

**МИНИСТЕРСТВО ПО РАЗВИТИЮ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И
КОММУНИКАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**НУКУССКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

Кафедра информационные образовательные технологии

«Профессиональное образования в сфере ИКТ»

Допуск к защите

зав. кафедрой _____

2017 г. « ____ » _____

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему «**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА
ЯЗЫКЕ C++**»

Выпускник:

Жолдасбаев А.

Научный руководитель:

к.ф.-м.н. Алламуратов Ш.

Рецензент:

д.т.н. Өтениязов Р.

НУКУС - 2017 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	6
Глава 1. Понятие о дифференциальном уравнении.....	8
1.1. Уравнение с разделяющимися переменными.....	10
1.2. Линейное уравнение первого порядка.....	15
Глава 2. Приближенные методы решения задачи Коши.....	20
2.1. Экстраполяционные и интерполяционные методы Адамса	21
2.2. Метод Эйлера и Эйлера-Коши.....	27
Глава 3. Численные методы решения краевых задач в обыкновенных дифференциальных уравнениях.....	29
3.1. Метод коллокации.....	29
3.2. Метод прогонки	32
3.3. Численные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка на языке C++	40
Заключение.....	47
Использованная литература.....	48
Техника безопасности.....	49

Введение

Актуальность темы: Многие задачи техники и природы приводятся к нахождению неизвестной функции от изучаемого процесса или явления. Это в свою очередь приводит к решению дифференциального уравнения в начальных и граничных условиях.

Во многих случаях в поставленных граничных условиях аналитическое решение уравнения не возможно найти и решения находят с помощью численных методов приближённо. Приближённые методы достаточно не изучены. По этой причине тема с научной и практической точки зрения является актуальной.

Объект исследования: Объектом исследования является обыкновенные дифференциальные уравнения и граничные задачи поставленные на них. Методы приближённых решений обыкновенных дифференциальных уравнений приводятся в литературах [].

Практическое значение: Материалы выпускной работы можно использовать в качестве методических указаний к предметам «методы вычисления», «вычислительная математика» в лабораторных и практических занятиях.

Например: Материальная точка с массой m падает вниз под влиянием силой притяжения. Надо найти закон движения материальной точки [2].

Состояния материальной точки определяется координатой $OM=S$ и он меняется в зависимости от времени t . По второму закону Ньютона:

$$ma = F$$

где

m - масса материальной точки

a - ускорение

F – действующая сила

На материальную точку действует только сила притяжения:

$$F = m \cdot g$$

g – ускорение силы притяжения

a – ускорения это производный второго порядка

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = mg \quad \text{или} \quad \frac{d^2 S}{dt^2} = g \quad (1)$$

(1) -это уравнение содержащий вторую производную от неизвестной функции.

Если эту уравнению дважды интегрировать по t мы находим искомую функцию:

$$\frac{dS}{dt} = gt + c_1 \quad (2)$$

$$S = \frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2 \quad (3)$$

Где c_1 и c_2 называется интегральными постоянными. Их можно определит зная начальную значение и начальную скорость материальной точки [10]. Пусть скорость материальной точки в начальной момент $t=0$ времени равно V_0 а его расстояние от начало координаты равно S_0 . Из (2) уравнения находим $C_1=V_0$. Из (3) находим $C_2=S_0$. Тогда закон движения будет

$$S = \frac{gt^2}{2} + V_0 t + S_0$$

Состав работы: Данная выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключении и списка использованных литератур.

В первом параграфе приведены общие понятие о дифференциальных уравнениях, во втором параграфе задача Коши и его постановка и метод Адамса.

В третьем параграфе приведены численные методы решения краевых задач в обыкновенных дифференциальных уравнениях как метод коллокации, метод прогонки, и метод Галеркина. В пункте 3.3 для задачи Коши на языке C++ было построено программное обеспечение.

ГЛАВА 1. ПОНЯТИЕ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Определение: Дифференциальным уравнением называется такое уравнение, которое содержит искомую функцию, производные от искомой функции и независимую переменную.

Если неизвестная функция зависит только от одной переменной то такое уравнение называется обыкновенной дифференциальной уравнением.

Если неизвестная функция зависит от двух или несколько переменных то такое уравнения называется дифференциальное уравнения в частных производных.

Определение: Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком этого уравнения.

Например:

$y'' - y' \cos x - x^2 y = 0$ - дифференциальное уравнение второго порядка.

$x(1 - y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$ - дифференциальное уравнение первого порядка.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (4)$$

дифференциальное уравнение n -го порядка, где x – свободный переменный, y – неизвестная функция $y', y'', \dots, y^{(n)}$ - производные от неизвестных функции.

Определение: Всякая функция $y = \varphi(x)$, определенная и непрерывная в интервале (a, b) вместе со своими производными до порядка, равного порядку данного дифференциального уравнения, и обращающая это уравнение в тождество, справедливое при всех значениях x из интервала (a, b) , называется решением этого уравнения в интервале (a, b) .

Например: Является ли функции $y = 3e^x$ и $y = 4e^{-x}$ решением данного дифференциального уравнения ?

а) $y = 3e^x$; $y' = 3e^x$; $y'' = 3e^x$.

$$y'' - y = 0, \quad 3e^x - 3e^x = 0; \quad 0 = 0$$

Значит, $y=3e^x$ функция является решением уравнения

$$b) y=4e^{-x}; y'=-4e^{-x}; y''=4e^{-x}.$$

$$y''-y=0 \Rightarrow 4e^{-x}-4e^{-x}=0; \Rightarrow 0=0$$

Значит, $y=4e^{-x}$ функция тоже является решением данного уравнения.

Определение: График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием. Согласно определению, данному выше, уравнение первого порядка имеет следующий вид:

$$F(x,y,y')=0 \quad (5)$$

Если можно решить в отношении y' то его можно написать следующим образом:

$$y'=f(x,y) \quad (6)$$

Или

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy \quad (7)$$

Такой надпись называется симметрическим, потому что переменные x и y равноправные.

Дифференциальную уравнению могут удовлетворить не одно функция а целый класс функции.

$$y(x_0)=y_0 \quad (8)$$

называется начальной условием для дифференциального уравнения [3].

Определение: Общим решением $y'=f(x,y)$ дифференциального уравнения первого порядка называется $y=\varphi(x,c)$ функция удовлетворяющая следующим условиям: (где c – произвольная постоянная)

- Он в любом значении c удовлетворяет дифференциального уравнения
- В любом начальном условии $y(x_0)=y_0$ можно найти для c – произвольной постоянной такое значение c_0 , который $y=\varphi(x,c_0)$ функция удовлетворяет начальную условию $y_0=\varphi(x_0,c_0)$

Определение: Из общего решения при любом значения произвольной постоянной можно получить частное решения.

1.1. Уравнение с разделяющимися переменными.

Рассмотрим уравнение вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \quad (9)$$

в котором коэффициент при dx является функцией только от x , а коэффициент при dy - функцией от y . В подобных случаях говорят, что в дифференциальном уравнении переменные разделены.

Будем предполагать, что функции $P(x)$ и $Q(y)$ непрерывны при рассматриваемых значениях x и y .

Общий интеграл можно записать в виде:

$$\int (P(x)dx + Q(y)dy) = \int o dx$$

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$$

Пример 1. $x dx + y dy = 0$ проинтегрировав получим общую решение

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \cdot 2$$

$$x^2 + y^2 = 2C$$

Если взять $2C = C_1^2$, то получим $x^2 + y^2 = C_1^2$. Это концентрические круги с центром в начале координат и радиусом C_1 .

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$P_1(x) \cdot Q_1(y) dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) dy = 0 \quad (10)$$

то оно называется уравнением с разделяющимися переменными.

