



ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

SCIENTIFIC JOURNAL

2017-yil, 1-son (101) ANIQ VA TABIIY FANLAR SERIYASI

Математика. Механика. Информатика.

Физика. Кимyo. Биологиya. География. Экологиya. O'qitish metodikasi

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro'yxatdan o'tish tartibi 09-25.

Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro'yxatiga kiritilgan. Matematika, fizika, kimyo va geografiya yo'nalishlarida chop qilingan maqolalar doktorlik dissertatsiyalari himoyasida hisobga olinadi.

BOSH MUHARRIR

BOSH MUHARRIR O'RINBOSARLARI:

XOLMURODOV R.I., t.f.d. professor

A.J.XOLIQOV, k.f.d., dotsent

A. M. NASIMOV, t.f.d., professor

TAHRIRIYAT KENGASHI:

TABIIY FANLAR SERIYASI

TAHRIRIYAT HAY'ATI:

M. X. ASHUROV - O'zFA akademigi
M. M. KAMILOV - O'zFA akademigi
B. J. AXMEDOV - f.-m.f.d., professor
A. S. BEGMATOV - fals.f.d., professor
T. M. MO'MINOV - O'zFA akademigi
X. T. MAMATOV - yu.f.d., professor
U. S. SALIXBAYEV - f.-m.f.d., professor
E. G. G'OZIYEV - psixol.f.d., professor
B. O. TO'RAYEV - fals.f.d., professor
F. I. TOSHEV - «Zarafshon» gazetasi muharriri
T. SH. SHIRINOV - t.f.d., professor
M. Q. QURONOV - ped.f.d. professor

S. B. ABBOSOV - geogr.f.d., professor
L. A. ALIBEKOV - geogr.f.d., professor
A. A. ABULQOSIMOV - geogr.f.d., professor
E. A. ABDURAXMONOV - k.f.d., professor
N.Q. MUHAMMADIYEV - k.f.d., professor
J. X. XO'JAYEV - b.f.d., professor
Z. I. IZZATULLAYEV - b.f.d., professor
Z. F. ISMAILOV - b.f.d., professor
I. A. IKRAMOV - f.-m.f.d., professor
S. N. LAQAYEV - f.-m.f.d., professor
N. N. NIZAMOV - f.-m.f.d., professor
M.Q.QODIROV - f.-m.f.d., professor
L. M. SOBIROV - f.-m.f.d., professor
A. S. SOLEYEV - f.-m.f.d., professor
I. I. JUMANOV - f.-m.f.d., professor
A. H. NISHANOV - t.f.d., professor
X. X. XUDAYNAZAROV - t.f.d., professor

Mas'ul muharrir

D. M. ARONBAYEV - k.f.n., dotsent

Koordinator:

A. SH. YARMUXAMEDOV - f.-m.f.n.

Muharrirlar

B. X. XO'JAYAROV - f.-m.f.d., professor

M. G. NOSIROV - b.f.n., dotsent

E. U. ARZIQULOV - f.-m.f.n., dotsent

O. R. RAXMATULLAYEV - geogr.f.n., dotsent

Obuna indeksi – yakka tartbdagi obunachilar uchun - 5583,
 tashkilot, korxonalar uchun - 5584

