УДК 539.3

К ФОРМИРОВАНИЮ РАЗНОСТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИ СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Абдусаттаров А., *д.т.н., профессор (ТашИИТ)*
Юлдашев Т., *д.т.н., вед. науч. сотрудник (ИСС АНРУз)*
Собиров Н.Х., *соискатель, ст.пре-ль(ТИТЛП)*

Вопросы моделирования процессов деформирования, создание программных средств и расчет элементов тонкостенных конструкций и сооружений при статических и динамических нагружениях приобрели особую актуальность[1-3].

В данной работе рассматриваются составная конструкция типа котла цистерны, состоящая из цилиндрической оболочкой, связанной с частью сферической оболочкой (днище) [4]. Приводятся геометрические и физические соотношения для элементов оболочечных конструкций. Выведены уравнения движения и дана решения разностной краевой задачи для цилиндрической части составных оболочечных конструкций. Здесь ставиться задача построение модели деформирования и вычислительная схема расчета сферической части тонкостенных оболочечных конструкций. Следуя [5], используем вариационный принцип Гамильтона-Остроградского и Бубнова-Галеркина применительно к сферической оболочке. В результате получим следующую систему дифференциальных уравнений движения, с соответствующими граничными и начальными условиями:

$$-\alpha_1^{(1)}\frac{\partial^2 U_n}{dt^2}+\alpha_2^{(1)}\frac{\partial^2 U_n}{d\alpha^2}+\alpha_3^{(1)}\frac{\partial^3 W_n}{dt^2\partial\alpha}+\alpha_4^{(1)}\frac{\partial^3 W_n}{d\alpha^3}+\alpha_5^{(1)}\frac{\partial W_n}{\partial\alpha}+\alpha_6^{(1)}\frac{\partial V_n}{\partial\alpha}-\alpha_7^{(1)}\frac{\partial^2 U_n}{dt^2}+\alpha_8^{(1)}W_n+$$
$$+\alpha_9^{(1)}\frac{\partial U_n}{\partial\alpha}-\alpha_{10}^{(1)}U_n+X_n=0\,;$$
$$-\alpha_1^{(2)}\frac{\partial^2 V_n}{dt^2}-\alpha_2^{(2)}\frac{\partial^2 W_n}{\partial t^2}-\alpha_3^{(2)}V_n+\alpha_4^{(2)}W_n-\alpha_5^{(2)}\frac{\partial W_n}{\partial\alpha}-\alpha_6^{(2)}U_n-\alpha_7^{(2)}\frac{\partial U_n}{\partial\alpha}-\alpha_8^{(2)}\frac{\partial^2 W_n}{\partial\alpha^2}+\alpha_9^{(2)}\frac{\partial^2 V_n}{\partial\alpha^2}-$$
$$-\alpha_{10}^{(1)}\frac{\partial V_n}{\partial\alpha}+Y_n=0\,; \qquad (1)$$
$$-\alpha_1^{(3)}\frac{\partial^2 W_n}{dt^2}-\alpha_2^{(3)}\frac{\partial^3 U_n}{\partial t^2\partial\alpha}+\alpha_3^{(3)}\frac{\partial^4 W_n}{\partial t^2\partial\alpha^2}-\alpha_4^{(3)}\frac{\partial^2 V_n}{\partial t^2}-\alpha_5^{(3)}\frac{\partial^3 U_n}{\partial\alpha^3}-\alpha_6^{(3)}\frac{\partial^4 W_n}{\partial\alpha^4}+\alpha_7^{(3)}\frac{\partial^2 W_n}{\partial\alpha^2}-\alpha_8^{(3)}W_n-$$
$$-\alpha_9^{(3)}\frac{\partial^2 V_n}{\partial\alpha^2}-\alpha_{10}^{(3)}V_n+\alpha_{11}^{(3)}\frac{\partial W_n}{\partial\alpha}-\alpha_{12}^{(3)}U_n+\alpha_{13}^{(3)}\frac{\partial U_n}{\partial\alpha}+\alpha_{14}^{(3)}\frac{\partial V_n}{\partial\alpha}+Z_n=0\,.$$

Здесь: $\alpha_1^{(1)}=1,\ \alpha_2^{(1)}=1,\ \alpha_3^{(1)}=k_1\dfrac{h^2}{12}\dfrac{1}{R\left(1+k_1^2\dfrac{h^2}{12}\right)},\ \alpha_4^{(1)}=\dfrac{k_1}{R}\dfrac{h^2}{12},$

$$\alpha_6^{(1)}=\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{n}{2}\frac{1}{\sin\alpha},$$

$$\alpha_5^{(1)} = \left[2(\lambda+\mu)\left(1+k_1^2\frac{h^2}{12}\right)\frac{h^2}{R^2} - \left(\lambda+(\lambda+2\mu)\cos^2\alpha\right)\frac{h^3}{12}\frac{k_1}{R^2\sin^2\alpha} \right]\frac{R}{h}\frac{1}{(\lambda+2\mu)},$$

$$\alpha_7^{(1)} = \frac{2(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}ctg\alpha\cdot\frac{n}{2},\quad \alpha_8^{(1)} = 2\frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12}\left(\frac{n}{2}\right)^2\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{2(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\left(1+k_1^2\frac{h^2}{12}\right)\frac{k_1}{R}ctg\alpha,$$

$$\alpha_9^{(1)} = \frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)}ctg\alpha\left(\frac{h^3}{12}k_1^3 - 1\right),$$

$$\alpha_{10}^{(1)} = \left(\lambda+(\lambda+2\mu)\cos^2\alpha\right)\frac{1}{(\lambda+2\mu)\sin^2\alpha} + \frac{\mu}{(\lambda+2\mu)\sin^2\alpha}\left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

$$X_n = \int_0^{2\pi}\frac{R^2}{h^2}\frac{1}{(\lambda+2\mu)}\left(N(R)+N(q_1)\right)\cos\frac{n}{2}\beta d\beta.$$

