]=a+i*h;
Y1[i]=Y[i-1]+h*F(X[i-1], Y[i-1]);
      Y[i]=Y[i-1]+h*(F(X[i-1], Y[i-1])+F(X[i], Y1[i]))/2.0;
   }
for(int i=0; i<=n; i++)
   {
cout<< "X[" <<i<<"]=" <<X[i]<<" ";
   }
cout<<endl;
for(int i=0; i<=n; i++)
   {
cout<< "Y[" <<i<<"]=" <<Y[i]<<" ";
   }
   return 0;
}
```



Пример 3. Найти решению задачи Коши на данном интервале методом Эйлера.

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

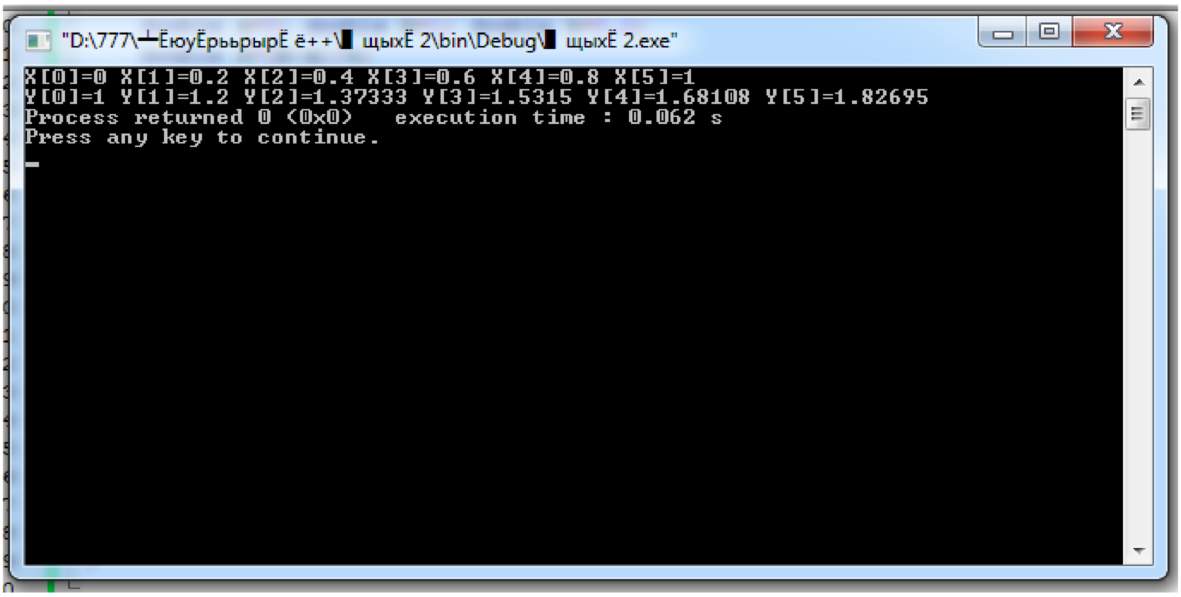
$$y(0) = 1$$

где [a,b]=[0,1], шаг h=0,2.

Программа на С++

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
double F(double x, double y)
{
return y-(2*x)/y;
}
int main()
{
double a=0; double b=1; double h=0.2;
double n=(b-a)/h;
double X[(int)n]; double Y[(int)n];
X[0]=a; Y[0]=1;
for(int i=1; i<=n; i++)
   {
      X[i]=a+i*h;
      Y[i]=Y[i-1]+h*F(X[i-1], Y[i-1]);
   }
for(int i=0; i<=n; i++)
   {
cout<< "X[" <<i<<"]=" <<X[i]<<" ";
   }
cout<<endl;
for(int i=0; i<=n; i++)
   {
cout<< "Y[" <<i<<"]=" <<Y[i]<<" ";
   }
```

```
return 0;
}
```



Пример 4. Найти решению задачи Коши на данном интервале методом Эйлера-Коши.