Будем предполагать, что все функции, входящие в уравнение (10) непрерывны при рассматриваемых значениях x и y . Чтобы разделить переменные в уравнении (10), надо разделить обе его части на «лишние» множители, т.е. на произведение $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$

Получим

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = 0$$

Интегрируя, находим общий интеграл.

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = C$$

Памятка: Уравнение вида $y' = f_1(x)f_2(y)$ так же называется уравнение с разделяющимися переменными. Его можно привести к виду

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx$$

и умножая обе части на $\frac{dx}{f_2(y)}$ разделим переменных.

$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx$ Интегрируя обе части находим общий интеграл.

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + c$$

Пример 2. $x(1+y_2)dx - y_2(1+x_2)dy = 0$

$$x(1+y_2)dx = y_2(1+x_2)dy$$

$$\frac{y^2}{1+y^2} dy = \frac{x}{1+x} dx$$

Интегрируя ,
$$\int \frac{y^2 + 1 - 1}{1+y^2} dy = \int \frac{d(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2})}{1+x^2}$$

$$\int dy - \int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2}$$

$$y - \arctg y = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Пример 3: Найти частное решение дифференциального уравнение

$y' y = \frac{e^x}{1+e^x}$ в следующих начальных условиях $y(0) = \sqrt{2}$;

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$y dy = \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|1+e^x| + \ln c$$

$$y = \sqrt{2 \ln [c \cdot (1 + e^x)]} \text{ -общая решение}$$

Находим $\sqrt{2} = \sqrt{2 \ln [c(1 + e^0)]}; c = \frac{e}{2}$

тогда $y = \sqrt{2 \ln \frac{e}{2} (1 + e^x)}$ - частное решение .

Однородное уравнение.

Однородная функция двух независимых переменных определяется следующим образом: функция $f(x,y)$ называется однородной функцией степени n , если в результате умножения обоих ее аргументов x и y на одну и ту же величину t она приобретает множитель t^n :

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) \quad (12)$$

Если при умножении x и y на t функция $f(x,y)$ сохраняет своё значение:

$$f(tx,ty) = f(x,y)$$

в формуле (12) $n=0$ то она называется однородной функцией нулевой степени.

Всякая однородная функция нулевой степени является функцией от отношения ее аргументов:

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Действительно, полагая в соотношении (12) $t = \frac{1}{x}$ получим

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x,y)$$

Но $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ есть функция от $\frac{y}{x}$: обозначив ее через $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ получим

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Например если дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$ правая сторона содержит однородную функцию нулевой степени то его можно записать в следующем виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (13)$$

Обозначим

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{тогда } y = u \cdot x; \quad \text{и получим } y' = u'x + u \quad \text{поставив на (13)}$$

получим: $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$; проинтегрировав $\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$ потом на

месте u вставляя $\frac{y}{x}$ и получим общую решение.

Пример 4. Найти общую решение однородного уравнение

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} \quad \text{или} \quad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\frac{y}{x} = u; y = ux; y' = u'x + u$$

$$u'x + u = u + \sqrt{1 - u^2}; \frac{du}{dx} \cdot x = \sqrt{1 - u^2}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x}; \arcsin u = \ln x + \ln c; u = \text{Sin}(\ln(cx)); u = \frac{y}{x}$$

Отсюда ,

$$\frac{y}{x} = \text{Sin}(\ln Cx); y = x \cdot \text{Sin}(\ln Cx)$$

Дифференциальное уравнение приводящаяся к однородным

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \quad (14)$$

Называется приводящимися к однородным уравнениям .

Если $c = c_1 = 0$ то делаем замену переменных,

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + \alpha \\ y &= y_1 + \beta \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$dx = dx_1; dy = dy_1; \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} \quad \text{эти поставляя к (16),}$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{(ax_1 + by_1 + (a\alpha + b\beta + c))}{(a_1x_1 + b_1y_1) + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)} \quad (16)$$

получим .

$$\left. \begin{aligned} a\alpha + b\beta + c &= 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Решаем в отношении α и β .

Если $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ то система (17) не имеет решения. Уравнение (16)

приводится к уравнению разделяющимся переменным после замены $z = ax + by$.

Пример 5: Найти общую решение уравнения $y' = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \quad \left\{ \begin{aligned} x &= x_1 + \alpha \\ y &= y_1 + \beta \end{aligned} \right.$$

Делаем замену переменных:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + \alpha + \beta + 3}{x_1 - y_1 + \alpha - \beta - 1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha + \beta + 3 &= 0 \\ \alpha - \beta - 1 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Решая получим, $\alpha = 2; \beta = 1$

В итоге получим однородное уравнение $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$. Интегрируя

получим,

$$\arctg u - \frac{1}{2} \ln(x_1 + u^2) = \ln x_1 + \ln c; \quad cx_1 \sqrt{1 + u^2} = e^{\arctg \frac{y_1}{x_1}}$$

$$u = \frac{y_1}{x_1} \quad \text{подставляя получим,} \quad cx_1 \sqrt{1 + \frac{y_2}{x_2}} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y-1}{x-2}}$$

где $x_1 = x-2$; $y_1 = y-1$

Пример 6. Найти общую решение уравнения $y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$

$$\left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{array} \right| = 0 \quad \text{значит,} \quad \left. \begin{array}{l} x = x_1 + \alpha \\ y = y_1 + \beta \end{array} \right\} \quad \text{замену делать невозможно}$$

Делая замену переменных с помощью функции $2x+y=z$ получим уравнению с разделяющимися переменными $y' = z'-2$; $z'-2 = \frac{z-1}{2z+5}$ или

$$\text{решая} \quad z' = \frac{5z+9}{2z+5} \quad \text{получим} \quad \frac{2}{5}z + \frac{7}{25} \ln|5z+9| = x + c$$

Подставляя $z=2x+y$, находим общую решение.

$$10y - 5x - c = 7 \ln|10x + 5y + 9|.$$

1.2. Линейное уравнение первого порядка

Уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (18)$$

где $P(x)$, $Q(x)$ известные функции от x , которое содержит искомую функцию y и ее производную только в первых степенях и не содержит произведения их, является линейным уравнением.

Если $Q(x) = 0$ то уравнение называется однородным $y' + P(x)y = 0$

Ее можно решать разделяя переменных. Пусть $Q(x) \neq 0$ тогда (18) уравнению можно решить с двумя способами.

1. Метод вариации произвольной постоянной.

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

В (18) уравнении взяв $y' + P(x)y = 0$ соответствующую однородную уравнению решаем $y' = -P(x)y$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx; \ln y = -\int P(x)dx + \ln c; y = Ce^{-\int P(x)dx},$$

где $c=c(x)$. тогда

$$y' = ce^{-\int P(x)dx} \cdot (-\int P(x)dx)' + c' \cdot e^{-\int P(x)dx} = -cP(x)e^{-\int P(x)dx} + c' e^{-\int P(x)dx} = (c' - cp(x))e^{-\int P(x)dx}$$

y и y' поставим на (18)

$$-cP(x)e^{-\int P(x)dx} + c' e^{-\int P(x)dx} + P(x)ce^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$c' e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$dc = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

Проинтегрировав получим

$$c = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

Значит $y = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \cdot e^{-\int P(x)dx}$ общий интеграл.

Второй метод.