$$\alpha_1^{(2)} = 1,\ \alpha_2^{(2)} = \frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12}\frac{1}{\left(1+k_1^2\frac{h^2}{12}\right)\sin\alpha}\cdot\frac{n}{2},\quad \alpha_3^{(2)} = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

$$\alpha_4^{(2)} = \frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12}\left(\frac{n}{2}\right)^3 - 2\left((\lambda+\mu)+(\lambda+2\mu)k_1^2\frac{h^2}{12}\right)k_1R\frac{1}{(\lambda+2\mu)}\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{n}{2},$$

$$\alpha_5^{(2)} = \frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12}ctg\alpha\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{n}{2},\quad \alpha_6^{(2)} = \frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)}\frac{ctg\alpha}{\sin\alpha}\cdot n,\ \alpha_7^{(2)} = \frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{n}{2},$$

$$\alpha_8^{(2)} = \frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12}\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{n}{2},\quad \alpha_9^{(2)} = \frac{\mu}{(\lambda+2\mu)},\quad \alpha_{10}^{(2)} = \frac{\mu}{(\lambda+2\mu)}ctg\alpha,$$

$$Y_n = \int_0^{2\pi}\frac{R^2}{h^2}\frac{1}{(\lambda+2\mu)}\left(N(p_2)+N(q_2)\right)\sin\frac{n}{2}\beta d\beta;$$

$$\alpha_1^{(3)} = \frac{1}{\left(1+k_1^2\frac{h^2}{12}\right)},\quad \alpha_2^{(3)} = \frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12}\frac{1}{\left(1+k_1^2\frac{h^2}{12}\right)},\quad \alpha_3^{(3)} = \frac{h^2}{12R^2}\frac{1}{\left(1+k_1^2\frac{h^2}{12}\right)}$$

$$\alpha_4^{(3)} = \frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12}\frac{1}{\left(1+k_1^2\frac{h^2}{12}\right)}\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{n}{2},\ \alpha_5^{(3)} = \frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12},\ \alpha_6^{(3)} = \frac{h^2}{12R^2},$$

$$\alpha_7^{(3)} = 2\frac{h^2}{12R^2}\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{12R^2}\frac{1}{\left(1+k_1^2\frac{h^2}{12}\right)\sin^2\alpha}\left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

$$\alpha_8^{(3)} = \left[\frac{h^2}{12R^2}\frac{1}{\sin^4\alpha}\left(\frac{n}{2}\right)^4 - 6\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\frac{h^2}{12}k_1^2\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{4(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\left(1+k_1^2\frac{h^2}{12}\right)\right],$$

$$\alpha_9^{(3)} = \frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{n}{2},$$

$$\alpha_{10}^{(3)} = \left[\left(\lambda - (3\lambda + \mu)\cos^2\alpha\right)\frac{h^2}{12}\frac{k_1}{R}\frac{1}{(\lambda + 2\mu)}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{n}{2} - \frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12}\frac{1}{\sin^3\alpha}\left(\frac{n}{2}\right)^3 \right],$$

$$\alpha_{11}^{(3)} = \left[\frac{2(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)}k_1^2\frac{h^2}{12}ctg\alpha - \frac{4\mu}{(\lambda + 2\mu)}\frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12}\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{n}{2}\right)^2 \right],$$

$$\alpha_{12}^{(3)} = \left[\frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)}ctg\alpha\left(2\frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12}\frac{1}{\sin^2\alpha} + 1\right) - (\lambda + (2 - \sin\alpha)\mu)\frac{1}{(2\lambda + \mu)}\frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12}\frac{ctg\alpha}{\sin^2\alpha}\left(\frac{n}{2}\right)^2 \right],$$

$$\alpha_{13}^{(3)} = \left[\frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12}\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12}ctg^2\alpha - \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \right],$$

$$\alpha_{14}^{(3)} = ((\lambda + 4\mu) + \mu\sin\alpha)\frac{1}{(\lambda + 2\mu)}\frac{k_1}{R}\frac{h^2}{12}\frac{ctg\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{n}{2},$$

$$Z_n = \int_0^{2\pi}\left[\frac{R^2}{h^2(\lambda + 2\mu)}\left(Q(p_3) + Q(q_3) + \frac{\partial}{\partial\alpha}(M(p_1) + M(q_1)) \right)\cos\frac{n}{2}\beta \right]d\beta.$$

Граничные условия:

$$\left[-b_1^{(1)}\frac{\partial U_n}{\partial\alpha} - b_2^{(1)}\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2} + b_3^{(1)}W_n - b_4^{(1)}V_n - b_5^{(1)}\frac{\partial W_n}{\partial\alpha} - b_6^{(1)}U_n + X(\varphi_1) \right]h\delta U_n\Big|_\alpha = 0;$$

$$\left[-b_1^{(2)}U_n - b_2^{(2)}\frac{\partial V_n}{\partial\alpha} + b_3^{(2)}\frac{\partial W_n}{\partial\alpha} - b_4^{(2)}W_n + Y(\varphi_2) \right]h\delta V_n\Big|_\alpha = 0; \qquad (2)$$

$$\left[-b_1^{(3)}\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} + b_2^{(3)}\frac{\partial^3 W_n}{\partial t^2\partial\alpha} - b_3^{(3)}\frac{\partial^2 U_n}{\partial\alpha^2} - b_4^{(3)}\frac{\partial^3 W_n}{\partial\alpha^3} + b_5^{(3)}\frac{\partial W_n}{\partial\alpha} - b_6^{(3)}\frac{\partial V_n}{\partial\alpha} + b_7^{(3)}W_n - b_8^{(3)}\frac{\partial^2 W_n}{\partial\alpha^2} - \right.$$

$$\left. - b_9^{(3)}\frac{\partial U_n}{\partial\alpha} + b_{10}^{(3)}U_n - b_{11}^{(3)}V_n + Z(\varphi_3) \right]h\delta W_n\Big|_\alpha = 0$$

$$\left[-b_1^{(4)}\frac{\partial U_n}{\partial\alpha} - b_2^{(4)}\frac{\partial^2 W_n}{\partial\alpha^2} + b_3^{(4)}W_n - b_5^{(4)}\frac{\partial W_n}{\partial\alpha} - b_6^{(4)}U_n - \overline{M}(\varphi_1) \right]h\delta\frac{\partial W_n}{\partial\alpha}\Big|_\alpha = 0;$$

