МЕЖДУНАРОДНАЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ
«COGNITIO»

X МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ НАУКИ XXI ВЕКА»

(31.05.2016г.)

2 часть

г. Москва 2016г.

УДК 082
ББК 94.3
ISSN: 3684-8976

Сборник статей международной исследовательской организации "Cognitio" по материалам X международной научно-практической конференции: «Актуальные проблемы науки XXI века» 2 часть, г. Москва: сборник со статьями (уровень стандарта, академический уровень). – М.: Международная исследовательская организация "Cognitio", 2016. – 160с.
ISSN: 3684-8976

Тираж – 300 экз.

УДК 082
ББК 94.3
ISSN: 3684-8976

Контактная информация Организационного комитета конференции:
Международная исследовательская организация "Cognitio"
Электронная почта: public@mio-cognitio.com
Официальный сайт: www.mio-cognitio.com
Администратор конференции - Афанасьева Людмила Ивановна

СОДЕРЖАНИЕ

ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ТИПА РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Матякубов А.С.
Национальный университет Узбекистана
Турмуханов Н.
Ташкентский университет информационных технологий, Узбекистан

THE ASYMPTOTIC BEHAVIORS OF SELF-SIMILAR SOLUTION OF THE REACTION-DIFFUSION TYPE SYSTEM EQUATION

Matyakubov A.S.
National university of Uzbekistan
Turmuxanov N.
Tashkent university of information technologies

Аннотация

Изучены асимптотические свойства автомодельных решений систем уравнения типа реакции-диффузии. Автомодельные системы уравнения получены методом нелинейного расщепления, предложенным первым автором. Показано, что в зависимости от значения параметров нелинейной среды и размерности пространства возникают разные типы решений. Найдены необходимые и достаточные признаки существования этих решений.

Abstract

The asymptotic properties of self-similar solution of the reaction-diffusion type system equation are studied. A system of the self-similar equations is constructed by method of nonlinear splitting offered early by first author. It is proved the existence of power function type asymptotic of the self-similar solution depending on numerical parameters of an initial system. The conditions of the existence such solution is obtained.

Ключевые слова: асимптотика решений, реакция-диффузия, метод нелинейного расщепления

Keywords: asymptotic behavior of solutions, reaction-diffusion, method of nonlinear splitting

Введение

Рассмотрим в области $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$ параболическую систему трех квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = v_i^{k_i} \nabla (v_i^{\delta_i} \nabla v_i) + \mathrm{div}(\gamma(t) v(t)) + \prod_{j=1}^{3} v_j^{p_{ij}} \qquad (1)$$

описывающая процесс реакции - диффузии в трехкомпонентной нелинейной движущейся со скоростью $\gamma(t)$ с компонентами $\gamma_i(t)$, (i=1,2,3) среде при химической реакции. Вопросы существования и единственности задачи Коши и первой краевой задачи для (1) рассмотрены в ряде работах [1-5]. В [1-5] используя автомодельный подход и численно, исследована задача с режимом обострения в двухкомпонентном случае и изучены возникающие при этом нелинейные эффекты для частного случая (1) - в не движущейся среде. Здесь же авторы отметили, что отдельные полученные ими результаты требует строгого обоснования.

Построение автомодельного системы уравнений методом нелинейного расщепления.

Исследование различных решений системы (1) в общих случаях представляет собой весьма сложную задачу. Поэтому для простоты мы будем заниматься исследованием асимптотических свойств автомодельных решений системы (1), построенных методом нелинейного расщепления [1], для случая систем трех уравнений, хотя использованные здесь методы годятся и для более общего случая.