Решению уравнения (18) представим в виде

$$y = u(x) \cdot v(x) \tag{19}$$

берём производную :

$$y' = u'v + uv'$$

u и u' подставим на (18):

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

$$u'v + u(v' + pv) = Q(x) \tag{20}$$

берем в виде:

$$v' + pv = 0 \tag{21}$$

Тогда из (20) приходим к следующему:

$$u'v = Q \tag{22}$$

Сначала из (21) находим v .

$$\frac{dv}{dx} = -Pv; \quad \frac{dv}{v} = -Pdx; \quad \ln v = -\int Pdx; \quad v = e^{-\int Pdx},$$

Зададим $c=1$, $v = e^{-\int Pdx}$

Поставляя это на (22)

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int Pdx} = Q, \quad du = Qe^{\int Pdx} dx, \quad u = \int Qe^{\int Pdx} dx + c$$

Тогда общий интеграл (18) уравнения:

$$y = u \cdot v = e^{-\int Pdx} \left(\int Qe^{\int Pdx} dx + c \right)$$

Пример 1

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}; \quad y = uv; \quad y' = u'v + uv'; \quad u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{\sin x}{x}$$

$$u'v + u(v' + \frac{1}{x}v) = \frac{\sin x}{x};$$

$$1) v' + \frac{1}{x}v = 0; \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln v = -\ln x; \quad v = -\frac{1}{x};$$

$$2) -u' - \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x}; \quad \frac{du}{dx} = -\sin x; \quad du = -\sin x dx; \quad u = \cos x + c$$

Значит общая решения $y = -\frac{1}{x}(\cos x + c)$

Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$y' + Py = Qy^n \tag{23}$$

называется уравнением Бернулли. где P, Q – непрерывные функции от x .

$$y' + Py = Qy^n \quad / : y^n$$

$$y^{-n}y' + Py^{-n+1} = Q$$

Зделаем замену переменных взяв $z = y^{-n+1}$. Тогда получим линейную уравнению вида.

$$z' + (-n+1)Pz = (-n+1)Q$$

Найдя его общее решение, получим общее решение уравнения Бернулли по формуле

$$y = z^{\frac{1}{1-m}}$$

Уравнение в полных дифференциалах

Если левая часть дифференциального уравнения

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (24)$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т.е.

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad (25)$$

то уравнение (24) называется уравнением в полных дифференциалах. И он вычисляется формулой (26).

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy \quad (26)$$

Сравнивая формул (25) и (26)

$$\frac{du}{dx} = P(x,y); \frac{du}{dy} = Q(x,y)$$

Отсюда находим частные производные

$$\frac{dP}{dy} = \frac{d^2u}{dxdy};$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2u}{dydx}.$$

Откуда

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \quad (27)$$

Значит (24) уравнение только тогда будет в полных дифференциалах когда выполняется условия (27). Общая решения уравнения в полных дифференциалах находится по формуле

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt \quad (28)$$

Общий интеграл

$$\int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt = C \quad (29)$$

точка (x_0, y_0) любая точка из области G .

Пример 2. Найти общий интеграл $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2xy}{3y^2+x^2}$.

$$(2xy-1)dx + (3y^2+x^2)dy = 0$$

$$P(x, y) = 2xy - 1; \quad Q(x, y) = 3y^2 + x^2;$$

$$\frac{dP}{dy} = 2x; \quad \frac{dQ}{dx} = 2x$$

Значит уравнение в полных дифференциалах. Поставив $x_0 = y_0 = 0$ с помощью формулы (29) находим общий интеграл уравнений:

$$\int_{x_0}^x (2t \cdot 0 - 1) dt + \int_0^y (3t^2 + x^2) dt = C$$

$$[-t]_0^x + [t^3 + x^2 t]_0^y = C$$

или $-x + y^3 + x^2 y = C$

ГЛАВА 2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \quad , \quad (30)$$

и поставлено начальное условие

$$y(x_0) = y_0. \quad (31)$$

Чтобы решить эту задачу применим метод последовательных приближений (метод Пикара)

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt ,$$

$$y_0(t) \equiv y_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Или разложим решение вокруг точки x_0 в ряд Тейлора и получаем приближенно - аналитическую решение.

$$y(x) \approx y_n(x) = \sum_{i=0}^n y^{(i)}(x_0) \frac{(x - x_0)^i}{i!}. \quad (32)$$

Эти оба метода имеет недостатков, во первом методе в каждом новом приближении должен вычисляться интеграл а во втором $|x - x_0|$ должен быть достаточно малой величиной. Иначе (32) ряд не сходится. По этой причине задачу Коши (30)-(31) изучаем решать другими методами.

Разностные методы

Пусть требуется решить задачу (30)-(31) на отрезке $[x_0, X]$. Заданной отрезок делим на N равных частей.

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad N = \frac{X - x_0}{h}, \quad h > 0$$

Решение задачи Коши (30)-(31) равносильно решению уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (33)$$

Но в (33) под интегралом присутствует неизвестная функция и это усложняет задачу. Последовательно в двух точках выполняется соотношение

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx. \quad (34)$$

Чтобы найти $y(x_{n+1})$, $y(x_n)$ и $y'(x) = f(x, y(x))$ должен находиться на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$. По этому приходится вычислять приближенно интеграл в правой стороне (34).

2.1. Экстраполяционные и интерполяционные методы Адамса

Пусть известно значение функции $y(x)$ в точках $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$. Сделаем замену переменных $x = x_n + uh$. Тогда уравнение (34) примет следующий вид.

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x_n + uh) du. \quad (35)$$

Заменим $y'(x_n + uh)$ на интерполяционному формулу Ньютона.

$$\begin{aligned} y'(x_n + uh) = & y'(x_n) + \frac{u}{1!} \Delta y'(x_{n-1}) + \frac{u(u+1)}{2!} \Delta^2 y'(x_{n-2}) + \dots + \\ & + \frac{u(u+1)\dots(u+k-1)}{k!} \Delta^k y'(x_{n-k}) + r_k(u), \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$r_k(u) = h^{k+1} \frac{u(u+1)\dots(u+k)}{(k+1)!} y^{(k+2)}(\xi), \quad x_{n-k} < \xi = \xi(u) < x_{n+1}, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

(36) подставляя в (35) и выполним операцию интегрирование получим

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \left[y'(x_n) + \frac{1}{2} \Delta y'(x_{n-1}) + \frac{5}{12} \Delta^2 y'(x_{n-2}) + \right.$$

$$+ \frac{3}{8} \Delta^3 y'(x_{n-3}) + \dots + C_k \Delta^k y'(x_{n-k}) \Big] + R_k, \quad (37)$$

где

$$C_k = \int_0^1 \frac{u(u+1)\dots(u+k-1)}{k!} du, \quad (38)$$

$$R_k = h \int_0^1 r_k(u) du = h^{k+2} \int_0^1 \frac{u(u+1)\dots(u+k)}{(k+1)!} y^{(k+2)}(\xi) du.$$

Сохраняется знак $u(u+1)\dots(u+k)$, поэтому на основе теоремы о среднем значении и непрерывности $y^{(k+2)}(x)$ получаем.

$$R_k = h^{k+2} C_{k+1} y^{(k+2)}(\bar{\xi}) du, \quad x_{n-k} \leq (\bar{\xi}) \leq x_{n+1}$$

Если взять $M_{k+2} = \max_{x_{n-k} \leq x \leq x_n} |y^{(k+2)}(x)|$ то $C_k > 0$ будеть

$$|R_k| = h^{k+2} C_{k+1} M_{k+2} \quad (39)$$

Если $h > 0$ достаточно малый $R_k = O(h^{k+2})$ и не пренебрегая ошибки, имеем экстраполяционную формулу Адамса:

$$y_{n+1} = y_n + h \left[y'_n + \frac{1}{2} \Delta y'_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 y'_{n-3} + \dots + C_k \Delta^k y'_{n-k} \right]. \quad (40)$$

Если в (40) $k=0$, то $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ - получаем метод Эйлера.