где $b_1^{(1)} = R,\ b_2^{(1)} = k_1\frac{h^2}{12},\ b_3^{(1)} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}k_1\frac{h^2}{12}\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 2\frac{(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)}\left(1 + k_1^2\frac{h^2}{12}\right)k_1R^2$

$$b_4^{(1)} = \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)}\frac{R}{\sin\alpha}\cdot\frac{n}{2},\ b_5^{(1)} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}k_1\frac{h^2}{12}ctg\alpha,\ b_6^{(1)} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}Rctg\alpha,$$

$$X(\varphi_1)=\int_0^{2\pi}\frac{R^2}{h^2}\frac{N(\varphi_1)}{\lambda+2\mu}\cos\frac{n}{2}\beta d\beta.$$

$$b_1^{(2)}=\frac{\mu}{(\lambda+2\mu)}\frac{R}{\sin\alpha}\cdot\frac{n}{2},\ b_2^{(2)}=\frac{\mu}{(\lambda+2\mu)}R,\ b_3^{(2)}=\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}k_1\frac{h^2}{12}\frac{n}{2},$$

$$b_4^{(2)}=\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}k_1\frac{h^2}{12}ctg\alpha\cdot\frac{n}{2},$$

$$Y(\varphi_2)=\int_0^{2\pi}\frac{N(\varphi_2)}{\lambda+2\mu}\frac{R^2}{h^2}\sin\frac{n}{2}\beta d\beta.$$

$$b_1^{(3)}=k_1\frac{h^2}{12}\frac{1}{\left(1+k_1^2\frac{h^2}{12}\right)},\ b_2^{(3)}=\frac{h^2}{12R}\frac{1}{\left(1+k_1^2\frac{h^2}{12}\right)},\ b_3^{(3)}=k_1\frac{h^2}{12},\ b_4^{(3)}=\frac{h^2}{12R},$$

$$b_5^{(3)}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{h^2}{12R}\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}+ctg^2\alpha\right)\frac{h^2}{12R},\ b_6^{(3)}=k_1\frac{h^2}{12}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{n}{2},$$

$$b_7^{(3)}=\left(\frac{4\mu}{(\lambda+2\mu)}+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\frac{h^2}{12R}\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{n}{2}\right)^2-\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}k_1^2\frac{h^2}{12}Rctg\alpha,$$

$$b_8^{(3)}=\frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{h^2}{12R}ctg\alpha,\ b_9^{(3)}=\frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}k_1\frac{h^2}{12}ctg\alpha,$$

$$b_{10}^{(3)}=\left(\frac{\lambda+2\mu ctg^2\alpha}{\lambda+2\mu}\frac{h^2}{12}k_1^2R-\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{h^2}{12}k_1\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{n}{2}\right)^2\right),$$

$$b_{11}^{(3)}=\frac{\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\frac{h^2}{12}k_1ctg\alpha\frac{1}{\sin\alpha}\frac{n}{2},$$

$$Z(\varphi_3)=\int_0^{2\pi}\left[Q(\varphi_3)+\frac{\partial M(\varphi_2)}{R\sin\alpha\partial\beta}-\left(M(p_1)+M(q_1)\frac{1}{(\lambda+2\mu)}\frac{R^2}{h^2}\right)\cos\frac{n}{2}\beta\right]d\beta,$$

$$b_1^{(4)}=k_1\frac{h^2}{12},\ b_2^{(4)}=\frac{h^2}{12R},\ b_3^{(4)}=\frac{h^2}{12R}\left(\frac{n}{2}\right)^2-\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}k_1^2\frac{h^2}{12}R,$$

$$b_4^{(4)}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{h^2}{12}k_1\frac{n}{2}\frac{1}{\sin\alpha},$$

$$b_5^{(4)}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{h^2}{12R}ctg\alpha,\ b_6^{(4)}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}k_1\frac{h^2}{12}ctg\alpha,$$

$$\overline{M}(\varphi_1)=\int_0^{2\pi}M(\varphi_1)\frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{R^2}{h^2}\cos\frac{n}{2}\beta d\beta.$$

Начальные условия:

$$\left[C_1^{(1)}\frac{\partial U_n}{\partial t}-C_2^{(1)}\frac{\partial^2 W_n}{\partial t\partial\alpha}\right]h\delta U_n\Big|_t=0,$$
$$\left[C_1^{(2)}\frac{\partial V_n}{\partial t}+C_2^{(2)}\frac{\partial W}{\partial t}\right]h\delta V_n\Big|_t=0, \tag{3}$$
$$\left[C_1^{(3)}\frac{\partial W_n}{\partial t}+C_2^{(3)}\frac{\partial^2 U_n}{\partial t\partial\alpha}-C_3^{(3)}\frac{\partial^3 W_n}{\partial t\partial\alpha^2}+C_4^{(3)}\frac{\partial V_n}{\partial t}\right]h\delta W_n\Big|_t=0,$$
$$C_1^{(1)}=\rho\left(1+k_1^2\frac{h^2}{12t_0}\right)\frac{R^2}{(\lambda+2\mu)},\ C_2^{(1)}=\rho k_1\frac{h^2}{12}\frac{R^2}{(\lambda+2\mu)t_0},\ C_1^{(2)}=C\left(\frac{n}{2}\right)^2,$$
$$C_2^{(2)}=\rho k_1\frac{h^2}{12}\frac{R}{(\lambda+2\mu)}\frac{1}{\sin\alpha t_0}\frac{n}{2},\ C_1^{(3)}=\rho\frac{R^2}{(\lambda+2\mu)\cdot t_0}+\rho\frac{h^2}{12}\frac{1}{(\lambda+2\mu)}\frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{n}{2}\right)^2,$$
$$C_2^{(3)}=\rho k_1\frac{h^2}{12}\frac{R}{(\lambda+2\mu)\cdot t_0},\ C_3^{(3)}=\rho\frac{h^2}{12}\frac{1}{(\lambda+2\mu)t_0},\ C_4^{(3)}=\rho k_1\frac{h^2}{12}\frac{R}{(\lambda+2\mu)\cdot t_0}\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{n}{2}.$$