Система (1) после замены

$$\xi_i = \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \gamma_i(t)dt - x_i \tag{2}$$

приводится к виду

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = v_i^{s_i} \nabla(v_i^{\delta_i} \nabla v_i) + \prod_{j=1}^{3} v_j^{p_{ji}} \tag{3}$$

Отметим, что с помощью преобразования

$$u_i = |v_i|^{1-s_i} \quad (i=1,2,3) \tag{4}$$

система (3) имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \nabla(u_i^{\sigma_i} \nabla u_i) + c_i u_i^{-p_{ii}} \prod_{j=1}^{3} u_j^{p_{ji}}, \quad (i=1,2,3) \tag{5}$$

где $\sigma_i = \dfrac{\delta_i + s_i}{1-s_i}, c_i = 1 - s_i, p_{ji} = \dfrac{q_{ji}}{1-s_i}, (i,j=1,2,3);$

Займемся построением автомодельных решений системы (1).

Сначала найдём решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = \pm c_i \bar{u}_i^{-p_{ii}} \prod_{j=1}^{3} \bar{u}_j^{p_{ji}} \quad (i=1,2,3) \tag{6}$$

вида

$$\bar{u}_i(t) = d_i [T \pm t]^{-\gamma_i}, \quad (i=1,2,3) \tag{7}$$

где

$$\gamma_1 = [(1+p_{23})(1+p_{31}) + (p_{21} - p_{23})(p_{32}+1)]/p$$

$$\gamma_2 = [(1+p_{12})(1+p_{31}) + (p_{32} - p_{31})(p_{13}+1)]/p$$

$$\gamma_3 = [(1+p_{12})(1+p_{23}) + (p_{13} - p_{12})(p_{21}+1)]/p$$

$$P = p_{12} \cdot p_{23} \cdot p_{31} - p_{13} \cdot p_{21} \cdot p_{32} + p_{12} \cdot p_{21} + p_{13} \cdot p_{31} + p_{23} \cdot p_{32} - 1,$$

$$d_1 = [c_1^{-1}\gamma_1]^{(1-P_{23}P_{32})/P} [c_2^{-1}\gamma_2]^{(P_{21}+P_{23}P_{31})/P} [c_3^{-1}\gamma_3]^{(P_{31}+P_{21}P_{32})/P},$$

$$d_2 = [c_1^{-1}\gamma_1]^{(P_{12}+P_{13}P_{32})/P} [c_2^{-1}\gamma_2]^{(1-P_{13}P_{31})/P} [c_3^{-1}\gamma_3]^{(P_{32}+P_{12}P_{31})/P},$$

$$d_3 = [c_1^{-1}\gamma_1]^{(P_{13}+P_{12}\cdot P_{23})/P} [c_2^{-1}\gamma_2]^{(P_{23}+P_{13}\cdot P_{21})/P} [c_3^{-1}\gamma_3]^{(1-P_{12}\cdot P_{21})/P},$$

$T > 0$ -постоянная.

Затем решение системы (5) ищем в виде

$$u_i(t,x) = \bar{u}_i(t)\omega_i(\tau(t),x),\ (i=1,2,3) \qquad (8)$$

где и выберем $\tau = \tau(t)$ так $\tau(t) = \int \bar{u}_1^{-\sigma_1}(t)dt$, где $\bar{u}_1(t)$ определенная выше функция. Тогда с учетом (7) после интегрирование для $\tau(t)$ имеем

$$\tau(t) = \begin{cases} -d_1^{\sigma_1}\dfrac{(T-t)^{1-\gamma_1\sigma_1}}{1-\gamma_1\sigma_1}+C, \text{ если } 1-\gamma_1\sigma_1 \neq 0 \\ -d_1^{\sigma_1}\ln(T-t)+C, \text{ если } 1-\gamma_1\sigma_1 = 0 \end{cases}$$

при $\tau(t) \to +\infty$ (путь $t \to T$) постоянную С выберем равной нулю.

