

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI**

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI



**Ostonov Q., Quljonov O‘., Mardonov J., Arziqulov A.
PARAMETRLI TENGLAMA VA TENGSIZLIKLARNI
YECHISH USULLARI**

Uslubiy qo‘llanma

SamDU o‘quv-uslubiy kengashining
2016 yil _____da bo‘lib o‘tgan
yig‘ilish qarori bilan
(____bayonnoma) nashrga tavsiya etilgan.

Samarqand - 2016

Ostonov Q., Quljonov Q., Mardonov Ya., Arziqulov A. Parametrli tenglama va tengsizliklarni yechish usullari. Uslubiy qo'llanma. –Samarqand: SamDU, 2016, 120 bet.

Taqrizchilar: pedagogika fanlari nomzodi, dots. Sultonov J.

fizika-matematika fanlari nomzodi, dots. Niyozov I.

Ma'sul muharrir: fizika-matematika fanlari doktori, prof. Abdullayev J.I.

Uslubiy qo'llanmada umumta'lim maktablari akademik litsey va KHK larida parametrli tenglama va tengsizliklarni yechish usullarini o'quvchilarga o'rgatish metodikasi bo'yicha uslubiy tavsiyalar keltirilgan va bu uslubiy qo'llanma matematika va mexanika yo'nalishlari bo'yicha tahsil olayotgan talabalar uchun "Matematika o'qitish usullari" fani bo'yicha nazariy va seminar mashg'ulotlarda hamda pedagogik amaliyotni o'tkazish jarayonida o'qitish faoliyatida o'quv-uslubiy qo'llanma sifatida qo'llanishga mo'ljallangan.

MUNDARIJA

Bet

KIRISH	4
---------------------	----------

I BOB. PARAMETRLI BIRINCHI DARAJALI TENGLAMA VA TENGSIKLIKLARNI YECHISH USULLARI

1.1-§. Parametrli tenglama va tengsizliklarga doir asosiy tushunchalar.....	8
1.2-§. Parametrli masalalarning asosiy turlari va yechishning usullari.....	13
1.3-§. <i>Parametrli chiziqli tenglamalarga keltiriladigan tenglamalar</i>	28

II BOB. PARAMETRLI IKKINCHI DARAJALI TENGLAMA VA TENGSIKLIKLARNI YECHISH USULLARI

2.1-§. Parametrli kvadrat tenglamalar va ularga keltiriladigan tenglamalar.....	45
2.2-§. Parametrli kvadrat tengsizliklarni o'rganishda o'quvchilarda tatqiqodchilik ko'nikmalarini rivojlantirish.....	56
2.3-§. Kvadrat uchhadlarga doir parametrli masalalar.....	61
2.4-§. Parametrli kasr ratsional tenglamalar	72
2.5-§. Parametrli ba'zi irratsional va nostandart tenglama va tengsizliklar.....	77
2.6-§. Parametrli kvadrat tenglama va tengsizliklarni yechish.....	85
2.7-§. Parametrli masalalarni yechishning funksional-grafik usuli.....	106
XULOSA.....	117
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI.....	119

KIRISH

«Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» va «Ta'lim to'g'risidagi qonun» larning mamlakatimizda ta'lim sohasida amalga oshirilishi natijasida keng ko'lamli ishlar amalga oshirildi. Shu bilan birga Respublikamizning Birinchi Prezidenti I.A. Karimov [1,2] hozirgi davrda ham yosh avlodni fan asoslarini chuqur egallagan va bunda har tomonlama rivojlangan shaxsni shakllantirish xalq ta'limi oldida turgan eng muhim dolzarb vazifalardan biri bo'lib qolishini ta'kidlaganlar. Shu sababdan matematika o'qitish usullarini, shu jumladan umumta'lim maktablari algebra kursini o'qitish sifat va samaradorligini oshirish vazifalari muhim ahamiyat kasb etadi. Chunki algebra kursini o'qitishning maqsad va vazifalariga binoan o'quvchilarning matematik qobiliyatlari va mantiqiy fikrlashlarini shakllantirish, o'zlashtirilgan bilimlarni amaliyotda qo'llay olishga o'rgatishdan iborat bo'lib, bunda ayniqsa bilim va ko'nikmalarni o'quv faoliyatida ijodiy qo'llash, o'quvchilarning bilish faoliyatlarini rivojlantirishda katta rol o'ynaydi [15,16,17,19,21,24]. Bu esa algebra kursini o'qitish usullari va mazmuniga muvofiq holda o'quvchilarning matematik bilimlari va ko'nikmalarining rivojlantirishni, ayniqsa, parametrli tenglama va tengsizliklarni yechishning asosiy usullarini o'rgatish, ularni turli parametrli matematik masalalarni yechishda qo'llay olishlari va umumiy usullarni bilishga taalluqli tushunchalarni shakllantirishni talab etadi. Bunda turli o'qitish usullari va zamonaviy pedagogik texnologiyalarni qo'llash muhim ahamiyatga ega.

Ma'lumki, umumta'lim maktablari, AL va KHK algebra va matematika o'quv dasturlari va DTS talablariga asosan o'quvchilarning parametrli tenglama va tengsizliklarni yechishning asosiy usullarini o'rgatish haqidagi bilim va ko'nikmalarini rivojlantirish va shu asosda ularning kelgusi amaliy faoliyatida qo'llay olish malaka va ko'nikmalarini shakllantirish talab etiladi. Adabiyotlar tahlili [5,6,8,9,10], tajriba va kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, ko'p hollarda bu mavzular va ularga doir misol va mashqlarni yechish o'quvchilar bilan chuqur tarzda o'tilmaydi va bu esa ularning keyingi o'quv va amaliy faoliyatlari uchun zarur ko'nikma va malakalarning shakllanishiga to'sqinlik qiladi. Shuning uchun ushbu uslubiy qo'llanmada umuta'lim maktablari algebra kursini o'qitishda

parametrli tenglama va tengsizliklarni yechishning asosiy usullarini o'rgatishning uslubiy xususiyatlari va bu muammoni qarab chiqish, unga doir uslubiy tavsiyalarni ishlab chiqish o'quvchilarning algebra kursi o'qitish jarayonining sifat jihatlarni oshirish uchun asos bo'lib xizmat qilishini yoritish maqsad qilib qo'yilgan.

Umumta'lim maktablari, AL va KHK algebra kursini o'qitishda o'quvchilar intellektual salohiyatini hisobga olsak, ularning turlicha tipdagi tenglama va tengsizliklar yecha olish ko'nikmalarini shakllantirishda parametrli tenglama va tengsizliklarga doir misol va mashqlarni yechish katta samara beradi, ya'ni bunday masalalarni muntazam yechish, uning yechish bosqichlarini o'rgatish, turli yechish usullaridan foydalana olish va murakkab masalalar, funksional yondashuv bilan yechish usullariga o'rgatish va uni muhokama etish, bunda «aqliy hujum», hamkorlikda ishlash orqali o'quv jarayonini tashkil etish, birinchidan, o'quvchilar faolligini oshiradi, ikkinchidan esa, ularning parametrli tenglama va tengsizliklarga doir misol va mashqlarni yechishda fikrlash usullariga mustaqil asoslashga o'rgatish uchun imkon beradi Shu bilan birga asosiy yechish usullari va ularni algoritm asosida bajarish ketma-ketligini egallashlari, nostandart mashqlarni yechish usullarini izlab topa olish qandaydir ma'noda ijod qilish ko'nikmalarining shakllanishiga xizmat qiladi. Shuni hisobga olsak, mavzuni o'rganish dolzarbligi kelib chiqadi. Boshqacha so'z bilan aytganda parametrli tenglama va tengsizliklarni yechishning asosiy usullarini o'rgatish, ularni turli tenglama va tengsizlarni yechishda qo'llay olishlari va umumiy usullarni bilishga taalluqli tushunchalarni shakllantirish bilan birga matematik texnikani egallashlari hamda bilimlarning o'quv faoliyatida samarali foydalana olishlariga hamda mantiqiy fikrlashlarini rivojlantirishda quyidagi imkoniyatlarga ega:

- 1) Algebra kursining materiallari mazmuni va ularning o'quvchilarning parametrli tenglama va tengsizliklarni yechishning asosiy usullari to'g'risidagi bilim va ko'nikmalarini rivojlantirishdagi ahamiyati nazariy tushuncha va

formulalar, teorema, usullarning oddiydan murakkablikka sistemali va ketma-ketlik asosida bayon etilishi bilan bog'liq.

2) Parametrli tenglama va tengsizliklarni yechishning asosiy usullari haqidagi asosiy tushunchalarini o'qitishda o'quvchilarning amaliy ko'nikmalarini sistemali nafaqat nazariy materiallarni o'rganishda, balki tekshirish, funksiyalar aniqlanish sohalarini topish, grafiklardan foydalana olish, turli usullardan ratsionalini tanlab olish, logarifmik va ko'rsatkichli funksiyalarning xossalarini qo'llay olish kabi topshiriqlardan iborat bo'lgan misol va mashqlarni taklif etish maqsadga muvofiq.

3) Parametrli tenglama va tengsizliklarni yechishning asosiy usullariga doir misol va mashqlar nazariy tushunchalarni asoslash sifatida har bir mavzuni o'rganish imkoniyatlaridan foydalanish lozim. Algebra ham umuman matematika kursining o'qitish sifati va turli tipdagi parametrli tenglama va tengsizliklarni yechish ko'nikmalarini shakllantirish hozirgi zamonaviy texnologiyalarning talablaridan kelib chiqib o'quvchilarning amaliy va o'quv faoliyati tajribalarini hisobga olgan holda ularning shaxsini rivojlantirishga qaratilgan bo'lishi talab etiladi.

Uslubiy qo'llanmada umumta'lim maktablarida algebra kursini o'qitishda parametrli tenglama va tengsizliklarni yechishning asosiy usullari haqidagi asosiy tushunchalarni o'rganish jarayonida o'quvchilarning puxta va mustahkam tenglama va tengsizliklarni yecha olish ko'nikmalarini shakllantirishda zamonaviy pedagogik texnologiyalar va AKT dan foydalanib shakllantirishning imkoniyat va usullarining nazariy jihatdan asoslari bayon etilgan va turlicha misol hamda mashqlar yechish bosqichlari, algoritmlari, nazariy ma'lumotlardan foydalana olish va ularni bayon qilish ketma-ketligi xususiyatlari asosida matematika darslari samaradorligini oshirishda qo'llanish imkoniyatlarini o'rganish va ularning o'zaro aloqadorligini ta'minlash bo'yicha zaruriy uslubiy tavsiyalar ishlab chiqilgan.

I BOB. PARAMETRLI BIRINCHI DARAJALI TENGLAMA VA TENGSIZLIKLARNI YECHISH USULLARI

1.1-§. Parametrli tenglama va tengsizliklarga doir asosiy tushunchalar

Reja:

1. O'zgaruvchilarning mumkin bo'lgan qiymatlar to'plami.
2. Parametrli tenglama va tengsizliklarning yechimi va ularni yechish tushunchalari;
3. Parametrli masalalarning teng kuchlilik haqida.

Adabiyotlar: [6],[8], [14], [15].

Tayanch iboralar: tenglama, tengsizlik, parametr, teng kuchlilik, o'zgaruvchi, qiymat, to'plam.

1. O'zgaruvchilarning mumkin bo'lgan qiymatlar to'plami.

Biz

$$f(a, b, c, \dots, k, x) = g(a, b, c, \dots, k, x),$$

ko'rinishdagi tenglamalarni qaraymiz, bu erda $a, b, c, \dots, k, x$ – o'zgaruvchi miqdorlar.

1-ta'rif. Tenglamaning ikkala qismi haqiqiy sonlar to'plamida ma'noga ega bo'ladigan o'zgaruvchilarning ixtiyoriy qiymatlari $a = a_0, b = b_0, c = c_0, \dots, k = k_0$, to'plami $a, b, c, \dots, k, x$ o'zgaruvchilarning *mumkin bo'lgan qiymatlar to'plami* deb ataladi va quyidagicha belgilanadi: $D(a, b, c, \dots, k, x)$.

$a, b, c, \dots, x$ o'zgaruvchilarning mumkin bo'lgan qiymatlari to'plamlari mos ravishda $A, B, C, \dots, X$ bo'lsin. Agar $A, B, C, \dots, X$ to'plamlarning har biridan bittadan mos ravishda $a, b, c, \dots, x$ qiymatlarni tanlab, tayinlasak va ularni tenglamaga qo'ysak, u holda x ga nisbatan bir o'zgaruvchili tenglamani olamiz.

2-ta'rif. Agar tenglamada(tengsizlikda) qatnashgan $a, b, c, \dots, k$ o'zgaruvchilar ma'lum o'zgarmaslar(parametrlar), x – haqiqiy noma'lum o'zgaruvchi miqdor deb qaralsa, bunday tenglama(tengsizlik) *parametrli bir noma'lumli tenglama(tengsizlik)* deb ataladi.

Kelgusida parametrlarni lotin alifbosining birinchi harflari: $a, b, c, \dots, k, l, m, n$ lar bilan, noma'lumlarni esa x, y, z harflar bilan belgilashga kelishib olamiz. .

Masalan,

$$\frac{2nx-5}{(m-3)nx} - \frac{3nx+5}{n+1} = \frac{n-1}{nx}$$

tenglamada m va n – parametrlar, x – noma'lum.

$m \neq 3, n \neq 0, n \neq -1, x \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi m, n, x larning ixtiyoriy qiymatlari tenglamaning mumkin bo'lgan(yo'l qo'yiladigan) qiymatlari to'plami bo'ladi.

$$m = 4, n = 1 \text{ da } \frac{2x-5}{x} - \frac{3x+5}{2} = 0, \text{ tenglamani olamiz.}$$

$$m = 5, n = 3 \text{ da } \frac{6x-5}{6x} - \frac{9x+5}{4} = \frac{2}{3x} \text{ tenglamani olamiz va h.k.}$$

2. Parametrli tenglama va tengsizliklarning yechimi va ularni yechish tushunchalari;

Ikkita a va x o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan

$$F(a, x) = 0 \quad (1)$$

tenglama berilgan bo'lsin. F elementar funksiya. O'zgaruvchilardan istalgan birini noma'lum ikkinchisini esa *parametr* dib ataymiz.

3 - ta'rif. Agar a o'zgaruvchining har bir qiymatida biror X to'plamda (1) tenglamani x ga nisbatan yechish masalasi qo'yilgan bo'lsa, u holda (1) ga x noma'lumli(o'zgaruvchili) va a parametr ga bog'liq (parametrli)tenglama deyiladi.

Yana ham aniqroq quyidagicha ta'rif berish mumkin.

4 - ta'rif. Agar a o'zgaruvchining har bir tayinlangan $a = a_i$ qiymati uchun unga mos $F(a_i, x) = 0$ (2) xususiy tenglamani yechish masalasi qaralayotgan bo'lsa, u holda (1) ga x o'zgaruvchili va a parametr ga bog'liq tenglama deyiladi.

5 - ta'rif. Agar a o'zgaruvchining har bir tayinlangan $a = a_i$ qiymati uchun unga mos $F(a_i, x) < 0$ xususiy tengsizlikni yechish masalasi qaralayotgan bo'lsa, u holda $F(a, x) < 0$ ga x o'zgaruvchili va a parametr ga bog'liq tengsizlik deyiladi.

Parametrli tenglama va tengsizliklarni echish masalasi parametrning barcha qiymatlarida ham ma'noga ega bo'lavermasligi mumkin. Shu sababli parametrning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami (PMBQT) tushunchasini kiritishga ehtiyoj paydo bo'ladi. Metodik adabiyotlarda, *tenglama parametrining aniqlanish sohasi va tenglama noma'lum o'zgaruvchisining aniqlanish sohasi* tushunchalari ham uchraydi.

6 - ta'rif. Parametrning xususiy tenglamalar(tengsizliklar)ning barchasi aniqlangan(ma'noga ega bo'ladigan) qiymatlari to'plamiga *parametrning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami*(PMBQT) deyiladi.

Endi parametrli tenglamaning aniqlanish sohasi tushunchasini kiritamiz.

7 - ta'rif. (1) tenglamaning *aniqlanish sohasi* deb, parametrning mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami va (2) xususiy tenglamaning aniqlanish sohasidan olingan (a_i, x) juftliklar to'plamiga aytiladi.

8 - ta'rif. (Umumiy yechim tushunchasi) . Faraz qilaylik, a parametrning qiymatlar to'plami A da $x = f(a)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Agar parametrning har bir $a_i \in A$ qiymati uchun $x = f(a_i)$ son $F(a_i, x) = 0$ xususiy tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda $x = f(a)$ funksiya (1) parametrli tenglamaning *umumiy yechimi* deyiladi.

Parametrli tengsizliklar uchun ham yuqoridagilarga o'xshash ta'riflarni keltirish mumkin.

9 - ta'rif. Parametrning mumkin bo'lgan qiymatlari to'plamida (1) tenglamaning barcha umumiy yechimlarini topish va ularning sonini aniqlash yoki (1) tenglamaning yechimga ega emasligini ko'rsatishga *parametrli tenglamani yechish* deyiladi.

Istalgan parametrli masala, avvalam bor, *tadqiqotchilikni* talab qiluvchi masaladir. Parametrli masalalarni yechishda mumkin bo'lgan barcha variantlar

qarab chiqiladi. Shu sababli ular o'quvchi(talaba)larda tadqiqotchilik ko'nikmalarini shakllantiradi. Istalgan parametrli masala – har biri yechilishi kerak bo'lgan cheksiz ko'p masalalar to'plamining qisqacha yozilishidir.

Endi ayrim parametrli tenglamalarning umumiy(standart) ko'rinishlarini keltiramiz:

Parametrli chiziqli tenglamalar

$$f(a) \cdot x = g(a) , \quad f(a,b) \cdot x = g(a,b)$$

Parametrli kvadrat tenglama

$$f(a)x^2 + g(a)x + h(a) = 0$$

Parametrli kasr - ratsional tenglama

$$\frac{f(a,x)}{g(a,x)} = 0$$

Ikki parametrli bir noma'lumli tenglama $F(a, b, x) = 0$

Bu erda F, f, g va h lar elementar funksiyalardan iborat.

Matematika ta'limida parametrli masalalarning asosiy funksiyalari (vazifalari) quyidagilardan iborat:

1. *Ta'limiy(o'rgatuvchi)* - tanlovlarning sinovlariga tayyorlash, masalan: o'rta maxsus va oily o'quv yurtlariga o'qishga kirish, olimpiada va turnirlarga tayyorgarlik ko'rish, bir noma'lumli tenglama va tengsizliklarni yechish bo'yich bilimlarini sistemalashtirish, tenglama va tengsizliklarni yechish ko'nikmalarini umumlashtirish.
2. *Rivojlantiruvchi* – tadqiq etish ko'nikma va malakalarini , o'z-o'zini nazorat qilish ko'nikmalarini va talabalarda ijodkorlikni rivojlantirish.
3. *Tarbiyalovchi* – ilmiy dunyoqarashni va shaxsiy sifatlarni(mehnatsevarlik, maqsadga intiluvchanlik, chidamlilik, tartiblilik) tarbiyalash.

Parametrli masalalarni yechish algoritmini o'rgatish metodikasi.

1. Tayyorgarlik bosqichi: bilimlarni faollashtirish, ehtiyoj va zaruratni sezdirish ya'ni motivatsiyani anglatish.
2. Tanishtirish bosqichi: algoritmning qadamlarini xususiy metodlar yordamida taxlil qilib taqqoslash.
3. O'zlashtirish bosqichi: standart masalalarni ushbu algoritm bilan yechish.
4. Qo'llash(o'tkazish) bosqichi: nostandart masalalarni algoritm bo'yicha yechish.

Parametrli masalalarni yechish algoritmlarini o'rgatishda quyidagicha tabaqalashtirilgan topshiriqlardan foydalanish tavsiya etiladi:

1. Yordamchi masalalar.
2. Tayanch masalalar.
3. Mustahkamlash uchun masalalar.
4. Rivojlantiruvchi masalalar.

3. Parametrli masalalarning teng kuchliligi haqida.

Tenglama va tengsizliklarni yechish jarayonida teng kuchlilik haqidagi ma'lumotlar muhim ahamiyatga ega.

10-ta'rif. Bir xil parametrlarni o'z ichiga olgan ikkita tenglama yoki tengsizlik teng kuchli deyiladi, agar:

- a) parametrlarning bir xil qiymatlarida ma'noga ega bo'lsa;
- b) birinchi tenglama (tengsizlik)ning har bir yechimi ikkinchi tenglama (tengsizlik)ning yechimi bo'lsa va aksincha.

1-misol. a ning qanday qiymatlarida $x^2 - a = 0$ va $\sqrt{x} - a = 0$ tenglamalar teng kuchli?

Yechish. Ravshanki, $a > 0$ da birinchi tenglama ikkita $x = \pm\sqrt{a}$ turli ildizlarga, ikkinchisi – faqat bitta ildizga $x = a^2$ ga ega va bu holda tenglamalar teng kuchli bo‘lmaydi. $a = 0$ da tenglamalar yechimlari ustma-ust tushadi ($x = 0$), $a < 0$ da na birinchi, na ikkinchi tenglama yechimlarga ega. Lekin ma’lumki bunday tenglamalar teng kuchli deb hisoblanadi.

Javob: $a \leq 0$.

2-misol. a ning qanday qiymatlarida $ax = a^2$ tenglama $|x - 3| \geq a$ tengsizlikka teng kuchli?

Yechish. $a \neq 0$ da tenglama yagona yechimga, tengsizlik esa – cheksiz ko‘p yechimga ega. Agar $a = 0$ bo‘lsa, tenglamaning ham, tengsizlikning yechimi barcha haqiqiy sonlar to‘plamidan iborat, Demak, masala shartini faqat $a = 0$ qanoatlantiradi.

Javob. $a = 0$.

Savol va topshiriqlar

1. O‘zgaruvchilarning yo‘l qo‘yiladigan qiymatlar to‘plami ta’rifini bering.
2. Parametrli bir noma’lumli tenglama va tengsizliklar deb nimaga aytilad?
3. Parametrli bir noma’lumli tenglama va tengsizliklarni yechish deb nimaga aytiladi
4. Teng kuchlilik haqida gapring.

1.2-§. Parametrli masalalarning asosiy turlari va yechishning asosiy usullari

Reja:

1. Parametrli masalalarning asosiy turlari .
2. Parametrli masalalarni yechishning asosiy usullari.
3. Parametrli chiziqli tenglamalarni yechish algoritmi.
4. Oddiy parametrli chiziqli tenglamalarni yechishga doir misollar.
5. Koeffisientlari parametrli kvadrat uch hadlardan iborat bo‘lgan chiziqli tenglamalarga doir misollar.

Adabiyotlar: [7],[8], [11], [15].

Tayanch iboralar: parametrli chiziqli tenglamalar, ta'rif, algoritm, misollar, yechim, koeffitsient, *parametrli masala, tur, tenglama, tengsizlik, sistemalar, yeshimlar soni, , parametrga nisbatan yechish usuli.*

1. Parametrli masalalarning asosiy turlari .

1-tur. Parametrning ixtiyoriy qiymati uchun, yoki parametrning oldindan berilgan qiymatlar to'plami uchun yechish talab etilgan tenglamalar, tengsizliklar, ularning sistemalari va jamlanmalari.

2-tur. Parametrning qiymatlariga bog'liq ravishda tenglamalar, tengsizliklar, ularning sistemalari va jamlanmalari yechimlar sonini aniqlash.

3-tur. Parametrning shunday qiymatlarini topish lozimki, ko'rsatilgan tenglamalar, tengsizliklar, ularning sistemalari va jamlanmalari berilgan sondagi yechimlarga ega bo'lsin (xususan, yechimga ega bo'lmasligi, cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'lishi).

4-tur. Parametrning izlanayotgan qiymatlarida yechimlar to'plami tenglamalar, tengsizliklar, ularning sistemalari va jamlanmalari aniqlanish sohasida berilgan shartlarni qanoatlantiradi. Masalan, 1) tenglama berilgan oraliqdagi o'zgaruvchining ixtiyoriy qiymati uchun bajariladigan parametrning qiymatlarini topish; 2) birinchi tenglama yechimlari to'plami ikkinchi tenglama yechimlar to'plamining qism-to'plami bo'ladigan parametrning qiymatlarini topish va h.k.

2. Parametrli masalalarni yechishning asosiy usullari.

1-usul (Analitik). Parametrsiz masalalarda yechimni topishning standart algoritmlardan to'g'ridan-to'g'ri foydalanish usuli.

2-usul (Grafik). Masalaga bog'liq ravishda (x o'zgaruvchi va a parametrga bog'liq funksiyalarning grafiklari) grafiklarni yo ($x; y$) koordinata tekisligida, yoki ($x; a$) koordinata tekisligida yasash usuli.

3-usul (Parametrغا nisbatan yechish). Bu yechish usulida x va a o'zgaruvchilar teng huquqli deb qaraladi va analitik yechim sodda olinadigan o'zgaruvchi tanlanadi. Tabiiy soddalashtirishlardan so'ng x va a o'zgaruvchilarning dastlabki ma'nosiga qaytamiz va yechishni tugallaymiz.

Savol va topshiriqlar:

1. Parametrli masalalarning asosiy tiplarini ayting.
2. Parametrli masalalarni yechishning asosiy usullarini bayon eting.
3. Analitik usul qanday qo'llaniladi?
4. Grafik usulda masalaga bog'liq ravishda qaysi koordinata tekisligida qaraladi?
5. Parametrغا nisbatan yechish usulining algoritmini ayting.

Parametrli chiziqli tenglamalarni yechishning mumkin bo'lgan xususiy misollarni yechilish yo'llarini taxlil qilib, bunday masalalarni yechishning ma'lum algoritmi tuzilsa, «murakkab» parametr «oddiy» ga aylanadi va u parametrli tenglamalarni yechishni o'rgatishning birinchi bosqichida katta yordam beradi.

3. Parametrli chiziqli tenglamalarni yechish algoritmi .

$$\text{Ma'lumki,} \quad a \cdot x = b; \quad a, b \in R \quad (1)$$

ko'rinishdagi istalgan chiziqli tenglamani yechishda quyidagi uchta holdan biri albatta yuz beradi:

1. Agar $a \neq 0$ va $b \in R$ bo'lsa, (1) tenglama $x = \frac{b}{a}$ formula bilan hisoblanuvchi bitta ildizga ega bo'ladi.
2. Agar $a = 0$ va $b \neq 0$ bo'lsa, (1) tenglama yechimga ega bo'lmaydi.
3. Agar $a = 0$ va $b = 0$ bo'lsa, (1) uchun istalgan haqiqiy son ildiz bo'ladi, ya'ni (1) tenglama cheksiz ko'p ildizlarga ega bo'ladi.

$$\text{Faraz qilaylik,} \quad f(t) \cdot x = \varphi(t) \quad (2)$$

ko`rinishidagi  $t$  haqiqiy parametrğa bog`liq bo`lgan  $x$  ga nisbatan chiziqli bo`lgan tenglama berilgan bo`lib,  $f$  va  $\varphi$  lar ma`lum elementar funksiyalar bo`lsin (1) tenglama uchun eslatilgan tasdiqlarni (2) tenglama uchun umumlashtirish maqsadida, quyidagi belgilashlarni kiritib olamiz.

$$A = \{t \in R: f(t) = 0\}, \quad B = \{t \in R: \varphi(t) = 0\}$$

I_t – (2) tenglamaning ildizlari to`plami,  $E(\varphi)$ – funksiyaning qiymatlari to`plami.

Bu belgilashlar asosida (2) ning ildizlari uchun mumkin boi`lgan ucta holni to`plamlar tilida ifodalaymiz:

1. Agar $A = \emptyset$ va $B = E(\varphi)$ bo`lsa, istalgan  $t$  larda  $I_t = \left\{ \frac{\varphi(t)}{f(t)} \right\}$  bo`ladi.
2. Agar $A = R$ va $B = \emptyset$ bo`lsa, istalgan  $t$  larda  $I_t = \emptyset$  bo`ladi.
3. Agar $A \neq \emptyset$ va $B \neq \emptyset$ bo`lsa,  $t$  ning (2) cheksiz ko`p ildizlarga ega bo`ladigan va  $I_t = \emptyset$  bo`ladigan qiymatlari mavjud.

(2) tenglama uchun (1) dagi ucta holning ham bir vaqtda yuz berishini ta`minlaydigan f va φ funksiyalar mavjudmi? Bu savolga umumiy holda quyidagi tasdiq orqali javob berish mumkin.

Tasdiq. Agar $A \neq \emptyset$ va $B \neq \emptyset$ shartlarni qanoatlantiruvchi f va φ funksiyalar mavjud bo`lib  $A \cap B \neq \emptyset$  bo`lsa, u holda (2) tenglama uchun yuqoridagi uchala hol ham yuz beradi. Agar $A \cap B = \emptyset$ bo`lsa, u holda uchinchi hol yuz bermaydi.

Parametrli tenglamani tadqiq etish va yechish – bu:

1. Berilgan tenglama yechimga ega bo`ladigan parametrlarning barcha qiymatlar to`plamlarini topish.
2. Parametrlarni topilgan har bir qiymatlar to`plami uchun, ya`ni noma`lum va parametr uchun o`z yo`l qo`yidadigan qiymatlar to`plami ko`rastilishi lozim.

Testlarda asosan ikki tipdagi parametrli tenglama va tengsizliklar uchraydi:

1. Parametrning har bir qiymati uchun biror tenglama va tengsizlikning barcha yechimlarini topish.

2. Har bir qiymatida berilgan tenglama va tengsizlik uchun qandaydir shartlar bajariladigan parametrning barcha qiymatlarini topish

Ta'rif. $f(a) \cdot x = g(a)$ ko'rinishdagi tenglama, bu erda $f(a), g(a)$ - ba'zi analitik ifodalar, a parametrli x o'zgaruvchiga nisbatan chiziqli deb ataladi. Bunday tenglamani yechish deganda - a parametrning har bir yo'l qo'yiladigan qiymati uchun bu tenglamani qanoatlantiruvchi x o'zgaruvchining qiymatlarini topish tushuniladi.

Yechish algoritmi:

1. Parametrning mumkin bo'lgan qiymatlarini topish.
2. Agar $f(a) \neq 0$, bo'lsa, u holda tenglama $x = \frac{g(a)}{f(a)}$. ko'rinishdagi yagona yechimga ega bo'ladi.
3. Agar $f(a) = 0$ bo'lib, $g(a) \neq 0$, bo'lsa, u holda x ning ixtiyoriy qiymatida noto'g'ri sonli tenglik paydo bo'ladi, ya'ni tenglama ildizlarga ega emas.
4. Agar $f(a) = 0$ va $g(a) = 0$, bo'lsa, u holda tenglama $x \cdot 0 = 0$, ko'rinishni oladi va uning ildizi x ning ixtiyoriy haqiqiy qiymati bo'ladi.

Berilgan algoritmnı jadval ko'rinishida yozish ham mumkin.

a parametr qiymatlarini izlash shartlari	Ildizlar to'plami xarakteristikasi
$f(a)$ yoki $g(a)$ ma'noga ega emas	Ildizlar yo'q
$\begin{cases} f(a) \neq 0 \\ g(a) - \text{ma'nona ega} \end{cases}$	Bitta ildiz $x = \frac{g(a)}{f(a)}$
$\begin{cases} f(a) = 0 \\ g(a) \neq 0 \end{cases}$	Ildizlar yo'q
$\begin{cases} f(a) = 0 \\ g(a) = 0 \end{cases}$	$x - \text{ixtiyoriy son}$

1. Parametrli chiziqli tenglamalarni yechish algoritmi:

- 1) tenglamani standart holatga keltiring(zarurat bo'lsa).
- 2) parametrning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamini toping; parametrning bu to'plamga kirmaydigan barcha qiymatlarida tenglama aniqlanmagan.
- 3) parametrning noma'lumning oldidagi koeffisienti nolga aylanadigan barcha qiymatlarini toping; bu qiymatlar orasidan parametrning ozod had nolga aylanadigan va noldan farqli bo'ladigan *oraliqlarini* toping
- 4) parametrning 3 - qadamda topilgan oraliqlarida hosil bo'lgan chiziqli tenglamalarni yeching;
- 5) parametrning qolgan barcha qiymatlari uchun tenglamaning umumiy yechimini uning ikkala tomonini noma'lumning oldidagi koeffisientga bo'lib toping.
- 6) parametrning barcha qiymatlari oraliqlarda topilgan yechimlarni hisobga olib, javobni yozing.

4. Oddiy parametrli chiziqli tenglamalarni yechishga doir masalalar.

Yuqorida keltirilgan algoritmlar asosida chiziqli parametrli tenglamalarni yechamiz:

Metodik adabiyotlarda chiziqli parametrli tenglamalar ko'pincha $f(a) \cdot x = g(a)$ yoki $Ax = B$ ko'rinishga keltiriladi.

1-misol. a parametrning barcha qiymatlari uchun $x - a = 0$ tenglamani yeching

Javob: ixtiyoriy a da $x = a$.

Bu misol parametrli masalalarni yechishda noma'lumni topish va parametrning qaysi qiymatlarida javob ma'noga ega bo'lishini ko'rsatishdan iboratligini eslatadi.

2-misol. a parametrning barcha qiymatlari uchun $5x = a$ tenglamani eching.

Javob: $x = \frac{a}{5}$, agar a – ixtiyoriy son bo‘lsa.

3-misol. a parametrning barcha qiymatlari uchun $\frac{x}{2} = a$ tenglamani eching.

Javob: $x = 2a$, agar a – ixtiyoriy son bo‘lsa.

4-misol. a parametrning barcha qiymatlari uchun $ax = 1$ tenglamani eching.

Yechish. $a = 0$ da berilgan tenglama yechimga ega emas va javobda bu aks etishi lozim.

Javob: $a = 0$ da yechim yo‘q; $a \neq 0$ da yechim $x = \frac{1}{a}$.

5-misol. a parametrning barcha qiymatlari uchun $0x = a$ tenglamani eching.

Javob: $a \neq 0$ da ildizlar yo‘q; $a = 0$ da x – ixtiyoriy son.

6-misol. Berilgan tenglama ildizlar to‘plamini toping:

$$ax = 4x + 5$$

Yechish: $ax - 4x = 5$, $x(a - 4) = 5$

1) $a = 4$ bo‘lgan holni qaraymiz, bu holda $0x = 5$ va tenglama yechimga ega emas.

2) Agar $a \neq 4$ bo‘lsa, u holda tenglam bitta $x = \frac{5}{a - 4}$ ildizga ega.

Javob: agar $a = 4$ bo‘lsa, u holda tenglama ildizlarga ega emas, agar $a \neq 4$ bo‘lsa, u holda $x = \frac{5}{a - 4}$.

7-misol. $ax = x + 3$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamani $Ax = B$ ko‘rinishga keltiramiz:

$$ax - x = 3, \quad (a - 1)x = 3.$$

Agar $a = 1$ bo'lsa, u holda tenglama $0x = 3$ ko'rinishni oladi va yechimga ega emas;

Agar $a \neq 1$ bo'lsa, u holda tenglama yagona $x = \frac{3}{a-1}$ yechimga ega.

Javob. Agar $a = 1$ bo'lsa, u holda tenglama yechimga ega emas; agar $a \neq 1$ bo'lsa, u holda tenglama yagona $x = \frac{3}{a-1}$ yechimga ega.

8-misol. $4 + ax = 3x + 1$ tenglamani yeching.

Yechish: $ax - 3x = -3$, $(a - 3)x = -3$. Agar $a = 3$ bo'lsa, u holda tenglama $0x = -3$ ko'rinishni oladi va yechimga ega emas; agar $a \neq 3$ bo'lsa, u holda $x = \frac{3}{3-a}$.