Уравнение (1) напишем в следующем виде:

$$-a_1^{(1)}\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2}+a_3^{(1)}\frac{\partial^3 W_n}{\partial t^2\partial\alpha}+a_4^{(1)}\frac{\partial^3 W_n}{\partial\alpha^3}+a_2^{(1)}\frac{\partial^2 U_n}{\partial\alpha^2}+a_9^{(1)}\frac{\partial U_n}{\partial\alpha}+a_6^{(1)}\frac{\partial V_n}{\partial\alpha}+a_5^{(1)}\frac{\partial W_n}{\partial\alpha}-a_{10}^{(1)}U_n-$$
$$-a_7^{(1)}V_n+a_8^{(1)}W_n+X_n=0;$$
$$-a_1^{(2)}\frac{\partial^2 V_n}{\partial t^2}-a_2^{(2)}\frac{\partial^2 W_n}{\partial t^2}+a_9^{(2)}\frac{\partial^2 V_n}{\partial\alpha^2}-a_8^{(2)}\frac{\partial^2 W_n}{\partial\alpha^2}-a_7^{(2)}\frac{\partial U_n}{\partial\alpha}-a_{10}^{(2)}\frac{\partial V_n}{\partial\alpha}-a_5^{(2)}\frac{\partial W_n}{\partial\alpha}-a_6^{(2)}U_n-$$
$$-a_3^{(2)}V_n+a_4^{(2)}W_n+Y_n=0; \tag{4}$$
$$-a_4^{(3)}\frac{\partial^2 V_n}{\partial t^2}-a_1^{(3)}\frac{\partial^2 W_n}{\partial t^2}-a_2^{(3)}\frac{\partial^3 U_n}{\partial t^2\partial\alpha}+a_3^{(3)}\frac{\partial^4 W_n}{\partial t^2\partial\alpha^2}-a_6^{(3)}\frac{\partial^4 W_n}{\partial\alpha^4}-a_5^{(3)}\frac{\partial^3 U_n}{\partial\alpha^3}-a_9^{(3)}\frac{\partial^2 V_n}{\partial\alpha^2}+a_7^{(3)}\frac{\partial^2 W_n}{\partial\alpha^2}+$$
$$+a_{13}^{(3)}\frac{\partial U_n}{\partial\alpha}+a_{14}^{(3)}\frac{\partial V_n}{\partial\alpha}+a_{11}^{(3)}\frac{\partial W_n}{\partial\alpha}-a_{12}^{(3)}U_n-a_{10}^{(3)}V_n-a_8^{(3)}W_n+Z_n=0.$$

Систему дифференциальных уравнений (4) представим в векторной форме. Вводим следующие вектора:

$$U_n=(W_nU_nV_n)^T;F_n=(Z_nX_nY_n)^T \tag{5}$$

Согласно (5), уравнение движения сферических оболочек (4) принимает вид:

$$A_1\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2}+A_2\frac{\partial^4 U_n}{\partial t^2\partial\alpha^2}+A_3\frac{\partial^3 U_n}{\partial t^2\partial\alpha}+A_4\frac{\partial^4 U_n}{\partial\alpha^4}+A_5\frac{\partial^3 U_n}{\partial\alpha^3}+A_6\frac{\partial^2 U_n}{\partial\alpha^2}+A_7\frac{\partial U_n}{\partial\alpha}+A_8U_n+EF_n=0$$

(6)

Начальные условия так же представим в векторной форме:

$$\left[B_1\frac{\partial U_n}{\partial t}+B_2\frac{\partial^2 U_n}{\partial t\partial\alpha}+B_3\frac{\partial^3 U_n}{\partial t\partial\alpha^2}\right]h\delta U_n\big|_t=0 \tag{7}$$

Здесь матрицы A_i и B_i имеют третьего порядка [5].

Теперь к решению краевой задачи (4), (6) и (7) применяем метод сеток: введем сетку $\overline{\omega}_{h\tau} = \{\alpha = ih, \quad t = k\tau, \quad i = 0,1...N, \quad k = 0,1...k\}$ с шагом $h = \frac{1}{N}$ и $\tau = \frac{T}{k}$ соответственно на отрезках $\alpha_0 \le \alpha \le 1$ и $0 \le t \le T$; $U_{n,i} = \{W_{n,i}^k, \quad U_{n,i}^k, \quad V_{n,i}^k\}$- сеточные функции в области $\overline{\omega}_{h\tau}$.

Используем центральные разностные формулы, аппроксимирующие производные по α и смещенные с точностью второго порядка [6]:

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} = \frac{1}{\tau^2}\left(U_{n,i}^{k+1} - 2U_{n,i}^k + U_{n,i}^{k-1}\right),$$

$$\frac{\partial^3 U_n}{\partial t^2 \partial\alpha} = \frac{1}{\tau^2 2h}\left[\left(U_{n,i+1} - U_{n,i-1}\right)^{k+1} - 2\left(U_{n,i+1} - U_{n,i-1}\right)^k + \left(U_{n,i+1} - U_{n,i-1}\right)^{k-1}\right];$$

$$\frac{\partial^4 U_n}{\partial t^2 \partial\alpha^2} = \frac{1}{\tau^2 h^2}\left[\left(U_{n,i+1} - 2U_{n,i} + U_{n,i-1}\right)^{k+1} - 2\left(U_{n,i+1} - 2U_{n,i} + U_{n,i-1}\right)^k + \left(U_{n,i+1} - 2U_{n,i} + U_{n,i-1}\right)^{k-1}\right];$$