Если $k \geq 1$, $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}$ объявляя известными из (40) последовательно находится

$$y_{n+1}, y_{n+2}, \dots$$

Этот метод без труда можно применить к систему дифференциальных уравнении первого порядка для задачи Коши. Это продемонстрируем в следующей задаче:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, z), & y(x_0) &= y_0, \\ z' &= \varphi(x, y, z), & z(x_0) &= z_0, \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left[y'_n + \frac{1}{2} \Delta y'_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 y'_{n-3} + \dots + C_k \Delta^k y'_{n-k} \right],$$

$$z_{n+1} = z_n + \tau \left[z'_n + \frac{1}{2} \Delta z'_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 z'_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 z'_{n-3} + \dots + C_k \Delta^k z'_{n-k} \right].$$

Интерполяционный метод Адамса.

Пусть нам известно решение задачи Коши (30)-(31) в точках $x_{n-k+1}, \dots, x_{n+1}$ (неизвестно $y_{n+1} = y(x_{n+1})$). Значению решения в точке x_{n+1} напишем

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \int_{-1}^0 y'(x_{n+1} + uh) du \quad \text{и меняя } y'(x_{n+1} + uh) \quad \text{на конечную}$$

таблицу интерполяционную формулу Ньютона, выполняя интегрирования имеем следующую формулу.

$$y_{n+1} = y_n + h \left[y'_{n+1} - \frac{1}{2} \Delta y'_n - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 y'_{n-2} + \dots + C_k \Delta^k y'_{n-k+1} \right], \quad (41)$$

где

$$C_k = \int_{-1}^0 \frac{u(u+1)\dots(u+k-1)}{k!} du.$$

Ошибка (41) формулы

$$R_k = h^{k+2} C_{k+1} y^{k+2}(\xi), \quad x_{n-k+1} \leq \bar{\xi} \leq x_{n+1}.$$

Обычно при решении задачи Коши (30)-(31) поступает следующим образом.

Значение решение в начале таблицы в точках $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n$ надо выбирать формулу Адамса с такой точностью который значение решений совпало. Кроме этого формула (41) в отношении y_{n+1} он нелинейное уравнение вида $y_{n+1} = \varphi(y_{n+1})$. Поэтому из (40) находим y'_{n+1} и поставим на правую сторону (41), обозначим $\varphi(y_{n+1}) = y''_{n+1}$. Если y'_{n+1} и y''_{n+1} совпадает с заданной точностью то взяв $y_{n+1} = y''_{n+1}$ вычислению продолжим по формуле (40). Если y'_{n+1} и y''_{n+1} не выполняет условию выше приведенного тогда взяв $y_{n+1} = y'_{n+1}$ продолжим вычисление и на следующем шагу вычисляется y'_{n+2} и сравнивается с y''_{n+2} , если еще

раз поставленная точность не выполняется, то вычислению продолжим с шагом $\frac{h}{2}$, и взяв $y_{n+2}'' = y_{n+2}$.

Во многих случаях чтобы облегчить процесс вычисления в формулах (40), (41) конечно-разностные формулы заменяются на значение функции и на данном k имеем следующие формулы:

$$k = 0, \quad y_{n+1} = hf(x_n, y_n),$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$k = 1, \quad y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{3}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1} \right],$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n \right],$$

$$k = 2, \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} [23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}],$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} [5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}],$$

$$k = 3, \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}],$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}].$$

В точке x_{n+1} решение находится с участием нескольких значений функции в заданных точках. По этому метод Адамса называется многошаговыми.

Метод Рунге Кутта

Для решения задачи (30), (31) перепишем (34) следующим образом

$$y(x+h) = y(x) + \int_x^{x+h} y'(t) dt = y(x) + h \int_0^1 f[(x+\alpha h), y(x+\alpha h)] d\alpha$$

или

$$y(x+h) - y(x) = \Delta y = h \int_0^1 f[(x+\alpha h), y(x+\alpha h)] d\alpha. \quad (42)$$

Интеграл в (42) приближенно заменим на конечную сумму:

$$\Delta y_i = \sum_{i=1}^r p_i \bar{K}_i, \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &= hf(x, y), & \bar{K}_2 &= hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_2 \bar{K}_1), \dots \\ \dots \bar{K}_r &= hf(x + \alpha_r h, y + \beta_r \bar{K}_1 + \dots + \beta_{2r-1} \bar{K}_{r-1}). \end{aligned}$$

Неизвестные α_i, β_{ii-1} ($i = 2, 3, \dots, r$) и p_i ($i = 1, 2, \dots, r$) находится из левой и правой стороны (43) по степеням h и разложению по Тейлору.

Внизу приведем формулы вычисления разного порядка по методу Рунге- Кутта:

r = 1. метод первого порядка

$$y(x + h) = y(x) + hf(x, y).$$

r = 2. Метод второго порядка

$$1) \quad y(x + h) = y(x) + \frac{h}{2} [f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y))],$$

$$2) \quad y(x + h) = y(x) + hf \left[x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y) \right],$$

$$3) \quad y(x + h) = y(x) + \frac{h}{4} \left[f(x, y) + f \left(x + \frac{2}{3} h, y + \frac{2h}{3} f(x, y) \right) \right].$$

r = 3. Методы третьего порядка

$$1) \quad y(x + h) = y(x) + \frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3),$$

$$k_1 = hf(x, y), \quad k_2 = hf \left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2} \right), \quad k_3 = hf(x + h, y - k_1 + 2k_2).$$

$$2) \quad y(x + h) = y(x) + \frac{1}{4} (k_1 + 3k_2),$$

$$k_1 = hf(x, y), \quad k_2 = hf \left(x + \frac{h}{3}, y + \frac{k_1}{3} \right), \quad k_3 = hf \left(x + \frac{2h}{3}, y + \frac{2k_2}{3} \right).$$

r = 4. Методы четвертого порядка

$$1) \quad y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = hf(x, y), \quad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x+h, y+k_3)$$

$$2) \quad y(x+h) = y(x) + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}k_1 + \frac{3}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3 + \frac{1}{2}k_4\right],$$

$$k_1 = hf(x, y), \quad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y - \frac{k_1}{2} + k_2\right), \quad k_4 = hf\left[x+h, y + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3\right].$$

Пример. $y' = \frac{2y}{x} + x$, $y(1) = 0$ решению задачи Коши найти в точках $x = 1,1; 1,2; 1,3$ с методом Рунге-Кутты а в точках $x = 1,4; 1,5$ найти методом Адамса.

Решение. Когда $k = 3$ в методе Адамса используем формулу (40), (41). В методе Рунге Кутты для $r = 4$ используем первую формулу. Обычно нахождение решения на начале таблицы порядок метода не должен быть меньше порядка метода Адамса (или шаг h должен быть меньше чем шаг метода Адамса).

В нашем примере шаг h одинаковый, по этому $k = 3$ и $r = 4$.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}),$$

где

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), \quad k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_3^i = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \quad k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})$$

С помощью формул взяв $i = 0, 1, 2$, вычисляем y_1, y_2, y_3 , потом с помощью формулы (40) вычислим

$$y_4' = y_3 + \frac{h}{24}[55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0]$$

Теперь найденное y_4' поставив в (41) на правую сторону, в результате обозначим y_4'' .

$$y_4'' = y_3 + \frac{h}{24}[9f(x_4, y_4') + 19f(x_3, y_3) - 5f(x_2, y_2) + f(x_1, y_1)]$$

Если в заданной точности $y_4'' \approx y_4'$ то взяв $y_4 = y_4'$ находим y_5 из формулы (40). Иначе взяв $y_4 = y_4''$, y_5 вычисляется из формулы (40). Результат приведен ниже в таблице:

x_k	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_k	0	0,1153	0,2625	0,4434	0,6595	0,9123

2.2. Метод Эйлера и Эйлера-Коши

Приближенное значение решение задачи (30), (31) $y(x_i) \cong y_i$ определит следующим образом

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

то это было бы методом Эйлера (В методах Адамса и Рунге Кутта случай когда $k = 0$).