Javob. Agar $a = 3$ bo'lsa, u holda tenglama yechimga ega emas; agar $a \neq 3$ bo'lsa, u holda $x = \frac{3}{3-a}$.

9-misol. $x + 2 = ax$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamani $Ax = B$ ko'rinishga keltiramiz.

$$x - ax = -2, (1-a)x = -2.$$

1) Agar $1 - a = 0$ bo'lsa, ya'ni $a = 1$ bo'lsa, u holda tenglama $0x = -2$ ko'rinishni oladi va yechimga ega emas;

2) Agar $a \neq 1$ bo'lsa, u holda tenglama yagona $x = \frac{2}{a-1}$ ildizga ega.

Javob. Agar $a = 1$ bo'lsa, u holda tenglama yechimga ega emas; agar $a \neq 1$ bo'lsa, u holda tenglama yagona yechimga $x = \frac{2}{a-1}$ ega.

10-misol. a parametrning qanday butun qiymatlarida $ax = 5 + 2x$ tenglama butun ildizlarga ega ?

Yechish. Tenglamani $(a - 2)x = 5$ ko'rinishga keltiramiz, agar $a \neq 2$, bo'lsa, u holda $x = \frac{5}{a-2}$. x butun son bo'lishi uchun $a - 2$ ifodaning qiymati 5 sonining bo'luvchisi, ya'ni $a - 2$ ifoda qiymati 1; -1; 5; -5 larga teng bo'lishi zarur. Bundan $a = 3; 1; 7; -3$.

Javob: $a = -3; 1; 3; 7$ da

11-misol. a parametrning qanday qiymatida $a(x-1) = 2x+5$ tenglama ildizlarga ega emas?

Yechish. Berilgan tenglamani $(a-2)x = a+5$ ko'rinishda yozamiz.

Agar $a=2$ bo'lsa, u holda tenglama ildizlarga ega emas.

Javob: $a=2$.

5. Koeffisientlari parametrli kvadrat uch hadlardan iborat bo'lgan chaziqli tenglamalar.

Umumiy masala. t parametrning qanday qiymatlarida

$$(a_1t^2+b_1t+c_1)x = a_2t^2+b_2t+c_2. \quad (3)$$

tenglama: a) yagona ildizga ega bo'ladi b) ildizga ega emas v) cheksiz ko'p ildizlarga ega bo'ladi?

Yechish: Belgilashlarni e'tiborga olsak $A = \{ t: a_1t^2+b_1t+c_1=0 \}$,

$B = \{ t: a_2t^2+b_2t+c_2=0 \}$ bo'lib, tasdiqqa ko'ra quyidagi hollarni qarab chiqishimiz mumkin:

1. Agar $D_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 < 0$ bo'lsa, $A = \emptyset$ bo'lib, istalgan $t \in R$ da

$$(3) \text{ tenglama yagona ildizga ega bo'ladi va bu ildiz } x = \frac{a_2t^2+b_2t+c_2}{a_1t^2+b_1t+c_1}$$

ga teng.

2. Agar $D_1 \geq 0$ ($A \neq \emptyset$) va $D_2 = b_2^2 - 4a_2c_2 < 0$ ($B = \emptyset$) bo'lsa, quyidagi holatlar sodir bo'lishi mumkin:

a) $t \in A$ bo'lsa, (3) bitta ildizga ega bo'ladi

b) $t \in A$ bo'lsa, (3) ning ildizi mavjud emas

3. Agar $D_1 \geq 0$ ($A \neq \emptyset$) va $D_2 \geq 0$ ($B \neq \emptyset$) bo'lsa $A \cap B = \emptyset$ bo'lishi uchun tasdiqqa ko'ra quyidagi uch holat ham sodir bo'lishi mumkin :

a) $t \notin A$ bo'lsa, (3) bitta ildizga ega bo'ladi

b) $t \in A$ bo'lib, $t \notin B$ bo'lsa, (3) ildizga ega emas.

v) $t \in A \cap B$ bo'lsa, (3) cheksiz ko'p ildizlarga ega bo'ladi.

1-misol. $(a^2 - 1)x = a + 1$ tenglamani yeching .

Yechish: Bu tenglamani yechishda quyidagi hollarni qarash yetarli:

1) $a^2 - 1 = 0$, ya'ni $a = 1$ va $a = -1$.

Agar $a = 1$ bo'lsa, u holda tenglama $0x = 2$ ko'rinishni oladi va yechimga ega emas;

Agar $a = -1$ bo'lsa, u holda $0x = 0$ ni olamiz, va ravshanki x – ixtiyoriy son.

2) Agar $a \neq \pm 1$ bo'lsa, $x = \frac{1}{a-1}$ ga ega bo'lamiz.

Javob. Agar $a = -1$ bo'lsa, u holda x – ixtiyoriy son; agar $a = 1$ bo'lsa, u holda yechimlar yo'q; agar $a \neq \pm 1$ bo'lsa, u holda $x = \frac{1}{a-1}$.

2-misol. $(a^2 - 1)x = 2a^2 + a - 3$ tenglamani yeching.

Yechish: Berilgan tenglama x ga nisbatan chiziqli tenglama.

Agar $a^2 - 1 = 0$ bo'lsa, ya'ni $a = \pm 1$ bo'lsa, u holda tenglama quyidagi ko'rinishlarga ega bo'ladi:

1) $a = 1$ da $0x = 0$, u holda x – ixtiyoriy haqiqiy son;

2) $a = -1$ da $0x = -2$, u holda tenglama yechimlarga ega emas;

3) $a \neq \pm 1$ da $x = \frac{2a^2 + a - 3}{a^2 - 1} = \frac{2(a+1,5)(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{2a+3}{a+1}$.

Javob. Agar $a = 1$ bo'lsa, u holda x – ixtiyoriy haqiqiy son; agar $a = -1$ bo'lsa, u holda tenglama yechimlarga ega emas;

agar $a \neq \pm 1$ bo'lsa, u holda $x = \frac{2a+3}{a+1}$.

3-misol. $b(b-1)x = b^2 + b - 2$ tenglamani yeching

Yechish: Agar $b(b-1) = 0$, ya'ni $b = 0$ yoki $b = 1$ bo'lsa, u holda tenglama quyidagi ko'rinishlarga ega bo'ladi:

1) $b = 0$ da $0x = -2$ va ildizlarga ega emas;

2) $b = 1$ da $0x = 0$, u holda x – ixtiyoriy haqiqiy son;

3) $b \neq 0$ va $b \neq 1$ da $x = \frac{b^2 + b - 2}{b(b-1)} = \frac{(b-1)(b+2)}{b(b-1)} = \frac{b+2}{b}$.

Javob. Agar $b = 0$ bo'lsa, u holda tenglama ildizlarga ega emas; agar $b = 1$ bo'lsa, u holda x – ixtiyoriy haqiqiy son; agar $b \neq 0$ va $b \neq 1$ bo'lsa, u holda $x = \frac{b+2}{b}$.

4-misol. Tenglamani yeching: $(b^2 - 4)x = 3b + 12$

Yechish: 1) Agar $b^2 - 4 = 0$ bo'lsa, u holda $b = \pm 2$

Agar $b = 2$ bo'lsa, u holda $0x = 18$, u holda tenglama ildizlarga ega emas.

Agar $b = -2$ bo'lsa, u holda $0x = 6$, u holda tenglama ildizlarga ega emas.

2) Agar $b \neq \pm 2$ bo'lsa, u holda $x = \frac{3(b+4)}{b^2 - 4}$.

Javob: Agar $b = \pm 2$ bo'lsa, u holda tenglama ildizlarga ega emas, agar $b \neq \pm 2$ bo'lsa, u holda $x = \frac{3(b+4)}{b^2 - 4}$.

5-misol. b ning qanday qiymatlarida $b(b-3)x = 10(2b+x)$ tenglama ildizlarga ega emas?

Yechish: $b(b-3)x = 10(2b+x)$, $b^2x - 3bx = 20b + 10x$, $b^2x - 3bx - 10x = 20b$,

$(b^2 - 3b - 10)x = 20b$. $b^2 - 3b - 10 = 0$, u holda $b_1 = 5$, $b_2 = -2$.

Agar $b = 5$ bo'lsa, u holda $0x = 100$, tenglama ildizlarga ega emas.

Agar $b = -2$ bo'lsa, u holda $0x = -40$, u holda tenglama ildizlarga ega emas.

6-misol. n ning qanday qiymatlarida $(n^2 - 4)x = n^3 - 2n^2 - n + 2$ tenglama

a) ildizlarga ega emas; b) cheksiz ko'p ildizlarga ega; c) yagona yechimga ega bo'ladi?

Yechish:

1) Agar $n^2 - 4 = 0$ bo'lsa, u holda $n_1 = 2$, $n_2 = -2$.

Agar $n = -2$ bo'lsa, u holda $0x = -12$, u holda tenglama ildizlarga ega emas.

Agar $n = 2$ bo'lsa, u holda $0x = 0$ va tenglama cheksiz ko'p ildizlarga ega.

2) Agar $n \neq \pm 2$ bo'lsa, u holda

$$x = \frac{n^3 - 2n^2 - n + 2}{(n^2 - 4)} = \frac{n(n^2 - 1) - 2(n^2 - 1)}{(n^2 - 4)} = \frac{n^2 - 1}{n + 2}$$

7-misol. $x(a^2 - 1) = (a+1)(1-x)$ tenglamani x ga nisbatan yeching.

Yechish: $a(a+1)x = a+1$

Agar $a=0$ bo'lsa, u holda $0x=1$ tenglama ildizlarga ega emas.

Agar $a=-1$ bo'lsa, u holda $0x=0$ cheksiz ko'p ildizga ega.

Agar $a \neq 0$ va $a \neq -1$ bo'lsa, u holda tenglama yagona ildizga ega $x = \frac{1}{a}$.

8-misol. $2a(a-2)x = a-2$ parametrli tenglamani tadqiq eting va eching

Yechish. Parametrning nazorat qiymatlarini, ya'ni shunday qiymatlarni topamizki, x oldidagi koeffitsient 0 ga aylansin. Bunday qiymatlar $a = 0$ va $a = 2$.

a) $a = 0$ da tenglama $0x = -2$ ko'rinishga keladi va bu tenglama ildizlarga ega emas.

b) $a = 2$ da tenglama $0x = 0$ ko'rinishga keladi va bu tenglamaning ildizi istalgan haqiqiy son.

v) $a \neq 0$ va $a \neq 2$ da berilgan tenglamadan $x = \frac{a-2}{2a(a-2)}$ ni,

bundan esa $x = \frac{1}{2a}$ ni olamiz.

Javob: 1) $a = 0$ da ildizlar yo'q.

2) $a = 2$ da x – ixtiyoriy haqiqiy son.

3) $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 2, \end{cases}$ da $x = \frac{1}{2a}$

9-misol. $(a^2 - 2a + 1) \cdot x = a^2 + 2a - 3$. parametrli tenglamani tadqiq eting va yeching.

Yechish. a parametrning muhim qiymatlarini topamiz:
 $a^2 - 2a + 1 = 0$, $a = 1$.

a) $a=1$ da tenglama $0x = 0$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamaning ildizi ixtiyoriy haqiqiy son.

b) $a \neq 1$ da tenglama $x = \frac{(a+3) \cdot (a-1)}{(a-1)^2} = \frac{a+3}{a-1}$. ko'rinishga keladi

Javob: 1) $a=1$ da x – ixtiyoriy haqiqiy son.

$$2) a \neq 1 \text{ da } x = \frac{a+3}{a-1}.$$

10-misol. $a^2(x-5) = 25(x-a)$ parametrli tenglamani tadqiq eting va yeching.

Yechish. Qator almashtirishlar bajarib tenglamani tadqiq etish uchun qulay ko‘rinishga keltiramiz: $a^2x - 5a^2 = 25x - 25a$; $(a^2 - 25)x = 5a^2 - 25a$.

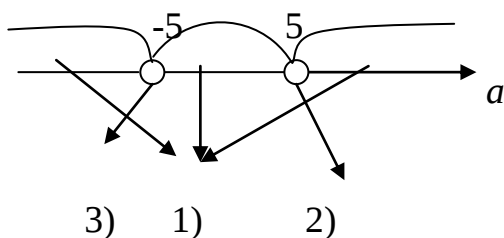
$$(a-5)(a+5)x = 5a(a-5).$$

$$a) \begin{cases} a \neq 5 \\ a \neq -5 \end{cases} \text{ da yagona yechim mavjud } \left| x = \frac{5a(a-5)}{(a+5)(a-5)}; x = \frac{5a}{a+5} \right.$$

b) Agar $a = 5$ bo‘lsa, u holda $0x = 0$, demak, ixtiyoriy x yechim.

v) Agar $a = -5$ bo‘lsa, u holda $0x = 250$, demak yechim yo‘q.

A parametr bo‘yicha tekshirishning grafik tasviri



$$\text{Javob: 1) } p \begin{cases} a \neq 5 \\ a \neq -5 \end{cases} \text{ da yagona yechim mavjud } \left| x = \frac{5a(a-5)}{(a+5)(a-5)}; \right.$$

$$x = \frac{5a}{a+5}.$$

2) $a = 5$, da ixtiyoriy x yechim.

Chiziqli parametrli tenglamalarni taqiq etishga doir masalalar

O‘quvchilar berilgan konkret shartlarda parametrli tenglamalarning yechimlari – bu tenglamalarning xususiy yechimlari ekanligini tushunishlari lozim. Masalan, topshiriq quyidagicha ifodalanishi mumkin « ... parametrning qanday qiymatlarida tenglama yagona yechimga yoki ildizlarga ega emas, yoki ... ga teng ildizga ega bo‘ladi va h.k.

11-misol. Har bir qiymatida 7 soni $x - 7 = x(a - a^2)$ tenglamaning yagona ildizi bo'ladigan a parametrining barcha qiymatlarini toping.

Yechish. 1-usul. Agar parametrning biror qiymati uchun 7 soni tenglama ildizi bo'lsa, u holda a ning bu qiymati uchun $7 - 7 = 7a - 7a^2$ tenglik yoki $a(a - 1) = 0$ tenglik o'rinli.

Tenglik $a = 0$ da yoki $a = 1$ da o'rinli.

Diqqat! Biz hali javobni olganimiz yo'q, chunki 7 soni tenglama ildizi deb faraz qilib, a parametrining ikkita qiymatini topdik. Lekin bu ildiz yagona bo'lishi lozim, shuning uchun 7 soni $a = 0$ yoki $a = 1$ da tenglamaning yagona ildizi bo'lishni tekshirish talab etiladi.

Agar $a = 0$ bo'lsa, u holda tenglamani $x - 7 = 0$ ko'rinishda yozib olamiz.

$a = 0$ da 7 soni tenglamaning yagona ildizi bo'ladi.

Agar $a = 1$, bo'lsa, u holda tenglamani $x - 7 = x - 7$ ko'rinishda yozib olamiz. $a = 1$ da ixtiyoriy haqiqiy son berilgan tenglama ildizi bo'ladi. Demak, 7 soni tenglamaning yagona ildizi emas.

2-usul. Berilgan tenglamani $x(a - 1) = 7(a - 1)(a + 1)$ ko'rinishda yozib olamiz. $a = 1$ da tenglama ildizi ixtiyoriy son, ya'ni 7 soni tenglamaning yagona ildizi emas. Shuning uchun tenglamada $a \neq 1$.

Lekin u holda bu tenglama $x = 7(a + 1)$ yagona ildizga ega. Masala sharti bajariladi, agar 7 soni yagona ildizi bo'lsa: $7(a + 1) = 7$, ya'ni $a = 0$ da.

Javob: $a = 0$.

12-misol. Har bir qiymatida $ax - 5 = x + a$ va $a^2x - 3 = x + a^2$ tenglamalar umumiy ildizga ega bo'ladigan a parametrining barcha qiymatlarini toping

Yechish Birinchi tenglamani $(a - 1)x = a + 5$ ko'rinishda yozib olamiz. Bu tenglama faqat $a \neq 1$ da ildizga ega. Bu ildiz $x_1 = \frac{a + 5}{a - 1}$ ga teng.

Ikkinchi tenglamani $(a^2 - 1)x = a^2 + 3$ ko'rinishda yozib olamiz. Bu tenglama faqat $a \neq \pm 1$ da ildizga ega. Bu ildiz $x_2 = \frac{a^2 + 3}{a^2 - 1}$. sonidan iborat.

a parametrning $a \neq \pm 1$ barcha qiymatlarini topish qoldi. Ularning har birida birinchi va ikkinchi tenglamalar umumiy ildizga ega, x_1 va x_2 bitta sondan iborat bo'lishi kerak.

Buning uchun $\frac{a+5}{a-1} = \frac{a^2+3}{a^2-1}$ tenglamani echamiz. Barcha hadlarini bir tomonga o'tkazamiz va algebraik kasrlar ayirmasini soddalashtiramiz. U holda unga teng kuchli $\frac{6a+2}{a^2-1} = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz, u yagona $a = -\frac{1}{3}$ ildizga ega. a ning bu qiymatida masala sharti bajariladi.

Javob: $a = -\frac{1}{3}$

Savol va topshiriqlar:

1. Parametrli chiziqli tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Parametrli chiziqli tenglamalarni yechish algoritmini ayting.
3. Parametrli chiziqli tenglamalarni yechishda asosiy nimaga e'tibor qaratish kerak?.

Parametrli chiziqli tenglamalar sistemalari

1-misol

Tenglamani yeching: $ax + by = k$.

J: (α, β) , agar $a=b=k=0$; ildizga ega emas, agar $a=0, b=0, k \neq 0$;

$(\alpha, (k-a\alpha)/b)$, agar $b \neq 0$;

$((k-b\beta)/\alpha, \beta)$, agar $a \neq 0$, bunda α va β – ixtiyoriy son

2-misol

Sistemani yeching:
$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = l \end{cases}$$

J: (α, β) , agar $a=b=c=d=k=l=0$;

Yechimi yo'q, agar $ad=cb, kd \neq lb$ yoki $al \neq ck$; yoki agar $a=b=c=d=0, k \neq 0$ yoki $l \neq 0$;

$(kd-lb, al-ck)$, agar $ad \neq cb$,

$((k-b\beta)/\alpha, \beta)$, agar $ad=cb, kd=lb, al=ck, a \neq 0$;

$(\alpha, (k-a\alpha)/b)$, agar $ad=cb, kd=lb, al=ck, b \neq 0$

$((l-d\beta)/c, \beta)$, agar $ad=cb, kd=lb, al=ck, c \neq 0$;

$(\alpha, (l-c\alpha)/d)$ agar $ad=cb, kd=lb, al=ck, d \neq 0$;

Bunda α, β – istalgan son.

1.3-§. Parametrli tenglama va tengsizliklarni tadqiq etishga doir masalalar yechish.

Reja

1. Chiziqli tenglamalarga keltiriladigan parametrli tenglamalar.
2. Modulli va parametrli birinchi darajali tenglamalarni yechishning analitik va grafik usullari
3. Bir noma'lumli chiziqli tengsizliklarni yechish.
4. Bir noma'lumli modulli parametrli tengsizliklarni yechish.
5. Mustaqil yechish uchun qo'shimcha topshiriqlar.

Adabiyotlar: [7],[8], [9], [12].

Tayanch iboralar: tengsizlik, tenglama, parametr,usul, analitika, grafik, xususiy hollar, yechim, topshiriqlar.

1. Chiziqli tenglamalarga keltirilib yechiladigan parametrli tenglamalar.

Yechishda aniqlanish sohasiga qo'yilgan cheklashlar bilan bog'liq qo'shimcha tekshirishni talab etadigan murakkab bo'lmagan parametrli tenglamalarni yechishni o'rganish tadqiqodcholikn uchun navbatdagi qadam hisoblanadi.

1-misol. $\frac{a}{x-2}=1$ tenglamani eching

Yechish: Ravshanki $x \neq 2$. Tenglamaning ikkala qismini $x-2 \neq 0$ ga ko'paytirib $a = x - 2$ yoki $x = a + 2$ ni olamiz. Topilgan yechimning qiymati 2 ga teng bo'ladigan a parametrning qiymatlari bor yoki yo'qligini tekshiramiz, ya'ni $2 = a + 2$ tenglamani a ga nibatan yechib, $a = 0$ da $x = 2$ ni olamiz,

lekin 2 soni tenglamaning aniqlanish sohasiga kirmaydi, demak, uning ildizi bo'lishi mumkin emas.

Javob: $a = 0$ da ildizlar yo'q; $a \neq 0$ da $x = a + 2$.

2-misol. Tenglamani eching $\frac{x}{x+1} = a$

Yechish $x \neq -1$. tenglamani $(1 - a)x = a$, ko'rinishga keltirib, $a = 1$ da tenglama ildizlarga ega emasligini, $a \neq 1$ da esa $x = \frac{a}{1-a}$ ni topamiz. $-1 = \frac{a}{1-a}$ tenglamani a ga nisbatan echamiz. Tenglama ildizlarga ega bo'lmagani uchun boshqa hollar bo'lmaydi.

Javob: $a \neq 1$ da $x = \frac{a}{1-a}$; $a = 1$ da ildizlar yo'q.

3-misol. Tenglamani yeching $\frac{2ax + x + 1}{(a+1)(x+3)} = \frac{x^4 - 4}{(x-2)(x+3)} - \frac{a}{a+1}$.

Yechish $x \neq -3$, $x \neq 2$, $a \neq -1$. shartda berilgan tenglamani soddalashtirish mumkin: $\frac{2ax + x + 1}{(a+1)(x+3)} = \frac{x+2}{(x+3)} - \frac{a}{a+1}$.

Almashtirishlardan so'ng $2ax = 1 - a$, tenglamani olamiz, u $a = 0$ da ildizga ega emas, $a \neq 0$ da esa $x = \frac{1-a}{2a}$. x ning qiymati -3 yoki 2 ga teng bo'ladigan a parametrning qiymati bor yo'qligini tekshiramiz, buning uchun a ga nisbatan $-3 = \frac{1-a}{2a}$ ba $2 = \frac{1-a}{2a}$ tenglamalarni echamiz. Birinchi tenglama ildizi $-0,2$, ikkinchisiniki $-0,2$, ya'ni $a \neq 0, 2$ da tegishli x ning qiymatlari berilgan tenglama aniqlanish sohasiga kirmaydi.

Javob: $a = -1$; 0 ; da ildizlar yo'q; $a \neq -1; 0; \pm 0,2$ larda

$$x = \frac{1-a}{2a}.$$

4-misol. Parametrli tenglamani tadqiq eting va eching

$$\frac{k(x+2)-3(k-1)}{x+1}=1;$$

Yechish. Tenglamani aniqlanish sohasi ni topamiz $D(x)$: $x \neq -1$.

$$kx + 2k - 3k + 3 = x + 1;$$

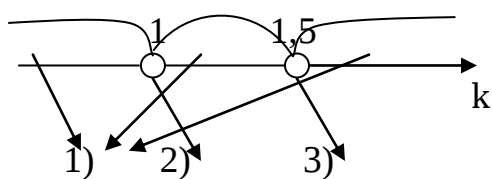
Tadqiq etish uchun tenglamani eng qulay ko'rinishga keltiramiz. $(k-1)x = k-2$

a) $k \neq 1$, bo'lsin, u holda yagona $x = \frac{k-2}{k-1}$ yechim mavjud.

b) k parametrning qanday qiymatlarida $x = -1$ bo'lishini aniqlaymiz va ularni chiqarib tashlaymiz, buning uchun $\frac{k-2}{k-1} = -1$ tenglamani echamiz, u holda $k = 1, 5$.

v) Agar $k = 1$ bo'lsa, u holda $0x = -1$, yechim yo'q.

k parametr bo'yicha tekshirishning grafik tasviri



Javob: 1)

$k \neq 1$ da
 $k \neq 1, 5$

yagona yechim $x = \frac{k-2}{k-1}$.

2) $k = 1$ da yechimlar yo'q.

3) $k = 1, 5$ da yechimlar yo'q.

5-misol. Parametrli tenglamani tadqiq eting va yeching.

$$\frac{3mx-5}{(m-1)(x+3)} + \frac{3m-11}{m-1} = \frac{2x+7}{x+3};$$

Yechish. Tenglamani aniqlanish sohasini topamiz

$$\begin{cases} D(x, m): & m \neq 1 \\ & x \neq -3. \end{cases}$$

$D(x, m)$ ni hisobga olib berilgan tenglamani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$3mx - 5 + (3m - 11)(x + 3) = (2x + 7)(m - 1);$$

Tadqiq etish uchun tenglamani eng qulay ko‘rinishga keltiramiz

$$(4m - 9)x = 31 - 2m$$

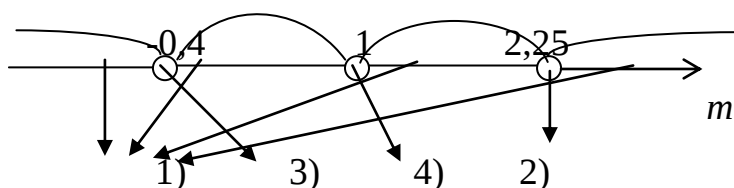
a) Agar $\begin{cases} m \neq 2,25 \\ m \neq 1 \end{cases}$ bo‘lsa, u holda yagona yechim mavjud $x = \frac{31-2m}{4m-9}$.

b) m parametrning qanday qiymatlarida $x = -3$ bo‘lishini aniqlaymiz

$$\frac{31-2m}{4m-9} = -3, \text{ demak, } m = -0,4, \text{ ya'ni } m = -0,4 \text{ da } x \notin D(x, m).$$

v) Agar $m = 2,25$, bo‘lsa, u holda $0x = 26,5$, demak, yechimlar yo‘q.

Parametr bo‘yicha grafik tasviri



Javob: 1) $\begin{cases} m \neq 2,25 \\ m \neq -0,4 \text{ da yagona yechim } x = \frac{31-2m}{4m-9} \\ m \neq 1 \end{cases}$

2) $m = 2,25$ da yechimlar yo‘q .

3) $m = -0,4$ da yechimlar yo‘q.

4) $m = 1$ da tenglama aniqlanmagan yoki ma‘noga ega emas.

6-misol. Parametrli tenglamani tadqiq eting va yeching.

$$\frac{3mx-5}{(m+2)(x^2-9)} = \frac{2m+1}{(m+2)(x-3)} - \frac{5}{x+3};$$

Yechish.

$$D(x, m): \begin{cases} m \neq -2 \\ x \neq 3 \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Zarur almashtirishlarni bajarib quyidagi tenglamani olamiz:

$$3mx - 5 = (2m+1)(x+3) - 5(m+2)(x-3).$$

$$3(2m+3)x = 21m + 38.$$

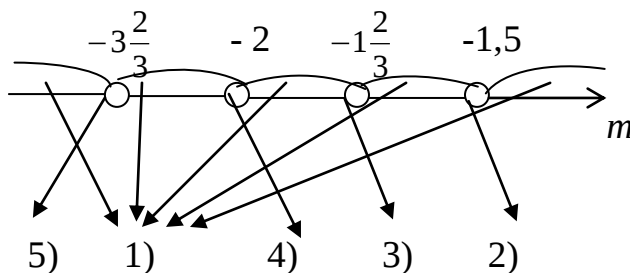
a) Agar $\begin{cases} m \neq -1,5 \\ m \neq -2, \end{cases}$ bo'lsa, u holda yagona $\exists$ yagona $x \left| x = \frac{21m+38}{3(2m+3)} \right.$.

b) $\frac{21m+38}{3(2m+3)} = -3$; u holda $21m+38 = -3 \cdot 3 \cdot (2m+3)$, ya'ni $m = -\frac{5}{3}$.

v) $\frac{21m+38}{3(2m+3)} = 3$; u holda $21m+38 = 3 \cdot 3 \cdot (2m+3)$, ya'ni $m = -\frac{11}{3}$.

g) $m = -1.5$; u holda $0 = -6,5$, demak, yechimlar yo'q

m parametrli tekshirishning grafik tasviri



Javob: 1) $\begin{cases} m \neq -1,5 \\ m \neq -1\frac{2}{3} \\ m \neq -3\frac{2}{3} \\ m \neq -2 \end{cases}$ da yagona yechim mavjud $x = \frac{21m+38}{3(2m+3)}$.

2) $m = -1,5$ da yechimlar yo'q; 3) $m = -1\frac{2}{3}$ da yechimlar yo'q

4) $m = -2$ da tenglama aniqlanmagan; 5) $m = -3\frac{2}{3}$ da yechimlar yo'q.

7-misol. Parametrli tenglamani tadqiq eting va eching: $m = \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m(x-1)}$;

Yechish.

$$D(x,m) : \begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Berilgan tenglamani

$$m^2x - m^2 = x - 1 + m - 1, \text{ yoki } (m^2 - 1)x = m^2 + m - 2.$$

ko'rinishda yozib olamiz

a) Agar $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$, bo'lsa, u holda yagona yechim mavjud $x \left| x = \frac{(m+2)(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{m+2}{m+1} \right.$.

b) m parametrning qanday qiymatlarida $x=1$ bo'lishini aniqlaymiz va bu qiymatlarni chiqarib tashlaymiz, ya'ni $\frac{m+2}{m+1}=1$, yoki $2=1$. Demak, m parametrning $x=1$ bo'ladigan qiymati mavjud emas, ya'ni m parametrning qiymatiga qo'shimcha cheklashlar yo'q.

v) Agar $m=$, bo'lsa, u holda $0 \cdot x = 0 \cdot 3$, demak, ixtiyoriy $x \in D(x, m)$ tenglamaning yechimi, ya'ni bu yechimlarning cheksiz to'plami.

g) Agar $m = -1$, bo'lsa, u holda $0 \cdot x = 1 \cdot (-2)$, ya'ni yechimlar yo'q.

d) Agar $m = 0$ - bo'lsa, tenglama aniqlanmagan.

Javob: a) a) Agar $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$, bo'lsa, u holda yagona yechim mavjud $\left| x = \frac{m+2}{m+1} \right.$.

b) Agar $m=1$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \neq 1$ yechim.

v) Agar $m = -1$ bo'lsa, u holda yechimlar yo'q;

g) Agar $m = 0$ - bo'lsa, u holda tenglama aniqlanmagan.

8-misol. Parametrli tenglamani tadqiq eting va eching:

$$\frac{a}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2}{x^2-1};$$

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasini topamiz $D(x) : x \neq \pm 1$.

Tenglamani $a(x+1) + 2(x-1) = 2$ yoki $(a+2)x = 4-a$ ko'rinishda yozib olamiz.

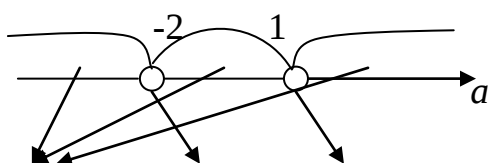
a) Agar $a \neq -2$ bo'lsa, u holda yagona yechim mavjud $\left| x = \frac{4-a}{a+2} \right.$.

b) a parametrining qanday qiymatlarida $x=1$ bo'lishini aniqlaymiz va ularni chiqarib tashlaymiz

$$\frac{4-a}{a+2} = 1, \text{ ya'ni } a = 1.$$

v) a parametrining qanday qiymatlarida $x=-1$, bo'lishini aniqlaymiz $x=-1$, $\frac{4-a}{a+2} = -1$, ya'ni $4=-2$, yoki yechimlar yo'q. Demak, a parametrining $x=-1$, bo'ladigan qiymati mavjud emas.

g) Agar $a = -2$ bo'lsa, u holda $0 \cdot x = 6$, ya'ni yechimlar yo'q.
 a parametr bo'yicha tekshirishning grafik tasviri



1) 2) 3)

Javob 1) $\begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 1 \end{cases}$ da yagona yechim mavjud $\left| x = \frac{4-a}{a+2} \right.$

2) $a = -2$ da yechimlar yo'q.

3) $a = 1$ da yechimlar yo'q.

9-misol. Parametrli tenglamani tadqiq eting va eching

$$m + \frac{m-8}{m+1} = \frac{3(m+4)}{x+3};$$

Yechish. $D(x,m): \begin{cases} m \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$. Tenglamani $(x+3)(m^2 + 2m - 8) = 3(m+4)(m+1)$,

yoki $(m+4)(m-2) \cdot x = 9(m+4)$. ko'rinishda yozamiz

a) Agar $\begin{cases} m \neq -4 \\ m \neq -1, \text{ bo'lsa, u holda yagona yechim mavjud} \\ m \neq 2 \end{cases} \left| x = \frac{9}{m-2} \right.$

b) m parametrning qanday qiymatlarida $x=-3$ bo'lishini aniqlaymiz
 $\frac{9}{m-2} = -3$, ya'ni $m \neq -1$.

v) Agar $m = -4$, bo'lsa, u holda to $0 \cdot x = 9 \cdot 0$, demak, aniqlanish sohasidagi ixtiyoriy x yechim.

g) Agar $m = 2$ bo'lsa, u holda $0 \cdot x = 54$, ya'ni yechimlar yo'q.

d) Agar $m = -1$ bo'lsa, u holda –tenglama aniqlanmagan.

$$\text{Javob: 1) } \begin{cases} m \neq -4 \\ m \neq -1, \text{ da bo'lsa, u holda yagona yechim mavjud} \\ m \neq 2 \end{cases} \left| x = \frac{9}{m-2} \right.$$

2) $m = -4$ da ixtiyoriy $x \neq -3$ yechim; 3) $m = 2$ da yechimlar yo'q; 4) $m = -1$ da tenglama aniqlanmagan.

10-misol. Parametrlı tenglamani tadqiq eting va eching

$$\frac{3x^2 - 8a}{2ax - 2a - 3x + 3} = \frac{3x}{2a - 3} - \frac{x}{x - 1};$$

Yechish. D (x,a): $\begin{cases} x \neq 1 \\ a \neq 1,5 \end{cases}$. Tenglamani

$$\frac{3x^2 - 8a}{(2a - 3)(x - 1)} = \frac{3x(x - 1) - x(2a - 3)}{(2a - 3)(x - 1)};$$

$$3x^2 - 8a = 3x^2 - 3x - 2ax + 3x; \quad ax = 4a.$$

ko'rinishda yozib olamiz

a) Agar $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1,5 \end{cases}$, bo'lsa, u holda yagona yechim mavjud $|x = 4$.

b) Agar $a=0$, bo'lsa, u holda $0=0$, demak, aniqlanish sohasidagi ixtiyoriy x yechim bo'ladi.

Javob: 1) $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1,5 \end{cases}$ da yagona yechim mavjud $|x = 4$; 2) $a=0$, da ixtiyoriy

$x \neq 1$ – yechim; 3) $a = 1,5$ da tenglama aniqlanmagan.

11-misol. Tenglamani tadqiq eting, m parametrning qanday qiymatlarida 1 dan kichik yagona yechim mavjud bo'ladi

$$\frac{m+1}{m(x+2)} - \frac{2}{x+3} = \frac{mx+5}{m(x^2+5x+6)};$$

Yechish. D(x,m): $\begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq -2. \\ x \neq -3 \end{cases}$

Tenglamani

$$(m+1)(x+3) - 2m(x+2) = mx+5; \quad (2m-1) \cdot x = -m-2.$$

ko‘rinishda yozib olamiz.