(8)

$$\frac{\partial^4 U_n}{\partial\alpha^4} = \frac{1}{h^4}\left(U_{n,i+2} - 4U_{n,i+1} + 6U_{n,i} - 4U_{n,i-1} + U_{n,i-2}\right)^k;$$

$$\frac{\partial^3 U_n}{\partial\alpha^3} = \frac{1}{2h^3}\left(U_{n,i+2} - 2U_{n,i+1} + 2U_{n,i-1} - U_{n,i-2}\right)^k;$$

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial\alpha^2} = \frac{1}{h^2}\left(U_{n,i+1} - 2U_{n,i} + U_{n,i-1}\right)^k; \quad \frac{\partial U_n}{\partial\alpha} = \frac{1}{2h}\left(U_{n,i+1} - U_{n,i-1}\right)^k.$$

При аппроксимации дифференциальных уравнений (6) используем соотношения (8)

$$A_1 \frac{1}{\tau^2}\left[U_{n,i}^{k+1} - 2U_{k,i}^k + U_{n,i}^{k-1}\right] + A_2 \frac{1}{\tau h^2}\left[\left(U_{n,i+1} - 2U_{n,i} + U_{n,i-1}\right)^{k+1} - 2\left(U_{n,i+1} - 2U_{n,i} + U_{n,i-1}\right)^k + \right.$$

$$\left. + \left(U_{n,i+1} - 2U_{n,i} + U_{n,i-1}\right)^{k-1}\right] + A_3 \frac{1}{\tau^2 2h}\left[\left(U_{n,i+1} - U_{n,i-1}\right)^{k+1} - 2\left(U_{n,i+1} - U_{n,i-1}\right)^k + \left(U_{n,i+1} - U_{n,i-1}\right)^{k-1}\right] +$$

$$+ A_4 \frac{1}{h^4}\left[U_{n,i+2} - 4U_{n,i+1} + 6U_{n,i} - 4U_{n,i-1} + U_{n,i-2}\right]^k + A_5 \frac{1}{3h^3}\left[U_{n,i+2} - 2U_{n,i+1} + 2U_{n,i-1} - U_{n,i-2}\right]^k +$$

$$+ A_6 \frac{1}{h^2}\left[U_{n,i+1} - 2U_{n,i} + U_{n,i-1}\right]^k + A_7 \frac{1}{2h}\left[U_{n,i+1} - U_{n,i-1}\right]^k + A_8 U_{n,i}^k - F_{n,i}^k = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) умножаем на τ^2 и приводим подобные слагаемые

$$\left[\frac{A_2}{h^2} - \frac{A_3}{2h}\right]U_{n,i-1}^{k+1} + \left[A_1 - \frac{2A_2}{h^2}\right]U_{n,i}^{k+1} + \left[\frac{A_2}{h^2} + \frac{A_3}{2h}\right]U_{n,i+1}^{k+1} + \left[\frac{A_4\tau^2}{h^4} - \frac{A_5 \cdot \tau^2}{2h^3}\right]U_{n,i-2}^{k+1} + \left[\frac{A_2}{h^2} + \frac{2A_3}{2h} - \frac{4A_4\tau^2}{h^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{2A_5\tau^2}{2h^3} + \frac{A_6\tau^2}{h^2} - \frac{A_7\tau^2}{2h}\right]U_{n,i-1}^k + \left[-2A_1 + \frac{4A_2}{h^2} + \frac{6A_4 \cdot \tau^2}{h^4} - \frac{2A_6 \cdot \tau^2}{h^2} + A_8\tau^2\right]U_{n,i}^k + \left[-\frac{2A_2}{h^2} - \frac{2A_3}{2h} - \right.$$

$$\left[\frac{A_2}{h^2}-\frac{A_3}{2h}\right]U_{n,i-1}^{k+1}+\left[A_1-\frac{2A_2}{h^2}\right]U_{n,i}^{k+1}+\left[\frac{A_2}{h^2}+\frac{A_3}{2h}\right]U_{n,i+1}^{k+1}+\left[\frac{A_4\tau^2}{h^4}-\frac{A_5\cdot\tau^2}{2h^3}\right]U_{n,i-2}^{k+1}+\left[\frac{A_2}{h^2}+\frac{2A_5}{2h}-\frac{4A_4\tau^2}{h^4}+\right.$$

$$\left.-\frac{4A_4\tau^2}{h^4}-\frac{2A_5\tau^2}{2h^3}+\frac{A_6\tau^2}{h^2}+\frac{A_7\tau^2}{2h}\right]U_{n,i+1}^{k}+\left[\frac{A_4\tau^2}{h^4}+\frac{A_5\tau^2}{2h^3}\right]U_{n,i+2}^{k}+\left[\frac{A_2}{h^2}-\frac{A_3}{2h}\right]U_{n,i-1}^{k-1}+\left[-\frac{2A_2}{h^2}+A_1\right]U_{n,i}^{k-1}+$$

$$+\left[\frac{A_2}{h^2}+\frac{A_3}{2h}\right]U_{n,i+1}^{k-1}-\tau^2F_{n.i}=0 \qquad (10)$$

Вводим обозначения

$$A_n=\left[\frac{A_2}{h^2}-\frac{A_3}{2h}\right],\ B_n=\left[A_1-\frac{2A_2}{h^2}\right],\ C_n=\left[\frac{A_2}{h^2}+\frac{A_3}{2h}\right],\ \overline{A}_n=\left[\frac{A_4\cdot\tau^2}{h^4}-\frac{A_5\cdot\tau^2}{2h^3}\right],$$

$$\overline{B}_n=\left[\frac{A_2}{h^2}+\frac{2A_3}{2h}-\frac{4A_4\cdot\tau^2}{h^4}+\frac{2A_5\tau^2}{2h^3}+\frac{A_6\tau^2}{h^2}-\frac{A_7\tau^2}{2h}\right],$$

$$\overline{C}_n=\left[-2A_1+\frac{4A_2}{h^2}+\frac{6A_4\tau^2}{h^4}-\frac{2A_6\cdot\tau^2}{h^2}+A_8\tau^2\right],$$

$$\overline{D}_n=\left[-\frac{2A_2}{h^2}-\frac{2A_3}{2h}-\frac{4A_4\cdot\tau^2}{h^4}-\frac{2A_5\tau^2}{2h^3}+\frac{A_6\tau^2}{h^2}+\frac{A_7\tau^2}{2h}\right],\ \overline{E}_n=\left[\frac{A_4\cdot\tau^2}{h^4}+\frac{A_5\cdot\tau^2}{2h^3}\right].$$

