УДК 517.946

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИТРЕХМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

доц. М. К. Садыков, ст.преп. А.А. Абдурахманов
Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности

Мақолада чизиқли параболик тенгламалар системаси учун айирмалар схемасини яқинлашиши тўғрисида изданишлар олиб борилган

В настоящей работе исследуется сходимость разностных схем для решения систем квазилинейных параболических уравнений

In the present paper we study the convergence of difference schemes for solving systems of quasilinear parabolic equations

В настоящей работе исследуется сходимость разностных схем для решения систем квазилинейных параболических уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(k((\nabla u)^2)\dfrac{\partial y}{\partial x_i}\right)+a(x_1,x_2,t)u+\sum\limits_{i=1}^{m} A_i(x_1,x_2,x_3,t)k_i\left(\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_3}\right)^2\right)\dfrac{\partial u_i}{\partial x_3} = f_0(x_1,x_2,x_3,t),\ \ x\in\Omega_i \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(k_i\left(\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_3}\right)^2\right)\dfrac{\partial u_i}{\partial x_3}\right)+a_i(x_1,x_2,x_3,t)u_i=f_i(x_1,x_2,x_3,t),\quad x\in\Omega_i \\ (\nabla u)^2=(gradu)^2, \end{cases} \tag{1}$$

описывающего нелинейную фильтрацию жидкости в многослойном пласте. Рассматривается неявная и регуляризованная разностные схемы.

В работе [1] исследована существование и единственность обобщенного решения краевой задачи для системы (1).

Пусть Ω и Ω_i – ограниченные области. На Ω и Ω_i построим равномерные сетки с шагом h. Обозначим через ω и ω_i множество внутренних точек этих сеток; $\gamma=\overline{\omega}\backslash\omega$, $\gamma_i=\overline{\omega}_i\backslash\omega_i$, τ – шаг по времени; H_h – гильбертово пространство функций, равных на γ пулю; y_t – разностная производная по t.

Кроме того в дальнейшем будут использоваться обозначения и вспомогательные результаты, приведенные в [2] (см. стр. 63-65).

Пусть A разностный оператор, действующий из $\overset{0}{H}_h$ в $\overset{0}{H}_h$ определяемый соотношением

$$[Ay,v]=\frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r_3}[(k_i(\nabla_{r_3}^2 y)\partial_{r_3}y,\partial_{r_3}v)_{r_3}] + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{r_i}[k(\nabla_{r_i}^2 y,\partial_{r_i}v)_{r_i}];\quad v\in\overset{0}{H}_h$$

φ – сеточная функция, являющиеся аппроксимацией правой части уравнений (1), которую определим следующим образом:

$$[\varphi,v]=\frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r_3}(\varphi_{ir_3},v)_{r_3}+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r_i}(\varphi_{r_i},v)_{r_i},$$

где

$$\varphi_{ir_3}=\frac{1}{\tau H_r(x)}\int_t^{t+\tau}\int_{H_r(x)}f_i\,dxdt;\qquad \varphi_{r_i}=\frac{1}{\tau H_{r_i}(x)}\int_t^{t+\tau}\int_{H_{r_i}(x)}f_0\,dxdt.$$

Здесь r –двумерный вектор, компоненты которого принимают значении +1 или -1; $\nabla_r y$ – разностный аналог градиента функций; $H_r(x)$ ячейка сетки, примыкающая к точке *x*, причем та, которая содержит все точки сетки, участвующие в записи $\nabla_r y(x)$; $\partial_r y$ – разностный аналог производной функции по пространственному переменному, $[\cdot\,,\cdot]$ – склярное произведение в $\dot{H}_h$.