I. a) Agar $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$, bo‘lsa, u holda yagona yechim mavjud $\left| x = \frac{m+2}{1-2m} \right.$.

b) m parametrning qanday qiymatida $x=-2$ bo‘lishini aniqlaymiz.

$$\frac{m+2}{1-2m} = -2, \text{ ya'ni } m = \frac{4}{3}.$$

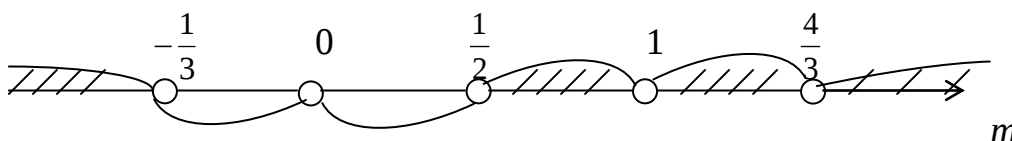
v) m parametrning qanday qiymatida $x=-3$ bo‘lishini aniqlaymiz.

$$x=-3. \frac{m+2}{1-2m} = -3, \text{ ya'ni } m=1.$$

II. $\frac{m+2}{1-2m} < 1$ tengsizlikni echamiz. 1 ni chap tomonga o‘tkazamiz, u holda

$$\frac{3m+1}{1-2m} < 0,$$

Grafik tasviri



Javob: $m \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (\frac{4}{3}; \infty)$ da yagona $x = \frac{m+2}{1-2m}$, yechim

mavjudki, $x < 1$.

12-misol. Tenglamani tadqiq eting, m parametrning qanday qiymatlarida

yagona musbat yechim mavjud bo‘lishini aniqlang: $\frac{3}{5+m-3x} = \frac{2}{3-x+mx};$

Yechish. $D(x, m) \begin{cases} x \neq \frac{m+5}{3} \\ x(m-1) \neq -3 \end{cases}$. Tenglamani $9-3x+3mx=10+2m-6x;$

$$3x(m+1)=1+2m. (m+1)(x+3)-2m(x+2)=mx+5; \quad (2m-1) \cdot x = -m-2.$$

ko‘rinishda yozib olamiz.

I. a) Agar $m \neq -1$, bo‘lsa, u holda yagona yechim mavjud $\left| x = \frac{1+2m}{3(m+1)} \right.$,

b) m parametrning qanday qiymatida $x = \frac{m+5}{3}$ bo‘lishini aniqlaymiz.

$$\frac{1+2m}{3(m+1)} = \frac{5+m}{3}, \text{ u holda } m = -2.$$

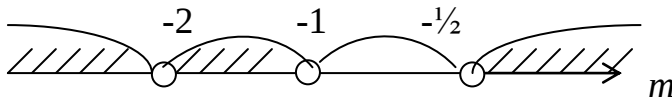
v) $x(m-1) = -3$ da m parametrqa qo'shimcha cheklashni topamiz.

U holda tenglama $\frac{1+2m}{3(m+1)} \cdot (m-1) = -3$; $m^2 = 4m - 5 = -9$, ya'ni .e. $m = -2$.

ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\text{II. } \frac{1+2m}{3(m+1)} > 0.$$

Grafik tasviri:



Javob: pri $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-\frac{1}{2}; \infty)$ da yagona yechim mavjud

$$\left| x = \frac{1+2m}{3(m+1)} > 0. \right.$$

13-misol. Parametrli tenglamani tadqiq eting va eching

$$\frac{b-5}{x+1} - \frac{7+3b}{x-2} = \frac{2bx-5}{x^2-x-2};$$

Yechish. D(x,b): $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$. Almashtirishlar natijasidva $4(b+3)x = 8-5b$ ni

olamiz –bu tekshirish uchun eng qulay ko'rinish.

a) Agar $b \neq -3$, bo'lsa, u holda yagona yechim mavjud $\left| x = \frac{8-5b}{4(b+3)} \right.$

b) b parametrning qanday qiymatida $x = -1$ bo'lishini aniqlaymiz.

$$\frac{8-5b}{4(b+3)} = -1; \quad b = 20.$$

v) b parametrning qanday qiymatida $x = 2$ bo'lishini aniqlaymiz.

$$\frac{8-5b}{4(b+3)} = 2; \quad b = -\frac{16}{13}.$$

g) Agar $b = -3$ bo'lsa, u holda $0 \cdot x = 23$; yechimlar yo'q.

$$\text{Javob: 1) } \begin{cases} b \neq -3 \\ b \neq -\frac{16}{13} \\ b \neq 20 \end{cases} \text{ bo'lsa, u holda yagona yechim mavjud } \left| x = \frac{8-5b}{4(b+3)} \right|.$$

2) $b = -3$ da yechimlar yo'q; 3) $b = 20$ da yechimlar yo'q; 4) $b = -\frac{16}{13}$ da yechimlar yo'q.

14-misol. Parametrli tenglamani tadqiq eting va eching

$$\frac{x-1}{5(n-5)x} + \frac{x+1}{n(n-5)x} = \frac{1}{n^2 \cdot x};$$

$$\text{Yechish. } D(x,n): \begin{cases} x \neq 0 \\ n \neq 5 \\ n \neq 0 \end{cases} \text{ Tenglamani tekshirish uchun qulay ko'rinishga}$$

keltiramiz: $n^2(x-1) + 5n(x+1) = 5(n-5); \quad n(n+5)x = (n-5)(n+5).$

$$\text{a) Agar } \begin{cases} n \neq 5 \\ n \neq 0 \\ n \neq -5 \end{cases} \text{ bo'lsa, u holda yagona yechim mavjud } \left| x = \frac{n-5}{n} \right|.$$

b) n parametrning qanday qiymatida $x = 0$ bo'lishini aniqlaymiz.

$$\frac{n-5}{n} = 0; \quad n = 5.$$

v) Agar $n = -5$, bo'lsa, u holda $0 \cdot x = 0$; aniqlanish sohasidagi ixtiyoriy x yechim bo'ladi.

g) Agar $n = 0$, bo'lsa, u holda tenglama aniqlanmagan.

d) Agar $n = 5$, bo'lsa, u holda tenglama aniqlanmagan.

$$\text{Javob: 1) } \begin{cases} n \neq 5 \\ n \neq 0 \\ n \neq -5 \end{cases} \text{ da yagona yechim mavjud } \left| x = \frac{n-5}{n} \right|.$$

2) $n = -5$ da ixtiyoriy $x \neq 0$ yechim; 3) $n = 0$ da tenglama aniqlanmagan.

4) $n = 5$ da tenglama aniqlanmagan.

2.Modulli va parametrlri birinchi darajali tenglamalarni yechishning analitik va grafik usullari

Umumiy masala: $|ax+b| = f(t)$, $a \neq 0$, (1)

Tenglamani t parametrlning qiymatlari bo'yicha tadbiq eting.

Yechish: (1) tenglamani modulining tarifiga va $E(f)$ to'plam elementlarining ishoralari bo'yicha quyidagi uchta holga ajratib o'rganishimiz mumkin:

1. Agar $t \in A$ bo'lsa, (1) $x = -\frac{b}{a}$ formula bilan topiladigan yagona ildizga ega.
2. Agar $t \in \{t: f(t) > 0\}$ bo'lsa, (1) ikkita ildizga ega.
3. Agar $t \in \{t: f(t) < 0\}$ bo'lsa, (1) tenglama yechimga ega emas

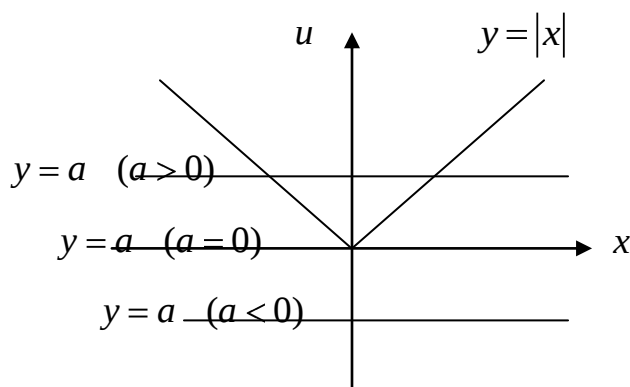
1-misol. $|x| = a$ tenglamani yeching.

Yechish. 1-usul (analitik).

1. $a > 0$ da tenglama ikkita ildizga ega: $x = \pm a$.
2. $a = 0$ da tenglama bitta ildizga ega: $x = 0$
3. $a < 0$ da tenglama ildizlarga ega emas.

2-usul (grafik).

1. $a > 0$ da grafiklar $(-a; a)$ va $(a; a)$, ikkita nuqtada kesishadi, demak tenglama ikkita yechimga ega $x = \pm a$.



2. $a=0$ da grafiklar kesishish nuqtasi bitta – koordinatalar boshi, demak, tenglama bitta $x=0$ yechimga ega.

1. $a<0$ da funksiyalar grafiklari kesishmaydi – yechimlar yo‘q.

Javob: $a<0$ da ildizlar yo‘q;

$a=0$ da bitta ildiz: $x=0$;

$a>0$ da ikkita ildiz: $x=\pm a$.

2-misol. $ax=|x|$ tenglamani eching.

Yechish 1-usul (analitik).

1. $x\geq 0$ da tenglama $ax = x$ yoki $x(a - 1) = 0$ tenglamaga teng kuchli.

Demak,:

a) $a \neq 1$ da tenglama bitta $x = 0$ yechimga ega;

b) $a = 1$ da tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega: $x \in [0; +\infty)$

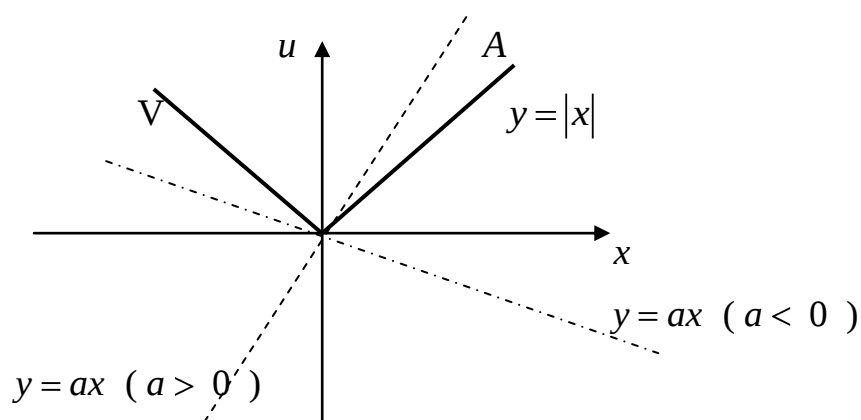
2. $x \leq 0$ da tenglama $ax = -x$ yoki $x(a + 1) = 0$ tenglamaga teng kuchli.

Demak, a) $a \neq -1$ da tenglama bitta $x = 0$ yechimga ega ;

b) $a = -1$ da yechimlar to‘plami $x \in (-\infty; 0]$

2-usul (grafik).

$y=|x|$ va $y=ax$ funksiyalar grafiklarini yasaymiz. $y=ax$ funksiya ning grafigi burchak ko‘effitsienti a ga teng koordinata boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar hisoblanadi.



1. $a \neq \pm 1$ da tenglama bitta $x = 0$ yechimga ega.

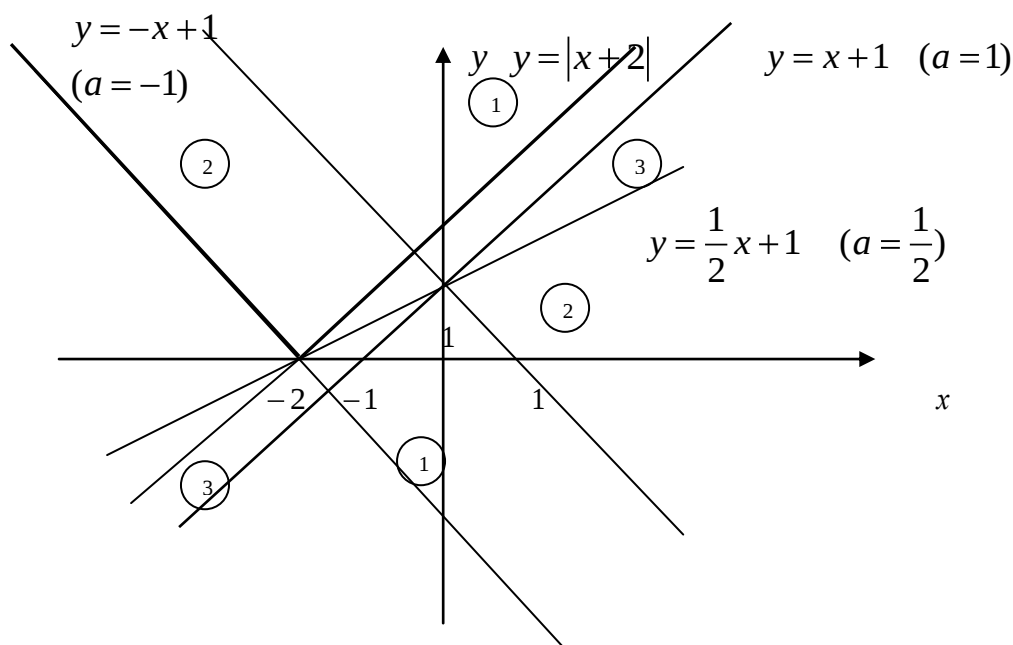
2. $a = 1$ da $y = x$ to‘g‘ri chiziq OA nurni o‘z ichiga oladi va tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega $x \in [0; +\infty)$.

3. $a = -1$ da $y = x$ to'g'ri chiziq OV nurni o'z ichiga oladi va tenglama cheksiz ko'p yechimga ega $x \in (-\infty; 0]$

Javob: $a = -1$ da $x \in (-\infty; 0]$; $a = 1$ da $x \in [0; +\infty)$; $a \neq \pm 1$ da $x = 0$.

3-misol. $|x + 2| = ax + 1$ tenglamani eching.

Yechish. $y = |x + 2|$ va $y = ax + 1$ funksiyalar grafiklarni yasaymiz. Birinchi funksiya grafigi $y = |x|$ funksiyaning abscissa o'qi bo'ylab 2 birlik chapga siljish bilan hosil qilinadi. Ikkinchi funksiya grafigi $(0; 1)$ koordinatalarga ega nuqtadan o'tuvchi burchak koeffitsienti a ga teng bo'lgan to'g'ri chiziqdan iborat. $y = ax + 1$ funksiya grafigi a parametrning turli qiymatlarida qarab $(0; 1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi dan iboratdir.



Agar burchak koeffitsient $a \in (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$ bo'lsa, ya'ni to'g'ri chiziqlar 1 sohadan o'tsa, u holda ular $y = |x + 2|$ funksiya grafigi o'ng tarmog'i ($x > -2$) ni kesib o'tadi va tenglama bitta yechimga ega.

Agar $a \in (-1\frac{1}{2}; 1)$ bo'lsa, u holda to'g'ri chiziqlar 2 sohadan o'tadi va funksiyalar grafiklari ikki nuqtada kesishadi, ya'ni tenglama ikkita yechimga ega.

$a \in (\frac{1}{2}; 1)$ da to'g'ri chiziqlar 3 sohada joylashgan va funksiyalar grafiklari kesishmaydi, ya'ni tenglama yechimga ega emas.

$a = \frac{1}{2}$ da kesishish nuqtasi bitta va yechim ham bitta.

Shunday qilib, quyidagi javobni olamiz.

Javob: $a \in (-\infty; -1] \cup (1; +\infty) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ da tenglama bitta yechimga ega;

$a \in (-1; \frac{1}{2})$ da tenglama ikkita yechimga ega ; $a \in (\frac{1}{2}; 1)$ da tenglama yechimlarga ega emas.

3. Bir noma'lumli chiziqli tengsizliklarni yechish.

Parametrli chiziqli tengsizliklarni yechish algoritmi:

- 1) tengsizlikni standart holatga keltiring(zarurat bo'lsa).
- 2) parametrning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamini toping; parametrning bu to'plamga kirmaydigan barcha qiymatlarida tengsizlik aniqlanmagan.
- 3) parametrning noma'lumning oldidagi koeffisienti nolga aylanadigan barcha qiymatlarini toping; bu qiymatlar orasidan parametrning ozod had nolga aylanadigan va noldan katta (kichik) bo'ladigan *oraliqlarini* toping
- 4) parametrning 3-qadamda topilgan o'zgarish oraliqlarida hosil bo'lgan chiziqli tengsizlikni yeching;
- 5) parametrning mumkin bo'lgan qiymatlari orasidan noma'lum o'zgaruvchining koeffisienti musbat bo'ladiganlarini toping.

6) parametrning 5-qadamda topilgan barcha qiymatlari uchun tengsizlikning umumiy yecimini uning ikkala tomonini noma'lumning oldidagi koeffisientga bo'lib toping(bunda tengsizlik belgisi o'zgarmaydi).

7) parametrning qolgan barcha qiymatlari uchun tengsizlikning umumiy yechimini uning ikkala tomonini noma'lumning oldidagi koeffisientga bo'lib toping(bunda tengsizlik belgisi o'zgaradi)..

8) parametrning barcha qiymatlari oraliqlarda topilgan yechimlarni hisobga olib, javobni yozing.

1-masala

Tengsizlikni yeching: $ax < b$.

J: agar $a = 0$, $b \leq 0$, bo'lsa yechimga ega emas,

Istalgan son, agar $a \neq 0$, $b > 0$,
$$\begin{cases} (-\infty, \frac{b}{a}), \text{ agar } a > 0, \\ (\frac{b}{a}, +\infty), \text{ agar } a < 0 \end{cases}$$

2-Masala. Umumiy ko'rinishda berilgan x noma'lumli birinchi darajali chiziqli tengsizlik $kx + b > 0$ ($kx + b < 0$) a) noma'lumning ixtiyoriy qiymatida o'rinli bo'lishi; b) yechimlarga ega bo'lmashligi mumkinmi?

Yechish. a) Avvalo $k > 0$ holni qaraymiz. $kx + b > 0$ ($k > 0$) tengsizlik

$x > -\frac{b}{k}$ tengsizlikka teng kuchli. Lekin u bir noma'lumli birinchi darajali tengsizlik, u ixtiyoriy x da o'rinli bo'lishi mumkin emas. Masalan, $-\frac{b}{k} - 1$ soni uning yechimi bo'lmaydi.

$kx + b < 0$ ($k > 0$) tengsizlik $x < -\frac{b}{k}$ tengsizlikka teng kuchli. Lekin u bir noma'lumli birinchi darajali tengsizlik, u ixtiyoriy x da o'rinli bo'lishi mumkin

emas. Masalan, $-\frac{b}{k} + 1$ soni uning yechimi bo'lolmaydi.

Shunga o'xshash $k < 0$ da ham mulohazalar yuritish mumkin, demak, bir noma'lumli birinchi darajali tengsizlik noma'lumning ixtiyoriy qiymatida o'rinli bo'lishi mumkin.

$k = 0$ bo'lsa, tengsizlik $b > 0$ bo'lganda ixtiyoriy x larda o'rinli bo'lib, $b < 0$ bo'lsa yechimga ega emas.

b) a) topshiriqdagi mulohazalardan hech qanday b va $k \neq 0$ larda birinchi darajali tengsizlik yechimlarga ega bo'lmasligi mumkin emas.

3-masala. Bir noma'lumli parametrli chiziqli tengsizliklar:

a) noma'lumning ixtiyoriy qiymatida o'rinli bo'lishi; b) yechimlarga ega bo'lmasligi mumkinmi?

Yechish. a) chiziqli tengsizlik x noma'lumning ixtiyoriy qiymatida o'rinli bo'lishi mumkin. Misol: $0x > -1$ tengsizlik x noma'lumning ixtiyoriy qiymatida o'rinli; b) chiziqli tengsizlik yechimga ega bo'lmasligi mumkin. Misol: $0x > 1$ tengsizlik yechimlarga ega emas.

4. *Bir noma'lumli modulli parametrli tengsizliklarni yechish.*

1-masala. a ning qanday qiymatlarida:

a) $|2x - a| < x + 1$ tengsizlik yechimga ega emas?

b) $|3x - a| > 3 - 3x$ tengsizlik $(1; +\infty)$ yechimlar to'plamiga ega?

Yechish. a) Berilgan tengsizlikning ikkala qismini 2 ga bo'lib unga teng kuchli $|x - \frac{a}{2}| < \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ tengsizlikni olamiz

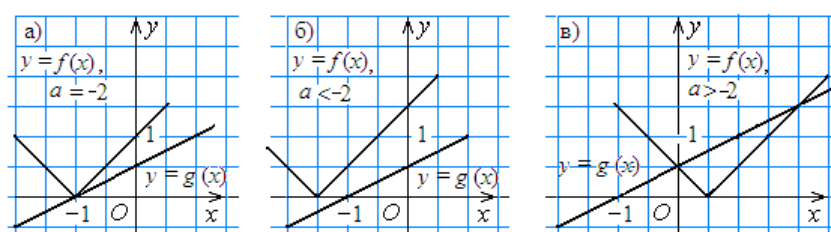
Dastlab $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ funksiya grafigini yasaymiz va u Ox o'qini $x = -1$

absissali nuqtada kesib o'tadi (1-rasm, a). So'ngra $f(x) = |x - \frac{a}{2}|$ funksiya grafigini

$\frac{a}{2} = -1$ lar , ya'ni $a = -2$ (1-rasm, a) uchun yasaymiz. Bu holda berilgan tengsizlik yechimga ega emas, chunki ixtiyoriy x $f(x) \geq g(x)$ tengsizlik o'rinli.

Agar $a < -2$ bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya grafigi bo'lgan burchak uchi , Ox o'qida $x = -1$ nuqtadan chapda joylashadi (1-rasm, b). Bu holda berilgan tengsizlik yechimga ega emas, chunki ixtiyoriy x uchun $f(x) > g(x)$ tengsizlik o'rinli.

Agar $a > -2$ bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya grafigi bo'lgan burchak uchi Ox o'qida $x = -1$ nuqtadan o'ngda joylashadi (1-rasm, v). Bu holda berilgan tengsizlik grafiklar kesishish nuqtalari absissalari orasida joylashgan barcha x lardan iborat yechimlarga ega. Bu yechimlarni topish talab etilmaydi.



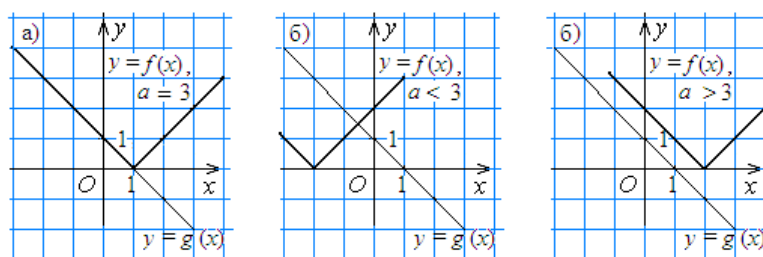
1-rasm

Demak, $a \leq -2$ da $|2x - a| < x + 1$ tengsizlik yechimlarga ega emas.

b) Berilgan tengsizlikning ikkala qismini 3 ga bo'lib unga teng kuchli

$|x - \frac{a}{3}| > 1 - x$ tengsizlikni olamiz. Dastlab $g(x) = 1 - x$ funksiya grafigini yasaymiz va u Ox o'qini $x = 1$ absissali nuqtada kesib o'tadi(2-rasm, a).

So'ngra $f(x) = |x - \frac{a}{3}|$ funksiya grafigini dlya $\frac{a}{3} = 1$ lar , ya'ni t. e. dlya $a = 3$ (ris. 3, a) uchun yasaymiz (2-rasm a). Bu holda berilgan tengsizlik $(1; +\infty)$



2-rasm

yechimlar to'plamiga ega, chunki ixtiyoriy $x > 1$ uchun $f(x) > g(x)$ tengsizlik

o‘rinli.

Agar $a < 3$ bo‘lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya grafigi bo‘lgan burchak uchi, Ox o‘qida $x = 1$ nuqtadan chapda joylashadi (2-rasm, b). Bu holda $f(x) > g(x)$ tengsizlikning $(1; +\infty)$ oraliqqa kirmagan yechimlari mavjud, masalan 0 soni.

Agar $a > 3$ bo‘lsa, u holda $y = f(x)$, funksiya grafigi bo‘lgan burchak uchi, Ox o‘qida $x = 1$ nuqtadan o‘ngda joylashadi (2-rasm, v). Bu holda berilgan tengsizlik $f(x) > g(x)$ ixtiyoriy x dar uchun o‘rinli, berilgan tengsizlik yechimlar to‘plami $(-\infty; +\infty)$ oraliqdan iborat.

Demak, faqat $a=3$ da $|3x-a|>3-3x$ tengsizlik $(1; +\infty)$ yechimlar to‘plamiga ega

.

Javob. a) $a \leq -2$ da ; b) $a = 3$ da.

5. Mustaqil yechish uchun qo‘shimcha topshiriqlar .

Adabiyotlar: [5],[8], [14], [15], [16],[18].

Tayanch iboralar: parametrlil chiziqli tenglamalar, qiymatlar, ildizga ega , ildizga emasligi, nechta ildizga ega yoki ildizga emasligini tekshirish.

1. Tenglamani yechishda qanday hollarni ajratish mumkin:

a) $bx = 7$; b) $(b^2 - 4) = 3b + 12$

2. b ning qanday qiymatlarida $\frac{3}{b}x = 8 - x$ va $x - 10 = \frac{9}{b^2}x$ tenglamalar

ildizga ega emas?

3. n – natural sonligini ma’lum bo‘lsa, tenglama butun sonlar ildizga ega bo‘lishini aniqlang va agar ega bo‘lsa, qaysi n larda ega bo‘lishini toping:

a) $n(x - 1) = n^2 + n + 1$;

b) $n(x + 5) = n^2 + n + 4$

4. Tenglamani x ga nisbatan yeching:

a) $mx = 8$;

e) $bx(b - 1) = 5b - bx$;

b) $(n - 2)x = 5$;

j) $(c^2 - 9)x + 4 = 2(x + 6) - 7x$;

v) $ax = a$;

z) $mx(m - 2) + 9 = m(x + m)$;

g) $b^2x = b(x + 1)$;

i) $(n^2 - 5)x + n = n(n - 4x)$.

d) $(a - 2)x = 10 - 5x$;

5. Tenglamani y ga nisbatan yeching:

a) $y + \frac{y}{a} = 2$;

g) $\frac{n+y}{5} - 2 = \frac{y-5}{n}$;

b) $y - b = \frac{y}{b+1}$;

d) $\frac{y-m}{m} - 4 = \frac{y-4}{4} - m$;

v) $\frac{y-c}{4} = \frac{y-4}{c}$;

e) $\frac{y-p}{5} - \frac{y-5}{p} = 2$.

6. a parametrning qanday qiymatida $\frac{5x-a}{3} = \frac{6x-1}{4}$ tenglama:

a) musbat ildizlarga; b) manfiy ildizlarga; v) nolga teng ildizga ega bo'ladi?

7. c parametrning qanday qiymatida $\frac{4x-c}{3} = \frac{7x+c}{6}$ va $\frac{7x-2c^2}{5} = x-4$

tenglamalar teng ildizlarga ega?

8. Tenglamani yeching: a) $(a^2 - 4)x = a + 2$; b) $(a^2 - 6a + 5)x = a - 1$.

Savol va topshiriqlar:

1. Parametrli chiziqli tenglama deb nimaga aytiladi?

2. Parametrli chiziqli tenglamalarni Yechish algoritmini ayting.

3. Parametrli chiziqli tenglamalarni Yechishda asosiy nimaga e'tibor qaratish kerak?.

4. Keltirilgan topshiriqlarni bajaring .

Algebra darsliklarida uchraydigan chiziqli parametrli masalalar

Reja:

1. 7- sinf «Algebrla» darsligida uchraydigan parametrli masalalar.

2. 8- sinf «Algebrla» darsligida uchraydigan parametrli masalalar.

Adabiyotlar: [6],[8], [14], [15].

Tayanch iboralar: parametrli masalalar, tenglama, nuqta, funksiya grafigi, koeffisiyent qiymati, yechim, ildiz, parabola, funksiya, kvadrat uchhad.

1. 7-sinf «Algebrla» darsligida uchraydigan parametrli masalalar

1. $ax = 6$ tenglama ildizi butun son bo'ladigan a ning barcha butun qiymatlarini toping.

2. a ning qanday qiymatida $A(a; -1,4)$ nuqta $y = 3,5x$ to'g'ri proporsionallik grafigiga tegishli bo'ladi?

3. Agar $x = 2, y = 1$ lar $ax + 2y = 8$ tenglamaning yechimi bo'lsa, a koeffisiyent qiymatini toping.

4. Ma'lumki:

a) o'zgaruvchilarning $x = 5, y = 7$ qiymatlari $ax - 2y = 1$ tenglamaning yechimi bo'lsa, a koeffitsientni toping;

b) o'zaruvchilarning $x = -3, y = 8$ qiymatlari $5x + by = 17$ tenglamaning yechimi hisoblanadi. b ning qiymatini toping.

5. $ax - y = 4$ chiziqli tenglamada a koeffitsientni shunday tanlangki, bu tenglama grafigi $M(3; 5)$ nuqtadan o'tsin.

6. $y - 2,5x = c$ tenglama grafigidan iborat to'g'ri chiziqni yasang, agar u $K(2; -3)$ nuqtadan o'tishligi ma'lum bo'lsa.

7. $M(-1; 1)$ va $P(4; 4)$ nuqtalardan o'tuvchi $y = kx + b$ ko'rinishdagi tenglama grafigini yozing.

2. 8-sinf «Algebrla» darsligida uchraydigan parametrli masalalar

1. a ning qanday qiymatlarida tenglama musbat ildizga ega bo'ladi:

a) $3x = 9a$; b) $x + 2 = a$; v) $x - 8 = 3a + 1$; g) $2x - 3 = a + 4$.

2. b ning qanday qiymatlarida tenglama musbat ildizga ega bo'ladi:

a) $10x = 3b$; b) $x - 4 = b$; v) $3x - 1 = b + 2$; g) $3x - 3 = 5b - 2$.

II BOB. PARAMETRLI IKKINCHI DARAJALI TENGLAMA VA TENGSIZLIKLARNI YECHISH USULLARI

1-§. Parametrli kvadrat tenglamalar va ularga keltiriladigan tenglamalar

Reja:

1. Parametrli kvadrat tenglamalar
2. Parametrli kvadrat tenglamani yechish algoritmi
3. Parametrli kvadrat tenglamalarni yechishga misollar
4. Parametrli kvadrat tenglamalarni tadqiq etishga doir masalalar.
5. Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Adabiyotlar: [6],[8], [14], [15].

Tayanch iboralar: parametr,tenglama, algoritmi,kvadrat tenglama,bir parametrli, bir noma'lumli, nazorat,topshiriq.

1. Parametrli kvadrat tenglamalarni yechish algoritmi:

Kvadrat tenglamani yechishning uchta usuli mavjud: umumiy formuladan foydalanish, Viyet teoremasidan foydalanish, chiziqli ko'paytuvchilarga ajratish. Biz birinchi usulga asoslangan algoritmnini keltiramiz:

- 1) tenglamani standart holatga keltirib, koeffitsientlar, ozod had va diskriminantning parametrdan qanday bog'liqligini aniqlang(zarurat bo'lsa).
- 2) parametrning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamini toping; parametrning bu to'plamga kirmaydigan barcha qiymatlarida tenglama aniqlanmagan.
- 3) parametrning noma'lumning kvadrati oldidagi koeffitsienti nolga aylanadigan barcha qiymatlarining oraliqlarini toping va topilgan oraliqlarda hosil bo'lgan chiziqli tenglamalarni yeching.
- 4) parametrning mumkin bo'lgan qiymatlari orasidan diskriminant nolga aylanadiganlarini toping va hosil bo'lgan bir noma'lumli kvadrat tenglamalarni yeching(agar shundaylari bor bo'lsa).
- 5) parametrning mumkin bo'lgan qiymatlari orasidan diskriminant noldan katta bo'ladiganlarini va parametrning topilgan qiymatlari uchun tenglamaning umumiy yechimini odatdagi standart formula bilan toping.
- 6) parametrning tenglama yechimga ega bo'lmaydigan qolgan qiymatlarini toping(agar bor bo'lsa).
- 7) parametrning barcha qiymatlari oraliqlarida topilgan yechimlarni hisobga olib, tenglamaning umumiy yechimini yozing.

2. Parametrli kvadrat tengsizliklarni yechish algoritmi:

Kvadrat tengsizliklarni yechishning ikkita usuli mavjud: kvadrat funksiyaning grafigini yasash va intervallar usuli. Birinchi usul unversaldir, chunki diskriminantning ishorasi rol o'ynamaydi. Mos kvadrat tenglama ildizlarining ayirmasi bilan bosh koeffisient bir xil ishorali bo'ladi. 3-algoritmi va bir o'zgaruvchili kvadrat tengsizliklarni yechish usuliga asoslanib quyidagi algoritmi keltiramiz:

- 1) tengsizlikni standart holatga keltirib, koeffisientlar, ozod had va diskriminantning parametrdan qanday bog'liqligini aniqlang (zarurat bo'lsa).
- 2) parametrning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamini toping; parametrning bu to'plamga kirmaydigan barcha qiymatlarida tengsizlik aniqlanmagan.
- 3) parametrning noma'lumning kvadrati oldidagi koeffisienti nolga aylanadigan barcha qiymatlarining oraliqlarini toping va topilgan oraliqlarda hosil bo'lgan chiziqli tengsizliklarni yeching.
- 4) parametrning mumkin bo'lgan qiymatlari orasidan diskriminant nolga aylanadiganlarini toping va hosil bo'lgan bir noma'lumli kvadrat tengsizliklarni parametrning aniqlangan har bir qiymatida yeching.
- 5) parametrning mumkin bo'lgan qiymatlari orasidan diskriminant noldan katta bo'ladiganlarini va parametrning topilgan qiymatlari uchun mos kvadrat tenglama ildizlarining ayirmasini va bosh koeffisientning ishorasini aniqlang, parametrning aniqlangan qiymatlarida kvadrat funksiyaning grafigini yasang hamda shu grafik asosida tengsizlikning umumiy yechimini yozing.
- 6) bosh koeffisientni baholab parametrning qolgan mumkin bo'lgan qiymatlari uchun kvadrat funksiyaning grafigini yasang va tengsizlikning umumiy yechimini yozing (bu holda diskriminant manfiy, parabola absissalar o'qini kesmaydi).
- 7) parametrning barcha qiymatlari oraliqlarida topilgan yechimlarni hisobga olib, tengsizlikning umumiy yechimini yozing.

1-ta'rif. $ax^2 + bx + c = 0$ ko'rinishdagi tenglama, bu erda x – noma'lum, a , b , c – faqat parametrlarga bog'liq ifodalar, va $a \neq 0$, x ga nisbatan kvadrat tenglama deb ataladi. Parametrlarning a , b , c – haqiqiy bo'ladigan qiymatlari yo'l qo'yiladigan qiymatlari deb ataladi.

$a = 0$ da tenglama $bx + c = 0$ chiziqli ko'rinishni oladi va bitta ildizga ega bo'ladi; $a \neq 0$ da u kvadrat tenglama bo'ladi va parametrning har bir yo'l qo'yiladigan qiymatlar sistemasida bitta yoki ikkita haqiqiy ildizlarga ega bo'lishi mumkin.

Parametrli kvadrat tenglamani yechish algoritmi:

1) Tenglamani shunday soddalashtirish kerakki u : $ax^2 + bx + c = 0$; ko'rinishga ega bo'lsin.

2) Tenglamaning x^2 oldidagi koeffitsientini nolga tengligini tekshirish (agar u parametrni o'z ichiga olsa) ($a = 0, a \neq 0$);

3) Parametrning har bir tayinlangan qiymatida tenglama ko'rinishini va ildizlarini tekshirish:

- agar $a = 0$ bo'lsa, u holda tenglama chiziqli va uning ildizlarini chiziqli tenglamani Yechish algoritmi bilan topish;

- agar $a \neq 0$ bo'lsa, u holda tenglama- kvadrat tenglama. $D > 0, D < 0, D = 0$ shartlarda parametrning har bir tayinlangan qiymatida ildizlar mavjudligini tekshirish va ularni topish.

4) Parametrning tayinlangan qiymatlarini hisobga olib javobni yozing.