Тогда для $\omega_i(\tau,x)$ $(i=1,2,3)$ получим систему уравнений

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial\tau} = \varphi_i\nabla(\omega_i^{\sigma_i}\nabla\omega_i)+\Psi_i\left(|\omega_i^{-p_{ii}}\prod_{j\neq i}^{3}\omega_j^{p_{ji}}-\frac{1}{c_i}\cdot\omega_i\right), \qquad (9)$$

где $\varphi_i = d_1^{-\sigma_1}d_i^{\sigma_i}$, $\psi_i = \dfrac{\gamma_i}{(-\gamma_1\sigma_1+1)\tau}$, если $1-\gamma_1\sigma_1 > 0$

$\psi_i = \gamma_i d_1^{-\sigma_1}$, $i = 1,2,3$ если $1-\gamma_1\sigma_1 = 0$

Теперь легко видеть, что если положить

$$\omega_i(\tau,x) = y_i(\eta), \qquad (10)$$

$\eta = |\xi|\tau^{-1/2}$ $(i=1,2,3)$, в случае $1-\gamma_1\sigma_1 > 0$

и $\eta = \sum_{i=1}^{N}\mu_i x_i - \tau$, в случае $1-\gamma_1\sigma_1 = 0$, где $\xi = \{\xi_1,\xi_2,\dots\xi_N\}$

получили автомодельную систему уравнений

$$\eta^{1-N}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{N-1}y_i^{\sigma_i}\frac{dy_i}{d\eta}\right)+\frac{\eta}{2\varphi_i}\frac{dy_i}{d\eta}+\mu_i\left(y_i^{-p_{ii}}\prod_{j=1}^{3}y_j^{p_{ji}}-\frac{y_i}{c_i}\right) = 0, \qquad (11)$$

где $\mu_i = \dfrac{\gamma_i}{(1-\gamma_1\sigma_1)\varphi_i}$, $(i=1,2,3)$ если $1-\gamma_1\sigma_1 > 0$

$$\frac{dy_i}{d\eta}+\psi_i\eta^{1-N}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{N-1}y_i^{\sigma_i}\frac{dy_i}{d\eta}\right)+\varphi_i\left(y_i^{-p_{ii}}\prod_{j=1}^{3}y_j^{p_{ji}}-\frac{y_i}{c_i}\right) = 0, \qquad (12)$$

если $1-\gamma_1\sigma_1 = 0$

Для изучения асимптотики системы (11), (12) осуществим преобразовалния

$$y_i(\eta) = Z_i^{m_i}(\zeta),\ Z_i(\zeta) = \overline{\omega_i}(\eta)\eta_i(\zeta),\ \zeta = -\ln\left(1-\frac{1-m_i}{4m_i}\eta^2\right)$$

$$\overline{\omega_i}(\eta) = \left[1 - \frac{1-m_i}{4m_i}\eta^2\right]^{\frac{1}{1-m_i}}, \; m_i = 1/(1+\sigma_i), \; \omega_i(\xi) = \overline{\omega_i}^{1+k_i(1-m_i)}(\eta), \quad (12.1)$$

$$k_i = \left[-1 + \frac{1}{2(1-m_i)}(1 - m_2 p_{22} - m_3 p_{33})\right](m_i p_{i,5-i})^{-1}, \; i = 2,3, \; k_1 = 0;$$

Тогда системы (11), (12) приводиться к виду

$$\begin{gathered}\left[\eta_i' + b_{i1}(\zeta)\eta_i\right]' + \left[b_{i2}(\zeta) + b_{i3}(\zeta)\eta_i\right]\left[\eta_i' + b_{i1}(\zeta)\eta_i\right] + b_{i4}(\zeta)\eta_i^{m_i} + \\ + b_{i5}(\zeta)\eta_i^{m_i p_{ii}} \prod_{j=1}^{3}\eta_j^{m_j p_{ij}} = 0,\end{gathered} \quad (13)$$

в котором

$$b_{i1}(\zeta) = (m_i - 1)^{-1} - k_i, \; b_{i2}(\zeta) = 1 + b_{i1}(\zeta) + \frac{N}{2(e^{\zeta} - 1)}, \; b_{i3}(\zeta) = \frac{m_i}{(1-m_i)\varphi_i}e^{-\alpha_i\zeta},$$

$$b_{i4}(\zeta) = -\frac{m_i\mu_i}{m_i(1-m_i)c_i}\frac{e^{-\alpha_i\zeta}}{e^{\zeta} - 1}, \; b_{i5}(\zeta) = \frac{m_i\mu_i}{m_i(1-m_i)c_i}\frac{e^{\varepsilon_i\zeta}}{1 - e^{-\zeta}}, \; (i = 1,2,3),.$$

$$\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_i = (1-m_i)(2 - k_i + k_{5-i}m_{5-i}p_{i,5-i}) + m_i p_{i1} + m_{5-i}p_{i,5-i} - 1, \; (i = 2,3)$$