(11)

Учитывая обозначения (11), уравнение (10) представим в виде:

$$A_nU_{n,i-1}^{k+1}+B_nU_{n,i}^{k+1}+C_nU_{n,i+1}^{k+1}+\overline{A}_nU_{n,i-2}^{k}+\overline{B}_nU_{n,i-1}^{k}+\overline{C}_nU_{n,i}^{k}+\overline{D}_nU_{n,i+1}^{k}+\overline{E}_nU_{n,i+2}^{k}+A_nU_{n,i-1}^{k-2}+$$

$$+B_nU_{n,i}^{k-1}+C_nU_{n,i+1}^{k-1}-\tau^2F_n=0 \qquad (12)$$

Теперь аппроксимируем начальное условие (7). При этом используем центральные разностные формулы.

$$\frac{\partial U_n}{\partial t}=\frac{1}{2\tau}\left[U_{n,i}^{k+1}-U_{n,i}^{k-1}\right],\ \frac{\partial^2U_n}{\partial t\partial\alpha}=\frac{1}{4\tau h}\left[\left(U_{n,i+1}-U_{n,i-1}\right)^{k+1}+\left(U_{n,i+1}-U_{n,i-1}\right)^{k-1}\right],$$

$$\frac{\partial^3U_n}{\partial t\partial\alpha^2}=\frac{1}{2\tau h^2}\left[\left(U_{n,i+1}-2U_{n,i}+U_{n,i-1}\right)^{k+1}-\left(U_{n,i+1}-2U_{n,i}+U_{n,i-1}\right)^{k-1}\right] \qquad (13)$$

С учетом соотношения (13) перепишем начальные условие (7).

$$\left[B_1\frac{1}{2\tau}\left(U_{n,i}^{k+1}-U_{n,i}^{k-1}\right)+B_2\frac{1}{2\tau 2h}\left[\left(U_{n,i+1}-U_{n,i-1}\right)^{k+1}-\left(U_{n,i+1}-U_{n,i-1}\right)^{k-1}\right]+\right.$$

$$\left.+B_3\frac{1}{2\tau h^2}\left[\left(U_{n,i+1}-2U_{n,i}+U_{n,i-1}\right)^{k+1}-\left(U_{n,i+1}-2U_{n,i}+U_{n,i-1}\right)^{k-1}\right]\right]t_0h\delta U_{n,i}^{k}=0$$

Приводим подобные слагаемые

$$\left[\left[\frac{B_3}{2\tau h^2}-\frac{B_2}{4\tau h}\right]U_{n,i-1}^{k+1}+\left[\frac{B_1}{2\tau}-\frac{2B_2}{2\tau h^2}\right]U_{n,i}^{k+1}+\left[\frac{B_2}{4\tau h}+\frac{B_3}{2\tau h^2}\right]U_{n,i+1}^{k+1}+\left[-\frac{B_2}{4\tau h}-\frac{B_3}{2\tau h^2}\right]U_{n,i-1}^{k-1}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{-2B_3}{2\tau h^2}-\frac{B_1}{2\tau}\right]U_{n,i}^{k-1}-\left[\frac{B_2}{4\tau h}+\frac{B_3}{2\tau h^2}\right]U_{n,i+1}^{k-1}\right]t_0h\delta U_{n,i}=0 \qquad (14)$$

Вводим обозначения:

$$M_1=\left[\frac{B_3}{2\tau h^2}-\frac{B_2}{4\tau h}\right],\ M_2=\left[\frac{B_1}{2\tau}-\frac{2B_2}{2\tau h^2}\right],\ M_3=\left[\frac{B_2}{4\tau h}+\frac{B_3}{2\tau h^2}\right]. \qquad (15)$$

С учетом обозначений (15), начальное условие (14) получает вид:

$$\left[M_1U_{n,i-1}^{k+1}+M_2U_{n,i}^{k+1}+M_3U_{n,i+1}^{k+1}-M_1U_{n,i-1}^{k-1}-M_2U_{n,i}^{k-1}-M_3U_{n,i+1}^{k-1}\right]t_0h\delta U_{n,i}=0$$

(16)

Предполагается, что начальные условия принимают нулевые значения.

$$U_{n,i}\big|_{t=0}=0\,,\frac{\partial U_{n,i}}{\partial t}\big|_{t=0}=0\,.$$

Рассмотрим граничные условия. Считаем, что сферическая оболочка защемлена при $\alpha=\alpha_0$ и при $\alpha=1$:

$$W_n(0,t)=0\,,\ U_n(0,t)=0\,,\ V_n(0,t)=0\,,\ \frac{\partial W_n(0,t)}{\partial\alpha}=0$$

$$W_n(1,t)=0\,,\ U_n(1,t)=0\,,\ V_n(1,t)=0\,,\ \frac{\partial W_n(1,t)}{\partial\alpha}=0 \qquad (17)$$

Из первых трех; пятого, шестого и седьмого условий (17) получим

$$W_{n,0}^i=0\,,\ U_{n,0}^i=0\,,\ V_{n,0}^i=0\,,W_{n,N}^j=0\,,\ U_{n,N}^j=0\,,\ V_{n,N}^j=0\,,\quad j=k-1,k,k+1 \qquad (18)$$

Так же из четвертого и восьмого условий имеем

$$W_{n,-1}=W_{n,1}\,;\quad W_{n,N-1}=W_{n,N+1} \qquad (19)$$

В векторном виде условия (18) и (19) пишутся так:

$$U_{n,0}^j=0\,,\ A'U_{n,-1}^j=A'U_{n,1}^j\,,U_{n,N}^j=0\,,A'U_{n,N+1}^j=A'U_{n,N-1}'^j$$