Bir parametrli va bir noma'lumli kvadrat tenglamalarni Yechishga misollar keltiramiz

1-misol. Qanday a larda $ax^2 - x + 3 = 0$ tenglama yagona yechimga ega ?

Yechish: 1) $a = 0$ bo'lgan holni qaraymiz, u holda tenglama: $-x + 3 = 0$ ko'rinishni oladi, u chiziqli tenglamadan iborat va yagona yechimga ega $x = 3$.

2) Agar $a \neq 0$ bo'lsa, u holda kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz.

$D = 1 - 12a$. Tenglama yagona ildizga ega bo'lishi uchun $D = 0$. $1 - 12a = 0, a = 1/12$ bo'lishi zarur.

2-misol. Qanday a larda $(a - 2)x^2 + (4 - 2a)x + 3 = 0$ yagona yechimga ega?

Yechish 1) $a = 2$ bo'lgan holni qaraymiz, u holda tenglama $0x = -3$ ko'rinishni oladi va yechimga ega emas.

2) Agar $a \neq 2$ bo'lsa, u holda berilgan tenglama – kvadrat tenglama. Tenglama yagona ildizga ega, agar $D = 0$ bo'lsa.

$D = (4 - 2a)^2 - 12(a - 2) = 16 - 16a + 4a^2 - 12a + 24 = 4a^2 - 28a + 40$,
 $4a^2 - 28a + 40 = 0, a^2 - 7a + 10 = 0$, Viet teoremasiga ko'ra $a = 2$ yoki $a = 5$.
 $a = 2$ qiymat to'g'ri kelmaganligi uchun $a = 5$.

3-misol. Qanday a larda $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$ tenglama bittadan ortiq yechimga ega?

Yechish 1) Agar $a = 0$ bo'lsa, u holda tenglama $-4x = -3$ ko'rinishni oladi va $x = \frac{3}{4}$ yagona yechimga ega va shartni qanoatlantirmaydi.

2) Agar $a \neq 0$ bo'lsa, u holda tenglama – kvadrat tenglama. U agar $D > 0$ bo'lsa, ikkita ildizga ega. $D = 16 - 4a(a + 3) = 16 - 4a^2 - 12a = -4a^2 - 12a + 16$, $-4a^2 - 12a + 16 > 0$, $a^2 + 3a - 4 < 0$. Kvadratik tengsizlikni echib $-4 < a < 1$ tengsizlikni olamiz Lekin olingan $(-4;1)$ oraliqqa 0 soni kiradi, bu esa mumkin emas, u holda $-4 < a < 0$ yoki $0 < a < 1$.

4-misol. Qanday a larda $a(a + 3)x^2 + (2a + 6)x - 3a - 9 = 0$ tenglama bittadan ortiq yechimga ega?

Yechish: 1) Agar $a(a + 3) = 0$ bo'lsa, ya'ni $a = 0$ yoki $a = -3$ bo'lsa, u holda tenglama: $a = 0$ da $6x = 9$, $x = 1,5$ – yagona yechim; $a = -3$ da $0x = 0$, x – ixtiyoriy haqiqiy son.

2) Agar $a \neq 0$ va $a \neq -3$ bo'lsa kvadrat tenglama olamiz $a(a + 3)x^2 + 2(a + 3)x - 3(a + 3) = 0$, yoki, tenglamaning ikkala tomonini $(a + 3)$ ga bo'lib, tenglama $ax^2 + 2x - 3 = 0$ tenglamani olamiz, uning diskriminanti $4(1 + 3a)$ ga teng, $D > 0$, $a > -1/3$. Demak, $a > -1/3$ da tenglama ikkita ildizga ega, lekin bu oraliqqa 0 soni kiradi, u bizga to'g'ri kelmaydi, u holda berilgan oraliqdan $a = 0$ ni chiqarish lozim..

Javob. Tenglama $a = -3$, $-1/3 < a < 0$, $a > 0$ larda ikkitadan ortiq ildizga ega.

5-misol x ga nisbatan tenglamani eching: a) $x^2 - ax = 0$

Yechish: $D = a^2$, demak $D > 0$ yoki $D = 0$.

1) $D = 0$, u holda $a^2 = 0$, $a = 0$, u holda $x = 0$.

2) $D > 0$, $a^2 > 0$ ixtiyoriy $a \neq 0$ uchun, u holda $x = a$.

Javob: agar $a = 0$ bo'lsa, u holda $x = 0$; agar $a \neq 0$ bo'lsa, u holda $x = a$.

b) $6x^2 - 5bx + b^2 = 0$

Yechish: $D = 25b^2 - 24b^2$, $D = b^2 \geq 0$.

1) $D = 0$, u holda $b = 0$, u holda $x = 0$;

2) $D > 0$, u holda b – ixtiyoriy nolga teng bo'lmagan son, u holda

$$x_{1,2} = \frac{5b \pm |b|}{12}; x_1 = \frac{b}{2}, x_2 = \frac{b}{3}.$$

$$v) 12x^2 + 7sx + s^2 = 0$$

$$\text{Yechish: } D = 49s^2 - 48s^2, D = s^2, D \geq 0.$$

$$1) D = 0, s^2 = 0, s = 0, \text{ u holda } x = 0;$$

$$2) D > 0, s^2 > 0, \text{ u holda } c - \text{ixtiyoriy nolga teng bo'lmagan son, u holda}$$

$$x_{1,2} = \frac{-7c \pm |c|}{24}; \quad x_1 = -\frac{c}{4}, x_2 = -\frac{c}{3}.$$

6-misol. x ga nisbatan $ax^2 - 4x + a = 0$ tenglamani eching.

Yechish: Agar $a = 0$ bo'lsa, u holda tenglama chiziqli va $-4x = 0$ ko'rinishni oladi, u holda $x = 0$. Demak, agar $a = 0$ bo'lsa, u holda tenglama yagona ildizga ega $x = 0$.

Agar $a \neq 0$ bo'lsa, u holda $ax^2 - 4x + a = 0$ – kvadrat tenglama, unda $D_1 = 4 - a^2$.

$D_1 = 0$, u holda $4 - a^2 = 0, a = \pm 2$. Demak, agar $a = \pm 2$ bo'lsa, u holda tenglama bitta ildizga ega $x = 1$;

$D_1 > 0, 4 - a^2 > 0, a^2 - 4 < 0, (a-2)(a+2) < 0$, u holda $-2 < a < 2$ da tenglama ikkita ildizga ega $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - a^2}}{a}$;

$D_1 < 0, 4 - a^2 < 0, a^2 - 4 > 0, (a-2)(a+2) > 0$, u holda $a < -2$ va $a > 2$ da tenglama ildizlarga ega emas.

Javob: agar $a = \pm 2$ bo'lsa, u holda tenglama bitta ildizga ega $x = 1$, agar $a = 0$ bo'lsa, u holda tenglama bitta ildizga ega $x = 0$; agar $-2 < a < 2$ bo'lsa, u holda tenglama ikkita ildizga ega $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - a^2}}{a}$; agar $a < -2$ va $a > 2$ bo'lsa, u holda tenglama ildizlarga ega emas.

7-misol. x ga nisbatan tenglamani eching: $x^2 - sx + 16 = 0$

Yechish: $D = s^2 - 64$; 1) $D = 0, s^2 - 64 = 0, s^2 = 64, s = \pm 8$. $s = \pm 8$ da tenglama bitta ildizga ega $x = \frac{c}{2}$;

2) $D > 0$, $s^2 - 64 > 0$, $(s-8)(s+8) > 0$, u holda $c < -8$ va $c > 8$ da tenglama ikkita ildizga ega $x_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 64}}{2}$;

3) $D < 0$, $s^2 - 64 < 0$, $(s-8)(s+8) < 0$, u holda $c \in (-8; 8)$ da tenglama ildizlarga ega emas.

Javob: agar $s = \pm 8$ bo'lsa, tenglama bitta ildizga ega $x = \frac{c}{2}$; agar $c < -8$ va $c > 8$ bo'lsa, tenglama ikkita ildizga ega $x_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 64}}{2}$; agar $-8 < c < 8$ bo'lsa, u holda tenglama ildizlarga ega emas.

8-misol. b parametrning qanday qiymatlarida $(b-1)x^2 - 2bx + b + 1 = 0$ ikkita musbat, ikkita manfiy va yagona ildizga ega bo'ladi?

Yechish: 1) $b - 1 = 0$, u holda $b = 1$, u holda $-2x + 2 = 0$, $-2x = -2$, $x = 1$. Agar $b = 1$ bo'lsa, u holda $x = 1$;

2) Agar $b \neq 1$ bo'lsa, u holda kvadrat tenglama $(b-1)x^2 - 2bx + b + 1 = 0$ ga ega bo'lamiz, unda $D_1 = b^2 - (b-1)(b+1) = b^2 - b^2 + 1 = 1$, $D_1 > 0$, demak tenglama ikkita ildizga ega

$$x = \frac{b \pm 1}{b-1}, \text{ u holda } x_1 = \frac{b+1}{b-1}, x_2 = \frac{b-1}{b-1} = 1.$$

Bundan ko'rinadiki, tenglama ikkita manfiy ildizga ega bo'ladi, chunki ildizlaridan biri 1 ga teng. Tenglama ikkita musbat ildizga faqat $x_1 > 0$ bo'lganda ega bo'ladi. $\frac{b+1}{b-1} > 0$ ga ega bo'lamiz, bu esa $(b+1)(b-1) > 0$ tengsizlikka teng kuchli bo'lishini bildiradi. Tengsizlikni echib $b < -1$ yoki $b > 1$ ni olamiz. Demak, $b < -1$ yoki $b > 1$ da tenglama ikkita musbat ildizga ega.

Javob: agar $b = 1$ bo'lsa, u holda $x = 1$ – yagona ildiz; agar $b < -1$ yoki $b > 1$ bo'lsa, u holda tenglama ikkita musbat ildizga ega; ikkita manfiy va yagona ildizga ega bo'lishi mumkin emas.

Parametrli kvadrat tenglamalarni tadqiq etishga doir masalalar.

1-masala. k ning :

a) $x^2 - 3x + k < 0$ tengsizlik faqat $x \in (1; 2)$; lar uchun o‘rinli bo‘ladigan qiymatini;

b) $-x^2 + x + k > 0$ tengsizlik faqat $x \in (-2; 3)$. lar uchun o‘rinli bo‘ladigan qiymatini toping.

Yechish. a) $x^2 - 3x + k < 0$ tengsizlik faqat $x \in (1; 2)$ lar uchun o‘rinli , agar

$x_1 = 1$ va $x_2 = 2$ — $x^2 - 3x + k$ kvadrat uchhad ildizlari bo‘lsa, (bu erda $a = 1 > 0$). YA’ni $k = 1 \cdot 2 = 2$.

b) tengsizlikni (-1) , ga ko‘paytirib unga teng kuchli $x^2 - x - k < 0$ tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlik faqat $x \in (-2; 3)$,lar uchun o‘rinli, agar $x_1 = -2$ va $x_2 = 3$ — $x^2 - x - k$ kvadrat uchhad ildizlari bo‘lsa, ya’ni $k = 6$ da

Javob. a) $k = 2$; b) $k = 6$.

2-masala. k ning:

a) $x^2 - 24x + k > 0$ $x = 12$ tengsizlik $x=12$ dan tashqari barcha x lar uchun o‘rinli bo‘ladigan ;

b) $64x^2 + kx + 9 > 0$ tengsizlik $x = -\frac{3}{8}$ dan tashqari barcha x lar uchun o‘rinli bo‘ladigan qiymatini toping. ;

Yechish. a) Bu erda tengsizlikni $(x - 12)^2 > 0$ ko‘rinishda yozish mumkin bo‘ladigan k ning qiymatini topish talab etiladi. Masala shartini faqat $k = 144$ qanoatlantiradi.

b) Bu erda tengsizlikni $64(x + \frac{3}{8})^2 > 0$ ko‘rinishda yozish mumkin bo‘ladigan ning qiymatini topish talab etiladi. Masala shartini faqat $k = 48$ qanoatlantiradi.

Javob. a) $k = 144$; b) $k = 48$.

3-masala. Har bir qiymatida x ning ixtiyoriy qiymatida

$$\text{a) } 2x^2 - x + m > 0; \quad \text{b) } 3x^2 + 2x + m > 0.$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan m ning barcha qiymatlarini toping

Yechish. a) $a = 2 > 0$, bo'lgani uchun tengsizlik x ning ixtiyoriy qiymatida o'rinli bo'lishi uchun diskriminat D manfiy bo'lishi lozim: $1 - 4 \cdot 2 \cdot m < 0$. Demak, masala shartini barcha $m > \frac{1}{8}$ qiymatlar qanoatlantiradi.

b) $a = 3 > 0$ bo'lgani uchun tengsizlik x ning ixtiyoriy qiymatida o'rinli bo'lishi uchun diskriminant D manfiy bo'lishi lozim: $4 - 4 \cdot 3 \cdot m < 0$. Demak, masala shartini barcha $m > \frac{1}{3}$ qiymatlar qanoatlantiradi.

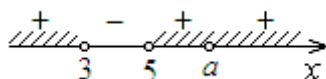
Javob. a) $m > \frac{1}{8}$; b) $m > \frac{1}{3}$.

4-masala. a) a ning qanday qiymatlarida

$$(x - 3)(x - 5)(x - a)^2 > 0$$

tengsizlikning yechimlar to'plami ikkita oraliqdan? Uchta oraliqdan iborat bo'ladi?

Yechish. 1) $a > 5$ bo'lsa, u holda ko'phad 3, 5 va a uchta ildizga ega. Bu ildizlarni koordinata o'qida belgilaymiz va oraliqlar usulini qo'llaymiz, ko'phadning ishorasini oraliqlarda aniqlaymiz



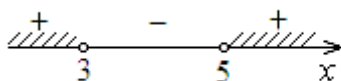
(1-rasm).

yechimlar to'plami uchta oraliqdan iborat.

2) Agar $a = 5$ bo'lsa, u holda berilgan tengsizlik :

$$(x - 3)(x - 5)^3 > 0. \quad (1)$$

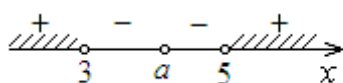
ko'rinishda yoziladi. Ko'phadning 3 va 5 ildizlarini son o'qida belgilaymiz va oraliqlar usulini qo'llaymiz, ko'phadning ishorasini oraliqlarda aniqlaymiz



2-rasm

Tengsizlikning yechimlar to'plami ikkita oraliqdan iborat.

3) Agar $3 < a < 5$, bo'lsa, u holda ko'phad 3, 5 va a uchta ildizga ega, Bu ildizlarni koordinata o'qida belgilaymiz va



3-rasm

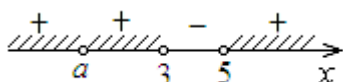
oraliqlar usulini qo'llaymiz, ko'phadning ishorasini oraliqlarda aniqlaymiz. Tengsizlikning olingan yechimlar to'plami ikkita oraliqdan iborat

4) Agar $a = 3$ bo'lsa, u holda berilgan tengsizlik

$$(x - 3)^3(x - 5) > 0. \quad (2)$$

ko'rinishda yoziladi. Ko'phadning 3 va 5 ildizlarini son o'qida belgilaymiz va oraliqlar usulini qo'llaymiz, ko'phadning ishorasini oraliqlarda aniqlaymiz. Uning yechimlar to'plami ikkita oraliqdan iborat.

5) Agar $a < 3$ bo'lsa, u holda ko'phad 3, 5 va a uchta ildizga ega, Bu ildizlarni koordinata o'qida belgilaymiz va oraliqlar usulini qo'llaymiz, ko'phadning ishorasini oraliqlarda aniqlaymiz. Tengsizlik yechimlar to'plami uchta oraliqda iborat.



4-rasm

Barcha qaralgan hollarni birlashtirib javobni yozamiz.

Javob. agar $3 \leq a \leq 5$ bo'lsa, u holda berilgan tengsizlik yechimlar to'plami ikkita oraliqdan; agar $a < 3$ yoki $a > 5$ bo'lsa, u holda berilgan tengsizlik yechimlar to'plami uchta oraliqdan iborat.

5-masala. a ning qanday qiymatlarida

$$\frac{(x+5)(x-3)}{(x-a)^2} > 0$$

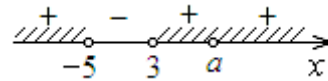
tengsizlikning yechimlar to'plami ikkita oraliqdan? Uchta oraliqdan iborat bo'ladi?

Yechish. a ning ixtiyoriy qiymatida berilgan tengsizlik

$$(x+5)(x-3)(x-a)^2 > 0. \quad (7)$$

tengsizlikka teng kuchli

1) Agar $a > 3$ bo'lsa, u holda ko'phad uchta -5 , 3 i a ildizga ega. Ularni koordinata o'qida belgilaymiz va umumiy oraliqlar usulini qo'llaymiz va hosil bo'lgan oraliqlar ustiga «+» va «-» ishoralarni qo'yamiz.



5-rasm

Olingan (7)tengsizlikning yechimi va demak, berilgan tengsizlikning yechimlar to'plami uchta oraliqdan iborat ekan.

2) Agar $a = 3$ bo'lsa, u holda berilgan tengsizlik

$$(x+5)(x-3)^3 > 0. \quad (8)$$

ko'rinishda yoziladi. U holda ko'phad ikkita -5 , 3

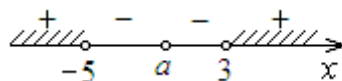


6-rasm

ildizlarga ega. Ularni koordinata o'qida belgilaymiz va umumiy oraliqlar usulini qo'llaymiz va hosil bo'lgan oraliqlar ustiga «+» va «-» ishoralarni qo'yamiz

Olingan (8) tengsizlikning va demak, berilgan tengsizlik yechimlar to'plami ikkita oraliqdan iborat.

3) Agar $-5 < a < 3$ bo'lsa, u holda u holda ko'phad uchta : -5 , 3 i a ildizlarga



7-rasm

ega. Ularni koordinata o'qida belgilaymiz va umumiy oraliqlar usulini qo'llaymiz va hosil bo'lgan oraliqlar ustiga «+» va «-» ishoralarni qo'yamiz.

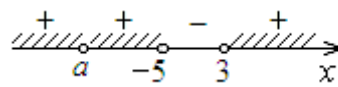
Olingan (7)tengsizlikning va demak, berilgan tengsizlik yechimlar to'plami ikkita oraliqdan iborat.

4) Agar $a = -5$, bo'lsa, u holda berilgan tengsizlik

$$(x+5)^3(x-3) > 0. \quad (9)$$

ko‘rinishda yoziladi. u holda ko‘phad ikkita: -5 , 3 ildizlarga ega. Ularni koordinata o‘qida belgilaymiz va umumiy oraliqlar usulini qo‘llaymiz va hosil bo‘lgan oraliqlar ustiga «+» va «-» ishoralarni qo‘yamiz. Olingan (9) tengsizlikning va demak, berilgan tengsizlikning yechimlar to‘plami ikkita oraliqdan iborat.

5) Agar $a < -5$, bo‘lsa, u holda u holda ko‘phad uchta -5 , 3 i a ildizlarga ega. Ularni koordinata o‘qida belgilaymiz va umumiy oraliqlar usulini qo‘llaymiz va hosil bo‘lgan oraliqlar ustiga «+» va «-» ishoralarni qo‘yib chiqamiz.



8-rasm

Hosil qilingan (7)tengsizlikning va demak, berilgan tengsizlikning yechimlar to‘plami uchta oraliqdan iborat.

Javob. a) Agar $-5 \leq a \leq 3$, bo‘lsa, u holda berilgan tengsizlikning yechimlar to‘plami ikkita oraliqdan; agar $a < -5$ yoki yoki $a > 3$ bo‘lsa, yechimlar to‘plami uchta oraliqdan iborat.

O‘quvchilar bilimlarini nazorat qilish yoki mustaqil yechish uchun qo‘shimcha topshiriqlar

1.Tenglamalarni yeching:

a) $(a+4)x^2 + 6x - 1 = 0$;

b) $(2a+8)x^2 - (a+4)x + 3 = 0$.

2. Qanday a larda tenglama $a(2a+4)x^2 - (a+2)x - 5a - 10 = 0$ bittadan ortiq yechimga ega bo‘ladi?

3. a parametrning $y = (a+5)x^2 - 7$ i $y = (3a+15)x - 4$ funksiyalar grafiklari umumiy nuqtalarga ega bo‘ladigan barcha qiymatlarini yozing. (Eslatma: ular umumiy nuqtalarga ega bo‘ladigan barcha a larni toping, ya’ni

$(a+5)x^2 - 7 = (3a+15)x - 4$. Javob: $-19/3 < a < -5$).

4. Qanday butun nomanfiy n da tenglama faqat butun ildizlarga ega:

a) $(x+n)^2 - (x-n)^2 = 56$; (Javob: $n = 1, 2, 7, 14$)

b) $nx^2 - 18x + 2n = 0$; (Javob: $n = 0; 6$)

5. x ga nisbatan tenglamalarni yeching :

a) $mx^2 - 6x + 1 = 0$ b) $ax^2 = 4$; v) $x^2 - ax = 0$; g) $x^2 - 2x + c = 0$;

d) $6x^2 - 5bx + b^2 = 0$; e) $12x^2 + 7cx + c^2 = 0$.

6. y ga nisbatan tenglamalarni yching:

a) $sy^2 + 8 = 2y^2 + 4c$;

b) $b(y^2 + 7) = b(y + 5) + 2b$;

v) $y^2 - 3y = a^2 + 3a$;

g) $ay^2 + 6y + a = 3(2y - a)$.

7. a parametrli tenglamalarni yeching

a) $\frac{x - x + 3}{3} = 1 - \frac{x - 1}{a}$; b) $\frac{x^2 + (a - 1)x}{a} - x = \frac{x - 11}{5} + 2$.

8. Parametrning qanday qiymatlarida a :

a) $(b - 1)x^2 - 2bx + b + 1 = 0$; b) $x^2 - cx + 16 = 0$ tenglama : 1) ikkita musbat; 2) ikkita manfiy; v) yagona ildizga ega bo'ladi? (Eslatma: ildizlarni toping va ularning ishoralarini Viet teoremasi yordamida tekshiring.

Javob: a) 1) $|b| > 1$ da; 2) bunday qiymatlar yo'q; 3) $b = 1$ da; b) 1) $s > 8$ da; 2) $s < -8$ da; 3) $s = -8$ yoki $s = 8$ da).

Savol va topshiriqlar:

1. Parametrli kvadrat tenglamalar ta'rifini keltiring.
2. Parametrli kvadrat tenglamani yechish algoritmini biror misolda tushuntirib bering.
3. Bir parametrli va bir noma'lumli kvadrat tenglamalarni yechishning qanday usullarini bilasiz?
4. Bir parametrli va bir noma'lumli kvadrat tenglamalarni tadqiq etishda asosiy nimalarga e'tibor berish kerak?
5. O'quvchilar bilimlarini nazorat qilish yoki mustaqil yechish uchun qo'shimcha topshiriqlarni bajaring.

2-§. Parametrli kvadrat tengsizliklarni o'rganishda o'quvchilarda o'quv izlanish faoliyati ko'nikmalarini rivojlantirish

Reja:

1. Kvadrat tengsizliklarni yechishga keltiriladigan mashqlar.
2. Kvadrat tenglamalar va tengsizliklar yordamida hal qilinadigan masalalar.
3. Kvadrat tenglamalar ildizlarini tekshirishga doir parametrغا bog'liq masalalar.

Adabiyotlar: [7],[9], [12], [15].

Tayanch iboralar:kvadrat tengsizlik, ildizlar, parametr, masalalar, yechish, musbat,manfiy.

1. Kvadrat tengsizliklarni muhokama qilishdan oldin yuqoridagi tadqiq etilgan masalalar natijalarini mustahkamlash maqsadida o'quvchilarga taklif qilinadigan mashqlarga misollar keltiramiz:

1. m ning qanday qiymatlarida $(1+m)x^2 - 2x + m - 2 = 0$ tenglama ildizlari musbat bo'ladi?

(Javob: $2 < m \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$).

2. k ning qanday qiymatlarida $(1+k)x^2 - 3kx + 4k = 0$ tenglama ildizlari -1 dan katta bo'ladi?

3. a - ning qanday qiymatlarida $2x^2 - 4(a+2)x + a^2 + 1 = 0$ tenglama ildizlari $0,5$ dan kichik bo'ladi?

(Javob: $a < -7$).

4. k ning qanday qiymatlarida $(2k+3)y^2 + (k+1)y + 4 = 0$ tenglama ildizlari -2 va 0 orasida yotadi?

(Javob: $-15 < k < 15 - 4\sqrt{17}$, $k > 15 + 4\sqrt{17}$

5. k -ning qanday qiymatlarida $kx^2 + (7k+4)x - 4 = 0$ tenglama ildizlaridan biri 1 va 2 orasida yotadi, ikkinchisi 2 dan katta bo'ladi?

Tadqiqot masalalari orasida kvadrat uchhadning oshkormas ko‘rinishidan foydalanishga doir masalalar alohida ahamiyatga ega.

U yoki bu konkret ifodada kvadrat uchhadni ko‘rmasdan uning xossalaridan foydalanish qiyin. Lekin shu bilan birga qancha “niqoblangan” shaklda bo‘lmasin kvadrat uchhadni ko‘rish qiyin emas, buning uchun uni payqashga intilish zarur.

Ko‘pincha o‘quvchilar kvadrat uchhadning standart ko‘rinishiga o‘rganib qoladilar, masalan, $2x^2 - 3x - 8$, $2ax - x^2 + a$, $x(3 - x)$ ifodalar kvadrat uchhad ekanligini ko‘ra olsalarda, ko‘pchilik $x^2 - 2xy + 3y^2$, $ax + 2 - a^2x$ ifodalarda yoki murakkabroq $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 2xy - 3yz$ ifodalarda kvadrat uchhadni ko‘ra olmaydilar.

Albatta, kvadrat uchhadni ko‘ra olish ko‘nikmasi masalani yechish uchun etarli emas-buning uchun yana uning xossalaridan foydalana olish lozim. Lekin bir qator masalalarda berilgan ifodani kvadrat uchhad sifatida tavsiflash asosiy qiyinchilikni tashkil etadi.

1. Quyidagi tengsizlik yechimga egami: $9^{x+1} + 7 \cdot 4^{x+\frac{1}{2}} < 8 \cdot 6^x$

Yechish. Bu masalada yana kamroq darajada kvadrat uchhad ko‘rinadi, lekin 9,4,6 sonlari 2 va 3 ko‘paytuvchilardan iboratligini hisobga olsak,

$$9^{x+1} = 9 \cdot 3^{2x}, \quad 4^{x+\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^{2x}, \quad 6^x = 2^x \cdot 3^x$$

almashtirishlarni e‘tiborga olib,

$$9 \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 2^x \cdot 3^x + 14 \cdot 2^2 < 0$$

tengsizlikka kelimiz.

Endi 3^x ni fikran u , 2^x ni z orqali belgilasak, oldingi masaladagi u va z larga nisbatan bir jinsli ifodaga kelimiz. Lekin bu holda tengsizlik bilan ish ko‘rayotganimiz uchun, uning ishorasini bilishimiz kerak, $z^2 = 4^x$ bo‘lgani uchun, bo‘lishdan so‘ng $\frac{y}{z}$ ni t orqali belgilab $9t^2 - 8t + 14 < 0$ tengsizlikka

kelamiz. Bu kvadrat uchhad diskriminanti manfiy va uning bosh koeffitsienti musbat bo'lgani uchun, uchhad t ning har qanday qiymatida musbat. Demak, oxirgi tengsizlik, shu bilan birga berilgan tengsizlik yechimga ega emas.

2. Tengsizlikni isbotlang: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Yechish. Berilgan tengsizlikni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$a^2 - a(b+c) + b^2 + c^2 - bc \geq 0$$

chap tomon a ga nisbatan kvadrat uchhaddan iborat (bunda b va c parametrlar) va uning uchun uning diskriminanti nomusbat ekanligini ishonch hosil qilish lozim.

$$D = (b+c)^2 - 4(b^2 + c^2 - bc) = -3b^2 + 6bc - 3c^2 = -3(b-c)^2$$

bo'lgani uchun berilgan tengsizlik o'rinli.

Bu masalani yana guruhlash usuli bilan ham Yechish mumkin:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ca = \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(b-c)^2 + \frac{1}{2}(a-c)^2$$

Lekin guruhlash bu sun'iy usul va agar ma'lum bir g'oya mavjud bo'lmasa, guruhlash muvaffaqiyati –tasodif yoki zarur natijaga erishish uchun qattiq harakat natijasidir.

Aksincha ifodani diqqat bilan tahlil etish almashtirish g'oyasini topishga yordam beradi, guruhlash san'atini guruhlash fani bilan almashtirishga imkon beradi.

2.Kvadrat tenglamalar va tengsizliklar yordamida hal qilinadigan masalalar Yechishga o'rgatish

1. *Kvadrat tenglamalar va tengsizliklar yordamida hal qilinadigan isbotlashga doir masalalarni ham qo'llash uning ahamiyatini ko'rsatishga xizmat qiladi.*

1-misol. $\sqrt[5]{2} + 7 < 8 \cdot \sqrt[10]{2}$ ekanini isbotlang

Yechish. $a = \sqrt[10]{2}$, $\sqrt[5]{2} = a^2$. Demak, $a^2 + 7 < 8a$, $a^2 - 8a + 7 < 0$ tengsizlikka kelamiz. Bu tenglama 1, 6, 7 ildizlarga ega, $a \in (6, 7)$ bo'lish kerak, haqiqatdan, $a = \sqrt[10]{2} \in (6, 7)$. Shuning uchun $a^2 - 8a + 7 < 0$ tengsizligi bajariladi.

2-misol. Ixtiyoriy ketma-ket natural son ko'paytmasi 25 ga bo'linganda 1 qoldiq bo'lmasligini isbotlang

$$\begin{aligned} \text{Isbot. } n(4k+1) &= 25k+1 & D &= 1+4(5k+1) = 5(20k+1) \\ n^2 + n - 25k - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$20k+1$ ko'rinishdagi sonlar 5 ga bo'linadi 1 qoldiqni beradi. D 5ga bo'linadi, 25 ga bo'linmaydi. D - to'liq kvadrat bo'lolmaydi. Demak, tenglama butun sonlarda yechimga ega bo'lmaydi.

3-misol. Qanday a, b, c larda

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ bx^2 + cx + a = 0 \\ cx^2 + ax + b = 0 \end{cases} \text{ sistema yechimga ega?}$$

Yechish. Tenglamalarni qo'shib

$$(a+b+c)x^2 + (a+b+c)x + (a+b+c) = 0$$

ga ega bo'lamiz. Bundan $(a+b+c)(x^2+x+1) = 0$, agar $a+b+c \neq 0$ bo'lsa tenglama yechimi yo'q. Demak, tenglama yechimi bo'lishi uchun $a+b+c=0$ bo'lishi kerak. Agar $a+b+c=0$ bo'lsa, sistema $x=1$ yechimga ega bo'ladi.

4-misol. Agar $a(a-b+c) < 0$ bo'lsa, $b^2 > 4ac$ ekanligini isbotlang.

Isbot. $a \neq 0$. $f(x) = ax^2 + bx + c$ funksiya uchun $a-b+c = f(-1)$, $af(-1) < 0$

Masala shartiga ko'ra $a(a-b+c) < 0$, ikki hol mavjud:

- 1) $a > 0$ $f(-1) < 0$, parabola OX o'qi ikki nuqtada kesib o'tadi;
- 2) $a < 0$, $f(-1) > 0$, parabola OX o'qini ikki nuqtada kesib o'tadi. Demak, $D > 0$, ya'ni $b^2 - 4ac > 0$ yoki $b^2 > 4ac$.

3. Kvadrat tenglamalar ildizlarini tekshirishga doir parametr ga bog'liq masalalarni yechish fikrlash, matematik tahlil va usullarni o'rganishga yordam beradi.

5-misol. Har qanday a uchun

$$(a^3 - 2a^2 + 7a)x^2 - (a^3 + 4a^2 - 9a + 6)x + 5a^2 + 9 = 0$$

tenglama hech bo'lmaganda bitta yechimga egaligini isbotlang.

Isbot. $y(0) = 5a^2 + 4$, $y(1) = -a^2 - 2a - 2$. Har qanday a uchun $y(0) > 0$, $y(1) < 0$ bundan har qanday a uchun $(0,1)$ da ildizga ega.

6-misol. x_1 va x_2 $x^2 + ax + b = 0$ tenglamaning ildizlari bo'lsa va $b \neq 0$ bo'lsa, $bx^2 + a(b+1)x + (b-1)^2 + a^2 = 0$ tenglama ildizlarini toping.

Yechish. Viet teoremasiga asosan $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 \cdot x_2 = b$. U holda tenglama

$$x_1 x_2 x^2 - (x_1 + x_2)(x_1 x_2 + 1)x + (x_1 x_2 - 1)^2 + (x_1 + x_2)^2 = 0 \text{ ko'rinishga keladi.}$$

Diskriminant $D = (x_1 - x_2)^2(x_1 x_2 - 1)^2$. Demak, uning ildizlari

$$\left\{ -\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right); -\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) \right\}.$$

7-misol. $a^2 x^2 - ax + 1 - 7a^2 = 0$ tenglamaning ildizlari butun bo'ladigan barcha $a > 0$ larni toping.

Yechish. $D = a^2 - 4a^2(1 - 7a^2) = a^2(28a^2 - 3) > 0$. Viet teoremasidan

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{1 - 7a^2}{a^2} = -7 + \frac{1}{a^2} \end{cases}$$

x_1 va x_2 - butun sonlar, $\frac{1}{a}$ - butun son, $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} (a > 0)$. Bundan

$$\frac{28}{n^2} \geq 3, \quad n^2 \leq \frac{28}{3}, \quad n^2 \leq 9, \quad n \leq 3, \quad n = 1, 2, 3. \text{ Demak, } a \text{ ning qiymatlari } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}.$$

8-misol. $x^2 + ax + b + 1 = 0$ tenglama ildizlari natural sonlar. $a^2 + b^2$ - murakkab son ekanini isbotlang.

Isbot. Viet teoremasiga ko'ra $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 \cdot x_2 = b + 1$

$$a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 x_2 - 1)^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$$

Demak, u murakkab son.

Savol va topshiriqlar:

1. Kvadrat tengsizliklarni Yechishga keltiriladigan mashqlarni yechish uchun zarur formula va qoidalarini keltiring.
2. Kvadrat tenglamalar va tengsizliklar yordamida hal qilinadigan masalalarga misollar keltiring.
3. Kvadrat tenglamalar ildizlarini tekshirishga doir parametrغا bog‘liq masalalar qanday usullar bilan echiladi?

3-§. $ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhadning son o‘qida ildizlarining joylashishiga doir parametrli masalalar

Reja:

1. Kvadratik funksiya grafigi bilan bog‘liq masalalar tiplari.
2. Kvadrat uchhad ildizlarining kesmaga nisbatan joylashish hollari.
3. Tipik masalalar yechishda shartlardan foydalanishga doir misollar.

Adabiyotlar: [7],[8], [10], [14].

Tayanch iboralar:kvadratik funksiya, grafik, tiplar, kvadrat uchhad, shartlar, kesma,ildizlar.

Kvadratik funksiya grafigi bilan bog‘liq ikkita eng keng tarqalgan masalalar tiplarini qaraymiz Birinchi tip m ga teng bo‘lgan nuqtaga nisbatan kvadrat uchhad ildizlarining joylashishi o‘rganiladigan masalalar. Ikkinchi tip - kvadrat uchhad ildizlari kesmaga nisbatan qanday joylashishi o‘rganiladigan masalalar.