.

$$\alpha_1 = 0, \alpha_i = 1 + (m_i - 1)(k_i - (m_i - 1)^{-1}), \; (i = 2,3)$$

О решениях системы (13) вида $\eta_i(\zeta) = \eta_i^0 + o(1), \quad \zeta \to +\infty \; (i = 1,2,3).$

Займемся исследованием асимптотики положительных, имеющих отличный от нуля конечный предел при $\zeta \to +\infty$ решений системы (13).

Введем обозначения

$$a_{i1} = -\frac{m_i}{1-m_i}, a_{i2} = -a_{i1}, a_{i3} = -\mu_1, \; a_{i3} = -\frac{m_i\mu_i}{m_i(1-m_i)},$$

$$a_{i1} = -\left(k_i + \frac{1}{1-m_i}\right)\left(k_i + \frac{m_i}{1-m_i}\right), a_{i2} = \left(k_i + \frac{1}{1-m_i}\right)\frac{m_i}{(1-m_i)\varphi_i} \; (i = 2,3).$$

Теорема 1. Пусть $\varepsilon_i = 0$ (i=1,2,3). Для того, чтобы система (13) имело решения $(\eta_1(\zeta), \eta_2(\zeta), \eta_3(\zeta))$ вида

$$\eta_i(\zeta) = \eta_i^0 + o(1), \zeta \to +\infty \; (i = 1,2,3) \; (i=1,2,3) \quad (14)$$

где $0 < \eta_i^0 < +\infty \; (i = 1,2,3)$, необходимо, чтобы соблюдалось условия

$\alpha_i = 0 (i = 2,3), \eta_i^0 \; (i = 1,2,3)$ являются соответственно корнями z_i (i=1,2,3) системы нелинейных алгебраических уравнений

$$a_{i1} + a_{i2}z_i^{m_i - 1} + a_{i3}z_i^{-1-m_i p_{ii}} \prod_{j=1}^{3} z_j^{m_j p_{ij}} = 0 \; (i = 1,2,3).$$

Доказательство. Предположим, что система (13) имеет решение $(\eta_1(\zeta), \eta_2(\zeta), \eta_3(\zeta))$ вида (14). Подставляя это решение в систему (13) и полагая

$$v_i(\zeta) = \eta_i'(\zeta) + b_{i1}(\zeta)\eta_i(\zeta) \; (i=1,2,3) \quad (15)$$

получим тождество

$$v_i'(\zeta) \equiv -b_{i2}(\zeta)v_i(\zeta) - b_{i3}(\zeta)\eta_i v_i(\zeta) - b_{i4}(\zeta)\eta_i^{m_i} - b_{i5}(\zeta)\eta_i^{-m_i\rho_{ii}}\prod_{j=1}^{3}\eta_j^{-m_j\rho_{ji}} \ (i=1,2,3). \tag{16}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$g_i(\lambda_i,\zeta) \equiv -b_{i2}(\zeta)v_i(\zeta) - b_{i3}(\zeta)\eta_i v_i(\zeta) - b_{i4}(\zeta)\eta_i^{m_i} - b_{i5}(\zeta)\eta_i^{-m_i\rho_{ii}}\prod_{j=1}^{3}\eta_j^{-m_j\rho_{ji}} \ (i=1,2,3),$$

где $\lambda_i \in R$, (i=1,2,3).