MUNDARIJA / СОДЕРЖАНИЕ / CONTENTS

МАТЕМАТИКА / МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS		
И. Э. Ниёзов, Ф. Ф. Хомидов	Критерий разрешимости задачи Коши для систем моментной теории упругости	5
E. Urunbaev, B. Bozorov	Mantiqiy tenglamalar sistemasini yechishni to'plamlar ustida amallar bajarishga keltirish usuli	9
Э. С. Сеттарова, Х. О. Хайдаров	Нахождение элементов многогранника Ньютона	12
S.N. Lakaev, S.X. Abduraximov.	Panjaradagi ikki fermionli sistemaga mos diskret Shredinger operatori xos qiymatlari mavjudligi	17
H..Qurbonov, O'.Bozorova	$M G 1 N$ xizmat ko'rsatish tarmog'i nostatsionar navbat uzunligining taqsimoti haqida	23
Z. Malikov, X. Xudoyberdiyev	Chegaralanmagan sohada Gelmgols tenglamasi uchun integral formula	27
S.N. Lakaev, M.Azizova	The existence of bound states of the two-particle discrete Schrödinger operators on lattices	29
Ya.Xusainov, M.Murtazayev	Ikkita bosh to'plam dispersiyalarining tengligi haqidagi gipotezani rang kriteriy bo'yicha tekshirish	36
U.X.Narzullayev, M.M. Usanov, F.N.Aripov	S-juftliklar to'g'risidagi buxberger algoritmi va idealga tegishlilik masalasi	37
А. Солеев, М. Буляева	Индекс следа параметризации рациональной кривой.	42
А.М.Халхужаев, Т.М.Исакулов	Существенный спектр трехчастичного дискретного оператора, соответствующего системе трех фермионов на решетке	45
У.У. Усмонов	Нахождение нормальной формы для данной системы Гамильтона	53
И. Э. Ниёзов, Э.Салимов	О задаче Коши для системы уравнений термоупругости	57
П.Д.Ходизода, И.Э.Кулмуродов	Исследование уравнения, правая часть которого содержит линейные члены	61
Х.Ф.Шарипов, Ш.Т.Хусенов	Свойства степенных преобразований.	65
А. Хатамов, А. Хасанов	О точных оценках наилучших приближений функций с выпуклыми производными удовлетворяющих условию Липшица на конечном отрезке алгебраическими многочленами.	67
T.Ishankulov, A.Raximova	Bianalitik tenglamalar uchun fok-kuni teoremasining analogi	72
H.Qurbonov, Z.Madatova	$M G 1 N$ va $GJ M 1 N-1$ xizmat ko'rsatish tarmoqlari bandlik davri taqsimotlari uchun ikkilanma munosabat	76
J.I.Abdullayev, O'.N.Quljonov	Ikki bozonli sistema hamiltonianining statsionar holatlari	79
МЕХАНИКА / МУХАНИКА / MECHANICS		
Р.И.Халмуродов	Уравнения колебания вязкоупругой пластинки	87
Б.Х.Хужаёров, Т.О.Джиянов, И.Э.Шодманов	Задача аномального переноса вещества в пористой среде	92
Б.Х.Хужаёров, У.Ж.Сайдуллаев	Решение уравнения фильтрации суспензий с образованием упруго-пластического кейк-слоя	97
Б.Х. Хужаёров, Ж.М. Махмудов, Ш.Х. Зикийев	Моделирование процессов взаимодействия воды с породой при заводнении нефтяных пластов	103
Ф.Х.Саттаров, Э.А.Исmoilов	Построение ациклических и моноциклических областей для некоторых автономных систем.	107

$$P_{N-1} = \frac{1}{(s+\lambda)[1-\bar{b}(s)]} \left\{ c_N - 2c_{N-1} + c_{N-2} - \left(\frac{\lambda}{s+\lambda} \right)^{N-1} \left[\frac{\lambda}{s+\lambda} - \bar{b}(s) \right] \right\} \quad (10)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Agar

$$c_N - 2c_{N-1} + c_{N-2} = a_n - \left(1 + \frac{s}{s+\lambda} \right) a_{N-1} + \left(\frac{\lambda}{s+\lambda} \right)^2 \sum_{k=0}^{N-2} \left(\frac{\lambda}{s+\lambda} \right)^k a_{N-k-2}$$

munosabat e'tiborga olinsa, (4), (8) va (10) ga ko'ra (2) dan ushbu tenglikga ega bo'lamiz.

$$\frac{1-\bar{f}^1}{s} = [(s+\lambda)(1-2\bar{g}^1+\bar{g}^2)]^{-1} \cdot \left\{ 1 - \left(1 + \frac{s}{s+\lambda} \right) \bar{g}^1 + \left(\frac{s}{s+\lambda} \right)^2 \sum_{k=0}^{N-2} \left(\frac{\lambda}{s+\lambda} \right)^k \bar{g}^{(k+2)} - \left(\frac{\lambda}{s+\lambda} \right)^{N-1} a_N^{-1} \left[\frac{\lambda}{s+\lambda} - \bar{b}(s) \right] \right\}. \quad (11)$$

(5) dana $a_0 = 1$, $a_1 = 1 + [1 - \bar{b}(s)]\bar{b}^{-1}(s+\lambda)$ tengliklar o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Shunday qilib,

$$\frac{1}{a_N} = \frac{a_1}{a_N} \cdot \frac{1}{a_1} = \bar{g}^{N-1} \cdot \left(1 + \frac{1-\bar{b}(s)}{\bar{b}(s+\lambda)} \right)^{-1}.$$

Bunga asosan (11) dan (1) formula hosil bo'ladi.