Birinchi tip masalalar uch holni ko‘zda tutadi:

- ikkala ildiz m dan kichik
- bitta ildiz m dan kichik, ikkinchisi katta;
- ikkala ildiz m dan katta.

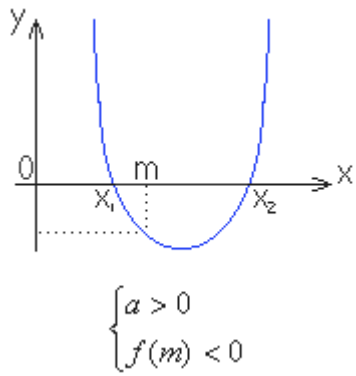
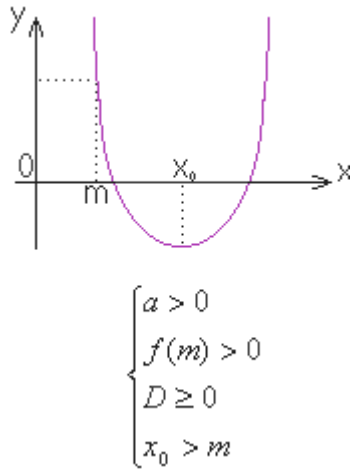
Har bir hol uchun chizma va tegishli $f(x) = ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhad bosh koefitsienti musbat bo‘lgan shartda tengsizliklar sistemasini yozamiz. Quyida keltirilgan jadvalda tenglama ildizlarining tenglama koefitsientlariga bog‘liq ifodalar qiymatlariga bog‘liq holda joylashishining barcha hollari keltirilgan.

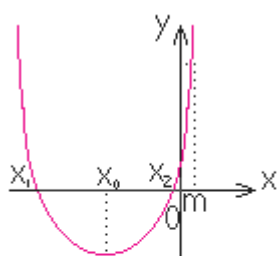
2.Kvadrat uchhad ildizlarining kesmaga nisbatan joylashish hollarini qaraymiz. Bunda uchta hol bo‘lishi mumkin:

- Kvadrat uchhad ildizlari kesmadan o‘ngda joylashgan;
- Kvadrat uchhad ildizlari kesmadan chapda joylashgan;
- Katta ildiz kesma ichida joylashgan ;
- Kichik ildiz kesma ichida joylashgan ;
- Ikkala ildiz kesma ichida joylashgan;
- Kesma kvadrat uchhad ildizlari orasida joylashgan.

Bu holatlarning har biri geometrik modelini tasvirlaymiz va ularning har biriga $f(x) = ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhad bosh koeffitsienti musbat bo‘lgan shartda tegishli tengsizliklar sistemasini tuzamiz.

1-jadval. Kvadrat uchhad ildizlarining joylashishi

 $\begin{cases} a > 0 \\ f(m) < 0 \end{cases}$	bitta ildiz m dan kichik, ikkinchisi katta $a > 0$ shart x^2 oldida musbat koeffitsient bo‘lishini ta’minlaydi (parabola tarmoqlari yuqoriga yo‘nalgan). $D \geq 0$ shart kvadrat uchhad ildizlari mavjudligini $f(m) < 0$ shart m nuqtaning ildizlar orasida joylashishini ta’minlaydi
 $\begin{cases} a > 0 \\ f(m) > 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 > m \end{cases}$	ikkala ildiz m dan katta $a > 0$ shart x^2 oldida musbat koeffitsient bo‘lishini ta’minlaydi $f(m) > 0$ shart m nuqtaning ildizlar orasidagi kesmadan tashqarida joylashishini ta’minlaydi • $D \geq 0$ shart kvadrat uchhad ildizlari mavjudligini ta’minlaydi $x_0 > m$ shart m nuqtaning ildizlar orasidagi kesmadan chapda joylashishini ta’minlaydi



$$\begin{cases} a > 0 \\ f(m) > 0 \\ x_0 < m \\ D \geq 0 \end{cases}$$

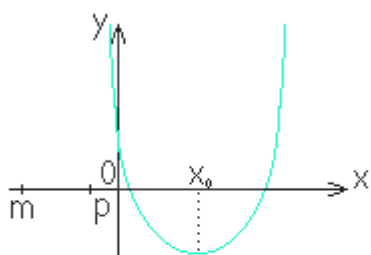
ikkala ildiz m dan kichik

$a > 0$ shart x^2 oldida musbat koeffitsient bo'lishini ta'minlaydi

$f(m) > 0$ shart m nuqtaning ildizlar orasidagi kesmadan tashqarida joylashishini ta'minlaydi

$D \geq 0$ shart kvadrat uchhad ildizlari mavjudligini ta'minlaydi

$x_0 < m$ shart m nuqtaning ildizlar orasidagi kesmadan o'ngda joylashishini ta'minlaydi



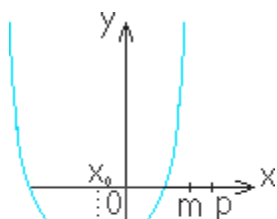
$$\begin{cases} a > 0 \\ f(p) > 0 \\ x_0 > p \\ D > 0 \end{cases}$$

Kvadrat uchhad ildizlari kesmadan o'ngda joylashgan

$f(p) > 0$ shart m nuqtaning ildizlar orasidagi kesmadan tashqarida joylashishini ta'minlaydi

$D \geq 0$ shart kvadrat uchhad ildizlari mavjudligini ta'minlaydi

$x_0 > p$ shart m nuqtaning kesmaning uchining absissasidan chapda joylashishini ta'minlaydi



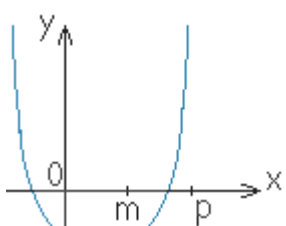
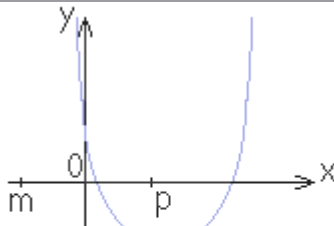
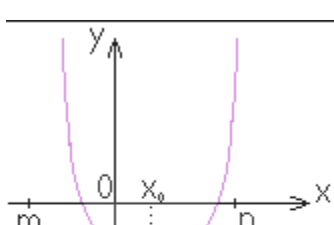
$$\begin{cases} a > 0 \\ f(m) > 0 \\ x_0 < m \\ D > 0 \end{cases}$$

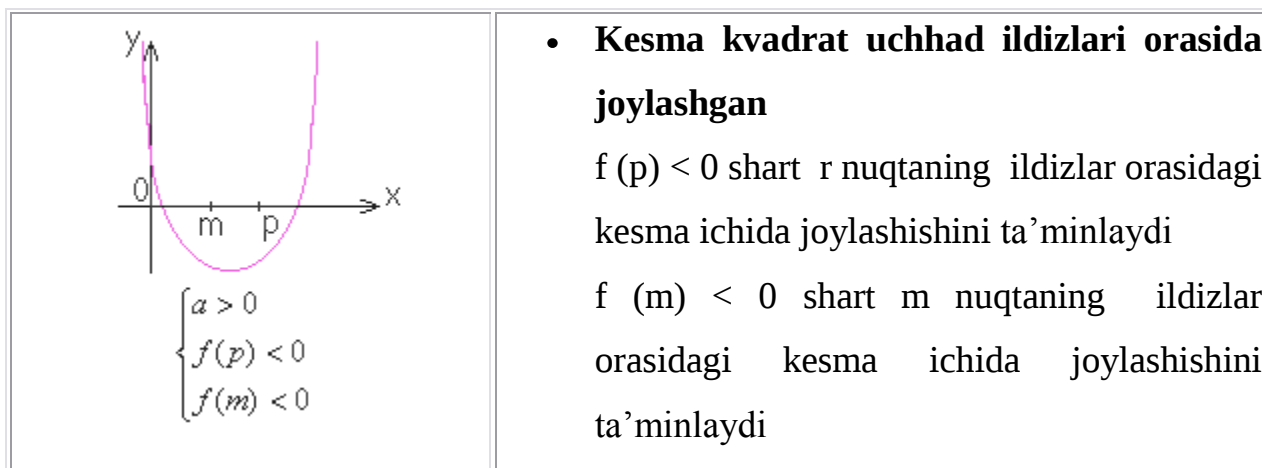
• Kvadrat uchhad ildizlari kesmadan chapda joylashgan

$f(m) > 0$ shart m nuqtaning ildizlar orasidagi kesmadan tashqarida joylashishini ta'minlaydi

$D > 0$ shart kvadrat uchhad ildizlari mavjudligini ta'minlaydi

$x_0 < m$ shart m nuqtaning kesmaning uchining absissasidan o'ngda joylashishini ta'minlaydi

	ta'minlaydi
 $\begin{cases} a > 0 \\ f(m) < 0 \\ f(p) > 0 \end{cases}$	Katta ildiz kesma ichida joylashgan $f(m) < 0$ shart m nuqtaning ildizlar orasidagi kesma ichida joylashishini ta'minlaydi $f(p) > 0$ shart r nuqtaning ildizlar orasidagi kesmadan tashqarida joylashishini ta'minlaydi
 $\begin{cases} a > 0 \\ f(p) < 0 \\ f(m) > 0 \end{cases}$	Kichik ildiz kesma ichida joylashgan $f(p) < 0$ shart r nuqtaning ildizlar orasidagi kesma ichida joylashishini ta'minlaydi $f(m) > 0$ shart m nuqtaning ildizlar orasidagi kesmadan tashqarida joylashishini ta'minlaydi
 $\begin{cases} a > 0 \\ f(m) > 0 \\ f(p) > 0 \\ m < x_0 < p \\ D > 0 \end{cases}$	Ikkala ildiz kesma ichida joylashgan $f(m) > 0$ shart m nuqtaning ildizlar orasidagi kesmadan tashqarida joylashishini ta'minlaydi $f(p) > 0$ shart r nuqtaning ildizlar orasidagi kesmadan tashqarida joylashishini ta'minlaydi $D > 0$ shart kvadrat uchhad ildizlari mavjudligini ta'minlaydi $m < x_0 < p$ shart parabola uchi absissasining kesma uchlari orasida joylashishini ta'minlaydi



Har bir tipdagi bir nechta masalalar yechishda bu shartlardan foydalanishga misollar keltiramiz.

1-masala. a parametrning qanday qiymatlarida $ax^2 + (2a - 1)x + a - 1 = 0$ tenglamaning ildizlari 1 dan kichik?

Yechish. x^2 oldida musbat koeffitsient bo'lishiga ishonch hosil qilish uchun tenglamani parametrga ko'paytiramiz.

$$a^2x^2 + (2a - 1)ax + a(a - 1) = 0$$

Quyidagi shartlar bajarilishi lozim:

$$\begin{cases} f(1) > 0 \\ x_0 < 1 \\ D \geq 0 \end{cases}$$

$f(1) > 0$ birinchi shartni qaraymiz:

$$a^2 + (2a - 1)a + a(a - 1) > 0$$

$$4a^2 - 2a > 0$$

$$2a(2a - 1) > 0$$

Bu tengsizlik yechimlari $a \in (-\infty; 0) \cup (0.5; +\infty)$ dan iborat.

Uchining absissasi 1 dan kichik bo'lishi lozim:

$$\frac{-a(2a - 1)}{2a^2} < 1$$

Bu esa

$$\frac{1 - 4a}{2a} < 0$$

ga teng kuchli. $a \in (-\infty; 0) \cup (0.25; +\infty)$ ni olamiz

Berilgan tenglama diskriminatini topamiz

$$D = (2a - 1)^2 a^2 - 4(a - 1)a^3$$

$$D \geq 0$$

$$4a^4 - 4a^3 + a^2 - 4a^4 + 4a^3 \geq 0$$

$a^2 \geq 0$, bundan $a \in \mathbb{R}$ ekanligi kelib chiqadi. Uchta olingan oraliqdan umumiy yechimni topamiz.

Javob: pri $a \in (-\infty; 0) \cup (0.5; +\infty)$ dar tenglama ildizlari 1 dan katta.

2-masala. a parametrning qanday qiymatlarida $x^2 + ax + 1 - a^2 = 0$ tenglamaning ildizlari $(-1; 1)$ oraliqqa tegishli bo'ladi?

Masalani yechish uchun quyidagi sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(1) < 0 \\ D \geq 0 \\ -1 < x_0 < 1 \end{cases}$$

Agar $f(-1) > 0$ bo'lsa, u holda $1 - a + 1 - a^2 > 0$

$$a^2 + a - 2 < 0, \quad a \in (-2; 1)$$

Agar $f(1) < 0$ bo'lsa, u holda $1 + a + 1 - a^2 < 0$

$$a^2 - a - 2 < 0; \quad a \in (-1; 2)$$

Diskriminant

$$\frac{a^2 - 4(1 - a^2)}{2} \geq 0$$

shartda nomanfiy bo'ladi

$$5a^2 \geq 4; \quad a^2 \geq 0.4; \quad a \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; +\infty\right)$$

Oxirgi shart: uchi modul bo'yicha 1 dan kichik

$$-1 < \frac{-a}{2} < 1$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + 1 > 0 \\ \frac{a}{2} - 1 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a > -2 \\ a < 2 \end{cases}$$

$$a \in (-2; 2)$$

Quyidagi sistemani olamiz:

$$\begin{cases} a \in (-2; 1) \\ a \in (-1; 2) \\ a \in (-2; 2) \\ a \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; +\infty\right) \end{cases}$$

Javob: $a \in \left(-1; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; 2\right)$ da tenglamaning ildizlari $(-1; 1)$ oraliqqa tegishli bo'ladi.

3-masala. a parametrning qanday qiymatlarida $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$ tenglamaning barcha ildizlari $0 < x < 3$ shartni qanoatlantiradi?

Yechish. $a = 1$ - a parametrning nazorat qiymati. Agar $a = 1$ bo'lsa, u holda $-2x + 1 = 0$; $x = 0,5$.

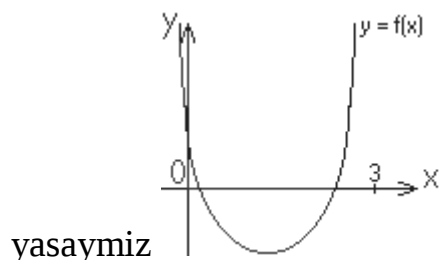
Bu ildiz $0 < x < 3$ shartni qanoatlantiradi, demak, yechim bo'ladi.

agar $a \neq 1$ bo'lsa, u holda $(a - 1)$ ga ko'paytirishimiz mumkin.

Tenglama $(a - 1)x^2 - (a - 1)x + a(a - 1) = 0$ ko'rinishni oladi.

$f(x) = (a - 1)x^2 - (a - 1)x + a(a - 1)$ funksiyani kiritamiz va topshiriqni quyidagicha qayta bayon etamiz: a parametrning qanday qiymatlarida funksiya nollari $(0; 3)$ oraliqqa tegishli bo'ladi?

Bu shart uchun sistema tuzamiz va parabolaning sxematik ko'rinishini



$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(3) > 0 \\ D \geq 0 \\ 0 < x_0 < 3 \end{cases}$$

$$f(0) > 0; f(0) = a(a - 1); a(a - 1) > 0; a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$$

$$f(3) > 0; f(3) = 9(a - 1)^2 - 3(a^2 - 1) + a(a - 1) = 7(a - 1)\left(a - \frac{12}{7}\right)$$

$$(a - 1)\left(a - \frac{12}{7}\right) > 0; a \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{12}{7}; +\infty\right)$$

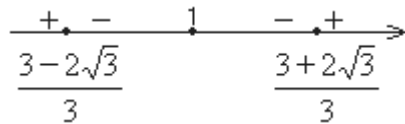
$$D \geq 0; D = (a^2 - 1)^2 - 4(a - 1)^3; (a^2 - 1)^2 - 4(a - 1)^3 \geq 0$$

Barcha almashtirishlardan so'ng: $(a - 1)^2(3a^2 - 6a - 1) \leq 0$

Tengsizlik o'ng tomonini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$-3a^2 + 6a + 1 = 0; \quad D = 36 + 12 = 48$$

$$a_{1,2} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}; \quad 3(a - 1) \left(a - \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \right) \left(a - \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \right) \leq 0$$



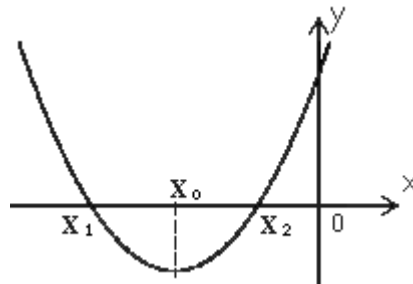
$$a \in \left[\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}; \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \right] \quad 0 < x_0 < 3$$

$$x_0 = \frac{a^2 - 1}{2(a - 1)}$$

Berilgan tengsizlikdan:

$$\begin{cases} \frac{a+1}{2(a-1)} > 0 \\ \frac{a+1}{2(a-1)} < 3 \end{cases} \begin{cases} a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ \frac{7-5a}{2(a-1)} < 0 \end{cases} \begin{cases} a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ a \in (-\infty; 1) \cup (\frac{7}{5}; +\infty) \end{cases} \quad a \in (-\infty; -1) \cup (\frac{7}{5}; +\infty)$$

sistemani olamiz.



Olingan yechimlarni birlashtirib quyidagi sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \\ a \in (-\infty; 1) \cup (\frac{12}{7}; +\infty) \\ a \in \left[\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}; \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \right] \\ a \in (-\infty; -1) \cup (\frac{7}{5}; +\infty) \end{cases}$$

Javobda sistemaning yechimi yoziladi.

Javob: $a \in \{1\} \cup \left(\frac{12}{7}; \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$ da tenglamaning barcha yechimlari $0 < x < 3$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

4-masala. p parametrning qanday qiymatlarida $x^2 + 2(p + 1)x + 9p - 5$ tenglamaning ikkala ildizi manfiy bo'ladi?

1-usul. x_1 va x_2 –berilgan uchhadning ildizlari bo'lsin. U holda Viet teoremasiga asosan:

$$x_1 \cdot x_2 = 9p - 5$$

$$x_1 + x_2 = -2(p + 1)$$

Diskriminantni topamiz:

$$D = 4(p^2 - 7p + 6)$$

Shartga ko'ra ildizlar mavjud va har xil bo'lgani $D > 0$. Ikkala ildiz manfiy bo'lgani uchun sistema tuzamiz:

$$\begin{cases} p^2 - 7p + 6 > 0 \\ 9p - 5 > 0 \\ -2(p + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \in (-\infty; 1) \cup (6; +\infty) \\ p > \frac{5}{9} \\ p > -1 \end{cases} \Leftrightarrow p \in \left(\frac{5}{9}; 1\right) \cup (6; +\infty)$$

$p \in \left(\frac{5}{9}; 1\right) \cup (6; +\infty)$ da ikkala ildiz manfiy bo'ladi.

2-usul. $f(x) = x^2 + 2(p + 1)x + 9p - 5$ funksiyani qaraymiz. funksiyaning grafigi yuqoriga yo'nalgan parabola va manfiy nollarga ega funksiya.

Sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(0) > 0 \\ x_0 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \in (-\infty; 1) \cup (6; +\infty) \\ p > \frac{5}{9} \\ p > -1 \end{cases} \Leftrightarrow p \in \left(\frac{5}{9}; 1\right) \cup (6; +\infty)$$

Javob: $p \in \left(\frac{5}{9}; 1\right) \cup (6; +\infty)$ da ikkala ildiz manfiy.

5-masala. a parametrning qanday qiymatlarida $2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$ tenglamaning bitta ildizi 1 dan katta, ikkinchisi 1 dan kichik bo'ladi?

Shartga ko'ra tenglama ikkita ildizga ega bo'lishi lozim, ya'ni tenglama kvadrat tenglama bo'lishi lozim, ya'ni $a \neq 0$ – nazorat qiymat

agar $a = 0$ bo'lsa, u holda $x = -1$ topshriqni qanoatlantirmaydi

agar $a \neq 0$ bo'lsa, u holda ikkala tomonini $2a$ ga bo'lamiz:

$$x^2 - \frac{1}{a}x - \frac{3a+2}{2a} = 0$$

$$D = \frac{1}{a^2} + \frac{4(3a+2)}{2a} = \frac{1}{a^2} + \frac{6a+4}{a} = \frac{6a^2+4a+1}{a^2}$$

$$D > 0; 6a^2 + 4a + 1 > 0$$

Bu tengsizlikni echib a – noldan tashqari ixtiyoriy son.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ f(1) < 0 \end{cases}$$

$$f(1) = \frac{-a-4}{2a}$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \frac{-a-4}{2a} < 0 \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi $a \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$ oraliqdan iborat

Javob: $a \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$ da tenglamaning bitta ildizi 1 dan katta, ikkinchisi 1 dan kichik bo'ladi

6-masala. a parametrning qanday qiymatlarida $ax^2 - 2(a-1)x + 2 - 3a = 0$ tenglamaning ikkala ildizi 1 dan katta bo'ladi?

Yechish. $a = 0$ – nazorat qiymat

agar $a = 0$ bo'lsa, u holda tenglama bitta ildizga ega,

agar $a \neq 0$ bo'lsa, u holda tenglamaning ikkala tomonini a ga bo'lamiz:

$$x^2 - \frac{2(a-1)}{a}x + \frac{2-3a}{a} = 0$$

$$f(x) = x^2 - \frac{2(a-1)}{a}x + \frac{2-3a}{a} = 0$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ f(1) > 0 \\ D > 0 \\ x_0 > 1 \end{cases}$$

$$\frac{D}{4} = \frac{(a-1)^2}{a^2} - \frac{2-3a}{a} = \frac{a^2 - 2a + 1 - 2a + 3a^2}{a^2} = \frac{4a^2 - 4a + 1}{a^2} = \frac{(2a-1)^2}{a^2}$$

$$\frac{D}{4} > 0$$

Noldan tashqari ixtiyoriy a da

$$f(1) = 1 - \frac{2(2a-1)}{a} + \frac{2-3a}{a} = \frac{a-4a+2+2-3a}{a} = \frac{-6a+4}{a}$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2(a-1)}{2a} = \frac{a-1}{a}$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \frac{-6a+4}{a} > 0 \\ \frac{a-1}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \in (0; \frac{2}{3}) \\ a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset$$

Javob: a parametrning tenglamaning ikkala ildizi 1 dan katta bo'ladigan qiymatlari mavjud emas,

7-masala. a parametrning qanday qiymatlarida $(a-1)x^2 - 2ax + 2 - 3a = 0$ tenglamaning $x > 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi yagona yechimi mavjud bo'ladi

Yechish. Bosh koeffitsient $a = 1$ da nolga aylanadi

$a = 1$ - parametrning nazorat qiymati

agar $a = 1$ bo'lsa, u holda $-2x + 2 - 3 = 0$ $x = -0.5$

Tenglama yagona yechimga ega, lekin topshiriq shartni qanoatlantirmaydi.

agar $a \neq 1$ bo'lsa, u holda $(a-1)$ ga bo'lamiz:

$$x^2 - \frac{2ax}{a-1} + \frac{2-3a}{a-1} = 0$$

$$f(x) = x^2 - \frac{2ax}{a-1} + \frac{2-3a}{a-1}$$

funksiyani qaraymiz.

$$\begin{cases} \frac{D}{4} \geq 0 \\ f(1) < 0 \end{cases}$$

$$\frac{D}{4} = \frac{a^2}{(a-1)^2} - \frac{2-3a}{a-1} = \frac{4a^2 - 5a + 2}{(a-1)^2}$$

$$\frac{D}{4} \geq 0$$

shartlar bajarilishi lozim, bunda $a = 1$ dan tashqari ixtiyoriy son.

$$f(1) = 1 - \frac{2a}{a-1} + \frac{2-3a}{a-1} = \frac{-4a+1}{a-1}$$

sistema o'rinli bo'lishi lozim:

$$\begin{cases} a \neq 1 \\ \frac{-4a+1}{a-1} < 0 \end{cases}$$

$$a \in (0.25; 1)$$

Javob: $a \in (0.25; 1)$ da tenglama $x > 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi yagona yechimga ega.

Savol va topshiriqlar:

1. Kvadratik funksiya grafigi bilan bog'liq masalalar tiplarini ayting.
2. Kvadrat uchhad ildizlarining kesmaga nisbatan joylashishining qanday hollari bor va ularni tushuntiring.
3. Tipik masalalar yechishda shartlardan foydalanishga doir bir nechta misollarni echinng va xulosalar chiqaring.

4-§. Parametrli kasr ratsional tenglamalar

Reja:

1. Kasr ratsional tenglamalarni yechish.
2. Parametrli kasr ratsional tenglamalarni yechish algoritmi.

Adabiyotlar: [7],[9], [11], [14].

Tayanch iboralar: kasr ratsional tenglama, parametr, algoritmi, chet ildizlar, bir noma'lumli, misollar.

Parametrli kasr-ratsional tenglamalarni yechish algoritmi.

- 1) tenglamani ayniy almashtirishlar yordamida standart holatga keltiring (zarurat bo'lsa).
- 2) parametrning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamini toping; parametrning bu to'plamga kirmaydigan barcha qiymatlarida tenglama aniqlanmagan.
- 3) tenglamaning aniqlanish sohasini toping, ya'ni kasr-ratsional ifoda x ning qanday qiymatlarida nolga aylanmasligini aniqlang.
- 4) kasrning suratini nolga tenglab hosil bo'lgan parametrli kvadrat yoki chiziqli tenglamani yeching.
- 5) parametrning qanday qiymatlarida 4-qadamda yechilgan tenglamaning ildizlari kasr-ratsional tenglama uchun chet ildizlar bo'lishini aniqlang.
- 6) parametrning 5-qadamda topilgan har bir qiymatida hosil bo'lgan bir o'zgaruvchili kasr-ratsional tenglamalarni yeching.

7) parametrning barcha qiymatlari oraliqlarida topilgan yechimlarni hisobga olib, tenglamaning umumiy yechimini yozing.

3. Parametrli kasr-ratsional tengsizliklarni yechish algoritmi:

Bunday tengsizliklarni yechishda kasrning quyidagi xossalardan foydalanamiz: 1)kasr musbat bo'lishi uchun uning surat va maxrajining bir xil ishorali bo'lishi zarur va yetarlidir; 2)kasr manfiy bo'lishi uchun uning surat va maxraji turli xil ishorali bo'lishi zarur va yetarlidir; 3)noqat'iy kasr tengsizliklarda surat nolga teng bo'lishi mumkin.

1) tengsizlikni ayniy almashtirishlar yordamida standart holatga keltiring(zarurat bo'lsa).

2)parametrning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamini toping; parametrning bu to'plamga kirmaydigan barcha qiymatlarida tengsizlik aniqlanmagan.

3) tengsizlikning aniqlanish sohasini toping, yani kasr- ratsional ifoda x ning qanday qiymatlarida nolga aylanmasligini aniqlang.

4) ikkita tengsizliklar sistemalari to'plamini tuzing.

5) hosil bo'lgan tengsizliklarni yecib, har bir sistema uchun yechimlarining kesishmalarini aniqlahg.

6) parametrning mos qiymatlarida tengsizliklar sistemalarning yechimlari birlashmasini toping.

7) parametrning barcha qiymatlari oraliqlarida topilgan yechimlarni hisobga olib, tengsizlikning umumiy yechimini yozing.

Kasr ratsional tenglamalarni yechishda chet ildizlar paydo bo'lishi mumkin. Bunday holat parametrli kasr ratsional tenglamalar bilan ham ro'y berishi mumkin. Bir noma'lumli parametrli kasr ratsional tenglamalarni yechishga doir misollar qaraymiz

1-misol. $\frac{x-a}{x-1} = 0$ tenglamani eching.

Yechish: Berilgan tenglama

$$\begin{cases} x - a = 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

sistemaga tengkuchli.

$x = a$ –yagona ildiz. $x \neq 1$ shart $a \neq 1$ talabni ham o‘zi bilan ergashtiradi. Demak, agar $a \neq 1$ bo‘lsa, u holda $x = a$; agar $a = 1$ bo‘lsa, u holda tenglama yechimlarga ega emas.

Javob. Agar $a \neq 1$ bo‘lsa, u holda $x = a$; agar $a = 1$ bo‘lsa, u holda tenglama tenglama yechimlarga ega emas.

2-misol. Qanday a larda $\frac{x^2-ax+1}{x+3} = 0$ tenglama yagona yechimga ega?

Yechish: Berilgan tenglama
$$\begin{cases} x^2 - ax + 1 = 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

sistemaga teng kuchli. Kvadrat tenglamani echamiz $x^2 - ax + 1 = 0$.

$D = a^2 - 4$. Agar $D = 0$ bo‘lsa, u holda tenglama yagona yechimga ega.

1) $D = 0$, $a = \pm 2$ da. Agar $a = \pm 2$ bo‘lsa, u holda tenglama yagona yechimga ega

$$x = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

2) Agar $a \neq \pm 2$ bo‘lsa, u holda $D > 0$ va tenglama ikkita ildizga ega, ulardan biri $x = -3$. Parametrning qanday qiymatida tenglamaning ildizi -3 ga teng bo‘lishini tekshiramiz. Tenglamaga $x = -3$ ni qo‘yamiz, $a = -10/3$ ni olamiz. Demak, $a = -10/3$ da $x = -3$ –tenglama ildizi, a ning bunday qiymatida tenglamaning ikkinchi ildizi -3 dan farq qiladi. Demak, $a = -10/3$ da tenglama bitta ildizga ega bo‘ladi.

Javob. Tenglama $a = \pm 2$ yoki $a = -10/3$ da yagona yechimga ega..

3-misol. a ning qanday qiymatlarida

$$\frac{a-1}{x+6} = \frac{2x+7}{(x+2)^2 - x - 22}$$

tenglamaning barcha yechimlari nomusbat bo‘ladi?

Yechish: Kvadrat uchhad ikkinchi kasr maxrajida almashtirishlar va ko‘paytuvchilarga ajratishdan so‘ng:

$$x^2 + 3x - 18 = (x-3)(x+6).$$

ko‘rinishni oladi. Berilgan tenglamani endi

$$\frac{a-1}{x+6} = \frac{2x+7}{(x-3)(x+6)}.$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Berilgan tenglamani quyidagicha almashtiramiz:

$$\frac{(a-1)(x-3)-(2x+7)}{(x-3)(x+6)}=0, \frac{ax-x-3a+3-2x-7}{(x-3)(x+6)}=0, \frac{(a-3)x-(3a+4)}{(x-3)(x+6)}=0.$$

$$\begin{cases} (a-3)x = 3a+4, \\ x \neq -6, x \neq 3. \end{cases}$$

teng kuchli sistemaga o'tamiz

1) Agar $a-3=0$, ya'ni $a=3$ bo'lsa, u holda sistema tenglamasi $0x=13$ ko'rinishni oladi va yechimlarga ega bo'lmaydi.

$$2) \text{ Agar } a \neq 3 \text{ bo'lsa, u holda } x = \frac{3a+4}{a-3}.$$

Bizni nomusbat yechimlar qiziqtirgani uchun a parametrning izlangan qiymatlarini topamiz, buning uchun

$$\begin{cases} \frac{3a+4}{a-3} \leq 0, \\ \frac{3a+4}{a-3} \neq -6. \end{cases}$$

sistemani echamiz ($x \neq 3$ ni qaramaymiz, chunki bizni nomusbat yechimlar qiziqtiradi).

$$\begin{cases} 3a+4 \leq 0, \\ a-3 > 0, \\ 3a+4 \neq -6a+18. \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} 3a+4 \geq 0, \\ a-3 < 0, \\ 3a+4 \neq -6a+18. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq -4/3, \\ a > 3, \\ a \neq 14/9. \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} a \geq -4/3, \\ a < 3, \\ a \neq 14/9. \end{cases}$$

larga ega bo'lamiz. Birinchi sistema yechimlarga ega emas.

$$\text{Javob. } -4/3 \leq a < 14/9 \text{ yoki } 14/9 < a < 3.$$

Parametrli kasr ratsional tenglamalarni yechish algoritmi

- 1) Tenglamani butun ko‘rinishga keltirish;
- 2) chiziqli va kvadrat tenglamalarni yechish algoritmini qo‘llab butun tenglamaning yechimini parametrning har bir tayinlangan qiymatida tekshirish;
- 3) Maxrajni chet ildizlar mavjudligiga tekshirish (parametrning qanday qiymatlarida olingan ildizlar maxrajni nolga aylantirishnin aniqlash);
- 3) Parametrning qiymatlariga bog‘liq ravishda oldin olingan natijalarni yig‘ib parametrning tayinlangan qiymatlari uchun javobni yozish.

4-misol. $\frac{x}{x-2} = 1 + \frac{m}{x}$ tenglamani x ga nisbatan eching.

Yechish: Tenglamaning ikkala tomonini $x(x-2)$ – kasrlar umumiy maxrajiga ko‘paytirib $(m-2)x = 2m$ butun tenglamani olamiz, u $x(x-2) \neq 0$ shartda berilgan tenglamaga teng kuchli bo‘ladi. Buni :

$$\begin{cases} (m-2)x = 2m, \\ x(x-2) \neq 0. \end{cases}$$

sistema ko‘rinishida yozish mumkin. $(m-2)x = 2m$ tenglamani echamiz.

- 1) Agar $m = 2$ bo‘lsa, u holda tenglama $0x = 4$ ko‘rinishni oladi va ildizlarga ega bo‘lmaydi;

- 2) Agar $m \neq 2$ bo‘lsa, u holda tenglama $x = \frac{2m}{m-2}$ yagona ildizga ega bo‘ladi.

$\frac{2m}{m-2}$ kasr $m \neq 2$ da turli qiymatlar qabul qilishi mumkin. Maxraj nolga teng

bo‘ladigan qiymatlarni chiqarib tashlaymiz:

$x(x-2) = 0$ bo‘lsa, u holda $\frac{2m}{m-2}(\frac{2m}{m-2} - 2) = 0$, $\frac{2m}{m-2} = 0$ yoki $\frac{2m}{m-2} - 2 = 0$. Ni

hech qanday m larda bajarilmaydi. Demak, tenglama ildizi $m = 0$ da $x = \frac{2m}{m-2}$ (u holda $x = 0$ ni olamiz) berilgan tenglamaning chet ildizi, chunki u maxrajni nolga aylantiradi.

Javob. $m \neq 0$ va $m \neq 2$ da tenglama yagona yechimga ega $x = \frac{2m}{m-2}$;

$m = 0$ yoki $m = 2$ da tenglama ildizlarga ega emas.

5-misol. b parametrning qanday qiymatlarida tenglama $\frac{b^2x}{x+b} = \frac{x-b}{x-2}$

tenglama: a) ikkita ildizga; b) yagona ildizga ega bo'ladi?

Yechish: Tenglamani ikkala tomonini $(x+b)(x-2)$ – kasrlar umumiy maxrajiga ko'paytirib:

$$\begin{cases} (b^2 - 1)x^2 - 2b^2x + b^2 = 0, \\ (x+b)(x-2) \neq 0; \end{cases}$$

ni olamiz. Agar $b^2 - 1 = 0$ bo'lsa, ya'ni $b = \pm 1$ u holda tenglama $-2b^2x + b^2 = 0$ ko'rinishni oladi va yagona ildiz ega bo'ladi $x = \frac{1}{2}$.

Agar $b \neq \pm 1$ bo'lsa, u holda tenglama kvadrat tenglama bo'ladi: $(b^2 - 1)x^2 - 2b^2x + b^2 = 0$ va diskriminantga bog'liq ravishda ildizlarga ega bo'ladi.