Рассмотрим неявную

$$y_t + A\hat{y} = \varphi, \quad y(x,0) = y_0(x) \tag{2}$$

И регуляризованную

$$(\mathrm{E} + \tau\sigma Q)y_t + Ay = \varphi, \quad y(x,0) = y_0(x) \tag{3}$$

Разностных схем, где $y_0(x)$ – разностный аналог функции $u_0(x)$ [1] такой, что $q_r y_0 \to u_0$ в $L_2(\Omega)$; $q_r y$ – кусочно-постоянное восполнение сеточной функции y; Q: $\overset{0}{H}_h \to \overset{0}{H}_h$ - самосопряженный, неотрицательный разностный оператор, удовлетворяющий условиям:

а) коэрцитивности, т.е.

$$[Qy, y] \geq \delta_1 \|y\|_+^2, \quad \delta_1 > 0;$$

б) если $\eta_{h\tau}$- след функции η

$$(x,t) \in C^\infty\big(0,T; C^\infty(\boldsymbol{\Omega})\big), \text{ то } [Q\eta_{h\tau}, \eta_{h\tau}] \leq N_1(\eta); \ [Q(\eta_{h\varepsilon})_t, (\eta_{h\tau})_\tau] \leq N_1(\eta),$$

где N_1 - постоянная, зависящая только от η (*x,t*).

Отметим, что схема (3) включает в себя как частный случай явную при Q≡0 и схему с факторизованным оператором при

$$\mathrm{E} + \tau\sigma Q = \prod_{i=1}^{3}(E + \tau\sigma R_i), \quad R_i y = -y_{x_i\bar{x}_i}$$

Справедливы следующие результаты.

Лемма 1. Для решения неявной разностной схемы (2) при любых $t' \in \overline{\omega}_\tau$ имеет место оценки:

$$\|y(t')\|^2 \ll C; \qquad \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\|\hat{y}\|_+^2 \ll C \tag{4}$$

Лемма 2. Пусть y(t) – решение регуляризованной разностной (3). Тогда

а) если $\delta_1 > 0$, то для любых шагов h и τ

$$\|y(t')\|^2 \ll C; \quad \tau[Qy(t), y(t)] \ll C, \ t' \in \overline{\omega}_\tau$$

(5)

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau\|y(t)\|_+^2 \ll C; \qquad \sum_{t=0}^{T-\tau} t^2\|y_t(t)\|^2 \ll C;$$

б) если $\sigma_1 = 0$, то оценки (5) имеют место для шагов h и τ, удовлетворяющих условию

$\tau \ll \tilde{C}h^2$, где $C, \tilde{C}$ – некторые постоянные не зависящие от h и τ.

Доказательство этих лемм приводится следующей образом. Умножая обе части уравнений (2) и (3) на $2\tau\hat{y}$, получим соответственно тождества

$$2\tau[y_t, \hat{y}] + 2\tau[A\hat{y}, \hat{y}] = 2\tau[\varphi, \hat{y}], \tag{6}$$

$$2\tau[y_t, \hat{y}] + 2\tau^2\sigma[Qy_t, \hat{y}] + 2\tau[Ay, \hat{y}] = 2\tau[\varphi, \hat{y}] \tag{7}$$

Далее используя тождество

$$2\tau[y_t, \hat{y}] = \|\hat{y}\|^2 - \|y\|^2 + \tau^2\|y_t\|^2,$$

неравенство Коши-Буняковского и $\varepsilon -$ **неравенства, а** также воспользовав-шись коэрцитивности оператора докажем справедливость оценки (4) и (5).

Из (4) и (5) следует, что существует функция $u \in L_2\big(0,T; L_2(\Omega)\big)$ такая, что

$$q_r^- y \to u \text{ слабо в } L_2\big(0,T; L_2(\Omega)\big),$$

(8)

$$q_{r_i}^- y \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ слабо в } L_2\big(0,T; L_2(\Omega)\big),\ (i = \overline{1,3}).$$

Пусть z_h - след функции $z \in C_0^\infty(\Omega)$ на множестве $\overline{\omega}_h$, а η_τ **— след** $\boldsymbol{\eta} \in C^\infty(\mathbf{0}, T)$, η(T)=0. Умножая уравнений (4) и (5) соответственно скалярно в H_h на $z_h \tau \hat{\eta}_\tau$, суммируя по t от 0 до T-τ, после преобразования первого слагаемого с помощью формулы суммирования по частям осуществляется предельный переход при τ,h→0 (см. напр.[2], стр. 79-83) убеждаемся, что функция u (8) является обобщенным решением краевой задачи (см. [1]) для системы (1).

Использованная литература:

1. М.К. Садыков // Математика, № 11, 1999г,13-15

2. Н.Мухидинов, Н.Мукимов, М.К. Садыков. Численное моделирование нелинейной фильтрации. Ташкент, Фан, 2000.