Adabiyotlar

1. Азларов Т.А., Тахиров А. Случайные процессы и статистические выводы, вып. 4, Ташкент, Фан, 1974, 4-7.
2. Висков О.В., Исмоилов А.И. Система массового обслуживания с ограниченной очередью, Исследования по математической статистике и смежные вопросы, науч. Труды. ТашГУ, вып. 402, 1972, 17-29.
3. Harris T.J. The remaining busy period of finite queue, Oper. Res., v19, 1971, 219-233 .
4. Курбанов Х. Переходные явления для распределения периода занятости система массового обслуживания $M|G|1|N$. "Предельные теорема для случайных процессов и статистические выводы", Сб трудов. ИМ АН УЗССР, 1981, 108-122 .

IKKI BOZONLI SISTEMA HAMILTONIANINING STATIONAR HOLATLARI

J.I.Abdullayev, O'.N.Quljonov

Samarqand davlat universiteti

E-mail: jabdullaev@mail.ru, utkir_nq83@mail.ru

Annotatsiya. Ikki bozonli sistemaga mos Shredinger operatori xos qiymatlarining kichik qo'zg'alishdagi asimptotik formulasining birinchi va ikkinchi koefitsiyentlari topilgan.

Kalit so'zlar: Hamiltonian, ikki bozonli sistema, statsionar holatlar, xos qiymat, xos funktsiya, asimptotika, xos qiymatning qo'zg'alishlari.

Стационарные состояния двух бозонных систем Гамильтониана

Аннотация. Вычислены первый и второй коэффициенты асимптотики собственного значения оператора Шрёдингера соответствующего системы двух бозонов при малых возмущений.

Ключевые слова: Гамильтониан, система двух бозонов, стационарное состояние, собственное значение, собственная функция, возмущение соответственных значение.

Stationar states of two boson system Hamiltonian

Abstract. There are found the first and second coefficients of asymptotics for every eigenvalues of the Schrodinger operator corresponding to system of two bozons under small perturbation.

Keywords: Hamiltonian, system of two bozons, bound states, eigenvalue, eigenfunction, asymptotic, perturbation

Masalaning dolzarbligi. Ikki zarrachali uzluksiz Shredinger operatori $H(\lambda) = -\Delta + \lambda V$ ning diskret spektri ko'plab mualliflar tomonidan tadqiq qilingan bo'lib, potensial V ga qo'yilgan shartlar koordinat fazoda berilgan. Masalan, V potensial chekli radiusli shardan tashqarida $|V(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\alpha}$ shartni qanoatlantirib, $\alpha > 1$ bo'lsa $H(\lambda)$ operator musbat xos qiymatlarga ega emasligi T.Kato tomonidan [1] ishda isbotlangan. $H(\lambda)$ operator manfiy xos qiymatlari sonining chekliligi haqida juda ko'p alomatlar keltirilgan. Masalan, L.D.Faddeev [2] ishda $\alpha > 2$ bo'lganda $H(\lambda)$ operatorning $(-\infty, 0)$ da yotuvchi spektri chekli sondagi chekli karrali xos qiymatlardan iborat ekanligini ko'rsatgan. M.Sh.Birmanning [3] ishida manfiy xos qiymatlar soni chekli bo'lishligining umumiy shartlari keltirilgan.

Panjaradagi ikki zarrachali sistema Hamiltonianining ba'zi spektral xossalari [4] ishda tahlil qilingan. [5] ishda esa ikki o'lchamli panjarada berilgan ikki zarrachali sistema Hamiltonianining kvaziimpuls koordinatalaridan biri $k^{(1)} = \pi$ yoki $k^{(2)} = \pi$ bo'lganda cheksiz ko'p xos qiymatlarga ega ekanligi isbotlangan. Xos qiymatlar uchun asimptotik formula ham [5] ishda keltirilgan.