D_1 ni topamiz $D_1 = b^4 - b^2(b^2 - 1) = b^2$, $b^2 \geq 0$ bo'lgani uchun, ixtiyoriy $b \neq \pm 1$ da $D_1 \geq 0$, demak tenglama $b \neq \pm 1$ da hamma vaqt yechimga ega

$$1) \text{ Agar } D_1 > 0 \text{ bo'lsa, u holda } x_{1,2} = \frac{b^2 \pm b}{b^2 - 1}, x_1 = \frac{b}{b-1}, x_2 = \frac{b}{b+1}.$$

$(x+b)(x-2)$ maxrajning nolga tengligini tekshiramiz:

$$\text{Agar } x = \frac{b}{b-1} \text{ bo'lsa, u holda } (b + \frac{b}{b-1})(\frac{b}{b-1} - 2) = 0, \frac{b^2 - b + b}{b-1} = 0 \text{ yoki } \frac{b - 2b + 2}{b-1} = 0, b = 0 \text{ yoki } b = 2. \text{ Maxraj } b = 0 \text{ yoki } b = 2 \text{ da nolga aylanadi.}$$

$$\text{Agar } x = \frac{b}{b+1} \text{ bo'lsa, u holda } (\frac{b}{b+1} + b)(\frac{b}{b+1} - 2) = 0, b = 0 \text{ yoki } b = -2.$$

Maxraj $b = 0$ yoki $b = -2$ da nolga aylanadi.

Demak, tenglama $b \neq 0$ va $b \neq -2$ va $b \neq \pm 1$ ikkita ildizga ega bo'ladi.

Agar $D_1 = 0$ bo'lsa, u holda $b = 0$ bo'lsa, u holda tenglama bitta odin koren $x = 0$ ildizga ega bo'ladi, bu esa mumkin emas, chto nevozmojno, tak kak chunki agar $b = 0$ va $x = 0$ bo'lsa, u holda tenglama maxraji nolga teng va tenglama ma'noga ega emas. Demak, $b = \pm 1$, $b = 2$ yoki $b = -2$ larda bitta ildizga ega.

Javob. Tenglama $b \neq 0$ va $b \neq -2$ va $b \neq \pm 1$ larda ikkita ildizga ega; $b = \pm 1$ da, pri $b = 2$ yoki $b = -2$ da bitta ildizga ega.

Savol va topshiriqlar:

1. Kasr ratsional tenglamalar deb nimaga aytiladi?
2. Kasr ratsional tenglamalarni yechishning qanday usullarini bilasiz?
3. Parametrli kasr ratsional tenglamalarni yechish algoritmi bir misolda tushuntirib bering.

5-§. Parametrli ba'zi irratsional va nostandart tenglama va tengsizliklar.

Reja:

1. Parametrli ba'zi irratsional tenglama va tengsizliklar.
2. Parametrli nostandart tenglama va tengsizliklar.
3. Parametrli tenglama va tengsizliklarni grafik yechish usuli.

Adabiyotlar: [5],[9], [13], [17].

Tayanch iboralar: parametrli irratsional, tenglama, tengsizlik, nostandart tenglama va tengsizliklar, grafik yechish usuli, funksiya, aniqlanish sohasi

1. *Tenglamani eching:* $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$.

Yechish. Ikkala qismini kvadratga ko'taramiz ($x \geq 0$ shartda):

$$a - \sqrt{a + x} = x^2, \sqrt{a + x} = a - x^2.$$

Yana bir marta kvadratga ko'taramiz ($a - x^2 \geq 0$ shart bilan).

$$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0$$

tenglamaga ega bo'lamiz, uning yechimlari orasidan $x \geq 0, a - x^2 \geq 0$. shatlarni qanoatlantiruvchi yechimlarni ajratish kerak. Hosil qilingan tenglama x ga nisbatan to'rtinchi darajali, lekin a parametr ga nisbatan kvadrat tenglamadan iborat. Bu holatlardan foydalanishga harakat qilamiz

$$a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x = 0.$$

Diskriminantni topamiz:

$$D = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^4 + 4x = (2x + 1)^2.$$

Endi tenglamaning chap tomonini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$(a - x^2 - x - 1)(a - x^2 + x).$$

Bizning tenglama ikkiga ajraladi: $x^2 + x + 1 - a = 0$ i $x^2 - x - a = 0$,

Ularning har birini $x \geq 0, a - x^2 \geq 0$ shartlarda Yechish lozim.

$x^2 + x + 1 - a = 0$ tenglamadan boshlaymiz. $x + 1 = a - x^2$, bo'lgani uchun, u holda $x \geq 0$ dan $a - x^2 > 0$ kelib chiqadi. Demak, $x > 0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimlarni topish etarli; u holda $a - x^2 \geq 0$ tengsizlik albatta bajariladi. Lekin ildizlar yig'indisi (agar ular mavjud bo'lsa) -1 ga teng; demak, $x^2 + x + 1 - a = 0$ tenglama $1 - a \leq 0, a \geq 1$ shartda faqat bitta nomanfiy ildizga ega bo'lishi mumkin.

Demak, $a \geq 1$ da budet $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4a - 3})$ bo'ladi.

$x^2 - x - a = 0$ ikkinchi tenglamaga o'tamiz. Bu tenglamadan $-x = a - x^2$ kelib chiqadi. Chap tomoni musbat emas, o'ng tomoni nomanfiy. Tenglik faqat $a = 0, x = 0$ bo'lgandagina mumkin.

Javob. Agar $a \geq 1$ bo'lsa, u holda $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4a - 3})$;

agar $a = 0$ bo'lsa, u holda $x = 0$; boshqa qolgan a larda yechim yo'q.

2. *a* parametrning qanday qiymatlarida $x^2 + (a^2 + a - 2)x + a = 0$ tenglama yig'indisi nolgan teng ildizlarga ega?

Yechish. Bu tenglama kvadrat tenglama, uning diskriminanti

$$D = (a^2 + a - 2)^2 - 4a = a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 8a + 4.$$

ga teng. Tenglama ildizlari yig'indisi $-(a^2 + a - 2)$ ga teng va masala shartiga ko'ra nolga teng, ya'ni. $a^2 + a - 2 = 0$, bu esa faqat $a_1 = -2; a_2 = 1$ bo'lganda mumkin. Endi a ning bu qiymatlarida diskriminantning nomanfiyligini kuzatish zarur. $a = -2$ da diskriminant $D = 0 + 4 \cdot 2 = 8$ musbat, $a = 1$ da esa diskriminant $D = 0 - 4 = -4$ manfiy.

Javob. $a = -2$.

3. *a* parametrning qanday qiymatlarida $(a - 1)x^2 + (2a + 3)x + a + 2 = 0$ kvadrat tenglama bir xil ishorali ildizlarga ega?

Yechish. Masala shartiga ko'ra qaralayotgan tenglama kvadrat tenglama bo'lgani uchun $a \neq 1$ (masala talabi ma'noga ega bo'lmagan bo'lar edi). Rashanki, masala sharti kvadrat tenglama ildizlar mavjudligini ham faraz etadi, bu esa

diskriminantning nomanfiylikini bildiradi. Agar $D=0$ bo'lsa, u holda kvadrat tenglama bitta ildizga ega (ikkita teng ildizga) bo'ladi.

$$D = (2a + 3)^2 - 4(a - 1)(a + 2) = 8a + 17$$

Shartga ko'ra ildizlar bir xil ishorali bo'lishi lozimligidan

$$x_1 \cdot x_2 > 0, \text{ ya'ni. } \frac{a+2}{a-1} > 0 \text{ o'rinli bo'lishi lozim.}$$

Oxirgi tengsizlikning yechimi $a \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

$$D \geq 0 \left(a \geq -\frac{17}{8} \right) \text{ va } a \neq 1 \text{ shartlarni hisobga olib } a \in \left[-\frac{17}{8}; -2 \right) \cup (1; \infty) \text{ ni}$$

olamiz.

$$\text{Javob. } \left[-2\frac{1}{8}; -2 \right) \cup (1; \infty) [7].$$

4. a parametrning har bir nomanfiy qiymati uchun $4a^3x^4 + 4a^2x^2 + 32x + a + 8 \geq 0$ tengsizlikni eching.

Yechish. Tengsizlikning chap tomoni x ga hamda a parametrga nisbatan ko'phaddan iborat. Ularning darajalari mos ravishda 4 va 3 ga teng. Lekin ko'phadni a ga ko'paytirib, so'ngra $y = ax$ almashtirishni bajarilsa, u holda yangi ko'phadda a parametrning maksimal darajasi 2 ga teng bo'ladi. $a = 0$ hol bizga $x \geq -\frac{1}{4}$ javobni beradi. Endi $a > 0$ deb hisoblaymiz. Tengsizlikning ikkala qismini

a ga ko'paytirib, keyin $y = ax$ almashtirishni bajarsak

$$4y^4 + 4ay^2 + 32y + a^2 + 8a \geq 0.$$

ni olamiz. Uning chap qismi a ga nisbatan kvadrat uchhaddan iborat:

$$a^2 + (4y^2 + 8)a + 4y^4 + 32y \geq 0,$$

diskriminati

$$\frac{1}{4}D = (2y^2 + 4)^2 - 4y^4 - 32y = 16(y - 1)^2.$$

tengsizlikning chap qismini ko'paytuvchilarga ajratsak

$$(a + 2y^2 + 4y)(a + 2y^2 - 4y + 8) \geq 0,$$

yoki

$$(2y^2 + 4y + a)(2y^2 - 4y + 8 + a) \geq 0.$$

ni olamiz. Ikkinchi ko'paytuvchi $a > 0$ da barcha y larda musbat, $2y^2 + 4y + a \geq 0$ tengsizlikka kelamiz, bundan agar $0 < a < 2$ bo'lsa, $y \leq \frac{1}{2}(-2 - \sqrt{4 - 2a})$; agar $a \geq 2$ bo'lsa, y - ixtiyoriy. x ga qaytib, javobni olamiz.

Javob. Agar $a = 0$ bo'lsa, u holda $x \geq -\frac{1}{4}$;

agar $0 < a < 2$ bo'lsa, u holda $x \leq \frac{1}{2a}(-2 - \sqrt{4 - 2a})$;

agar $a \geq 2$ bo'lsa, u holda x - ixtiyoriy.

5. *a parametrning*

$$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \log_5(x^2 + ax + 6) + \log_a 3 \geq 0$$

tengsizlik o'rinli bo'ladigan x ning yagona qiymati mavjud bo'ladigan barcha qiymatlarini toping.

Yechish. $\sqrt{x^2 + ax + 5} = y$ ($y \geq 0$) deb belgilash kiritamiz va 5 asosga o'tamiz.

$$\frac{-\log_5(y+1)\log_5(y^2+1) + \log_5 3}{\log_5 a} \geq 0.$$

ni olamiz. Suratda joylashgan y ning funksiyasi monoton kamayadi. U nolga aylanadigan y ning qiymatini topish qiyin emas: $y = 2$.

Agar $0 < a < 1$ bo'lsa, u holda tengsizlikning y ga nisbatan yechimi $y \geq 2$ da iborat, demak berilgan tengsizlik yagona yechimga ega bo'lishi mumkin emas ($\sqrt{x^2 + ax + 5} \geq 2$ tengsizlik ixtiyoriy a da cheksiz ko'p yechimga ega.)

Demak, $a > 1$ va y ga nisbatan yechim $0 \leq y \leq 2$ dan iborat. x ga qaytib, $0 \leq x^2 + ax + 5 \leq 4$ ga ega bo'lamiz. Oxirgi tengsizliklarni qanoatlantiruvchi

yagona x ning qiymati mavjud bo'lishi uchun $x^2 + ax + 5$ kvadrat uchhadning eng kichik qiymati 4 ga teng bo'lishi, ya'ni $5 - \frac{a^2}{4} = 4$ bo'lishi zarur va etarli.

Javob. $a = 2$.

6. Har bir qiymatida $(p - x^2)(p + x - 2) < 0$ tengsizlikning yechimlar to'plami $x^2 \leq 1$ tengsizlikning birorta ham yechimini o'z ichiga olmaydigan p ning barcha qiymatlarini toping.

Yechish. SHunday barcha p larni topish kerakki, barcha $x^2 \leq 1$ larda $(p - x^2)(p + x - 2) \geq 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. Berilgan x da oxirgi tengsizlikning p ga nisbatan yechimi ikkita nurdan iborat, ularda uchlari x^2 va $-x + 2$ lardan bo'lgan kesmaning ichki qismi ajratib tashlanadi (ulardan qaysi biri chap, qaysi bir o'ng bo'lishi muhim emas). Lekin x o'zgaruvchi -1 dan 1 gacha o'zgaradi, u holda x^2 esa 0 dan 1 gacha, $-x + 2$ esa 1 dan 3 gacha o'zgaradi. Endi tushunarliki p 0 dan do 3 gacha qiymatlarni qabul qilolmaydi, barcha $p \leq 0$ yoki $p \geq 3$ larda berilgan shart bajariladi.

Javob. $p \leq 0, p \geq 3$.

Parametrli tenglama va tengsizliklarni grafik usulida yechish.

1. k parametrning qanday qiymatlarida $|x - 2k| + |4x + k| = 27$ tenglama 2 ta yechimga ega?

Yechish. $f(x) = |x - 2k| + |4x + k|$ funksiyani qaraymiz

Bunday funksiyaning grafigi uchta bo'g'indan iborat siniq chiziqdan iborat. Sinish nuqtalarini topamiz:

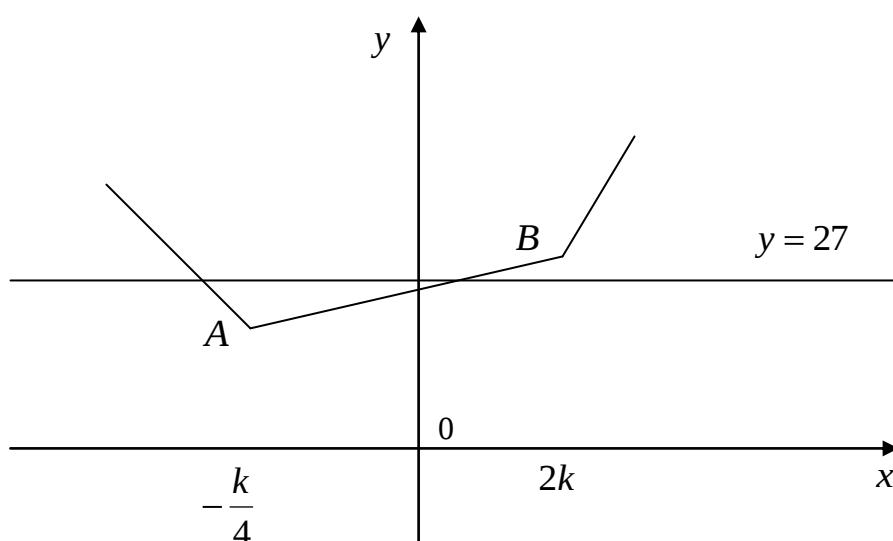
1) $x - 2k = 0$;

2) $4x + k = 0$.

$$f(2k) = |4 \cdot 2k + k| = 9|k|; \quad f\left(-\frac{k}{4}\right) = \left|-\frac{k}{4} - 2k\right| = \frac{9}{4}|k| \quad \text{bo'lgani uchun}$$

$A(2k; 9|k|)$ va $B\left(-\frac{k}{4}; \frac{9}{4}|k|\right)$ - sinish nuqtalari. Agar $x \rightarrow \infty$ sa, $f(x) \rightarrow \infty$ va $f(x)$ funksiya A yoki B nuqtalaridan birida minimumga ega.

Geometrik nuqtai nazardan $f(x) = 27$ tenglama yechimlar to'plami - bu k parametrning har bir tayinlangan qiymatida - uchta bo'g'indan iborat siniq chiziq va $y = 27$ to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalari sonidan iborat.



1-pacm

Rasmdan ko'rinadiki $f(x) = 27$ tenglama agara minimum nuqtada funksiya qiymati 27 dan kichik bo'lsa, ikkita yechimga ega bo'ladi. Bunda boshqa sinish nuqtasidagi qiymati muhim emas. Demak,

$$f(2k) < 27 \text{ yoki } f\left(-\frac{k}{4}\right) < 27.$$

tengsizliklardan birining bajarilishi zarur. $f(2k) = 9|k|$ bo'lgani uchun birinchi tengsizlik $9|k| < 27 \Leftrightarrow |k| < 3 \Leftrightarrow -3 < k < 3$ tengsizlikka teng kuchli. $f\left(-\frac{k}{4}\right) = \frac{9}{4}|k|$ bo'lgani uchun ikkinchi tengsizlik

$$\frac{9}{4}|k| < 27 \Leftrightarrow |k| < 12 \Leftrightarrow -12 < k < 12.$$

tengsizlikka teng kuchli. Olingan oraliqlar birlashmasi $(-12;12)$ oraliqdan iborat.

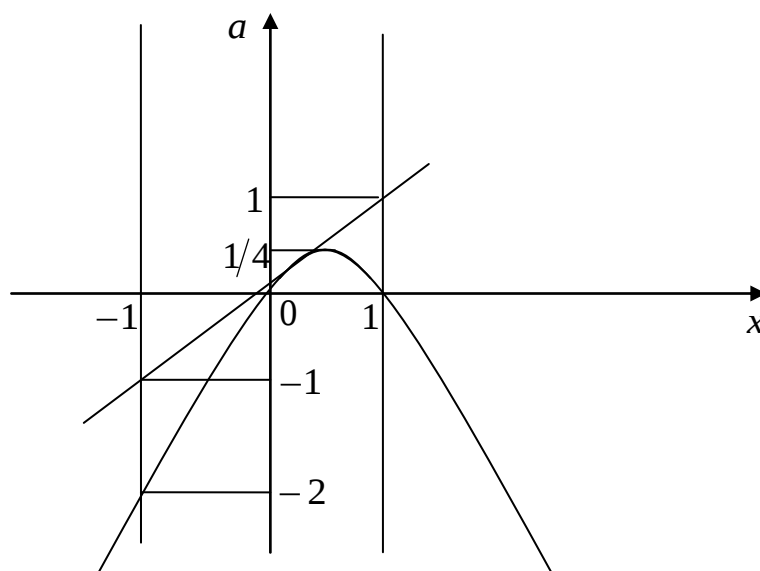
Javob. Tenglama $k \in (-12;12)$ da ikkita yechimga ega.

2. a parametrning ixtiyoriy qiymatida $\log_{x^2}(x-a) > 2$ tengsizlikni yeching.

Yechish. $(x; a)$ tekislikni qaraymiz va unda koordinatalari tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini tasvirlaymiz (2-rasm). Dastlab $\log_{x^2}(x-a)$ ifoda ma'noga ega bo'ladigan nuqtalar sohasini tasvirlaymiz. Bu $x-a > 0$ yarim tekislikdan iborat ($x-a=0$ to'g'ri chiziqdan o'ng va pastda joylashgan soha), undan $x=-1, x=1, x=0$ to'g'ri chiziqlar chiqarib tashlangan. $x=-1$ va $x=1$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan yo'lakdan tashqarida $x^2 > 1$ va demak, tengsizlikni potensirlagandan so'ng $x-a > x^2, a < x-x^2$ ni olamiz

Oxirgi tengsizlikka $a = x-x^2$ parabola ostidagi soha mos keladi (bunda $|x| < 1$).

($|x| < 1$) yo'lak ichida $a > x-x^2$. Rasmdan ko'rinadiki $\log_{x^2}(x-a) > 2$ nuqtalar uchun, $(a; x)$ soha shtrixlangan. ($a = x-x^2$ parabola $a = x$ to'g'ri chiziqqa urinadi). Endi a o'q $1, \frac{1}{4}, 0, -1, -2$ nuqtalar bilan oltita qismga ajratilgan, ularning har birida tengsizlik yechimini oson topish mumkin. Buning uchun tegishli qismdan a ni olamiz, gorizontaal to'g'ri chiziq o'tkazamiz, bu to'g'ri chiziqning kesmasining bu shtrixlangan sohaga tushgan uchlariga mos keluvchi x ning qiymatlarini topamiz.



2-rasm

Masalan, agar $-2 \leq a < -1$ bo'lsa, u holda ikkita kesma olamiz birinchisining uchlari: $x = 1$ va $x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a}$ ($x^2 - x + a = 0$ tenglamaning kichik ildizi), ikkinchisidiki: $x = 1$ va $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a}$.

Javob. Agar $a \geq 1$, $a = 0$ bo'lsa, u holda yechimlar yo'q;

agar $\frac{1}{4} < a < 1$ bo'lsa, u holda $a < x < 1$;

agar $0 < a \leq \frac{1}{4}$ bo'lsa, u holda $a < x < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a}$ va $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a} < x < 1$;

agar $-1 \leq a < 0$ bo'lsa, u holda $a < x < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a}$ va $1 < x < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a}$;

agar $-2 < a < -1$ bo'lsa, u holda $-1 < x < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a}$ va $1 < x < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a}$;

agar $a = -2$ bo'lsa, u holda $1 < x < 2$;

agar $a < -2$ bo'lsa, u holda $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a} < x < -1$ va $1 < x < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a}$.

Savol va topshiriqlar:

1. Parametrli ba'zi irratsional tenglama va tengsizliklarni yechishning qanday usullari mavjud?
2. Parametrli notandart tenglama va tengsizliklarni yechishda asosiy nimalarga e'tibor berish lozim?
3. Parametrli tenglama va tengsizliklarni grafik yechish usulini tushuntiring va bitta misolda uni qo'llab ko'rsating

6-§. Parametrli kvadrat tenglama va tengsizliklarni yechish**Reja:**

1. Parametrli kvadrat tenglama va tengsizliklar.
2. Noma'lum modul ostida qatnashgan parametrli kvadrat tenglama va tengsizliklarni yechish.
3. Parametr qatnashgan kvadrat tengsizliklar.
4. Tengsizliklarni oraliqlar usuli bilan yechish.
5. Noma'lum modul ostida qatnashgan kvadrat tengsizliklarni yechish.

Adabiyotlar: [8],[9], [11], [15].

Tayanch iboralar: parametrli kvadrat tenglama, tengsizlik, noma'lum modul ostida qatnashgan kvadrat tenglama va tengsizliklar, kvadrat tengsizliklar, oraliqlar usuli.

1. Umumiy holda kvadrat tenglamalarni yechish

$$y(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in R, \quad a \neq 0$$

kvadratik funksiyani tekshirish bilan bog'liq bo'lib, uning hosilasi

$y'(x) = 2ax + b$ ga teng. Kvadrat tenglamaning umumiy ko'rinishi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

shaklda bo'lib, uning diskriminanti $D = b^2 - 4ac$ formula bilan aniqlanadi.

Uning ishorasiga bog'liq ravishda ildizlari quyidagicha topiladi:

$$D > 0, x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = 0, x_{1,2} = \frac{-b}{2a},$$

$$D < 0, x_1 = \frac{-b + i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kvadrat tenglama ildizlarining Viet teoremasi bo'yicha xossasi quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$D > 0, x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

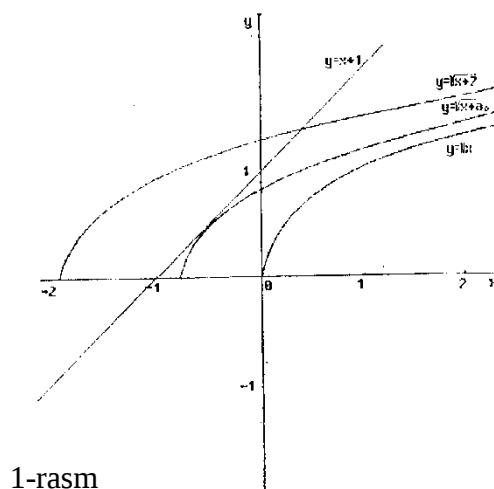
Endi parametrغا bog'liq kvadrat tenglamalarga misollar qaraymiz.

1-misol $|x^2 - 2x - 3| = a$ tenglamaning a parametrغا bog'liq yechimlar sonini toping.

Yechish.: $y = |x^2 - 2x - 3|$ funksiya grafigini yasaymiz. To'liq kvadrat ajratamiz

$$|x^2 - 2x - 3| = |(x-1)^2 - 4|$$

$|x^2 - 2x - 3| = a$ tenglama $y = a$ to'g'ri chiziq $y = |x^2 - 2x - 3|$ funksiya grafigini necha marta kesib o'tsa shuncha yechimga ega bo'ladi
1-rasmdan ko'rinadiki:



1) agar $a < 0$ bo'lsa, u holda grafiklar umumiy nuqtalarga ega emas, ya'ni yechimlar yo'q;

2) agar $a = 0$ bo'lsa, u holda grafiklar ikkita umumiy nuqtaga ega, ya'ni ikkita yechim mavjud;

3) agar $0 < a < 4$ bo'lsa, u holda grafiklar to'rtta umumiy nuqtaga ega (bular M, N, P, Q nuqtalar bo'lishi mumkin)- bu to'rtta yechimni beradi;

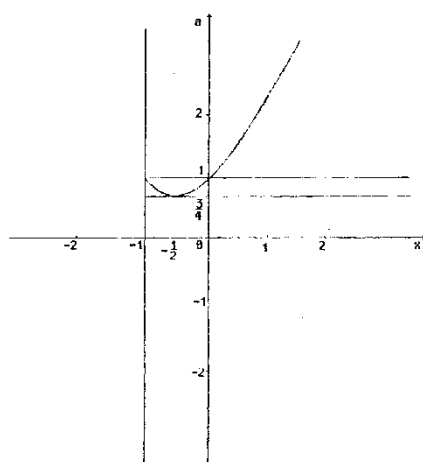
4) agar $a = 4$ bo'lsa, u holda grafiklar uchta (C, K, D), umumiy nuqtaga ega, ya'ni uchta yechim mavjud;

5) agar $a > 4$ bo'lsa, u holda grafiklar ikkita (E va F), umumiy nuqtaga ega, ya'ni ikkita yechim mavjud;

2-misol: a parametrning har bir qiymati uchun $|x^2 - 2ax - 1| = a + 3$ tenglamaning yechimlar sonini toping.

Yechish. Bu erda oldingi misoldagidan farqli a parametr modul ichida ham., undan tashqarida ham qatnashmoqda. Berilgan tenglamani quyidagicha almashtiramiz $|x^2 - 2ax - 1| = |(x-a)^2 - (a^2 + 1)|$.

$x^2 - 2ax - 1$ kvadrat uchhad diskriminanti $D = 4a^2 + 4 > 0$ hamma vaqt musbatligini hisobga olib berilgan tenglamaning chap qismining grafigini yasaymiz (2-rasm)



2-

Gorizontal to'g'ri chiziqlar- $y = a + 3$ funksiyaning a parametrning turli qiymatlaridagi grafiklarini o'tkazamiz. Agar $a + 3 < 0$ bo'lsa, ya'ni $a < -3$

bo'lsa, u holda $y = x^2 - 2ax - 1$ va $y = a + 3$ funksiyalarg grafiklari kesishmaydi, demak yechimlar yo'q.

Agar $a + 3 = 0$ ya'ni $a = -3$ bo'lsa, u holda $y = x^2 - 2ax - 1$ va $y = a + 3$ funksiyalar grafiklari ikki nuqtada kesishadi, demak berilgan tenglama ikkita yechimga ega

Agar $a < a + 3 < a^2 + 1$ bo'lsa, u holda $y = x^2 - 2ax - 1$ va $y = a + 3$ funksiyalar grafiklari to'rtta nuqtada kesishadi, demak berilgan tenglama to'rtta yechimga ega

Endi a ning qanday qiymatlarida berilgan tenglama to'rtta yechimga ega bo'lishini topamiz. Buning uchun $a < a + 3 < a^2 + 1$ qo'shtengsizlikni yoki

$$\begin{cases} a + 3 < a^2 + 1 \\ a + 3 > 0 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} a^2 - a - 2 > 0 \\ a > -3 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} -3 < a < -1 \\ a > 2 \end{cases}.$$

tengsizliklar sistemalarini echamiz. Demak, $-3 < a < -1$ va $a > 2$ larda tenglama to'rtta yechimga ega.

Agar $a + 3 = a^2 + 1$ bo'lsa, ya'ni $a = -1$ i $a = 2$ bo'lsa, u holda grafiklar uchta umumiy nuqtaga ega. Demak, tenglama uchta yechimga ega.

Agar $a^2 + 1 < a + 3$ yoki $-1 < a < 2$ bo'lsa, u holda u holda grafiklar ikkita umumiy nuqtaga ega, ya'ni tenglama ikkita yechimga ega.

Javob: $a < -3$ da yechimlar yo'q; $a = -3$ da ikkita ildiz; $-3 < a < -1$ da to'rtta ildiz; $a = -1$ da uchta ildiz; $-1 < a < 2$ da ikkita ildiz; $a = 2$ da uchta ildiz; $a > 2$ da to'rtta ildiz.

3-misol. a parametrlning $|2x| - 4 = x + a$ tenglama uchtdan kam bo'lmagan ildizga ega bo'ladigan barcha qiymatlarini toping.

Yechish. $x \geq 0$ da $|2x - 4| = x + a$ ga ega bo'lamiz, u

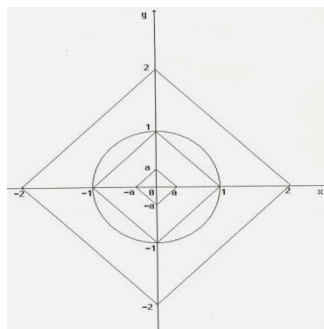
$$\begin{cases} 2x - 4 = x + a, & x \geq 2 \\ -2x + 4 = x + a, & 0 \leq x < 2 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} x - 4 = a, & x \geq 2 \\ -3x + 4 = a, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

tenglamalar jamlanmasiga teng kuchli.

$x < 0$ da berilgan tenglama $|-2x - 4| = x + a$ ko'rinishga ega. U:

$$\begin{cases} -2x - 4 = x + a, & x \leq -2 \\ 2x + 4 = x + a, & -2 < x < 0 \end{cases}, \text{ yoki } \begin{cases} -3x - 4 = a, & x \leq -2 \\ x + 4 = a, & -2 < x < 0 \end{cases}$$

tenglamalar jamlanmasiga teng kuchli. Hosil qilingan to'rtta tenglamaning chap qismlari grafiklarini yasaymiz (3-rasm)



3-rasm

$$y = x - 4, x \geq -2 \quad y = -3x + 4 = a, 0 \leq x < 2$$

$$y = x + 4 = a, -2 < x < 0 \quad y = -3x - 4 = a, x \leq -2$$

Rasmdan ko'rinadiki, berilgan tenglama kamida uchta yechimga ega bo'ladi, agar $y = a$ to'g'ri chiziqli grafikni uchta yoki to'rtta nuqtada kesib o'tsa (faraz qilaylik A, B, C, D nuqtalarda). Bunga $2 \leq x \leq 4$ bo'lganda erishiladi.

Javob: $2 \leq x \leq 4$ da tenglama kamida uchta yechimga ega.

1-mustaqil ish

a) a parametrning qanday qiymatlarida $|x^2 + 4ax + a| = a + 2$ tenglama uchta yechimga ega? Bu yechimlarni toping.

b) $|x^2 - ax + a| = a - 3$ tenglamaning a parametrga bog'liq yechimlar sonini aniqlang.

3.Parametr qatnashgan kvadrat tengsizliklar

1) $ax^2 + bx + c > 0$ kvadrat tengsizlik a, b, c larning qanday qiymatlarida butun son o'qida o'rinli bo'lishini aniqlang.

$$\begin{cases} D > 0, \\ a > 0 \end{cases}$$

$$1') ax^2 + bx + c \geq 0$$

a, b, c parametrlarning qanday qiymatlarida berilgan tengsizlik butun son o'qida o'rinli bo'lishini aniqlang.

$$\begin{cases} D \leq 0, \\ a > 0 \end{cases}$$

$$2) ax^2 + bx + c < 0$$

a, b, c parametrlarning qanday qiymatlarida berilgan tengsizlik butun son o'qida o'rinli bo'lishini aniqlang.

$$\begin{cases} D < 0, \\ a < 0 \end{cases}$$

$$2') ax^2 + bx + c \leq 0$$

a, b, c parametrlarning qanday qiymatlarida berilgan tengsizlik butun son o'qida o'rinli bo'lishini aniqlang.

$$\begin{cases} D \leq 0, \\ a < 0 \end{cases}$$

3) a, b, c parametrlarning qanday qiymatlarida kvadrat tenglamaning turlicha va manfiy ildizlari mavjud : $x_1 < x_2 < 0$

$D > 0$ – turli ildizlar bo'lishini kafolatlaydi

$$3') \begin{cases} x_1 < 0, \\ x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} < 0, \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} D > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0, \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Bu masalaning ikkinchi ko'rinishi:

3') $x_1 \leq x_2 < 0$ (ildizlar mavjud, ustma-ust tushishi va manfiy bo'lishi mumkin)

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ -\frac{b}{a} < 0, \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

3'') $x_1 < x_2 \leq 0$ (ildizlar mavjud, turlicha, musbat emas)

$$\begin{cases} D > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0, \\ \frac{c}{a} \geq 0 \end{cases}$$

3''') $x_1 \leq x_2 \leq 0$ (ildizlar mavjud, ustma-ust tushishi mumkin, musbat emas)

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ -\frac{b}{a} \leq 0, \\ \frac{c}{a} \geq 0 \end{cases}$$

4) a, b, c parametrlarning qanday qiymatlarida ildizlar mavjud, turlicha va musbat bo'lishini aniqlang: $x_2 > x_1 > 0$

$$\begin{cases} D > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0, \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

4') $x_2 \geq x_1 > 0$

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ -\frac{b}{a} > 0, \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

$$4'') \quad x_2 > x_1 \geq 0$$

$$\begin{cases} D > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0, \\ \frac{c}{a} \geq 0 \end{cases}$$

$$4''') \quad x_2 \geq x_1 \geq 0$$

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ -\frac{b}{a} \geq 0, \\ \frac{c}{a} \geq 0 \end{cases}$$

5) a, b, c parametrlarning qanday qiymatlarida kvadrat tenglama ildizlari mavjud, turlicha hamda bittasi qat'iy noldan kichik, ikkinchisi qat'iy noldan katta bo'lishini aniqlang: $x_1 < 0 < x_2$.

$$D > 0$$

$$\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 : x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow D > 0, \text{ demak, faqat bitta talab } \frac{c}{a} > 0$$

$$5') \quad x_1 \leq 0 < x_2$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 \leq 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0; \\ x_2 > 0. \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \\ \begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 > 0. \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{a} = 0, \end{array} \right.$$

lekin agar $\begin{cases} x_1 < 0, \\ x_2 > 0 \end{cases}$ bo'lsa, u holda $\frac{c}{a} = 0$ – chetki hol $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \end{cases}$$

Ta'rif. $ax^2+bx+c>0$ va $ax^2+bx+c<0$ ko'rinishdagi tengsizliklar, bu erda gde x – o'zgaruvchi, a, b va c – biror sonlar, bunda $a \neq 0$, ikkinchi darajali bir o'zgaruvchili tengsizliklar deb ataladi.

Ikkinchi darajali bir o'zgaruvchili tengsizliklarni Yechishni mos kvadratlik funksiya musbat va manfiy qiymatlar qabul qiladigan oraliqdarni topish deb qarash mumkin.