Приведем следующие модификации метода Эйлера:

$$I. y_{i+1} = y_i + hf_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (44)$$

где

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, \quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f_i.$$

$$\text{II. } y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_i + \bar{f}_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots \quad (45)$$

где

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf_i,$$

$$\bar{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}).$$

Если в (30), (31) приближенную решение взяв

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

и по итерационной формуле

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})), \quad k = 1, 2, \dots \quad (46)$$

решению можно найти в данной точности, если $|y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)}| < \varepsilon$, тогда

$y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}$, потом для решения в следующей точки строится (46) итерационный процесс.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

3.1. Метод коллокации.

Пусть на отрезке $a \leq x \leq b$ для дифференциального уравнение

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (47)$$

задан следующие граничные условия

$$\begin{aligned} l_a(y) &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ l_b(y) &= \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{aligned} \quad (48)$$

где $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$.

Решению граничных задач (47), (48) ищем следующим образом:

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x), \quad (49)$$

где $\varphi_0(x)$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} l_a(\varphi_0) &\equiv \alpha_1 \varphi_0'(a) + \alpha_0 \varphi_0(a) = A, \\ l_b(\varphi_0) &\equiv \beta_1 \varphi_0'(b) + \beta_0 \varphi_0(b) = B \end{aligned}$$

$\varphi_k(x)$ ($k = \overline{1, n}$) удовлетворяющие условия функции

$$l_a(\varphi_k) = l_b(\varphi_k) = 0$$

Кроме того для системы функции $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ потребуем выполнение условия:

1. $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ - линейно независимо;
2. $\varphi_k(x) \in C_2[a, b]$, $k = \overline{0, n}$;
3. $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ система функции должен быть полным в дважды дифференцируемых классах функции.

$$|y^{(s)}(x) - y_n^{(s)}(x)| < \varepsilon, \quad s = 0, 1, 2; \quad x \in [a, b], \quad \forall y(x) \in C_2[a, b], \quad \varepsilon > 0.$$

Для произвольного c_k ($k = \overline{1, n}$), $\varphi_k(x)$ по выбору удовлетворяет условия (49) и (48). Подставив (49) в (47) получаем следующие

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = L(y_n) - f(x) = L(\varphi_0) - f(x) + \sum_{k=1}^n c_k L(\varphi_k). \quad (50)$$

Теперь берем точки x_1, x_2, \dots, x_n из промежутка $[a, b]$ называемый точками коллокации и для нахождения коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_n

$$\begin{aligned} R(x_1, c_1, c_2, \dots, c_n) &= 0 \\ R(x_2, c_1, c_2, \dots, c_n) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \dots \\ R(x_n, c_1, c_2, \dots, c_n) &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

составим систему уравнений. Из (51) находим c_1, c_2, \dots, c_n и получим решению приближенно – аналитическом виде (49).

Пример 1. Найти решению граничной задачи для уравнении второго порядка.

$$\begin{aligned} y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) &= 2, \\ y'(0) &= -2, \\ y(1) + y'(1) &= 0 \end{aligned}$$

Решения. Будем искать $\varphi_0(x)$ в виде $\varphi_0(x) = b + cx$.

$$\varphi'_0(x) = c \text{ и } \varphi'_0(0) = -2 \Rightarrow c = -2.$$

$$y(1) + y'(1) = 0 \Rightarrow b - 2 - 2 = 0 \Rightarrow b = 4. \text{ Значить, } \varphi_0(x) = 4 - 2x.$$

Функции $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) удовлетворяют условию

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_k(0) &= 0, \\ \varphi_k(1) + \varphi'_k(1) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Если положить $\varphi_k(x) = b_k + x^{k+1}$ то коэффициентов, b_k находим из второго уравнения.

Значить,

$$b_k = -(k + 2) \Rightarrow \varphi_k(x) = x^{k+1} - (k + 2).$$

$$\varphi_1(x) = x^2 - 3,$$

$$\varphi_2(x) = x^3 - 4,$$

...

$$\varphi_n(x) = x^{n+1} - (n + 2).$$

Возьмем в (49), $n = 2$, тогда

$$y_2(x) = 4 - 2x + c_1(x^2 - 3) + c_2(x^3 - 4).$$

Находим $L(\varphi_0)$, $L(\varphi_1)$, $L(\varphi_2)$, и создадим $R(x, c_1, c_2)$

$$\varphi_0(x) = 4 - 2x, \quad \varphi_0'(x) = -2, \quad \varphi_0''(x) = 0,$$

$$L(\varphi_0) = \varphi_0''(x) + 2x\varphi_0'(x) - 2\varphi_0(x) = 2x \cdot (-2) - 2(4 - 2x) = -4x - 8 + 4x = -8,$$

$$\varphi_1(x) = x^2 - 3, \quad \varphi_1'(x) = 2x, \quad \varphi_1''(x) = 2,$$

$$L(\varphi_1) = \varphi_1''(x) + 2x\varphi_1'(x) - 2\varphi_1(x) = 2 + 2x \cdot 2x - 2(x^2 - 3) = 2x^2 + 8,$$

$$\varphi_2(x) = x^3 - 4, \quad \varphi_2'(x) = 3x^2, \quad \varphi_2''(x) = 6x,$$

$$\begin{aligned} L(\varphi_2) &= \varphi_2''(x) + 2x\varphi_2'(x) - 2\varphi_2(x) = 6x + 2x \cdot 3x^2 - 2(x^3 - 4) = \\ &= 6x + 6x^3 - 2x^3 + 8 = 4x^3 + 6x + 8. \end{aligned}$$

$$R(x, c_1, c_2) = L(\varphi_0(x)) - f(x) + c_1 L(\varphi_1(x)) + c_2 L(\varphi_2(x)).$$

Если точки коллокации взять, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4}$ то появится

следующие значения.

$$L(\varphi_0(x_1)) = -8, \quad L(\varphi_0(x_2)) = -8,$$

$$L(\varphi_1(x_1)) = 2 \cdot \frac{1}{16} + 8 = \frac{1}{8} + 8 = 8\frac{1}{8},$$

$$L(\varphi_1(x_2)) = 2 \cdot \frac{9}{16} + 8 = \frac{9}{8} + 8 = 9\frac{1}{8},$$

$$L(\varphi_2(x_1)) = 4 \cdot \frac{1}{64} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 8 = \frac{1}{16} + \frac{3}{2} + 8 = 9\frac{9}{16},$$

$$L(\varphi_2(x_2)) = 4 \cdot \frac{27}{64} + 6 \cdot \frac{3}{4} + 8 = \frac{27}{16} + \frac{9}{2} + 8 = 14\frac{3}{16}.$$

В итоге имеем следующую уравнению:

$$\left. \begin{aligned} \frac{65}{8}c_1 + \frac{153}{16}c_2 &= 10 \\ \frac{73}{8}c_1 + \frac{227}{16}c_2 &= 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_1 = 1,6510; \quad c_2 = -0,3570.$$

Тогда $y_2(x) = 4 - 2x + 1,6510(x^2 - 3) - 0,3570(x^3 - 4)$.

3.2. Метод прогонки

Пусть на отрезке $a \leq x \leq b$ требуется найти решение

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (52)$$

дифференциального уравнения в следующих граничных условиях

$$\begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= B \end{aligned} \quad (53)$$

где $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$. Простой метод решения этой граничной задачи это привести его к системе уравнений в конечных разностей. С этой целью отрезок $[a, b]$ разделим на N равных частей с шагом h .