Пусть сначала $\varepsilon_i = 0$ (i=1,2,3). Тогда функция $g_i(\lambda_i,\zeta)$ (i=1,2,3) сохраняет знак на некотором промежутке $[\zeta_1,+\infty)\subset[\zeta_0,+\infty)$ при каждом фиксированном значении λ_i (i=1,2,3), отличном от значении удовлетворяющего систему

$$b_{i2}^0\lambda_i + b_{i3}^0\eta_i^0 + b_{i4}^0(\eta_i^0)^{m_i} + b_{i5}^0\left(\eta_i^0\right)^{-m_i\rho_{ii}}\prod_{j=1}^{3}\left(\eta_j^0\right)^{-m_j\rho_{ji}} = 0 \ (i=1,2,3)$$

если $\alpha_i = 0$ (i=1,2,3). А в случае $\alpha_i < 0$ (i=1,2,3) функцию $g_i(\lambda_i,\zeta)$ (i=1,2,3) перепишем следующим виде

$$g_i(\lambda_i,\zeta) = -b_{i2}(\zeta)\lambda_i - b_{i3}(\zeta)(\eta_i\lambda_i + \frac{\mu_i}{c_i m_i\left(e^{\zeta}-1\right)}\eta_i^{m_i} + \frac{\mu_i}{c_i m_i\left(1-e^{-\zeta}\right)}\eta_i^{-m_i\rho_{ii}}\prod_{j=1}^{3}\eta_j^{-m_j\rho_{ji}})$$

(i=1,2,3). Имея ввиду, что $\lim\limits_{\eta\to+\infty} b_{i2}(\zeta) = 1 + \left(m_i - 1\right)^{-1} - k_i$, $\lim\limits_{\eta\to+\infty} b_{i3}(\zeta) = \infty$ (i=1,2,3), функция $g_i(\lambda_i,\zeta)$ (i=1,2,3) сохраняет знак на промежутке $[\zeta_1,+\infty)\subset[\zeta_0,+\infty)$, где λ_i (i=1,2,3) произвольные числа.

Значит, функция $g_i(\lambda_i,\zeta)$ (i=1,2,3) для всех $\zeta\in[\zeta_1,+\infty)$ удовлетворяет одному из неравенств

$$g_i(\lambda_i,\zeta) > 0 \text{ или } g_i(\lambda_i,\zeta) < 0 \ (i=1,2,3). \tag{17}$$

Допустим теперь, что для функции $v_i(\zeta)$ (i=1,2,3) предел при $\zeta\to+\infty$ не существует. Рассмотрим случай, когда выполнено одно из неравенств (17). В силу колеблемости функции $v_i(\zeta)$ (i=1,2,3) прямую $\overline{v}_i = \lambda_i$ (i=1,2,3) ее график бесконечное число раз пересеклет на интервале $[\zeta_1,+\infty)$. Но это невозможно, так как на интервале $[\zeta_1,+\infty)$ справедливо одно из неравенств (17) и поэтому из тождества (16) следует, что график функции $v_i(\zeta)$ (i=1,2,3) пересекает прямую $\overline{v}_i = \lambda_i$ (i=1,2,3) только один раз на интервале $[\zeta_1,+\infty)$. Следовательно, для функции $v_i(\zeta)$ (i=1,2,3) существует предел при $\zeta\to+\infty$.

По предположению $\eta_i(\zeta)$ (i=1,2,3) имеет представления (14), а функция $v_i(\zeta)$ (i=1,2,3) определена согласно (15) и имеет предел при $\zeta\to+\infty$, то $\eta'_i(\zeta)$ (i=1,2,3) также имеет предел при $\zeta\to+\infty$, причем равный нулю. Тогда $v_i(\zeta) = \eta_i'(\zeta) + b_{i1}(\zeta)\eta_i(\zeta) = b_{i1}^0\eta_i^0 + o(1)$ (i=1,2,3) при $\zeta\to+\infty$ и в силу (15) производная функции $v_i(\zeta)$ (i=1,2,3) имеет предел, при $\zeta\to+\infty$, который очевидно равен нулю.