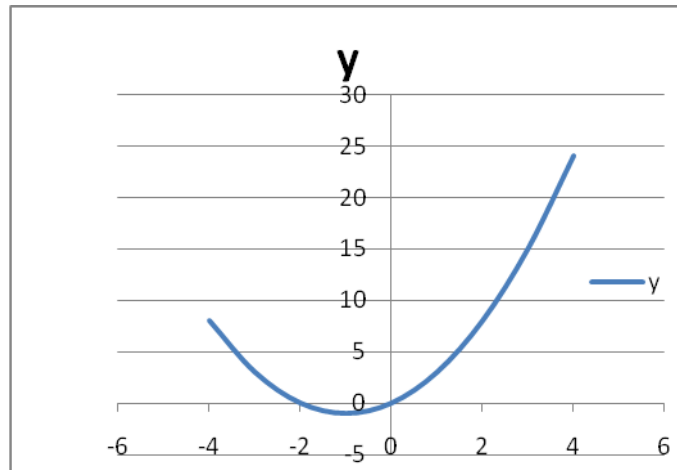
1-misol. Tengsizlikni eching: $x^2+2x+a>0$ (1)

Yechish. $D = x^2+2x+a$ uchhadning diskriminanti bo'lsin. U holda $D = 0$ da, ya'ni $a = 1$ da (1) tengsizlik: $(x+1)^2 > 0$ ko'rinishga keladi. U x ning ($x = -1$ dan tashqari) ixtiyoriy haqiqiy qiymatlarida o'rinli, .

$D < 0$ da, ya'ni $a > 1$ da (1) tengsizlik x ning ixtiyoriy haqiqiy qiymatlarida o'rinli.

$D > 0$ da, ya'ni $a < 1$ da x^2+2x+a uchhad ikkita ildizga ega: $-1-\sqrt{1-a}$ va $-1+\sqrt{1-a}$ va shuning uchun tengsizlik yechimi bo'lib $(-\infty; -1-\sqrt{1-a}) \cup (-1+\sqrt{1-a}; +\infty)$ oraliq hisoblanadi.

Bu tengsizlikni grafik usulda ham oson yechish mumkin. Buning uchun uni $x^2+2x>-a$ (1,a) va ko'rinishda yozib olamiz va $y=x^2+2x$ funksiya grafigini yasaymiz(1-rasm).



1-

Grafikning $y = -a$ to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari absissalari $x^2 + 2x = -a$ tenglamaning ildizlari hisoblanadi

Rasmdan ko'rinadiki $-a > -1$ da, ya'ni $a < 1$ da $(1, a)$ tengsizlikning yechimi bo'lib $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ oraliq xizmat qiladi;

$-a = -1$ da, ya'ni $a = 1$ da, x – ixtiyoriy haqiqiy son, -1 dan tashqari;

$-a < -1$ da, ya'ni $a > 1$ da, x – ixtiyoriy haqiqiy son.

2-misol.Quyidagi tengsizlikning yechimini topamiz:

$$mx^2 - 2(m-1)x + (m+2) < 0 \quad (2)$$

Yechish. $m = 0$ da u $2x + 2 < 0$ ko'rinishni oladi va uning yechimi $x < -1$.

$f(x) = mx^2 - 2(m-1)x + (m+2)$ belgilash kiritamiz, bu erda $m \neq 0$. Bu holda tengsizlik $f(x) < 0$ - x ga nisbatan kvadrat tengsizlik.

$D = f(x)$ ning diskriminanti bo'lsin. $0,25D = 1 - 4m$. Agar $D < 0$ bo'lsa, ya'ni $m > 0,25$ da $f(x)$ ning ishorasi m ning ishorasi bilan x ning ixtiyoriy haqiqiy qiymatlarida ustma-ust tushadi, ya'ni ixtiyoriy $x \in R$ larda $f(x) > 0$, demak, $m > 0,25$ da $f(x) < 0$ tengsizlik yechimga ega emas.

Agar $D = 0$ bo'lsa, ya'ni. $m = 0,25$ da $f(x) = (0,5x + 1,5)^2$, ya'ni ixtiyoriy $x \in R$ larda $f(x) \geq 0$. Demak, $m = 0,25$ da ham $f(x) < 0$ tengsizlik yechimga ega emas.

$D > 0$ bo'lsin, ya'ni $m < 0,25$ ($m \neq 0$). x ning ixtiyoriy ikkita haqiqiy qiymatida $f(x)=0$:

$$x_1 = \frac{1}{m}(m-1-\sqrt{1-4m}), \quad x_2 = \frac{1}{m}(m-1+\sqrt{1-4m}).$$

Bu erda ikkita hol bo'lishi mumkin:

1) $m < 0$ bo'lsin. U holda $f(x) < 0$ tengsizlikni yechish– bu $f(x)$ ning ishorasi m ning ishorasi bilan ustma-ust tushadigan x ning qiymatlarini topishdan iborat. Bu savolga javob berish uchun $-\sqrt{1-4m} < \sqrt{1-4m}$ ekanligini ta'kidlaymiz, ya'ni $m-1-\sqrt{1-4m} < m-1+\sqrt{1-4m}$, lekin $m < 0$ bo'lgani uchun,

$\frac{1}{m}(m-1-\sqrt{1-4m}) > \frac{1}{m}(m-1+\sqrt{1-4m})$ va shuning uchun (2) tengsizlikning yechimi

$(-\infty; \frac{1}{m}(m-1+\sqrt{1-4m})) \cup (\frac{1}{m}(m-1-\sqrt{1-4m}); +\infty)$ oraliqda iborat.

2) $0 < m < 0,25$ bo'lsin. Endi (2) tengsizlikni yechish uchun $f(x)$ ning ishorasi m ning ishorasiga qarama-qarshi bo'ladigan m ning qiymatlarini ko'rsatish etarli.

$0 < m < 0,25$ da $x_1 < x_2$ bo'lgani uchun $x \in (x_1; x_2)$. Demak, $m = 0$ da $x \in \mathbb{R}$;

$m < 0$ da $x \in (-\infty; x_2) \cup (x_1; \infty)$;

$0 < m < 0,25$ da $x \in (x_1; x_2)$; $m \geq 0,25$ da yechimlar yo'q.

3-misol. Tengsizlikni eching $ax-3x^2 < 0$

Yechish. $ax-3x^2 < 0$ $x(a-3x) < 0$ $x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{a}{3}$

1) $a > 0$

2) $a < 0$

$x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{a}{3}; \infty)$

$x \in (-\infty; \frac{a}{3}) \cup (0; \infty)$

3) $a = 0$ $-3x^2 < 0$

$x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

Javob: $a > 0$ da $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{a}{3}; \infty)$

$a < 0$ da $x \in (-\infty; \frac{a}{3}) \cup (0; \infty)$

$a = 0$ da $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

4-misol. Tengsizlikni eching $x^2 - (a+1)x + a \geq 0$

Yechish. $D = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$

$$1) D=0 \quad (a-1)^2=0 \quad a=1 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$2) D>0 \quad (a-1)^2>0, a \neq 1 \quad x_{1,2} = \frac{a+1 \pm |a-1|}{2}$$

$$a>1$$

$$a<1$$

$$x_1 = a$$

$$x_2 = 1$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [a; +\infty)$$

$$x \in (-\infty; a] \cup [1; +\infty)$$

Javob. $a>0$ da $x \in (-\infty; 1] \cup [a; +\infty)$ $x \notin \mathbb{R}$; $a=0$ da $x \in \mathbb{R}$;

$a<0$ da $x \in (-\infty; a] \cup [1; +\infty)$.

2-mustaqil ish

Parametrli tengsizliklarni eching:

$$a) x^2 - ax < 0; \quad b) (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 < 0$$

4. Tengsizliklarni oraliqlar usuli bilan yechish

$F(x, a) > 0$ ($F(x, a) < 0$) tengsizlikni x ga nisbatan yechish zarur bo'lsin.

Masala shartini geometriya tiliga o'tkazamiz. Ikki o'zgaruvchili tengsizlikni geometrik yechish tekislikning koordinatalari berilgan tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha (x, a) , nuqtalar to'plamini topishni bildiradi. Berilgan tengsizlikka mos keluvchi $F(x, a) = 0$ tenglamaning grafigi koordinatalari tenglamani to'g'ri sonli tenglikka aylantiruvchi tekislikning barcha nuqtalar to'plamidan iborat.

Bu tavsif parametrli tengsizliklarni yechishning umumiy evristik sxemasini tuzishga imkon beradi;

1) x o'zgaruvchi va a parametrning yo'l qo'yiladigan qiymatlar to'plamlarini aniqlash (masala shartida bayon etilgan barcha cheklashlarni hisobga olgan holda);

2) $F(x, a) = 0$ tenglamani x yoki a ga nisbatan yechish;

3) $a = g(x)$ yoki $x = u(a)$ funksiya grafigini masala sharti bilan x va a ga qo'yiladigan cheklashlarni hisobga olgan holda tasvirlash;

4) $F(x, a) = 0$; tenglamaning geometrik obrazi tasviridan kelib chiqadigan ma'lumotni tahlil qilish; yechish farazni ilgari surish.

5) Olingan farazni isbotlash yoki inkor etish; yechimni asoslash; javobni rasmiylashtirish.

Grafik ma'lumotning tahlili bizga quyidagi xulosalarni chiqarishga imkon beradi:

1) masala sharti bilan x va a ga qo'yiladigan cheklashlar, koordinatalari tengsizlik yechimiga kirmaydigan tekislikning nuqtalar to'plami mavjudligiga olib keladi. Bunday sohalarni ajratish odatda yechishni osonlashtiradi.

2) grafikning har bir nuqtasi koordinatalari $F(x, a)$ ifodaga qo'yganda uni nolga aylantiradi. Demak $F(x, a) = 0$ grafikni $F(x, a)$ funksiyaning «noli» deb atash mumkin

3) tenglama grafigi koordinat tekisligini qator sohalarga ajratadi. Ularning har biri quyidagi xossaga ega : berilgan soha nuqtadarining koordinatalarini qo'yganda $F(x, a)$ bir xil ishorali qiymat qabul qiladi. Tengsizlikning geometrik yechimi nuqtalarining koordinatalari berilgan tengsizlikni qanoatlantiruvchi tekislikning sohalarning birlashmasidan iborat.

Sanab o'tilgan umumiy qonuniyatlar bu usulni – parametrli tengsizliklarni Yechishning oraliqlar usuli deb atalishiga asos bo'ladi. Bu erda oraliqlar koordinata tekisligining $F(x, a) = 0$ grafik bilan ($F(x, a)$ funksiyaning «noli» bilan) ajraladigan sohalardan iborat.

Oraliqlar usuli tuzilmasiga parametrli tengsizlik kiruvchi masalalarning eng ratsional yechimiga olib keladi va biror shartni hisobga olgan holda tekshirish olib borish talab etiladi.

Buni quyidagi misolda ko'rib o'tamiz:

1-misol. a parametrning har bir qiymatida quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi hech bo'lmaganda bitta x ning qiymati mavjud bo'ladigan barcha qiymatlarini toping:

$$\begin{cases} x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a < 0 \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases}$$

Bu mashqni analitik Yechish usulini qaraymiz.

1) $|a| > 2$ lar orasida masala shartini qanoatlantiruvchi a ning bitta ham qiymati yo'q, chunki bunday a larda $x^2 + a^2 = 4$ tenglama yechimga ega emas $a = 2$ va $a = -2$ da tenglama yagona $x = 0$ ildizga ega, u tengsizlikni qanoatlantirmaydi. Demak, $a = 2$ va $a = -2$ ham masala shartini qanoatlantirmaydi. Shunday qilib, agar masala shartini qanoatlantiruvchi a bo'lsa, u holda $|a| < 2$ shartni qanoatlantiradi va ixtiyoriy a uchun $x^2 + a^2 = 4$ tenglama ikkita ildizga ega bo'ladi $x_1 = -\sqrt{4-a^2}$ va $x_2 = \sqrt{4-a^2}$

2) $Q(x) = x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a$ kvadrat uchhadni qaraymiz. Uning diskriminanti $D = (3a+2)^2$. Agar $a = -\frac{2}{3}$ bo'lsa, u holda $D = 0$ va $Q(x)$ kvadrat uchhad birorta ham x uchun manfiy bo'lolmaydi. Shunday qilib, $a = -\frac{2}{3}$ masala shartini qanoatlantirmaydi. Agar $a \neq -\frac{2}{3}$ bo'lsa, u holda $D > 0$ va $Q(x)$ kvadrat uchhadi ikkita turli ildizga ega. Demak, $a \neq -\frac{2}{3}$ da kvadrat uchhad $Q(x)$ kvadrat uchhad ildizlari orasida joylashgan ixtiyoriy x lar uchun manfiy qiymatlar qabul qiladi. Demak, agar a masala shartini qanoatlantiruvchi son bo'lsa, u holda $|a| < 2$, $a \neq -\frac{2}{3}$ va x_1 va x_2 sonlardan hech bo'lmaganda biri $Q(x)$ kvadrat uchhad ildizlari orasida joylashgan bo'ladi. $Q(x)$ kvadrat uchhad ildizlarini quyidagi ko'rinishda yozish qulay:

$$x_3 = \frac{-(5a+2) - |3a+2|}{2}, x_4 = \frac{-(5a+2) + |3a+2|}{2}, \text{ u holda ravshanki } x_3 < x_4.$$

3) U holda masala talabi quyidagicha qayta bayon etiladi: $|a| < 2$, $a \neq -\frac{2}{3}$

shartlarni qanoatlantiruvchi a parametrning qanday qiymatlarida x_1 va x_2 sonlardan hech bo'lmaganda biri x_3 va x_4 sonlari orasida joylashgan bo'ladi. Izlangan qiymatlar to'plami $|a| < 2$, $a \neq -\frac{2}{3}$ sohadan ikkita tengsizliklar sistemalarining yechimlar to'plamlari birlashmasidan iborat bo'ladi:

$$\begin{cases} \frac{-(5a+2)-|3a+2|}{2} < -\sqrt{4-a^2}; \\ -\sqrt{4-a^2} < \frac{-(5a+2)+|3a+2|}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{-(5a+2)-|3a+2|}{2} < \sqrt{4-a^2} \\ \sqrt{4-a^2} < \frac{-(5a+2)+|3a+2|}{2} \end{cases}$$

Bu tengsizliklar sistemalarni echib quyidagi javobni olamiz:

$$\text{Javob: } -\sqrt{2} < a < -\frac{16}{17}, \quad 0 < a < \sqrt{2}.$$

Endi bu tengsizlikning parametrli tengsizliklarni Yechishning oraliqlar usuli bilan echamiz.

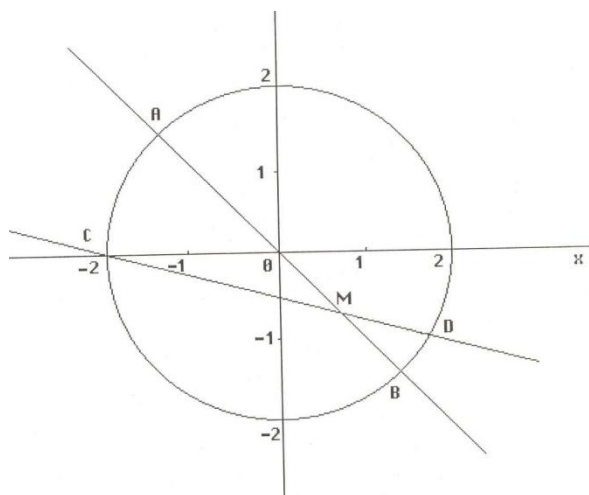
Ularning masala shartiga ko'ra x va a ning yo'l qo'yiladigan qiymatlar to'plami barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat. $x^2 + a^2 = 4$ tenglamaning grafigi markazi koordinata boshida bo'lgan va radiusi 2 ga teng aylanadan iborat.

Sistema tengsizligiga mos keluvchi kvadrat uchhadni qaraymiz. $F(x, a) = 0$ tenglamani tuzamiz va uni a ga nisbatan echamiz. $a = -x$ va $a = \frac{-x-2}{4}$ ni olamiz.

U holda $F(x, a) = 0$ tenglamani $4(a+x)(a + \frac{x+2}{4}) = 0$ ko'rinishda yozish mumkin.

Ma'lumki, ko'paytma uning ko'paytuvchilarida hech bo'lmaganda biri nolga teng bo'lganda nolga teng. Bundan $F(x, a) = 0$ tenglamaning grafigi ikkita kesishuvchi $a = -x$ va $a = \frac{-2-x}{4}$ to'g'ri chiziqlar birlashmasidan iborat.

M – bu to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo‘lsin, A, B, C va D nuqtalar esa – mos ravishda $a = -x$, $a = \frac{-x-2}{4}$ to‘g‘ri chiziqlar va $x^2 + a^2 = 4$ aylananing kesishish nuqtalari bo‘lsin. $F(x, a) = 0$ tenglama grafigi koordinata tekisligini to‘rtta sohaga ajratadi (1-rasm).



1-rasm

Masala shartiga ko‘ra bizni $F(x, a) = 0$ kvadrat uchhad manfiy qiymatlar qabul qiladigan sohalar qiziqtiradi. Ifodaning qiymatini aniqlash uchun tekislikning qaralayotgan sohasidagi bitta nuqtaning koordinatalarini qo‘yish etarli. $F(x, a) < 0$ tengsizlikning yechimi bo‘lib AMC va BMD burchaklar ichida joylashgan tekislik sohalari hisoblanadi. AC va BD yo‘llar ularning uchlaridan tashqari koordinatalari berilgan sistemani qanoatlantiruvchi tekislikning barcha nuqtalar to‘plamidan iborat.

Endi masalaning savoliga javob berish qiyin emas: masala shartini qanoatlantiruvchi a parametrning qiymatlari B va D, C va A nuqtalar ordinatalari orasida joylashgan barcha a lar jamlanmasidan iborat. Bu nuqtalarning ordinatalarni topamiz. Buning uchun

$$\begin{cases} a = -x \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases} \text{ va } \begin{cases} a = \frac{-x-2}{4} \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases}.$$

tenglamalar sistemalarini echamiz. Birinchi sistema $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ yechimlarni beradi.

Ikkinchi sistema yechimlari $(-2; 0)$, $(\frac{30}{17}; -\frac{16}{17})$.

Shunday qilib, $F(x, a) = 0$ va $x^2 + a^2 = 4$ tenglamalar grafiklarning kesishish nuqtalari quyidagi koordinatalarga ega: A $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$;

V $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; S $(-2; 0)$; D $(\frac{30}{17}; -\frac{16}{17})$.

Javob: $(-\sqrt{2}; -a < -\frac{16}{17})$; $(0 < a < \sqrt{2})$.

Shunday qilib, berilgan masalani yechishning ikki usulini taqqoslab, oraliqlar usuli ratsional va ko'rgazmaliroq ekanligini ko'ramiz.

Xulosalar

Oraliqlar usuli parametrli tengsizliklarning yechishning umumlashgan usuli. Bu quyidagilarda namoyon bo'ladi:

1) grafik ma'lumotning ko'rgazmaliligi masala sharti va uni yechishning mohiyatini chuqur tushunishga imkon beradi;

2) tengsizlikni mos tenglamani yechishga olib kelish imkoniyatiga ega, bu esa masalani yechishni soddalashtiradi;

3) o'zgaruvchili ifodalarni ayniy shakl almashtirish hajmini kamaytiradi, bu esa mantiqiy va texnik xatolarga yo'l qo'yish ehtimolini pasaytiradi.;

4) parametr tengsizlikni ba'zi shartlarni hisobga olgan holda tekshirish talab etiladigan eng ratsional usulni topishga imkon beradi.

3-mustaqil ish

a parametrning har birida quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi hech bo'lmaganda bitta x mavjud bo'ladigan barcha qiymatlarini toping:

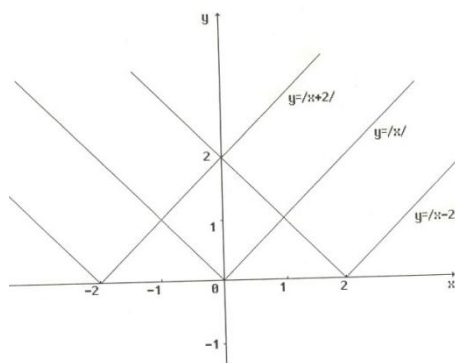
$$1) \begin{cases} x^2 + (2-3a)x + 2a^2 - 2a < 0; \\ ax = 1 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2a < 0 \\ x + a^2 = 0 \end{cases}$$

5. Noma'lum modul ostida qatnashgan kvadrat tengsizliklarni yechish

1-misol. a parametrning $3 - |x - a| > x^2$ (1) tengsizlik hech bo'lmaganda bitta manfiy yechimga bo'ladigan qiymatlarini toping.

Yechish. Tengsizlik $y = |x - a|$ grafigi $y = 3 - x^2$ grafigi ostida bo'ladigan a ning barcha qiymatlarida yechimga ega (1-rasm)



2-

$y = |x - a|$ o'ng yarim to'g'ri chiziq $y = 3 - x^2$ grafigiga urinadigan a ning qiymatini topamiz, bunda $x_0 > a$, bu erda x_0 – urinish nuqtasi absissasi, u holda $x_0 - x^2 + x - a - 3 = 0$ tenglamaning ikkita karrali ildizi, $D = 4a + 13$ – bu tenglama diskriminanti. $a = -3,25$ da $x_1 = x_2$. Rasmdan ko'rinadiki $a \in (-3,25; 3)$ larda (1) tengsizlik yechimlari orasida manfiylari ham bor.

2-misol. a parametrning qanday qiymatlarida $x^2 + 4|x - a| \geq a^2$ tengsizlik x ning barcha qiymatlarida o'rinli bo'ladi?

Yechish. $x \geq a$ da $x^2 + 4|x - a| \geq a^2$ tengsizlik $(x - a)(x - (-a - 4)) \geq 0$ tengsizlikka teng kuchli, u esa qarayotgan oraliqdagi barcha x lar uchun faqat va faqat $a \geq -a - 4$ bo'lgandagina, ya'ni $a \geq -2$ bo'lganda o'rinli.

Agar $x < a$ bo'lsa, u holda yuqoridagi holga o'xshash $(x - a)(x - (4 - a)) \geq 0$ tengsizlikka kelamiz, u qarayotgan barcha x lar uchun $a \leq -a + 4$ da, ya'ni $a \leq 2$ da o'rinli.

Javob: $-2 \leq a \leq 2$.

3-misol. a parametrning qanday qiymatlarida $x^2 + 3x + 3|x + a| - a \leq 0$ tengsizlikning butunsonli yechimlari soni maksimal bo‘ladi?

Yechish: $x^2 + 3x + 3|x + a| - a \leq 0$ tengsizlik ikkita sistemalar

$$\begin{cases} a \geq -x \\ a \leq \frac{x^2}{2} - 3x \end{cases} \text{ va } \begin{cases} a < -x \\ a \geq \frac{x^2}{4} \end{cases}.$$

jamlanmasiga teng kuchli. xOa tekislikda koordinatalari bu jamlanma tengsizliklarini qanoatlantiruvchi $(x; a)$ nuqtalar to‘plamini tasvirlaymiz (rasmda bu to‘plam shtrixlab ko‘rsatilgan).

Ixtiyoriy a larda tengsizlikning butun sonli yechimlari uchtdan ko‘p bo‘lmaydi. Shuning uchun masala talabini $a = c$ to‘g‘ri chiziqning $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$, $x = -4$ to‘g‘ri chiziqlar bilan kesishish nuqtalari shtrixlangan sohaga tegishli bo‘lib, ularning soni uchtaga teng bo‘ladigan a ning qiymatlari qanoatlantiradi. U holda R- $x = -3$ to‘g‘ri chiziqning $a = \frac{x^2}{4}$ parabola bilan kesishish nuqtasi bo‘lib, $(-3; \frac{9}{4})$ koordinatalarga ega, Q esa $-x = -1$ to‘g‘ri chiziqning $a = -\frac{x^2}{4} - 3x$ parabola bilan kesishish nuqtasi bo‘lib $(-1; \frac{5}{2})$ koordinatalarga ega, bundan berilgan tengsizlik soni uchga teng bo‘lgan maksimal sondagi butunsonli yechimlarga $a = 4$ da (bu $x = -4; -3; -2$) va $\frac{9}{4} \leq a \leq \frac{5}{2}$ da ega bo‘ladi (bu $x = -3; -2; -1$).

Javob: $a = 4, \frac{9}{4} \leq a \leq \frac{5}{2}.$

4-misol. a parametrning qiymatlariga bog‘liq ravishda $a - x > |1 - |x||$ tengsizlikni eching.

Yechish. Berilgan tengsizlikni $a > x + ||x| - 1|$ ko‘rinishda yozib olamiz va $a = x + ||x| - 1|$ funksiyani qaraymiz, uni modullarini ochib

$$a(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ 2x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2x-1, & x \geq 0 \end{cases}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. $a(x)$ funksiya grafigi (2-rasm) xOa koordinata tekisligini ikki sohaga ajratadi. $(0; 0)$ nuqtani olib va $a = 0$ va $x = 0$ qiymatlarni berilgan tengsizlikka qo‘yib $0 > 1$ ni olamiz shuning uchun berilgan tengsizlik grafikdan yuqorida yotgan sohada bajariladi (rasmda bu soha shtrixlangana).

Bevosita rasmdan javobni olamiz.

Javob: agar $a \leq 0$ bo‘lsa, u holda yechimlar yo‘q; agar $-1 < a \leq 1$ bo‘lsa, u holda $x < \frac{a-1}{2}$; agar $a > 1$ bo‘lsa, u holda $x < \frac{a+1}{2}$.

5-misol. a parametr qiymatlariga bog‘liq ravishda tengsizlikni eching

$$|x^2 - 5x + 6| < ax$$

Yechish. $y_1(x) = |x^2 - 5x + 6|$ va $y_2(x) = ax$ funksiyalar grafiklarini qaraymiz.

$|x^2 - 5x + 6| < ax$ tengsizlikning yechimi bo‘lib $y_2(x)$ funksiyaning grafigi $y_1(x)$ funksiya grafigidan yuqorida joylashishiga imkon beruvchi x ning qiymatlaridan iborat.

$y_2(x)$ grafik va $y = x^2 - 5x + 6$ parabolaning kesishish nuqtalarining absissalari x_1, x_2 larni topamiz. Buning uchun $x^2 - 5x + 6 = ax$ tenglamani qaraymiz, uni $x^2 - (a+5)x + 6 = 0$ (*) ko‘rinishda yozib olamiz. Uni echib

$$x_{1,2} = \frac{a+5 \pm \sqrt{a^2 + 10a + 1}}{2}.$$

ni olamiz. $y_2(x) = ax$ to‘g‘ri chiziq $y_1(x)$ funksiya grafigiga (*) tenglama diskriminanti nolga teng bo‘lgan a ning kichik qiymatida, ya‘ni $a = -5 - 2\sqrt{6}$ da urinadi.

$y_2(x)$ grafik va $y_1(x)$ grafikning «bukrisi» bilan kesishish nuqtalari absissalari x_3, x_4 larni $-x^2 + 5x - 6 = ax$ tenglamadan yoki $x^2 + (a-5)x + 6 = 0$ tenglamadan topamiz, uni echib

$$x_{3,4} = \frac{5-a \pm \sqrt{a^2+10a+1}}{2}.$$

ni olamiz. $y_2(x)$ to'g'ri chiziq $y_1(x)$ funksiya grafigining «bukrisi»ga $a=5-2\sqrt{6}$ da $x=\sqrt{6}$ absissali nuqtada urinadi.

$y_1(x)$ grafik va $y_2(x)=ax$ to'g'ri chiziqlar kesishish variantlarini qarab quyidagi javobni olamiz:

Javob: agar $-5-2\sqrt{6} \leq a \leq 0$ bo'lsa, u holda yechimlar yo'q;

agar $a < -5-2\sqrt{6}$ bo'lsa, u holda $x_1 < x < x_2$;

agar $0 < a < -5-2\sqrt{6}$, bo'lsa, u holda $x_1 < x < x_3$ va $x_4 < x < x_2$;

agar $a = 5-2\sqrt{6}$, bo'lsa, u holda $x_1 < x < \sqrt{6}$ va $\sqrt{6} < x < x_2$;

agar $a > 5-2\sqrt{6}$ bo'lsa, u holda $x_1 < x < x_2$,

bu erda $x_{1,2} = \frac{a+5 \pm \sqrt{a^2+10a+1}}{2}; x_{3,4} = \frac{5-a \pm \sqrt{a^2+10a+1}}{2}.$

4-mustaqil ish

a) Tengsizlikni yching: $\left| \frac{ax-5}{3} + x \right| < 3$

b) a parametrning qanday qiymatlarida $2 > |x+a| + x^2$ tengsizlik musbat yechimlarga ega?

v) a parametrning qiymatlariga bog'liq ravishda tengsizlikni eching:

$$|x-a| < 3x - x^2 - 1.$$

g) a parametrning qiymatlariga bog'liq ravishda tengsizlikni eching

$$|x+2| - |2x+8| \geq a$$

va tengsizlik yagona yechimga ega bo'ladigan a ning qiymatini ko'rsating.

Savol va topshiriqlar:

1. Parametrli kvadrat tenglama va tengsizliklar qanday echiladi?
2. Noma'lum modul ostida qatnashgan parametrli kvadrat tenglama larni Yechish uchun qanday ishlarni bajarish kerak?
3. Parametr qatnashgan kvadrat tengsizliklarni yechish usullarini ayting.

4. Tengsizliklarni oraliqlar usuli bilan yechish qanday amalga oshiriladi?

5. Noma'lum modul ostida qatnashgan kvadrat tengsizliklarni yechish uchun qanday algoritmdan foydalaniladi?

Javoblar:

1-mustaqil ish

a) Javob: $a = -\frac{1}{2}$ da uchta ildiz: $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{3}$, $x_3 = 1$;

$a = 1$ da uchta ildiz: $x_1 = 2 - \sqrt{6}$, $x_2 = -2 + \sqrt{6}$, $x_3 = -2$;

b) Javob: $a < \sqrt{12}$ da ildizlar yo'q, $a = \sqrt{12}$ da bitta ildiz, $\sqrt{12} < a < 6$ da ikkita ildiz; $a = 6$ da uchta ildiz; $a > 6$ da to'rtta ildiz.

2-mustaqil ish

a) Javob: $a < 0$ da $x \in (a; 0)$; $a = 0$ da $x \in \emptyset$; $a > 0$ da $x \in (0; a)$.

b) Javob: $m \leq \frac{1}{3}$ da yechimlar yo'q;

$\frac{1}{3} < m < 1$ da $x \in (\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1})$; $x \in (\frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1})$

$m = 1$ da $x \in (-\infty; -0,5)$;

$m > 1$ da $x \in (-\infty; \frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}) \cup (\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}; \infty)$.

3-mustaqil ish

a) Javob: $-1 < a < \frac{(1-\sqrt{3})}{2}$, $1 < a < \frac{(1+\sqrt{3})}{2}$;

b) Javob: $-2 < a < 0$.

4-mustaqil ish

a) Javob: $a = -3$ da $x \in (-\infty; \infty)$; b) Javob: $-\frac{9}{4} < a < 2$.

$a > -3$ da $x \in (-\frac{4}{a+3}; \frac{14}{a+3})$; $a < -3$ da $x \in (\frac{14}{a+3}; -\frac{4}{a+3})$.

v) Javob: agar $a \leq 0$ bo'lsa, u holda yechimlar yo'q;

agar $0 < a \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, bo'lsa, u holda $1 - \sqrt{a} < x < 1 + \sqrt{a}$;

agar $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, bo'lsa, u holda $2-\sqrt{3-a} < x < 1+\sqrt{a}$;

agar $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < a < 3$, bo'lsa, u holda $2-\sqrt{3-a} < x < 2+\sqrt{3-a}$;

agar $a \geq 0$, bo'lsa, u holda yechimlar yo'q.

g) *Javob*: agar $a < -4$, bo'lsa, u holda $a-6 \leq x \leq -a-6$; agar $-4 \leq a \leq 2$,

bo'lsa, u holda $a-6 \leq x \leq -\frac{a-10}{3}$; agar $a > 2$, bo'lsa, u holda yechimlar yo'q;

agar $a = 2$, bo'lsa, u holda yechim yagona $x = -4$.

7-§. Parametrli masalalarni yechishning funksional-grafik usuli

Reja:

1. Parametrli masalalarni yechishning funksional-grafik usuli.
2. Parametrli tenglamalarni grafik usulda yechish.
3. O'quvchilar bilimlarini nazorat qilish yoki mustaqil yechish uchun qo'shimcha topshiriqlar.

Adabiyotlar: [8], [9], [11], [15].

Tayanch iboralar: parametrli masalar, funksional-grafik usul, grafik usul, nazorat, mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1-topshiriq. a parametrning $2x^2 + (2a-10)|x| + a^2 - 10a + 16 = 0$

tenglama ikkita yechimga ega bo'ladigan barcha qiymatlarini toping.