Xos qiymatlarning sistema to'la kvaziimpuls koordinatalari $k^{(i)} \in O[-p, p], i = 1, 2, 3$ larga monoton bog'liqligi [6] ishda isbotlangan. Ikki fermionli sistema Hamiltonianining xos qiymatlari soni $N(k)$, $k \in [-\pi, \pi]$ ning $[0, \pi]$ kesmada kamaymovchi funksiya ekanligi [7] ishida ko'rsatilgan. Bundan tashqari, $N(k)$ funksiyaning uzilish nuqtalari topilgan va uning bu uzilish nuqtalaridagi sakrashlari hisoblangan. Bir o'lchamli panjarada ikki zarrachali Shredinger operatorining xos qiymatlarining qo'zg'alishlari [8] ishda o'rganilgan.

Masalaning qo'yilishi. Ikki bozonli sistema Hamiltoniani $\tilde{H}_2$ bir o'lchamlipanjara Z da quyidan chegaralangan operator bo'lib, u

$$\ell_2^s(Z^2) = \{f \in \ell_2(Z^2) : f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)\}$$

simmetrik Hilbert fazosida

$$\tilde{H}_2 = \tilde{H}_2^0 - \tilde{V}_2$$

formula yordamida beriladi. Bu yerda $\tilde{H}_2^0 = -\frac{1}{2}\Delta \otimes I - \frac{1}{2}I \otimes \Delta$, Δ – ayirmali Laplas operatori bo'lib, u zarraning bir tugundan qo'shni tugunga o'tishini ifodalaydi

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x), \quad f \in \ell_2(Z),$$

$\tilde{V}_2$ operator zarralarning o'zaro ta'sirini ifodalaydi, ya'ni

$$(\tilde{V}_2 f)(x_1, x_2) = \tilde{v}(x_1 - x_2) f(x_1, x_2), \quad f \in \ell_2^s(Z^2).$$

Bu yerda

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ a, & |x| = 2 \\ b, & |x| = 4 \\ 0, & \text{qolgan hollarda} \end{cases}$$

a va b lar haqiqiy sonlar bo'lib, $0 \leq b < a \leq 1$ shartlarni qanoatlantiradi.

Aniqlanishiga ko'ra ikki bozonli sistema Hamiltoniani $\tilde{H}_2$, simmetrik

Hilbert fazosi $\ell_2^s(Z^2)$ da o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator bo'ladi [7-8].

Kvant mexanikasidan ma'lumki, $H\psi = \lambda\psi$ tenglama Shryodingerning statsionar tenglamasi deyiladi. Agar bu tenglama biror $\lambda \in \mathbb{R}$ da ψ yechimga ega bo'lsa, bu ψ holat vaqtga bog'liq bo'lmaydi. Hamiltonianning koordinata ko'rinishidan uning impuls ko'rinishiga o'tish F standart Furrye almashtirishi orqali amalga oshiriladi. $H = F\tilde{H}_2F^{-1}$ operator aniqlanish sohasi simmetrik funksiyalarning Hilbert fazosi

$$L_2^s(T^2) = \{f : \int_{T^2} |f(k_1, k_2)|^2 dk_1 dk_2 < \infty, f(k_1, k_2) = f(k_2, k_1)\}, \quad T = (-\pi; \pi]$$

bo'lib, u quyidagicha aniqlanadi:

$$(Hf)(k_1, k_2) = (\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2))f(k_1, k_2) - \frac{1}{2\pi} \int_{T^2} \delta(k_1 + k_2 - s_1 - s_2) v\left(\frac{k_1 - k_2 - s_1 + s_2}{2}\right) f(s_1, s_2) ds_1 ds_2.$$

Bu yerda $\varepsilon(p) = 1 - \cos p$, δ esa Dirakning delta funksiyasi, v funksiya $\tilde{v}$ funksiyaning Furrye tasviri, ya'ni

$$(F\tilde{v})(p) = v(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \tilde{v}(s) e^{ips} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 + 2a \cos 2p + 2b \cos 4p).$$