Точки деления ($\{x_k\}$ узловые точки сетки) задается формулой $x_k = a + kh$

$$\left(h = \frac{b-a}{N}, k = \overline{0, N} \right).$$

Неизвестная функцию $y = y(x)$ и его производных $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$ в сетке $\{x_k\}$ имеет значение соответственно

$$y_k = y(x_k), \quad y'_k = y'(x_k), \quad y''_k = y''(x_k)$$

Точно так используем обозначение

$$p_k = p(x_k), \quad q_k = q(x_k), \quad f_k = f(x_k)$$

Дифференциальную уравнению (52) во внутренних точках аппроксимируем с помощью односторонне правый разностной схемой

$$\frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{h^2} + p_k \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + q_k y_k = f_k \quad (k = \overline{1, N-1}) \quad (54)$$

Или симметричной разностной схемой в виде

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + q_k y_k = f_k \quad (k = \overline{1, N-1}) \quad (55)$$

Это состоит из системы $N-1$ разностной уравнении и с его помощью аппроксимируется уравнение (52).

Граничные условия аппроксимируется

$$\begin{aligned}\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} &= A, \\ \beta_0 y_N + \beta_1 \frac{y_N - y_{N-1}}{h} &= B\end{aligned}\quad (*)$$

разностными тождествами. Систему линейных алгебраических уравнений для определения $N + 1$ неизвестных и состоящий из $N + 1$ разностных уравнений зададим следующим образом:

$$A_k y_{k+1} - B_k y_k + C_k y_{k-1} = -F_k \quad (k = \overline{1, N-1}), \quad (56)$$

$$\begin{aligned}y_0 &= \chi_1 y_1 + \mu_1, \\ y_N &= \chi_2 y_{N-1} + \mu_2.\end{aligned}\quad (57)$$

Система (56)-(57) –трехдиагональная линейная алгебраическая система уравнений (где все $i = \overline{1, N-1}$, $A_i \neq 0$, $B_i \neq 0$). Таким образом краевая задача (52)-(53) приводится к решению линейных алгебраических уравнений (56)-(57). Метод решения этих алгебраических систем уравнений называется методом прогонки. В методе прогонки решение во внутренних точках сетки вычисляется рекуррентной формулой.

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \quad (i = \overline{N-1, 1}) \quad (58)$$

Где коэффициенты α_i , β_i определяется со следующего уравнения (здесь предположим $C_i - \alpha_i A_i \neq 0$):

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (59)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (60)$$

Для того чтобы начинать вычисления и определить α_i , β_i из формул (59)-(60) надо знать значение α_1 , β_1 . Эти значение определяется со следующих выражений. Предположим в (58) $i = 0$ и будем иметь (левая граничная условия) уравнению

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$$

и поэтому эту равенству сравнивая первой граничной условием (57) будем иметь

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \chi_1, \\ \beta_1 &= \mu_1\end{aligned}\tag{61}$$

Теперь с помощью определенных α_i, β_i ($i = \overline{1, N-1}$) решение по рекуррентной формуле (58) определить и начинать вычисление надо зная значение y_N . В (58) взяв $i = N-1$, получим равенство

$$y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$$

Эту равенству подставляя во вторую граничную условие в (57) и с учетом $1 - \alpha_N \chi_2 \neq 0$ находим

$$y_N = \frac{\mu_2 + \chi_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \chi_2}\tag{62}$$

Зная значение y_N для остальных $i = N-1, N-2, \dots, 3, 2, 1, 0$ находим решению всех остальных по рекуррентной формуле (58)

Теперь приводим условию устойчивости метода прогонки для задач (56)-(57):

$$\begin{aligned}|C_i| &\geq |A_i| + |B_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ |\chi_\alpha| &\leq 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad |\chi_1| + |\chi_2| < 2.\end{aligned}$$

Выполнение этих условия для всех $i = 1, 2, \dots, N$ эквивалентно выполнением условия

$$|\alpha_i| \leq 1.$$

Пример 2. Найти решению граничной задачи методом прогонки.

$$\begin{aligned}y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) &= 2, \\ y'(0) &= -2, \\ y(1) + y'(1) &= 0\end{aligned}$$

Решение. Аппроксимируем дифференциальную уравнению с помощью разностных уравнений в внутренних точек сетки $\{x_k\}$ ($h = 0,1; N = 10$):

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + 2x_k \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} - 2y_k = 2 \quad (k = \overline{1, N-1}).$$

Граничную условие аппроксимируем следующим разностным уравнением

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = -2,$$

$$y_N + \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = 0$$

Группируя похожие члены из системы разностного уравнения приходим к виду систем уравнений (56)-(57):

$$(1 - x_k h)y_{k-1} - 2(1 + h^2)y_k + (1 + x_k h)y_{k+1} = -(-2h^2) \quad (k = \overline{1, N-1}),$$

$$y_0 = y_1 + 2h,$$

$$y_N = \frac{\beta_N}{1 + h - \alpha_N}.$$

Для коэффициентов из системы уравнения приходим к следующему выводу

$$A_k = 1 - x_k h, \quad C_k = 2(1 + h^2), \quad B_k = 1 + x_k h, \quad F_k = -2h^2 \quad (k = \overline{1, N-1})$$

Условия устойчивости для метода прогонки выполняется

$$|C_k| \geq |A_k| + |B_k|, \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

Значит для решения систем алгебраических уравнения используем метод прогонки. $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 2h$ и значение y_N нам известно. Теперь можно составить программу и результат возьмем в виде таблицы.

x[0]10	y[0]10.602483840	Y0[0] 10.475000000
x[1]10,1	y[1]10.402483840	Y1[1]10.291153000
x[2]10,2	y[2]10.234216193	Y2[2]10.138184000
x[3]10,3	y[3]10.096747595	Y3[3]10.013951000
x[4]10,4	y[4] -0.011417053	Y4[4] 0.083688000
x[5]10,5	y[5] -0.092250134	Y5[5] -0.156875000

x[6]10,6	y[6] -0.148094352	Y6[6] -0.207752000
x[7]10,7	y[7] -0.181542892	Y7[7] -0.238461000
x[8]10,8	y[8] -0.195316724	Y8[8] -0.251144000
x[9]10,9	y[9] -0.192148446	Y9[9] -0.247943000
x[10]11	y[10] -0.174680405	Y10[10] -0.23100000

Где $x[i]$ ($i = \overline{0,10}$) -узловые точки сетки, $y[i]$ ($i = \overline{0,10}$) решение задачи методом прогонки и $Y[i]$ ($i=1,10$) методом коллокации и аналитическое решения для сравнения

$$y_2(x) = 4 - 2x + 1,6510(x^2 - 3) - 0,3570(x^3 - 4)$$

Метод наименьших квадратов

Пусть, H - вещественная пространство Гильберта. Обозначим в H определенный в компактной множестве $D(A)$ линейную оператор A .

Рассмотрим следующую уравнению

$$Ay = f \tag{63}$$

Где $f \in H$ и решение $y \in D(A)$. Пусть уравнение (63) имеет решение. К уравнению (63) сопоставим следующего функционала

$$J(y) = \|Ay - f\|^2 \tag{64}$$

Решению задачи (63) заменим на отыскание минимума функционала в множестве $D(A)$.

$$\min_{y \in D(A)} J(y) = J(y^*) = 0$$

Из равенства ясно что решение уравнение $Ay = f$ будет y^* . Для того чтобы решит уравнение $Ay = f$ нахождение минимума функционала (64) называется методом наименьших квадратов для уравнения $Ay = f$

$J(y)$ функционал достигает минимума следующим образом. Берем линейную свободную систему функции $\{\varphi_k(x)\}$ из множеств $D(A)$ и к решению уравнению (63) n -го приближения ищем в виде.