Yechish. Birinchi g'oya – a parametrga nisbatan to'liq kvadratni ajratish

$$2x^2 + 2(a-5)|x| + (a^2 - 2 \cdot 5a + 5^2) - 5^2 + 16 = 0,$$

$$2x^2 + 2(a-5)|x| + (a-5)^2 - 9 = 0$$

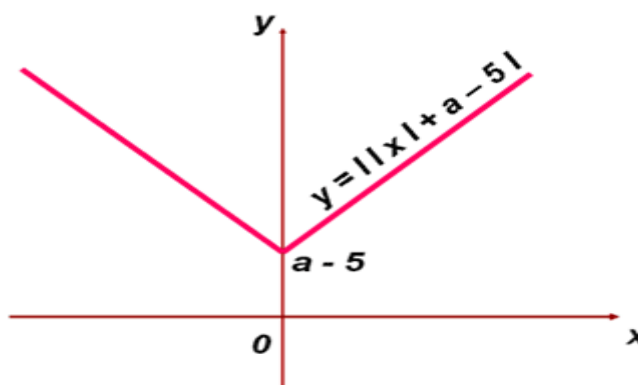
Navbatdagi g'oya unchalik ravshan emas, lekin absolyut tabiiy - x ning moduliga nisbatan to'liq kvadrat ajratish. U holda modul qavslarni ochish zarurati bo'lmaydi

$$\begin{aligned}
 (x^2 + 2(a-5)|x| + (a-5)^2 + x^2 - 9 = 0, \\
 (|x| + a - 5)^2 = 9 - x^2, \quad \sqrt{(|x| + a - 5)^2} = \pm\sqrt{9 - x^2}, \\
 ||x| + a - 5| = \pm\sqrt{9 - x^2}.
 \end{aligned}$$

Yechishning birinchi qismi tugadi. Bizda tenglamaning chap qismi parametrga bogʻliq, oʻng qismi esa bogʻliq emas. Endi tenglamalar grafiklarining kesishish nuqtalari sonini tekshiramiz:

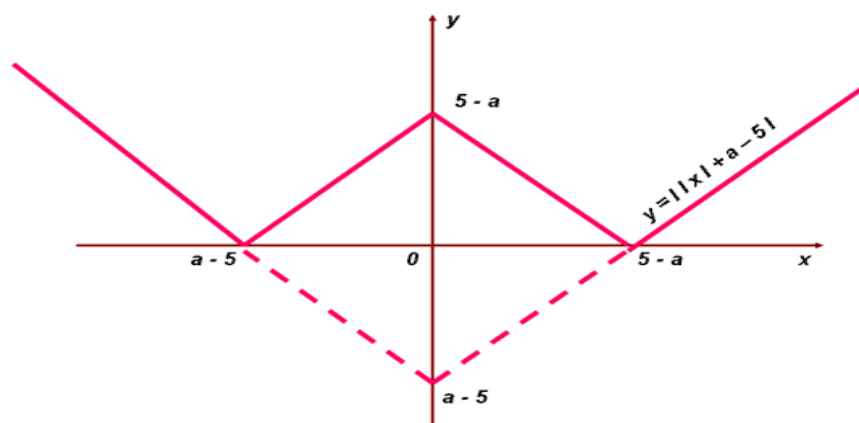
$$y = ||x| + a - 5|; y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

Ikkinchi tenglamani $y^2 = 9 - x^2, x^2 + y^2 = 3^2$ koʻrinishga keltiramiz. Ikkinchi tenglama markazi koordinata boshida va radiusi 3 ga teng aylanadan iborat. Bu aylana parametrga bogʻliq emas va tekshirish jarayonida oʻz holatini oʻzgartirmaydi. Bizni koʻproq birinchi tenglama grafigi, toʻgʻrirogʻi grafiklarning butun oilasi qiziqtiradi. **a** parametr bu tenglamaga koordinata oʻqlariga nisbatan siljimini va grafikning toʻgʻri burchakdan toʻgʻriburchakli siniq chiziqqacha oʻzgarishini taʼminlaydi, yaʼni $a - 5 \geq 0$ da birinchi tenglama grafigi quyidagi koʻrinishga ega boʻladi:



1-rasm

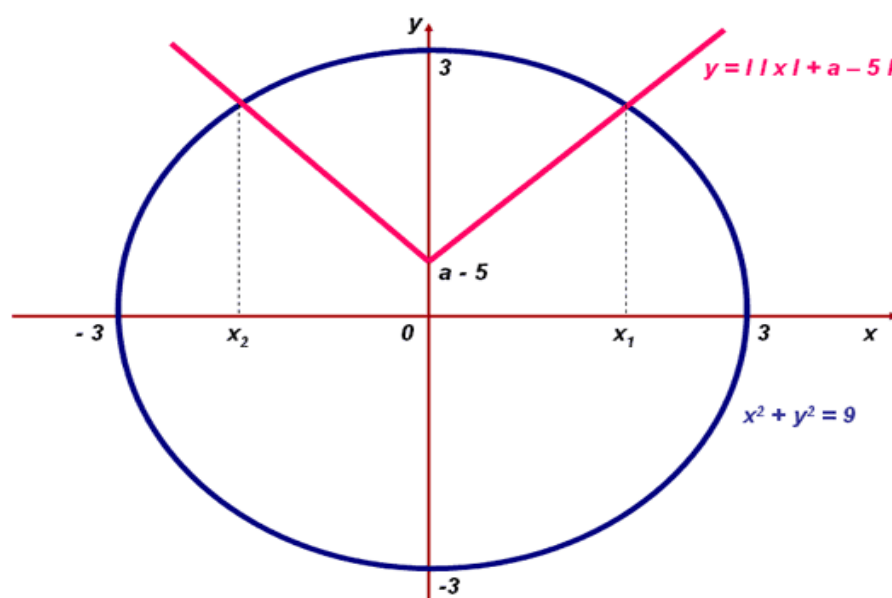
Grafik $a - 5 < 0$ da quyidagi koʻrinishdagi siniq chiziqqacha aylanadi:



2-rasm

$$\begin{cases} y = ||x| + a - 5|, \\ x^2 + y^2 = 9, \Rightarrow 5 \leq a \leq 8 \\ 0 \leq a - 5 \leq 3 \end{cases}$$

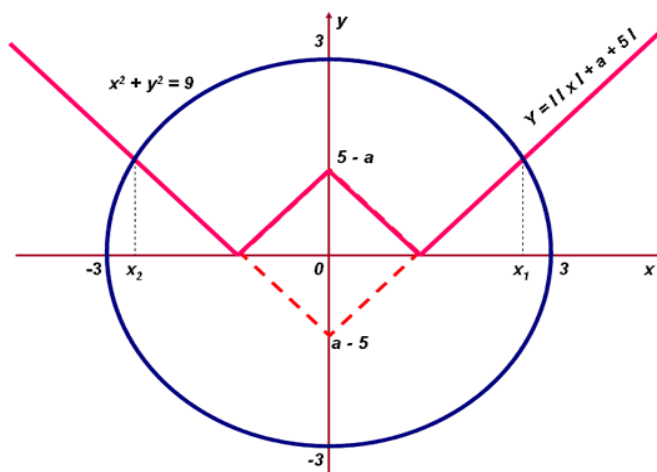
sistemaning yechimini grafik tekshiramiz. U holda sistema va berilgan tenglama ikkita yechimga ega.



3-rasm

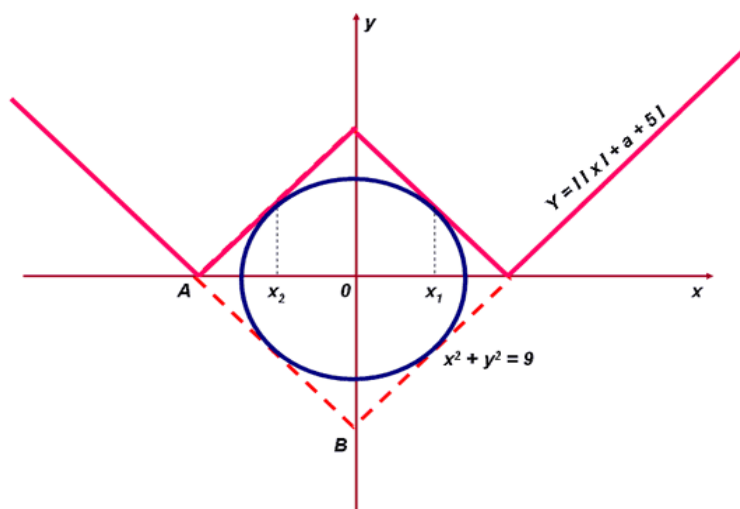
Endi sistemani $a - 5 < 0$ da tekshiramiz. Bu holda ikkita yechim bo'lishi mumkin: $-3 < a - 5 < 0$ ya'ni parametrning $2 < a < 5$ chegaralardagi qiymatlari uchun.

Grafik ravishda bu yechimlar quyidagicha olinadi:



4-rasm

$a - 5 = -3$ da ya'ni $a = 2$ da tenglam uchta ildizga ega. $a < 2$ da tenglama aylana va sinik chiziqli grafiklari to'rtta umumiy nuqtaga ega bo'lguncha to'rtta yechimga ega. Lekin mos kesuvchilar urinmalarga aylanganda tenglama faqat ikkita yechimga ega bo'ladi.



5-rasm

Bu holda: $|AB|=6$, $|OB|=3\sqrt{2}$, $B(0;-3\sqrt{2})$, $a-5=-3\sqrt{2}$; $a=5-3\sqrt{2}$.

Olingan barcha yechimlarni birlashtirib: $a \in (2;8) \cup 5-3\sqrt{3}$

ni olamiz. Quyidagi topshiriq yuqoridagiga o'xshash, lekin uni Yechish usuli boshqacha va bu erda analogiya yordam bermaydi.

2-topshiriq. a parametrning har bir qiymatida

$$y = 2x^2 - (8a - 6)x + 8a^2 - 13a + 4$$

tenglamaning kichik ildizi 5 dan kichik bo'ladigan barcha qiymatlarini toping.

Yechish. $y = 2x^2 - (8a - 6)x + 8a^2 - 13a + 4$ parabolalarning $M(m;n)$ uchlari koordinatalarini ifodalaymiz (a parametrning har bir konkret qiymatiga ma'lum parabola mos keladi).

$$m = \frac{8a - 6}{2 \cdot 2} = \frac{4a - 3}{2} = 2a - \frac{3}{2};$$

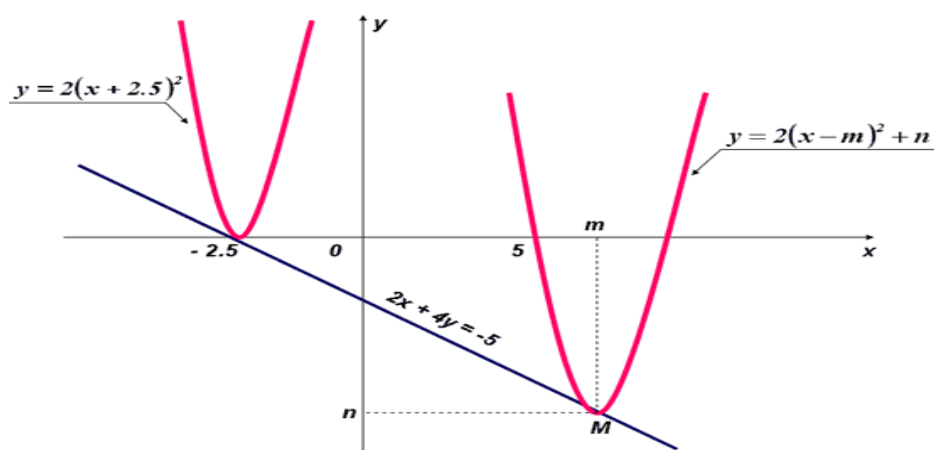
$$n = 2 \cdot \left(\frac{4a - 3}{2} \right)^2 - (8a - 6) \cdot \frac{4a - 3}{2} + 8a^2 - 13a + 4 = -a - 0,5.$$

Ko'rinib turibdiki, parabolalar uchlarining ikkala koordinatasi ham a parametrga chiziqli bog'liq. Bu qaralayotgan parabolalarning barcha mumkin bo'lgan uchlari biror to'g'ri chiziqqa tegishli. Haqiqatda bu to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi berilgan. xOy koordinata tekisligidagi tenglamasini olish uchun yangi o'zgaruvchilarni kiritib, koordinta tenglamalaridan a parametrni yo'qotish zarur.

$$\begin{cases} m = x, \\ n = y, \\ x = 2a - \frac{3}{2} \\ y = -a - 0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a - \frac{3}{2}, \\ 2y = -2a - 1 \end{cases} \Rightarrow x + 2y = -2,5 \Rightarrow 2x + 4y = -5.$$

$y = 2x^2 - (8a - 6)x + 8a^2 - 13a + 4$ tenglamaga mos keluvchi barcha parabolalar uchlari yotgan to'g'ri chiziq tenglamasini oldik. Bu parabolalardan ixtiyoriysini $y = 2x^2$ parabolaning uchi koordinata boshida va oxiri

$2x + 4y = -5$ to'g'ri chiziqda bo'lgan vektorga parallel ko'chirish bilan hosil qilinadi. $2 > 0$ bo'lgani uchun barcha parabolalar tarmoqlari yuqoriga yo'nalgan. Demak, $n \geq 0$ da tenglama yo bitta haqiqiy yechimga ega, yoki topshiriq shartini qanoatlantiruvchi bitta ham parametr qiymatiga ega emas. U holda topshiriq shartini qanoatlantiruvchi a parametr qiymatlarini $A(5;0)$ nuqtadan o'tuvchi parabolaning uchi koordinatalarini hisoblab topish mumkin.



6-rasm

$$m = -2,5 \text{ da: } m = 2a - \frac{3}{2}; 2a - \frac{3}{2} = -2,5; a = -0,5. \text{ CHap tarmog'i } (5;0)$$

nuqtadan o'tuvchi parabolaga mos keluvchi a parametr qiymatini topamiz

$$y = 2(x - m)^2 + n; x = 5; y = 0,4; 0 = 2(5 - m)^2 + n;$$

$$\begin{cases} 2(5 - m)^2 + n = 0, \\ 2m + 4n = -5 \end{cases} \Rightarrow 8m^2 - 82m + 195 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3,75 < 5 \\ m = 6,5 \end{cases}; \begin{cases} m = 6,5 \\ m = 2a - 1,5 \end{cases} \Rightarrow a = 4.$$

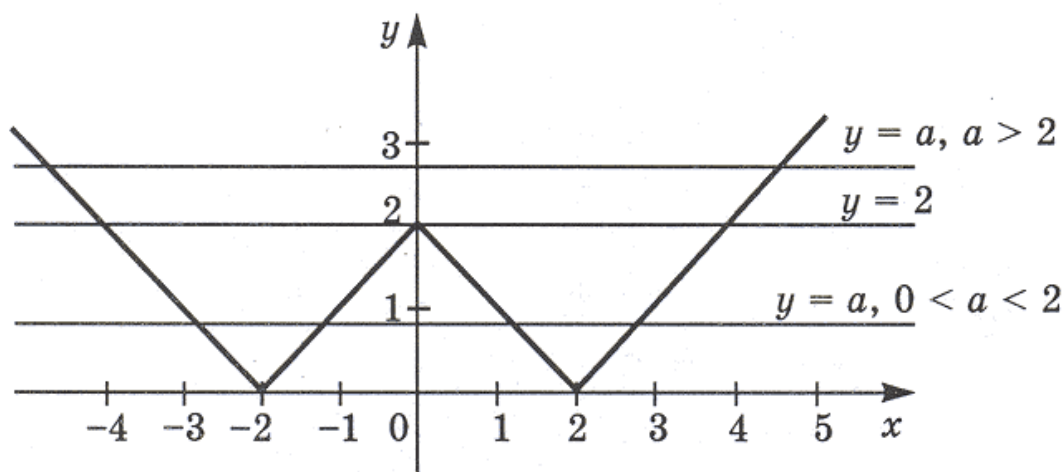
Shunday qilib, $-0,5 < a < 4$ da parabolalar uchlari absissalar o'qidan pastda joylashgan va berilgan tenglamaning kichik ildizi 5 dan kichik.

Parametrli tenglamalarni grafik usulda yechish

Tenglama a parametrga bog'liq ravishda nechta ildizga ega bo'lishi aniqlash talab etiladigan ba'zi parametrli tenglamalarni grafik usulda yechish samarali hisoblanadi.

1-misol. $||x| - 2| = a$ tenglama a parametrga bog'liq ravishda nechta ildizga ega bo'ladi?

Yechish. $(x; y)$ koordinatalar sistemasida $y = ||x| - 2|$ va $y = a$ funksiyalar grafigini yasaymiz. $y = ||x| - 2|$ funksiya grafigi rasmda tasvirlangan



$y = a$ funksiya grafigi Ox o'qiga parallel yoki u bilan ustma ust tushuvchi to'g'ri chiziq ($a = 0$ da).

Chizmadan ko'rinadiki: agar $a = 0$ bo'lsa, u holda $y = a$ to'g'ri chiziq Ox o'qi bilan ustma-ust tushadi va $y = ||x| - 2|$ grafigi bilan ikkita umumiy nuqtaga ega, demak, berilgan tenglama ikkita ildizga ega (bu holda ildizlarni topish mumkin: $x_{1,2} = \pm 2$).

Agar $0 < a < 2$ bo'lsa, u holda to'g'ri chiziq $y = ||x| - 2|$ funksiya grafigi bilan to'rtta umumiy nuqtaga ega, demak, berilgan tenglama to'rtta ildizga ega.

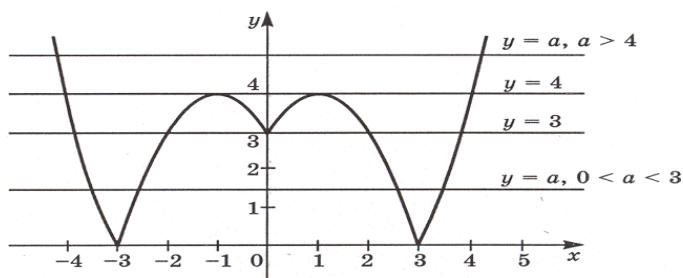
Agar $a = 2$ bo'lsa, u holda to'g'ri chiziq $y = 2$ $y = ||x| - 2|$ funksiya grafigi bilan uchta umumiy nuqtaga ega, demak, berilgan tenglama uchta ildizga ega.

Agar $a > 2$ bo'lsa, u holda to'g'ri chiziq $y = a$ $y = ||x| - 2|$ funksiya grafigi bilan ikkita umumiy nuqtaga ega, demak, berilgan tenglama ikkita ildizga ega.

Javob: agar $a < 0$ bo'lsa, u holda ildizlar yo'q; tenglama agar $a = 0$, $a > 2$ bo'lsa, u holda ikkita ildiz; agar $a = 2$ bo'lsa, u holda uchta ildiz; agar $0 < a < 2$ bo'lsa, u holda to'rtta ildizga ega.

2-misol. $|x^2 - 2|x| - 3| = a$ tenglama a parametrغا bog‘liq ravishda nechta ildizga ega bo‘ladi?

Yechish. $(x; y)$ koordinatalar sistemasida $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ va $y = a$ funksiyalar grafigini yasaymiz. $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ funksiya grafigi rasmda tasvirlangan. $y = a$ funksiya grafigi Ox o‘qiga parallel yoki u bilan ustma ust tushuvchi to‘g‘ri chiziq ($a = 0$ da).



Chizmadan ko‘rinadiki: agar $a = 0$ bo‘lsa, u holda $y = a$ to‘g‘ri chiziq Ox o‘qi bilan ustma-ust tushadi va $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ funksiya grafigi bilan ikkita umumiy nuqtaga ega hamda $y = a$ to‘g‘ri chiziq $a > 4$ da

$y = |x^2 - 2|x| - 3|$ funksiya grafigi bilan ikkita umumiy nuqtaga ega, demak, $a = 0$ va $a > 4$ da berilgan tenglama ikkita ildizga ega.

Agar $0 < a < 3$ bo‘lsa, u holda $y = a$ to‘g‘ri chiziq $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ funksiya grafigi bilan to‘rtta umumiy nuqtaga ega, hamda $y = a$ to‘g‘ri chiziq $a = 4$ da $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ funksiya grafigi bilan to‘rtta umumiy nuqtaga ega, demak, $0 < a < 3$, $a = 4$ da berilgan tenglama to‘rtta ildizga ega.

Agar $a = 3$ bo‘lsa, u holda $y = a$ to‘g‘ri chiziq $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ funksiya grafigi bilan beshta umumiy nuqtaga ega; demak, berilgan tenglama beshta ildizga ega.

Agar $3 < a < 4$ bo‘lsa, u holda $y = a$ to‘g‘ri chiziq $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ funksiya grafigi bilan oltita umumiy nuqtaga ega; demak, berilgan tenglama oltita ildizga ega.

Agar $a < 0$ bo‘lsa, u holda berilgan tenglama ildizga ega emas. Chunki $y = a$ to‘g‘ri chiziq $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ funksiya grafigini kesib o‘tmaydi

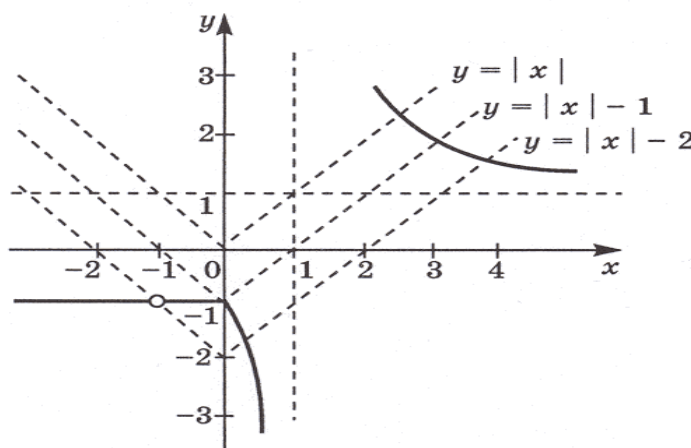
Javob: agar $a < 0$ bo'lsa, u holda ildizlar yo'q; agar $a = 0$, $a > 4$ bo'lsa, u holda ikkita ildiz; agar $0 < a < 3$, $a = 4$ bo'lsa, u holda to'rtta ildiz; agar $a = 3$ bo'lsa, u holda beshta ildiz; agar $3 < a < 4$ bo'lsa, u holda oltita ildiz mavjud.

3-misol. $\frac{x+1}{|x|-1} = |x| + a$ tenglama a parametrga bog'liq ravishda nechta ildizga ega bo'ladi?

Yechish. $(x; y)$ koordinatalar sistemasida $y = \frac{x+1}{|x|-1}$ funksiya grafigini yasaymiz. Lekin avval uni:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1}, & x \geq 0, x \neq 1, \\ \frac{x+1}{-x-1}, & x < 0, x \neq -1 \end{cases}; y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{x-1}, & x \geq 0, x \neq 1, \\ -1, & x < 0, x \neq -1 \end{cases}$$

ko'rinishda ifodalaymiz. $y = |x| + a$ funksiya grafigi $y = |x|$ funksiya grafigidan O u o'qi bo'ylab a birlik siljish bilan hosil qilinadi.



$a > -1$ da $y = \frac{x+1}{|x|-1}$ va $y = |x| + a$ funksiyalar grafiglari bir nuqtada kesishadi; demak, tenglama (1) parametrning bu qiymatlarida bitta yechimga ega. $a = -1$, $a = -2$ da grafiglari ikki nuqtada kesishadi; demak, tenglama (1) parametrning bu qiymatlarida ikkita yechimga ega.

$-2 < a < -1$, $a < -2$ da grafiglari uchta nuqtada kesishadi; demak, tenglama (1) parametrning bu qiymatlarida uchta yechimga ega.

Javob: tenglama agar $a > -1$ bo'lsa, u holda bitta ildizga; agar $a = -1$, $a = -2$ bo'lsa, u holda ikkita ildizga; agar $-2 < a < -1$, $a < -1$ bo'lsa, u holda uchta ildizga ega.

Parametrli masalalarni yechishning grafik usulda yechish algoritmi.

1. Grafik tasvirini yasaymiz
2. Olingan tasvirni abssissalar o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar bilan kesamiz
3. Kerakli ma'lumotni o'qiymiz

O'quvchilar bilimlarini nazorat qilish yoki mustaqil yechish uchun

qo'shimcha topshiriqlar

1. y ga nisbatan tenglamalarni yeching:

$$a) \frac{y}{y+2} = \frac{6}{y-a} + 1; b) \frac{ay-2}{y-5} = \frac{y+2}{y+5}.$$

- 2) c parametrning qanday qiymatlarida tenglama:

- a) ikkita ildizga; b) yagona ildizga ega bo'ladi?

3. n parametrning noldan farqli har qanday qiymatida

$\frac{x^2 + 2nx}{x^3 - n^3} + \frac{x}{x^2 + 4x + n^2} = \frac{1}{x - n}$ tenglama n ga teng yagona ildizga ega bo'lishini isbotlang.

4. m parametrning qanday qiymatlarida $y = (x - m)^2 - 4$ funksiya grafigi Ox o'qini abssissalari: a) musbat; b) manfiy; v) turli ishorali nuqtalarda kesib o'tadi?

5. Tenglamalarni eching:

$$a) \frac{x-2}{x+a} = 0; b) \frac{x-a}{x+3} = 0; c) \frac{x-a}{a-2} = 0; d) \frac{x-7}{x^2-a^2} = 0;$$

$$e) \frac{x+2a}{x+a} = 0; j) \frac{x-a}{x^2-4x+3} = 0; k) \frac{x^2-4x+3}{x-a} = 0$$

Savol va topshiriqlar:

1. Parametrli masalalarni yechishning funksional-grafik usulini bayon eting.
2. Parametrli tenglamalarni grafik usulda qanday echiladi?
3. O'quvchilar bilimlarini nazorat qilish yoki mustaqil yechish uchun qo'shimcha topshiriqlarni bajaring.

II bob bo'yicha mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

1-misol. a ning qanday qiymatlarida $x^2 - (3a - 1)|x| + 2a^2 - a = 0$ tenglama to'rtta ildizga ega?

v) $5x^2 - nx + 1 = 0$;

g) $n(n - 1)x^2 + (2n - 1)x + 1 = 0$.

2-misol. a parametrning qanday qiymatlarida $ax(ax+3)+6=x(ax-6)$ tenglama kvadrat, chiziqli, to'liqmas kvadrat tenglama bo'ladi?

3-misol. b ning qanday qiymatlarida $bx^2-bx+b=0$ tenglama ildizlarga ega va ildizlarga ega emas?

4-misol. $y = k/x$ funksiya grafigi $A(10; 2,4)$ nuqtadan o'tishi ma'lum. Bu funksiya grafigi : a) $B(1; 24)$; b) $C(-0,2; -120)$ nuqtalardan o'tadimi?

5-misol. $x^2 + px - 35 = 0$ tenglamada ildizlardan biri 7 ga teng. Ikkinchi ildizni va r koeffitsientni toping.

6-misol. $x^2 - 13x + q = 0$ tenglamaning ildizlaridan biri 12,5 ga teng. Ikkinchi ildizni va q koeffitsientni toping.

7. $5x^2 + bx + 24 = 0$ tenglamaning ildizlaridan biri 8 ga teng. Ikkinchi ildizni va b koeffitsientni toping.

8. $10x^2 - 33x + c = 0$ tenglamaning ildizlaridan biri 5,3 ga teng. Ikkinchi ildizni va c koeffitsientni toping.

9. $x^2 - 12x + q = 0$ kvadrat tenglama ildizlari ayirmasi 2 ga teng. q ni toping.

10. a ning qanday qiymatida $ax^2 - 3x - 5 = 0$ tenglamaning ildizlaridan biri 1 ga teng bo'ladi?

11. $ax^2 - (a + c)x + c = 0$ tenglamaning ildizlaridan biri 1 ga teng bo'lishini isbotlang. (Viyet teoremasini qo'llash zarur).

12. b va c ning qanday qiymatlarida $y = x^2 + bx + c$ parabolaning uchi $(6; -12)$ nuqtadan iborat bo'ladi?

13. a ning qanday qiymatida $y = ax^2 - 16x + 1$ parabolaning o'q simmetriyasi $x = 4$ to'g'ri chiziqdan iborat?

14. a va b ning $y = ax^2 + bx - 18$ funksiya grafigi $M(1; 2)$ va $N(2; 10)$ nuqtalardan o'tadigan qiymatlarini toping. (Eslatma: tenglamalar sistemasini yeching

$$\begin{cases} a + b - 18 = 2, \\ 4a + 2b - 18 = 10. \end{cases}$$

15. Funksiya $y = x^2 + px + q$ formula bilan berilgan. r va q ning qiymatlarini toping, agar :

- a) funksiya nollari – 3 va 4 sonlari;
- b) funksiya grafigi koordinata o'qlarini $(0; 6)$ va $(2; 0)$ nuqtalarda kesib o'tsa;
- s) 24 ga teng eng kichik qiymatini funksiya $x = 6$ da qabul qilishi ma'lum bo'lsa.
- s) x^2 oldidagi koeffitsient musbat, shuning uchun parabola tarmoqlari yuqoriga yo'nalgan. Demak, funksiyaning eng kichik qiymati parabola uchi ordinatasiga, uchining absissasi 6 ga teng. $6 = -p/2$ ga ega bo'lamiz, $p = -12$, u holda $n = y(m) = 24$. Ma'lumotlarni va topilgan qiymatlarni $y = x^2 + px + q$ tenglamaga qo'yamiz: $24 = 36 - 12 \cdot 6 + q$, $q = 60$.

16. Agar $ax^2 - 2x + b$ kvadrat uchhadni $x^2 + ax - 1$ kvadrat uchhadga ko'paytirsak, to'rtinchi darajali ko'phad hosil bo'ladi, uning x^2 va x oldidagi koeffitsientlari mos ravishda 8 va -2 ga teng. a va b larni toping.

9- sinf imtihon masalalari to'plamida uhraydigan parametrlar masalalar

1-misol. c ning qanday qiymatlarida $x^2 + 2x + c = 0$ tenglama ildizlarga ega emas?

Yechish: Agar tenglama ildizlarga ega bo'lmasa, u holda $D < 0$.

$$D = 4 - 4c, D < 0, \text{ to } 4 - 4c < 0, -4c < -4, c > 1.$$

Demak, $c > 1$ da tenglama ildizlarga ega emas.

Javob: $c > 1$ da tenglama ildizlarga ega emas.

2-misol. k ning qanday qiymatlarida $x^2 + kx + 9 = 0$ tenglama ildizlarga ega?

Yechish. Agar tenglama ildizlarga ega bo'lmasa, u holda $D \geq 0$.

$$D=k^2-36, D\geq 0, k^2-36\geq 0, (k-6)(k+6)\geq 0,$$

U holda $k \in (-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$ da tenglama ildizlarga ega.

Javob: Agar $k \in (-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$ bo'lsa, u holda tenglama ildizlarga ega.

3-misol. k ning qanday qiymatlarida $kx^2-6x+k=0$ tenglama 2 ta ildizga ega?

Yechish. Agar tenglama 2 ta ildizga ega bo'lsa, u holda $D>0$.

$$D=36-4k^2, D>0, 36-4k^2>0, 4k^2-36<0, k \in (-3; 3).$$

Demak, agar $k \in (-3; 3)$ bo'lsa, u holda tenglama ikkita ildizga ega

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4k^2}}{2k}$$

Javob: agar $k \in (-3; 3)$ bo'lsa, u holda tenglama ikkita ildizga ega

XULOSA

1. Algebra kursini o'qitish jarayonida parametrli tenglama va tengsizliklar mavzusini o'rganishda o'quvchilarda puxta bilim va konstruktiv ko'nikmalarni shakllantirishdan dastlab nazariy funksional tushunchalar va ta'riflar ustida ishlash, umumlashtirish va konkretlashtirishga o'rgatish parametrli tenglama va tengsizliklar tadqiq etish hamda ularning qo'llanilishiga doir misol va masalarni echa olishga o'rgatish muhim o'rinni egallaydi.

2. Parametrli tenglama va tengsizliklarga doir mashk va topshiriqlarni Yechish bosqichlari asosida o'rgatish, ular yordamida tahlil qilish, tadqiqot o'tkazish ularning mantiqiy matematik faoliyat tadbirlarini o'quvchilarning amaliy faoliyatda zarurligi va qo'llash usulariga o'rgatishda foydalanish o'quvchilarning bilim saviyalarining oshishiga va fikrlashlarini o'stirishga ijobiy ta'sir ko'rsatadi hamda ularning analitik tafakkurini shakllantrishga ijobiy ta'sir ko'rsatadi.

3. Turli parametrli tenglama va tengsizliklar ga oid konkret mashqlar va masalalar Yechish jarayonida nazariy mantiqiy savollardan foydalanish na faqat o'quvchilarning mantiqiy tafakkur ko'nikmalarini rivojlantirishga, balki nazariy

koida va formulalarning tadbiqlarinig o'zlashtirilishini ta'minlaydi va ularni bosqichma-bosqich tafakkur usullari mohiyatini tushunishlariga xizmat qiladi.

4. O'quvchilarda parametrli tenglama va tengsizliklar xossalari va ularning funksiyalar hakidagi bilimlar va ko'nikmalarni shakllantirishda yangi pedagogik texnologiyalarni qo'llash: loyihalash usuli, axborot –kommunikativ vositalaridan foydalanish, turli interfaol dars usullarini qo'llashi, bunda o'qituvchining turli imkoniyatlardan foydalana olishi, tayyorlovchi savol va topshiriqlardan o'rinli foydalana olishini talab etadi. Bu shu bilan asoslanadiki, o'rganilayotgan Yechish usullari, ularni nazariy asoslay olish analitik va sintetik usullarni o'zaro muvofiq holda qo'llash, yasash usullari va vositalarini tanlay olishi va algebraik ayniy shakl almashtirishlardan foydalana olishi uchun muhim ahamiyatga ega.

Takliflar va tavsiyalar.

O'quvchilarning parametrli tenglama va tengsizliklarni Yechish ko'nikmalarni shakllantirishda turlicha savol va topshiriqlar, loyihalar, masalalarning o'rinli va ahamiyati algebra kursini o'qitishda o'quvchilarda na faqat puxta bilimlar egallashlariga, balki har bir tipdagi masalani Yechish usulini o'rganish asosida ularning fikrlash ko'nikmalari, isbotlash usullari, masalalar Yechishda mantiqiy asoslash va tadqiq etishni talab etadigan biz ishlab chiqqan tavsiyalardan foydalanishlari ularning umuman fazoviy tasavurlari, mantiqiy fikrlashlarini rivojlantirishga balki umumiy matematik tayyorgarligining shakllanishiga muhim ta'sir ko'rsatadi.

Kelgusida bu soha bo'yicha konkret uslubiy tavsiyalar, taqdimot darslari, modellar yasay olish, maxsus testlar sistemasi ishlab chiqilsa, o'quvchilarning boshka tipdagi parametrli tenglama va tengsizliklarni Yechish bo'yicha bilim va ko'nikmalarini rivojlantirish maqsadida mashqlar to'plamlari, grafik va multimedia vositalarni tayyorlash yo'lga qo'yilsa, matematika o'qitish samaradorligini oshirishda ijobiy natijalar beradi deb hisoblaymiz.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. I.A.Karimov. Barkamol avlod –O‘zbekiston taraqqiyotining poydevori. - T.:O‘zbekiston,1997.
2. I.A.Karimov. YUksak ma’naviyat-engilmas kuch.-T.:O‘zbekiston, 2009.
3. Горнштейн П.И. Задачи с параметрами. - М.: Гимназия, 2002.
4. Шахмейстер А.Х. Задачи с параметрами в ЕГЭ. Санкт- Петербург, Москва. 2006.
5. Шахмейстер А.Х. Уравнения и неравенства с параметрами. Санкт- Петербург, Москва. 2006.
6. Гуськова Л. Н. Задачи с параметрами. Казань. Издательство “Гран Дан”, 2001
7. Крамор В. С., Лунгу К. Н., Лунгу А. К. Математика. Типовые примеры на вступительных экзаменах. Москва. 2001.
8. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы. Под редакцией Сканави М. И. Москва. 1999.
9. Соловьева М. Г. Уравнения с параметрами. Нижнекамск. 2005.
- 10.Мещерякова Г.П. Задачи с параметрами, сводящиеся к квадратным уравнениям. – Математика в школе. № 5, 2001.
- 11.Шабунин М. И. Уравнения и системы уравнений с параметрами. – Математика в школе. № 3, 2003.
- 12.Постникова С. Я. Уравнения с параметрами на факультативных занятиях. – Математика в школе. № 8, 2002
- 13.Ефимов Е. А., Коломиец А. В. Задачи с параметрами. Учебное пособие для факультета довузовской подготовки СГАУ. Самара. 2006.
- 14.Горнштейн Ш. Квадратные трехчлены и параметры. – Математика.1999. № 5.
- 15.Дорофеев Г.В. О задачах с параметрами, предлагаемых на вступительных экзаменах в вузы. Математика в школе. № 4, 1983
- 16.Шарыгин И.Ф., Факультативный курс по математике. Решение задач: учебное пособие для 10 кл. средней школы.- М.: Просвещение, 1989.

17. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике. Решение задач: учебное пособие для 11 кл. средней школы.- М.: Просвещение, 1991.
18. Шевкин А.В. Задачи с параметром. Линейные уравнения и их системы: 8-9 классы. – М.: ТНД “Русское слово- РС”, 2003.
19. Далингер В. А. “Геометрия помогает алгебре”. Издательство “Школа - Пресс”. Москва 1996 г.
20. Окунев А. А. “Графическое решение уравнений с параметрами”. Издательство “Школа - Пресс”. Москва 1986 г.
21. Письменский Д. Т. “Математика для старшеклассников”. Издательство “Айрис”. Москва 1996 г.
22. Ястрибинецкий Г. А. “Уравнения и неравенства, содержащие параметры”. Издательство “Просвещение”. Москва 1972 г.
23. Амелькин В. В., Рабцевич В. Л. “Задачи с параметрами” . Изд. “Асар”. Москва 1996 г.
24. Вишенський В.О., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Задачі з математики. - К.: Вища школа, 1985. - 264 с.
25. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. - К.: Евро індекс Лтд, 1995. - 336 с.
26. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. - М.: Наука, 1976. - 638 с.
27. Арзикулов А.У. Параметрга боглик квадрат учхадлар. Халк таълим, 1998 , № 1, 83-86 бетлар.
28. Очилов П.И. , Арзикулов А.У., Параметрли масалалар ва тестлар. Халк таълим ,1998 й. № 5, 78-81 бетлар.
29. Кожухов С.К. Различные способы решения задачи с параметрами, Математика в школе, 1998, № 6, С. 9-12 бетлар.

Internet saytlari

<http://fakultativ.iatp.by/programa.htm>

<http://www.mathedu.ru/journals-collections/>

<http://www.mathedu.ru/mathteach/geometry/-/1/3>

<http://www.math.ru/lib/>

http://www.metodkabinet.eu/PO/PO_menu_Matem.htm

ilib.mccme.ru –

www.ega-math.narod.ru