Aniqlanishiga ko'ra v funksiya $T = (-\pi; \pi]$ da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz, juft funksiya bo'ladi. Ma'lumki [6,8,9], H operator $H(k)$, $k \in T$, $k = k_1 + k_2$ operatorlarning to'g'ri integraliga yoyiladi:

$$H = \int_T \oplus H(k) dk.$$

$H(k) = H_0(k) - V$ qatlam operatorlari Shryodinger operatorlari deyiladi. $H_0(k)$ va V operatorlar juft funksiyalarning Hilbert fazosi $L_2^e(T) = \left\{ f : \int_T |f(p)|^2 dp < \infty, f(-p) = f(p) \right\}$ da quyidagicha aniqlanadi:

$$(H_0(k)f)(q) = \varepsilon_k(q)f(q), \quad \varepsilon_k(q) = 2 - 2\cos\frac{k}{2}\cos q,$$

$$(Vf)(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T v(q-s)f(s)ds = \frac{1}{2\pi} \int_T (1 + 2a \cos 2(p-q) + 2b \cos 4(p-q))f(s)ds.$$

$H(k)$ operatorning xos funksiyalari H operatorning bog'langan holatlari sifatida talqin qilinadi va unga mos xos qiymatlar esa shu bog'langan holatlarga mos energiyaning qiymatlari bo'ladi. Shuning uchun $H(k)$ operatorning xos qiymatlarini izlaymiz.

Shredinger operatorining xos qiymatlari. Dastlab ayrim faktlarni keltiramiz. $H_0(k)$ operatorning spektri $[m(k); M(k)]$ kesmadan iborat. Bu yerda $m(k)$ va $M(k)$ sonlar $\varepsilon_k(q)$ funksiyaning mos ravishda eng kichik va eng katta qiymatlari, ya'ni

$$m(k) = \min_{q \in T} \varepsilon_k(q) = 2 - 2\cos\frac{k}{2}, \quad M(k) = \max_{q \in T} \varepsilon_k(q) = 2 + 2\cos\frac{k}{2}.$$

V operator o'z-o'ziga qo'shma, kompakt operator bo'lgani uchun uning spektri faqat xos qiymatlardan iborat. Uning xos qiymatlari cheklita bo'lib, ular 0, 1, a va b lardir. Muhim spektrning invariantligi haqidagi Veyl teoremasiga ko'ra $H(k)$ operatorning muhim spektri $H_0(k)$

operatorning muhim spektri bilan ustma-ust tushadi, ya'ni $\sigma_{ess}(H(k)) = \sigma_{ess}(H_0(k))$. Endi $H(k) = H_0(k) - V$ operatorning xos qiymatlari bilan qiziqamiz. $H(k)$ operator o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator bo'lganligi uchun uning xos qiymatlari haqiqiy va biror kesmada yotadi. V musbat operator bo'lganligidan $H(k) = H_0(k) - V$ operatorning barcha xos qiymatlari $(-\infty; m(k)]$ da yotadi, boshqacha aytganda $H(k) = H_0(k) - V$ operator $M(k)$ dan o'ngda yotuvchi xos qiymatlarga ega emas. Shuning uchun $H(k)$ operatorning xos qiymatlariga nisbatan tenglama yozganda $z < m(k)$ deb faraz qilinadi. Dastlab $H(k)$ operatorning xos qiymatlarini $k = \pi$ bo'lganda, ya'ni $H(\pi)$ operatorning xos qiymatlarini izlaymiz. Shu maqsadda xos qiymatlar uchun $H(\pi)f = zf$ tenglamani qaraymiz:

$$2f(p) - \frac{1}{2\pi} \int_T (1 + 2a \cos 2p \cos 2q + 2b \cos 4p \cos 4q) f(q) dq = zf(p). \quad (1)$$

Bu tenglamada

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_T f(q) dq, \quad c_2 = \frac{1}{2\pi} \int_T \cos 2q f(q) dq, \quad c_3 = \frac{1}{2\pi} \int_T \cos 4q f(q) dq \quad (2)$$

belgilashlar kiritamiz. U holda (1) tenglamadan

$$f(p) = \frac{c_1 + 2ac_2 \cos 2p + 2bc_3 \cos 4p}{2 - z}$$

ni olamiz. f ning ushbu ifodasini (2) ga qo'yib, c_1, c_2, c_3 larga nisbatan quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasiga kelimiz:

$$\begin{cases} (1-z)c_1 = 0 \\ (2-a-z)c_2 = 0 \\ (2-b-z)c_3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Demak, $H(\pi)$ operator xos qiymati uchun (1) tenglama nolmas yechimga ega bo'lishi uchun (3) sistema nolmas yechimga ega bo'lishi zarur va yetarlidir. (3) sistema nolmas yechimga ega bo'lishi uchun, uning determinanti

$$\Delta(z) = (1-z)(2-a-z)(2-z-b)$$

nol bo'lishi zarur va yetarli. Determinant $\Delta(z)$ ning nollari $z_1 = 1, z_2 = 2-a, z_3 = 2-b$ sonlardir. Bu sonlar $H(\pi)$ operatorning xos qiymatlari bo'ladi ([3]) va $f_1(p) = 1, f_2(p) = \cos 2p, f_3(p) = \cos 4p$ lar ularga mos xos funksiyalardir. Bundan tashqari $z = 2$ soni $H(\pi)$ operatorning cheksiz karrali xos qiymati bo'lib, unga mos xos funksiyalar quyidagi $f_n(p) = \cos np, n \in N \setminus \{2, 4\}$ ko'rinishda bo'ladi.

Bizning asosiy maqsadimiz $H(\pi)$ operator xos qiymatlarining kvaziimpuls k ning π nuqta atrofida kichik qo'zg'algandagi chetlanishlarini tekshirishdan iborat, ya'ni $k = \pi - 2\beta, \beta \in R$ bo'lganda $H(k)$ operator xos qiymatlarini "qo'zg'almas" $H(\pi)$ operator xos qiymatlaridan qanchalik chetlanishini tekshirishdan iborat. Qo'zg'alishlar nazariyasining asosiy teoremlaridan biri bo'lgan Kato-Rellix teoremasini keltiramiz, qaysikim keyinchalik biz bu teoremdan foydalanamiz.

Teorema (Kato-Rellix [9]). Faraz qilaylik, Z_0 soni B operatorning yakkalangan oddiy xos qiymati bo'lsin. U holda yetarlicha kichik $\beta \in R$ lar uchun $T(\beta) = B - \beta W$ operator yagona oddiy $z_0(\beta)$ xos qiymatga ega bo'ladi. Bu xos qiymat $U_\delta(z_0) = \{z \in C : |z - z_0| < \delta\}$ atrofda yotadi va

$\beta = 0$ nuqtaning atrofida analitik. $z_0(\beta)$ xos qiymat $\beta = 0$ nuqtaning atrofida quyidagicha darajali qatorga yoyiladi

$$z_0(\beta) = z_0 - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta^n}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \beta^n} = z_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^n.$$

Agar $T(\beta)$ o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsa, u holda Reley-Shryodinger koeffitsiyentlari deb ataluvchi a_n va b_n lar quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} (\varphi_0, [W(B-zI)^{-1}]^n \varphi_0) dz, \quad n \in N, \\ b_n &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} (\varphi_0, (B-zI)^{-1} [W(B-zI)^{-1}]^n \varphi_0) dz, \quad n \in N. \end{aligned} \quad (4)$$

Bu yerda $\varepsilon > 0$ soni shunday tanlanganki, $|z - z_0| < \varepsilon$ doira o'z ichiga $T(\beta)$ operatorning yagona $z_0(\beta)$ xos qiymatini oladi. φ_0 esa B operatorning z_0 xos qiymatiga mos keluvchi normallangan xos funksiyai.

Endi $H(\pi - 2\beta)$ operatorni quyidagi ko'rinishda tasvirlab olamiz:

$$H(\pi - 2\beta) = H(\pi) - \sin \beta W$$

Bu yerda $(Wf)(p) = 2 \cos pf(p)$. Bizga $H(\pi)$ operatorning xos qiymatlari ma'lum. Kato-Rellix teoremasiga ko'ra β ning kichik qiymatlarida $H(\pi - 2\beta) = H(\pi) - \sin \beta W$ operatorning xos qiymatlari $z_1 = 1$, $z_2 = 2 - a$, $z_3 = 2 - b$ nuqtalar atrofida yotadi va ular β parametriga analitik bog'liq bo'ladi. Biz bu xos qiymatlarni β^2 aniqligida topishga harakat qilamiz. Agar $0 < b < a < 1$ deb faraz qilsak $H(\pi)$ operatorning $z_1 = 1$, $z_2 = 2 - a$, $z_3 = 2 - b$ xos qiymatlari oddiy bo'ladi.