(20)

Теперь системы разностных уравнений (12) напишем с учетом граничных условий (20)

при $i=1$,

$$B_nU_{n,1}^{k+1}+C_nU_{n,2}^{k+1}+\overline{A}_nU_{n,-1}^k+\overline{C}_nU_{n,1}^k+\overline{D}_nU_{n,2}^k+\overline{E}_nU_{n,3}^k+B_nU_{n,1}^{k-1}+C_nU_{n,2}^{k-1}-\tau^2F_{n,1}=0\ ;$$

при $i=2$,

$$A_nU_{n,1}^{k+1}+B_nU_{n,2}^{k+1}+C_nU_{n,3}^{k+1}+\overline{B}_nU_{n,1}^k+\overline{C}_nU_{n,2}^k+\overline{D}_nU_{n,3}^k+\overline{E}_nU_{n,4}^k+A_nU_{n,1}^{k-1}+B_nU_{n,2}^{k-1}+C_nU_{n,3}^{k-1}-\tau^2F_{n,2}=0$$

; при $i=3$ в уравнении (12) все слагаемые участвуют;

при $i=N-2$,

$$A_nU_{n,N-3}^{k+1}+B_nU_{n,N-2}^{k+1}+C_nU_{n,N-1}^{k+1}+\overline{A}_nU_{n,N-4}^k+\overline{B}_nU_{n,N-3}^k+\overline{C}_nU_{n,N-2}^k+\overline{D}_nU_{n,N-1}^k+A_nU_{n,N-3}^{k-1}+B_nU_{n,N-2}^{k-1}+$$
$$+C_nU_{n,N-1}^{k-1}-\tau^2F_{n,N-2}=0;$$

при $i=N-1$,

$$A_nU_{n,N-2}^{k+1}+B_nU_{n,N-1}^{k+1}+\overline{A}_nU_{n,N-3}^k+\overline{B}_nU_{n,N-2}^k+\overline{C}_nU_{n,N-1}^k+\overline{E}_nU_{n,N+1}^k+A_nU_{n,N-2}^{k-1}+B_nU_{n,N-1}^{k-1}-\tau^2F_{n,N-1}=0$$

В результате имеем следующую систему алгебраических уравнений:

$$B_nU_{n,1}^{k+1}+C_nU_{n,2}^{k+1}+\overline{C}_n^1U_{n,1}^k+\overline{D}_nU_{n,2}^k+\overline{E}_nU_{n,3}^k+B_nU_{n,1}^{k-1}+C_nU_{n,2}^{k-1}-\tau^2F_{n,1}=0\,,$$

$$A_nU_{n,1}^{k+1}+B_nU_{n,2}^{k+1}+C_nU_{n,3}^{k+1}+\overline{B}_nU_{n,1}^k+\overline{C}_nU_{n,2}^k+\overline{D}_nU_{n,3}^k+\overline{E}_nU_{n,4}^k+A_nU_{n,1}^{k-1}+B_nU_{n,2}^{k-1}+C_nU_{n,3}^{k-1}-\tau^2F_{n,2}=0$$

………………………………………………………………………………………

$$A_nU^{k+1}_{n,N-3}+B_nU^{k+1}_{n,N-2}+C_nU^{k+1}_{n,N-1}+\overline{A}_nU^{k}_{n,N-4}+\overline{B}_nU^{k}_{n,N-3}+\overline{C}_nU^{k}_{n,N-2}+\overline{D}_nU^{k}_{n,N-1}+A_nU^{k-1}_{n,N-3}+B_nU^{k-1}_{n,N-2}+$$

$$+C_nU^{k-1}_{n,N-1}-\tau^2F_{n,N-2}=0\ , \qquad (21)$$

$$A_nU^{k+1}_{n,N-2}+B_nU^{k+1}_{n,N-1}+\overline{A}_nU^{k}_{n,N-3}+\overline{B}_nU^{k}_{n,N-2}+\overline{C}^{11}_nU^{k}_{n,N-1}+A_nU^{k-1}_{n,N-2}+B_nU^{k-1}_{n,N-1}-\tau^2F_{n,n-1}=0$$

,

где $\overline{C}^{1}_n=\overline{A}_n+\overline{C}_n$, $\overline{C}^{11}_n=\overline{C}_n+\overline{E}_n$.

Систему уравнений (21) напишем в виде:

$B_nU^{k+1}_{n,1}+C_nU^{k+1}_{n,2}=b_{n,1}$;

где $b_{n,1}=\tau^2F_{n,1}-\left(\overline{C}_nU^{k}_{n,1}+\overline{D}_nU^{k}_{n,2}+\overline{E}_nU^{k}_{n,3}+B_nU^{k-1}_{n,1}+C_nU^{k-1}_{n,2}\right)$;

$A_nU^{k+1}_{n,1}+B_nU^{k+1}_{n,2}+C_nU^{k+1}_{n,3}=b_{n,2}$,

$b_{n,2}=\tau^2F_{n,2}-\left(\overline{B}_nU^{k}_{n,1}+\overline{C}_nU^{k}_{n,2}+\overline{D}_nU^{k}_{n,3}+\overline{E}_nU^{k}_{n,4}+A_nU^{k-1}_{n,1}+B_nU^{k-1}_{n,2}+C_nU^{k-1}_{n,3}\right)$;

………………………………………………………………..