Следовательно, необходимо, чтобы

$$\lim_{\zeta\to+\infty}\left(b_{i2}(\zeta)v_i(\zeta)+b_{i3}(\zeta)\eta_i v_i(\zeta)+b_{i4}(\zeta)\eta_i^{m_i}+b_{i5}(\zeta)\eta_i^{-m_i p_{ii}}\prod_{j=1}^{3}\eta_j^{-m_j p_{ij}}\right)=0\ (i=1,2,3).$$

Отсюда легко убедиться в том, что при $\varepsilon_i>0$ (i=1,2,3) либо $\alpha_i<0$ (i=1,2,3) система (13) не может иметь решения $(\eta_1(\zeta),\eta_2(\zeta),\eta_3(\zeta))$ с конечным не равным нулю пределом, при $\zeta\to+\infty$, а при $\varepsilon_i=0$, $\alpha_i=0$ (i=1,2,3) для существования таких решений, необходимо, чтобы соблюдалось условия теоремы 1.

Аналогично доказываются следующие теоремы:

Теорема 2. Пусть $\varepsilon_i=0$ (i=1,2,3). Для того, чтобы система (13) имело решения $(\eta_1(\zeta),\eta_2(\zeta),\eta_3(\zeta))$ вида (14), где $0<\eta_i^0<+\infty\ (i=1,2,3)$, необходимо, чтобы соблюдалось условия $\alpha_i>0(i=2,3),\eta_i^0(i=1,2,3)$ являются соответственно корнями z_i (i=1,2,3) системы нелинейных алгебраических уравнений

$$a_{11}+a_{12}z_1^{m_1-1}+a_{13}z_1^{-1}z_2^{m_2p_{21}}z_3^{m_3p_{31}}=0,\ a_{i1}+a_{i3}z_i^{-1-m_ip_{ii}}\prod_{j=1}^{3}z_j^{m_jp_{ji}}=0,\ (i=2,3)$$

Теорема 3. Пусть $\varepsilon_i<0$ (i=1,2,3). Для того, чтобы система (13) имело решения $(\eta_1(\zeta),\eta_2(\zeta),\eta_3(\zeta))$ вида (14), где $0<\eta_i^0<+\infty\ (i=1,2,3)$, необходимо, чтобы соблюдалось условия $\alpha_i=0(i=2,3),\eta_i^0(i=1,2,3)$ являются соответственно корнями z_i (i=1,2,3) системы нелинейных алгебраических уравнений

$$a_{11}+a_{12}z_1^{m_1-1}+a_{13}z_1^{-1}z_2^{m_2p_{21}}z_3^{m_3p_{31}}=0,\ a_{i1}+a_{i2}z_i^{m_i-1}=0,\ (i=2,3)$$

Теорема 4. Пусть $\varepsilon_i<0$ (i=1,2,3). Для того, чтобы система (13) имело решения $(\eta_1(\zeta),\eta_2(\zeta),\eta_3(\zeta))$ вида (14), где $0<\eta_i^0<+\infty\ (i=1,2,3)$, необходимо, чтобы соблюдалось условия $\alpha_i>0,\ \eta_i^0=c_i\ (i=2,3)$, η_1^0 является корнями z_1 системы нелинейных алгебраических уравнений

$$a_{11}+a_{12}z_1^{m_1-1}+a_{13}z_1^{-1}z_2^{m_2p_{21}}z_3^{m_3p_{31}}=0.$$

Список литературы

1. Aripov M. Asymptotics of Solutions of the non-Newton Polytrophic Filtration Equations. ZAMM 2000, vol.80, supl.3, 767-768.
2. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Тельковский О.В. Режим с обострением в двухкомпонентных средах. Матем. Моделирование, 1989, том 1, с. 34-50.
3. Холоднюк М., Клич М., Кубичек М., Марек М. Методы анализа динамических систем. Москва, Мир, 1991, 365 с.
4. Chunhua Jin, Jingxue Yin, Self-similar solutions for a class of non-divergence form equations, Nonlinear Differ. Equ. Appl. Nodea, 2013, Vol. 20, Issue 3, pp. 873-893.
5. J.R. Raimbekov, The Properties of the Solutions for Cauchy Problem of Nonlinear Parabolic Equations in Non-Divergent Form with Density, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2015, 8 (2), pp. 192-200.