$H(\pi)$ operator oddiy xos qiymati $z_3 = 2 - b$ ning kichik qo'zg'alishlardagi holatini o'rganamiz. Qo'zg'alishlar nazariyasining umumiy teoremasi (Kato-Rellix) ga ko'ra $H(\pi - 2\beta)$ operatorning $z_3 = 2 - b$ nuqta atrofida yagona oddiy xos qiymati mavjud va u β parametriga analitik bog'liq. Quyidagi teorema $H(\pi - 2\beta)$ operatorning $z_3(\beta) = 2 - b - x\beta - y\beta^2 + o(\beta^2)$ xos qiymatini birinchi va ikkinchi (x va y) koeffitsiyentlarini topishga bag'ishlangan.

1-teorema. Parametr β ning yetarlicha kichik qiymatlarida $H(\pi - 2\beta) = H(\pi) - \sin \beta W$ operatorning $z_3 = 2 - b$ nuqta atrofida yagona oddiy $z_3(\beta)$ xos qiymati mavjud bo'lib, uning uchun quyidagi asimptotik formula o'rinli:

$$z_3(\beta) = 2 - b - \frac{2}{b} \beta^2 + o(\beta^2), \quad \beta \rightarrow 0.$$

Isbot. Kato-Rellix teoremasiga ko'ra $z_3(\beta)$ xos qiymat uchun

$$z_3(\beta) = z_3 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^n$$

ni yozishimiz mumkin. Biz $z_3(\beta)$ xos qiymatni β^2 aniqlikda hisoblaymiz. Buning uchun Reley-Shryodinger qatorining a_1 , a_2 , b_1 koeffitsiyentlarini topish yetarli, chunki

$$c_1 = a_1, \quad c_2 = a_2 - a_1 b_1. \quad (5)$$

a_n va b_n koeffitsiyentlarni topish uchun $(\varphi_0, [W(H(\pi) - z)^{-1}]^n \varphi_0), \varphi_0 = \frac{\cos 4p}{\sqrt{\pi}}$ skalyar ko'paytmani hisoblashimiz kerak. Bu skalyar ko'paytma barcha toq natural sonlar uchun nolga teng, ya'ni

$$(\varphi_0, [W(H(\pi) - zI)^{-1}]^{2n-1} \varphi_0) = 0, \quad \forall n \in N.$$

(4) ga asosan ixtiyoriy $n \in N$ uchun $a_{2n-1} = 0$ kelib chiqadi.

$$(\varphi_0, (H(\pi) - zI)^{-1} [W(H(\pi) - zI)^{-1}]^{2n-1} \varphi_0) = \frac{1}{z_3 - z} (\varphi_0, [W(H(\pi) - zI)^{-1}]^{2n-1} \varphi_0) = 0, \quad \forall n \in N$$

tenglikdan va (4) dan esa $b_{2n-1} = 0$ ni olamiz. Demak, ixtiyoriy $n \in N$ uchun $c_{2n-1} = 0$ ekan. Murakkab bo'lmagan hisoblashlar ko'rsatadiki,

$$(\varphi_0, [W(H(\pi) - zI)^{-1}]^2 \varphi_0) = \frac{2}{(z_3 - z)(2 - z)}.$$

Bu tenglikni ikkala tomonini $(-2\pi)^{-1}$ ga ko'paytiramiz va $|z - z_3| = \varepsilon$ aylana bo'yicha integrallaymiz, u holda $a_2 = \frac{2}{b}$ kelib chiqadi. (5) tengliklardan $c_1 = 0$,

$c_2 = a_2$ tengliklar kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Qo'zg'alishlar nazariyasining asosiy teoremlari oddiy xos qiymatlar uchun keltirilgan. O'z-o'ziga qo'shma operatorning karrali xos qiymatlari uchun qo'zg'alishlar nazariyasi teoremlari asosan mavjudlik haqida bo'lib, ularning asimptotik holatlari yaxshi o'rganilmagan. Shuning uchun masalani soddalashtirish maqsadida $a = 1, b = 0$ deb faraz qilamiz. Bu holda $H(\pi)$ operatorning $z = 1$ xos qiymati ikki karrali bo'ladi. Quyidagi teorema $H(\pi - 2\beta)$ operatorning $z = 1$ nuqta atrofida yotuvchi xos qiymatlarining asimptotikasi haqidadir.