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \quad (65)$$

Где неизвестные коэффициенты c_k находится из условия

$$J(y_n) = \|Ay_n - f\|^2$$

чтобы он достиг минимум.

Мы приведем схему решения линейную граничную задачу с методом наименьших квадратов

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (66)$$

$$\begin{aligned} l_a(y) &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ l_b(y) &= \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{aligned} \quad (67)$$

Выбираем систему функции $\varphi_k(x)$ ($k=0,1,\dots$) удовлетворяющего следующих условия:

1. $\varphi_k(x) \in C_2[a,b]$;
2. $l_a(\varphi_0(x)) = A$, $l_b(\varphi_0(x)) = B$, $l_a(\varphi_k(x)) = l_b(\varphi_k(x)) = 0$ ($k=1,2,\dots$);
3. для произвольного n функции $\varphi_k(x)$ линейно независимо;
4. $\varphi_k(x)$ ($k=1,2,\dots$) представлять полную систему в $C_2[a,b]$.

Приближенную решению граничных задач (66)-(67) возьмем в виде (65). Функция (65) удовлетворяет граничных условия (67) при любом n и c_1, c_2, \dots, c_n . Выбираем c_1, c_2, \dots, c_n так, что

$$J(y_n) = \|L(y_n) - f\|^2$$

достигал минимум.

Мы знаем,

$$\begin{aligned} \|L(y_n) - f\|^2 &= (L(y_n) - f, L(y_n) - f) = \\ &= \int_a^b \left[L(\varphi_0) + \sum_{k=1}^n c_k L(\varphi_k) - f \right]^2 dx = J(c_1, c_2, \dots, c_n). \end{aligned}$$

Из этого для всех $i=1,2,\dots,n$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial c_i} = \int_a^b \left[L(\varphi_0) + \sum_{k=1}^n c_k L(\varphi_k) - f \right] \cdot L(\varphi_i) dx = 0.$$

Перепишем в виде:

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} c_k = -B_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (68)$$

где

$$A_{ik} = A_{ki} = \int_a^b L(\varphi_k) L(\varphi_i) dx, \quad B_i = \int_a^b (L(\varphi_0) - f) L(\varphi_i) dx \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Матрица системы уравнений (68) это матрица Грамма для системы функции $\{L(\varphi_k)\}_{k=1}^n$.

Если

$$L(y) = 0, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0$$

граничная задача имеет нулевую решение, то система уравнений (68) имеет единственную решение.

Пример 3. граничную задачу решит методом меньших квадратов при $n=2$.

$$L(y) \equiv y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 2$$

$$l_0(y) \equiv y'(0) = -2,$$

$$l_1(y) \equiv y(1) + y'(1) = 0$$

Решение.

Ранше методом коллокации было найдено $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, и вычислено $L(\varphi_0(x))$, $L(\varphi_1(x))$, $L(\varphi_2(x))$ используя их вычислим коэффициенты системы (68):

$$A_{11} = \int_0^1 L^2(\varphi_1(x)) dx = \int_0^1 (2x^2 + 8)^2 dx = \int_0^1 (4x^4 + 32x^2 + 64) dx = \frac{4}{5} + \frac{32}{3} + 64 = \frac{1132}{15},$$

$$A_{12} = A_{21} = \int_0^1 (2x^2 + 8)(4x^3 + 6x + 8) dx = \int_0^1 (8x^5 + 16x^3 + 16x^2 + 48x + 64) dx =$$

$$= \frac{8}{6} + \frac{16}{4} + \frac{16}{3} + \frac{48}{2} + 64 = \frac{296}{3},$$

$$A_{22} = \int_0^1 (4x^3 + 6x + 8)^2 dx = \int_0^1 (16x^6 + 48x^4 + 64x^3 + 36x^2 + 96x + 64) dx =$$

$$= \frac{16}{7} + \frac{48}{5} + 16 + 12 + 48 + 64 = \frac{5316}{35},$$

$$B_1 = \int_0^1 (L(\varphi_0(x) - 2)L(\varphi_1(x)))dx = \int_0^1 (-2 - 2)(2x^2 + 8)^2 dx = -4\left(\frac{2}{3} + 8\right) = -\frac{104}{3},$$

$$B_2 = \int_0^1 (L(\varphi_0(x) - 2)L(\varphi_2(x)))dx = \int_0^1 (-4)(4x^3 + 6x + 8)^2 dx = -4(1 + 3 + 8) = -48.$$

Теперь составим систему уравнений (68).

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1132}{15}c_1 + \frac{296}{3}c_2 = -\frac{104}{3} \\ \frac{296}{3}c_1 + \frac{5316}{35}c_2 = -48 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 \cong -0,30648 \\ c_2 \cong -0,11693 \end{array}.$$

Значит приближенное решение граничной задачи

$$y_2(x) = 4 - 2x - 0,30648(x^2 - 3) - 0,11693(x^3 - 4)$$

Метод Галеркина

В этом методе тоже принимаем что условия (66)-(67) наименьших квадратов будет выполнено. Коэффициенты приближенного решения в виде (65) c_1, c_2, \dots, c_n в этом методе находится из условия:

$$(L(y_n(x)) - f(x), \varphi_i(x)) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Перепишем

$$\sum_{k=1}^n c_k (L(\varphi_k(x)), \varphi_i(x)) = (f - L(\varphi_0(x)), \varphi_i(x)) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (69)$$

Пример 4. $y'' + y + x = 0$ решит уравнение в граничных условиях методом Галеркина

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Решения. Для качестве функции $\varphi_i(x)$ возьмем :

$$\varphi_0(x) \equiv 0, \quad \varphi_1(x) \equiv x(1-x), \quad \varphi_2(x) \equiv x^2(1-x), \quad \dots, \quad \varphi_n(x) \equiv x^n(1-x).$$

Приближенное решение ищем в виде

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^k (1-x)$$

Данную задачу решаем при $n = 2$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x - x^2, & \varphi_1'(x) &= 1 - 2x, & \varphi_1''(x) &= -2, & L(\varphi_1(x)) &= -2 + x - x^2, \\ \varphi_2(x) &= x^2 - x^3, & \varphi_2'(x) &= 2x - 3x^2, & \varphi_2''(x) &= 2 - 6x, & L(\varphi_2(x)) &= 2 - 6x + x^2 - x^3, \\ L(y_2(x)) &= c_1 L(\varphi_1(x)) + c_2 L(\varphi_2(x)) = c_1(-2 + x - x^2) + c_2(2 - 6x + x^2 - x^3). \end{aligned}$$

Пишем систему уравнений (69):

$$\begin{aligned} c_1((-2 + x - x^2), (x - x^2)) + c_2((2 - 6x + x^2 - x^3), (x^2 - x^3)) &= (-x, x - x^2) \\ c_1((-2 + x - x^2), (x^2 - x^3)) + c_2((2 - 6x + x^2 - x^3), (x^2 - x^3)) &= (-x, x^2 - x^3). \end{aligned}$$

Вычислив скалярное произведение, уравнения зависящие от коэффициентов c_1 и c_2 приведем к следующему виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{10}c_1 + \frac{3}{20}c_2 &= \frac{1}{12} \\ \frac{3}{20}c_1 + \frac{13}{105}c_2 &= \frac{1}{20} \end{aligned} \right\}.$$

Решив эту систему определим коэффициенты c_1 и c_2 :

$$c_1 = \frac{71}{369}, \quad c_2 = \frac{7}{41}.$$

Приближенное решение .

$$y_2(x) = x(1-x) \left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x \right)$$

3.3. Численные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка на языке C++

Приведем несколько примеров решению дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера и Эйлера-Коши.