$A_nU^{k+1}_{n,i-1}+B_nU^{k+1}_{n,i}+C_nU^{k+1}_{n,i+1}=b_{n,i}$,

$b_{n,i}=\tau^2F_{n,i}-\left(\overline{A}_nU^{k}_{n,i-2}+\overline{B}_nU^{k}_{n,i-1}+\overline{C}_nU^{k}_{n,i}+\overline{D}_nU^{k}_{n,i+1}+\overline{E}_nU^{k}_{n,i+2}+A_nU^{k-1}_{n,i-1}+B_nU^{k-1}_{n,i}+C_nU^{k-1}_{n,i+1}\right)$

;

………………………………………………………………………………

$A_nU^{k+1}_{n,N-3}+B_nU^{k+1}_{n,N-2}+C_nU^{k+1}_{n,N-1}=b_{n,N-2}$,

$b_{n,N-2}=\tau^2F_{n,N-2}-\left(\overline{A}_nU^{k}_{n,N-4}+\overline{B}_nU^{k}_{n,N-3}+\overline{C}_nU^{k}_{n,N-2}+\overline{D}_nU^{k}_{n,N-1}+A_nU^{k-1}_{n,N-3}+B_nU^{k-1}_{n,N-2}+C_nU^{k-1}_{n,N-1}\right)$

;

$A_nU^{k+1}_{n,N-2}+B_nU^{k+1}_{n,N-1}=b_{n,N-1}$,

$b_{n,N-1}=\tau^2F_{n,N-1}-\left(\overline{A}_nU^{k}_{n,N-3}+\overline{B}_nU^{k}_{n,N-2}+\overline{C}_nU^{k}_{n,N-1}+A_nU^{k-1}_{n,N-2}+B_nU^{k-1}_{n,N-1}\right)$; 22)

Из первого уравнения (22) находим (прямая прогонка):

$U^{k+1}_{n,1}=B^{-1}_nb_{n,1}-B^{-1}_nC_nU^{k+1}_{n,2}$.

Введем обозначения $f_1=B^{-1}_nb_{n,1}$, $H_1=B_nC_n$, тогда решение принимает вид:

$$U^{k+1}_{n,1}=f_1-H_1U^{k+1}_{n,2}\ ; \qquad (23)$$

Выражение (23) подставляем на второе уравнение (22)

$A_n\left(f_1-H_1U^{k+1}_{n,2}\right)+B_nU^{k+1}_{n,2}+C_nU^{k+1}_{n,3}=b_{n,2}$.

Приводим подобные слагаемые

$A_nf_1+\left(B_n-A_nH_1\right)U^{k+1}_{n,2}+C_nU^{k+1}_{n,3}=b_{n,2}$. Это уравнение решаем относительно функции $U^{k+1}_{n,2}$

$U^{k+1}_{n,2}=\left(B_n-A_nH_1\right)^{-1}\left(b_{n,2}-A_nf_1\right)-\left(B_n-A_nH_1\right)^{-1}C_nU^{k+1}_{n,3}$

Вводим обозначения : $f_2 = (B_n - A_n H_1)^{-1}(b_{n,2} - Af_1)$; $H_2 = (B_n - A_n H_1)^{-1} C_n$. Тогда решение получает вид:

$$U_{n,2}^{k+1} = f_2 - H_2 U_{n,3}^{k+1} \qquad (24)$$

Выражение (24) подставляем на третье уравнение (22)

$$A_n\left(f_2 - H_2 U_{n,3}^{k+1}\right) + B_n U_{n,3}^{k+1} + C_n U_{n,4}^{k+1} = b_{n,3}$$

Отсюда получим

$(B_n - A_n H_2)U_{n,2}^{k+1} + C_n U_{n,4}^{k+1} = b_{n,3} - A_n f_2$. Решаем уравнение относительно $U_{n,3}^{k+1}$.

$$U_{n,3}^{k+1} = (B_n - A_n H_2)^{-1}(b_{n,3} - A_n f_2) - (B_n - A_n H_2)^{-1} C_n U_{n,4}^{k+1}$$

Вводим обозначения: $f_3 = (B_n - A_n H_2)^{-1}(b_{n,3} - Af_2); H_3 = (B_n - A_n H_2)^{-1} C_n$

Тогда решение получает вид:

$$U_{n,3}^{k+1} = f_3 - H_3 U_{n,4}^{k+1} \qquad (25)$$

Теперь можно обобщить решение для i -го уравнения (22):

$$U_{n,i}^{k+1} = (B_n - A_n H_{i-1})^{-1}(b_{n,i} - A_n f_{i-1}) - (B_n - A_n H_{i-1})^{-1} C_n U_{n,i+1}^{k+1}$$

Вводятся следующие обозначения:

$$f_i = (B_n - A_n H_{i-1})^{-1}(b_{n,i} - A_n f_{i-1}), H_i = (B_n - A_n H_{i-1})^{-1} C_n.$$

Тогда решение получает вид:

$$U_{n,i}^{k+1} = f_i - H_i U_{n,i+1}^{k+1} \qquad (26)$$

Из формулы (26) при $i = N-3$, $i = N-2$ и $i = N-1$ имеем

$$U_{n,N-3}^{k+1} = f_{N-3} - H_{N-3} U_{n,N-2}^{k+1}, \quad U_{n,N-2}^{k+1} = f_{N-2} - H_{N-2} U_{n,N-1}^{k+1}, U_{n,N-1}^{k+1} = f_{N-1} - H_{N-1} U_{n,N}^{k+1};$$

Здесь $U_{n,N}^{k+1}$ на границе имеет нулевое значение , значить $U_{n,N-1}^{k+1} = f_{N-1}$,

где $f_{N-1} = (B_n - A_n H_{i-2})^{-1}(b_{n,N-1} - A_n f_{N-2})$.

При обратной прогонке определяются остальные значения вектора перемещений до $U_{n,1}$.

Литература

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике – М.: Гостехиздат, 1949, 761с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек- М.:Наука, 1973,400 с.
3. Буриев Т. Алгоритмизация расчета несущих элементов тонкостенных конструкций. Т.: Изд. «Фан», 1986, - 244с.
4. Вершинский С.В. и др. Расчет вагонов на прочность.-М.:Машиностроение, 1971.-432с.
5. Абдусаттаров А., Юлдашев Т, Собиров Н.Х., Уравнения движения и формирование разностной краевой задачи цилиндрической части оболочечных конструкций // Вестник ТашИИТ, 2016, № 4, с.30-38
6. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.:Наука, 1977,440 с.