$$y' = \frac{y}{x+1} - y^2$$

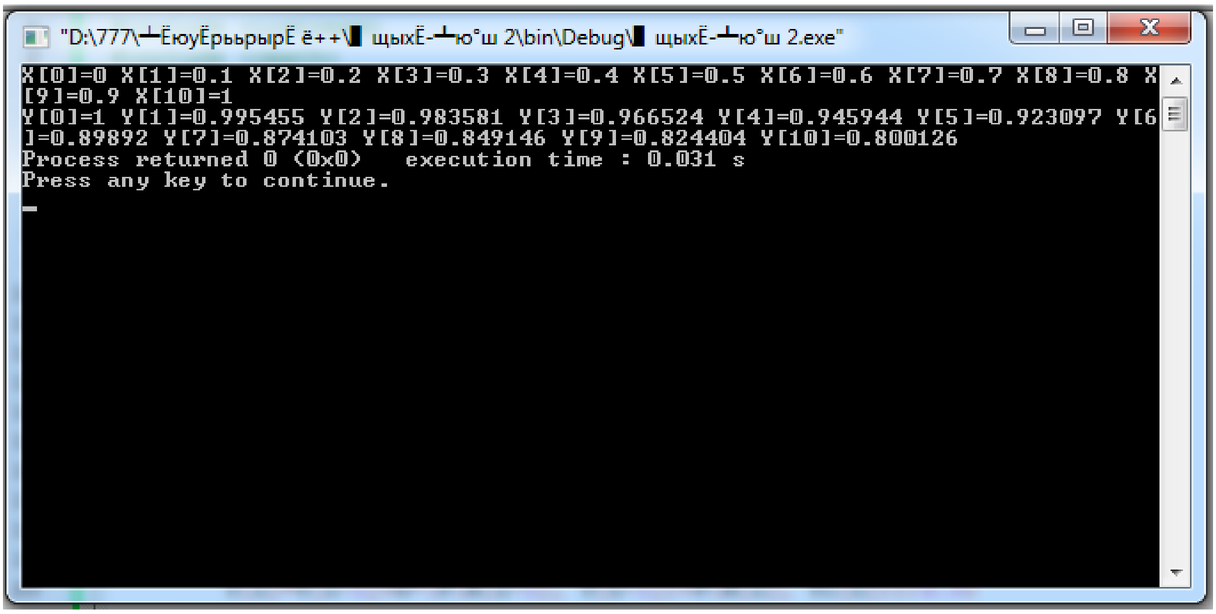
$$y(0) = 1$$

где [a,b]=[0,1], шаг h=0,1.

Программа на С++

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
double F(double x, double y)
{
   return (y/(x+1))-pow(y,2);
}
int main()
{
   double a=0; double b=1; double h=0.1;
   double n=(b-a)/h;
   double X[(int)n];
   double Y1[(int)n];
```

```
    double Y[(int)n];
    X[0]=a; Y[0]=1;
    for(int i=1; i<=n; i++)
    {
       X[i]=a+i*h;
       Y1[i]=Y[i-1]+h*F(X[i-1], Y[i-1]);
       Y[i]=Y[i-1]+h*(F(X[i-1], Y[i-1])+F(X[i], Y1[i]))/2.0;
    }
    for(int i=0; i<=n; i++)
    {
       cout << "X[" <<i<<"]=" <<X[i]<<" ";
    }
    cout << endl;
    for(int i=0; i<=n; i++)
    {
       cout << "Y[" <<i<<"]=" <<Y[i]<<" ";
    }
    return 0;
}
```



Заключение

В выпускной квалификационной работе были рассмотрены обыкновенные дифференциальное уравнение первого и второго порядка, были изучены постановка задачи Коши и данном граничных условиях численное методы решения обыкновенных дифференциальных уравнении.

Во многих случаях решения дифференциальных уравнении в поставленных граничных условиях не возможно получит аналитически, поэтому решению приходится искать приближенными методами.

Цель этой выпускной квалификационной работы изучит решать приближенными методами в поставленных граничных условиях линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнении первого и второго порядков.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключение и из списка использованных литератур.

Первая глава посвящена понятие о дифференциальном уравнении, где приведены уравнение с разделяющимися переменными, однородные и линейные уравнении.

Во второй главе приведены приближенные методы решения задачи коши, где приведены метод Адамса, метод Рунге-Кутта и метод Эйлера Коши.

В третьей главе изучены численные методы решения краевых задач в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Из них изучены метод коллокация, метод прогонки, метод Галеркина и решена несколько примеров на эти методы.

В конце работы на задачу Коши был создан программа на языке C++ и был взят численный результат.

Использованные литературы

1. Самарский А.А.,Михайлов А.П. Математическое моделирование.–М.: Наука, 1997.-316 с.

2. Самарский А.А.,Николаев Е.С. Методы решений сеточных уравнений.

3. Самарский А. А. Гулин.А.В. Численные методы. М. Наука, 1989 г.

4. Калиткин Н. Н. Численные методы. М. Наука,1978 г.

7. Бахвалов Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1975.

8. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобелков Г. М. Численные методы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 600 с.

9. Воробьева Г.К., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. – М: Высшая школа, 1990.

10. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966.

11. Копченова Н.В., Марон И. А. Вычислителная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 2008. – 368 с.

12. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. М.: Наука, 1976.

13. www. math.ru. Math.ru - материали по математике Библиотека книг. Видео лекции. Документи Минобразования. Информация о математиках. Исторические сюжети.

14. www.edu.uz.

15. www.exponenta.ru

16. www.ziyonet.uz.

Техника безопасности

1. Строго запрещается расположить кабинета информатики на бетонированную комнату и на подвале помещении. Полы должны быть деревянными и все компьютеры должны быть заземлены.

2. Требуется двойная изоляция всех электрических (220 В) линии проводов в том числе удлинители и компьютеры.

3. Надо расположить всех компьютеров в середине комнаты или рядом стены в двойном ряде друг против друга.

4. В кабинете должен быть единый отключатель для всех компьютеров .

5. Монитор компьютера должна быть на уровне глаз, и студенты должны иметь возможность соблюдать дистанцию от монитора на 40-80 см.

6. Клавиатуры компьютера должны быть на уровне согнутых колен. Для мышки должен быть место на обоих сторонах клавиатуры и они должны быть на одной высоте.

7. Продолжительность работы не должен превышать 60 минут на каждого студента.

8. Площадь компьютерного кабинета должна в шесть раз больше от количество компьютеров.

9. Компьютерные кабинеты должны быть оснащены системой вентиляции.

10. Надо предотвратит попадание пыли на клавиатуру.