Пример1. Найти решение задачи Коши на данном интервале методом Эйлера.

$$\begin{aligned} y' &= 3 \sin 2y + x \\ y(0) &= 2 \end{aligned}$$

где $[a,b]=[0,1]$, шаг $h=0,1$.

Напишем рекуррентную формулу Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + h \times f(x_i, y_i), \quad i = \overline{0, n}$$

$$x_i = x_0 + ih, \quad x_0 = 0; \quad x_n = 1; \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}, \quad n = \frac{1}{h} = \frac{1}{0,1} = 10.$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, \dots$$

Тогда программа на C++

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
double F(double x, double y)
{
    return 3*sin(2*y)+x;
}
int main()
{
    double a=0; double b=1; double h=0.1;
    double n=(b-a)/h;
    double X[(int)n]; double Y[(int)n];
    X[0]=a; Y[0]=2;
    for(int i=1; i<=n; i++)
    {
        X[i]=a+i*h;
        Y[i]=Y[i-1]+h*F(X[i-1], Y[i-1]);
    }
    for(int i=0; i<=n; i++)
    {
        cout << "X[" <<i<<"]=" <<X[i]<< " ";
    }
    cout << endl;
    for(int i=0; i<=n; i++)
    {
        cout << "Y[" <<i<<"]=" <<Y[i]<< " ";
    }
    return 0;
}
```

```

"D:\777\ЁюЁрььрырЁ ё+ +\ьхёюф щыхЁр\bin\Debug\ьхёюф щыхЁр.exe"
X[0]=0 X[1]=0.1 X[2]=0.2 X[3]=0.3 X[4]=0.4 X[5]=0.5 X[6]=0.6 X[7]=0.7 X[8]=0.8 X
[9]=0.9 X[10]=1
Y[0]=2 Y[1]=1.77296 Y[2]=1.66494 Y[3]=1.62879 Y[4]=1.62407 Y[5]=1.63217 Y[6]=1.6
4544 Y[7]=1.66082 Y[8]=1.6771 Y[9]=1.6938 Y[10]=1.71074
Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.047 s
Press any key to continue.

```

Пример 2. Эту же задачу решаем методом Эйлера Коши

Если в (30), (31) приближенную решение взяв

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

и по итерационной формуле

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})), \quad k = 1, 2, \dots$$

решению можно найти в данной точности.

```

#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
double F(double x, double y)
{
return 3*sin(2*y)+x;
}
int main()
{
double a=0; double b=1; double h=0.1;
double n=(b-a)/h;

```


Пример 3. Найти решению задачи Коши на данном интервале методом Эйлера.

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$
$$y(0) = 1$$

где $[a,b]=[0,1]$, шаг $h=0,2$.

Программа на C++

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
double F(double x, double y)
{
return y-(2*x)/y;
}
int main()
{
double a=0; double b=1; double h=0.2;
double n=(b-a)/h;
double X[(int)n]; double Y[(int)n];
X[0]=a; Y[0]=1;
for(int i=1; i<=n; i++)
{
X[i]=a+i*h;
Y[i]=Y[i-1]+h*F(X[i-1], Y[i-1]);
}
for(int i=0; i<=n; i++)
{
cout<< "X[" <<i<<"]=" <<X[i]<< " ";
}
cout<<endl;
for(int i=0; i<=n; i++)
{
cout<< "Y[" <<i<<"]=" <<Y[i]<< " ";
}
}
```

```

return 0;
}

```

```

"D:\777\ЕюёҀр҃ь҃ы҃р҃ё̂++\щ҃ы҃х̂ 2\bin\Debug\щ҃ы҃х̂ 2.exe"
X[0]=0 X[1]=0.2 X[2]=0.4 X[3]=0.6 X[4]=0.8 X[5]=1
Y[0]=1 Y[1]=1.2 Y[2]=1.37333 Y[3]=1.5315 Y[4]=1.68108 Y[5]=1.82695
Process returned 0 (0x0) execution time : 0.062 s
Press any key to continue.

```

Пример 4. Найти решению задачи Коши на данном интервале методом Эйлера-Коши.

$$y' = \frac{y}{x+1} - y^2$$

$$y(0) = 1$$

где [a,b]=[0,1], шаг h=0,1.

Программа на C++

```

#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
double F(double x, double y)
{
    return (y/(x+1))-pow(y,2);
}
int main()
{
    double a=0; double b=1; double h=0.1;
    double n=(b-a)/h;
    double X[(int)n];
    double Y1[(int)n];

```

```

double Y[(int)n];
X[0]=a; Y[0]=1;
for(int i=1; i<=n; i++)
{
    X[i]=a+i*h;
    Y1[i]=Y[i-1]+h*F(X[i-1], Y[i-1]);
    Y[i]=Y[i-1]+h*(F(X[i-1], Y[i-1])+F(X[i], Y1[i]))/2.0;
}
for(int i=0; i<=n; i++)
{
    cout << "X[" <<i<<"]=" <<X[i]<<" ";
}
cout << endl;
for(int i=0; i<=n; i++)
{
    cout << "Y[" <<i<<"]=" <<Y[i]<<" ";
}
return 0;
}

```

```

"D:\777\... 2.exe"
X[0]=0 X[1]=0.1 X[2]=0.2 X[3]=0.3 X[4]=0.4 X[5]=0.5 X[6]=0.6 X[7]=0.7 X[8]=0.8 X
[9]=0.9 X[10]=1
Y[0]=1 Y[1]=0.995455 Y[2]=0.983581 Y[3]=0.966524 Y[4]=0.945944 Y[5]=0.923097 Y[6
]=0.89892 Y[7]=0.874103 Y[8]=0.849146 Y[9]=0.824404 Y[10]=0.800126
Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.031 s
Press any key to continue.

```

Заключение

В выпускной квалификационной работе были рассмотрены обыкновенные дифференциальное уравнение первого и второго порядка, были изучены постановка задачи Коши и в данном граничных условиях численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Во многих случаях решения дифференциальных уравнений в поставленных граничных условиях не возможно получить аналитически, поэтому решению приходится искать приближенными методами.

Цель этой выпускной квалификационной работы изучить решать приближенными методами в поставленных граничных условиях линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключение и из списка использованных литератур.

Первая глава посвящена понятие о дифференциальном уравнении, где приведены уравнение с разделяющимися переменными, однородные и линейные уравнения.

Во второй главе приведены приближенные методы решения задачи Коши, где приведены метод Адамса, метод Рунге-Кутты и метод Эйлера Коши.

В третьей главе изучены численные методы решения краевых задач в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Из них изучены метод коллокация, метод прогонки, метод Галеркина и решена несколько примеров на эти методы.

В конце работы на задачу Коши был создан программа на языке C++ и был взят численный результат.

Использованные литературы

Техника безопасности

1. Строго запрещается расположить кабинета информатики на бетонированную комнату и на подвале помещения. Полы должны быть деревянными и все компьютеры должны быть заземлены.
2. Требуется двойная изоляция всех электрических (220 В) линии проводов в том числе удлинители и компьютеры.
3. Надо расположить всех компьютеров в середине комнаты или рядом стены в двойном ряде друг против друга.
4. В кабинете должен быть единый отключатель для всех компьютеров .
5. Монитор компьютера должна быть на уровне глаз, и студенты должны иметь возможность соблюдать дистанцию от монитора на 40-80 см.
6. Клавиатуры компьютера должны быть на уровне согнутых колен. Для мышки должен быть место на обеих сторонах клавиатуры и они должны быть на одной высоте.
7. Продолжительность работы не должен превышать 60 минут на каждого студента.
8. Площадь компьютерного кабинета должна в шесть раз больше от количество компьютеров.
9. Компьютерные кабинеты должны быть оснащены системой вентиляции.
10. Надо предотвратит попадание пыли на клавиатуру.