2-teorema. Faraz qilaylik $a = 1, b = 0$ bo'lsin. U holda shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lib, barcha $\beta \in (0, \delta)$ larda $H(\pi - 2\beta)$ operator $z_1 = 1$ nuqta atrofida ikkita oddiy xos qiymatga ega va ular uchun quyidagi asimptotik formulalar o'rinni:

$$z_1^{(1)}(\beta) = 1 - (2 + \sqrt{2})\beta^2 + o(\beta^2), \quad z_1^{(2)}(\beta) = 1 - (2 - \sqrt{2})\beta^2 + o(\beta^2).$$

Isbot. $H(\pi - 2\beta)$ operator xos qiymati uchun

$$(2 - 2 \sin \beta \cos p) f(p) - \frac{1}{2\pi} \int_T (1 + 2 \cos 2p \cos 2q) f(q) dq = z f(p)$$

tenglamani qaraymiz. Bu tenglama (2) belgilashlarda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$(2 - 2 \sin \beta \cos p) f(p) - c_1 - 2c_2 \cos 2p = z f(p).$$

Bundan esa

$$f(p) = \frac{c_1 + 2c_2 \cos 2p}{2 - z - 2 \sin \beta \cos p} = \frac{1}{2 - z} \cdot \frac{c_1 + 2c_2 \cos 2p}{1 - \frac{2 \sin \beta}{2 - z} \cos p}$$

ga kelimiz. Teoremda ko'rsatilgan $\delta > 0$ ni shunday tanlash mumkinki, barcha $\beta \in (0; \delta)$ va

$p \in T$ larda $\left| \frac{2 \sin \beta}{2 - z} \cos p \right| < 1$ bo'ladi va $\sin \beta \square \beta$ ekanligidan

$$f(p) = (c_1 + 2c_2 \cos 2p) \left\{ \frac{1}{2-z} + \frac{2\beta \cos p}{(2-z)^2} + \frac{4\beta^2 \cos^2 p}{(2-z)^3} + \frac{8\beta^3 \cos^3 p}{(2-z)^4} + \frac{16\beta^4 \cos^4 p}{(2-z)^5} + o(\beta^4) \right\}$$

ga ega bo'lamiz. $f(p)$ funksiyaning topilgan ushbu ifodasini (2) belgilashlardagi c_1 va c_2 larga qo'yamiz va quyidagi chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \left((2-z)^5 - (2-z)^4 - 2(2-z)^2 \beta^2 - 6\beta^4 \right) c_1 - \left(2(2-z)^2 \beta^2 + 8\beta^4 \right) c_2 = 0 \\ \left(-(2-z)^2 \beta^2 - 4b\beta^4 \right) c_1 + \left((2-z)^5 - (2-z)^4 - 2(2-z)^2 \beta^2 - 7\beta^4 \right) c_2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Bu sistemaga mos determinantni tuzamiz:

$$\Delta(z; \beta) = \begin{vmatrix} (2-z)^5 - (2-z)^4 - 2(2-z)^2 \beta^2 - 6\beta^4 & -2(2-z)^2 \beta^2 - 8\beta^4 \\ -(2-z)^2 \beta^2 - 4b\beta^4 & (2-z)^5 - (2-z)^4 - 2(2-z)^2 \beta^2 - 7\beta^4 \end{vmatrix} \quad (7)$$

Algebra kursidan ma'lumki, chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi nolmas yechimga ega bo'lishi uchun uning asosiy determinant nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni $\Delta(z; \beta) = 0$. (7) ga ko'ra $\Delta(z; \beta)$ determinant β ning faqat juft darajalariga bog'liqligi va analitikligi sababli $H(\pi - 2\beta)$ operatorning xos qiymatini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$z_1(\beta) = 1 - x\beta^2 + o(\beta^2), \quad x \in R \quad (8)$$

$z_1(\beta)$ ning (8) ifodasini (7) ga qo'ysak, $\Delta(z; \beta)$ quyidagicha bo'ladi:

$$\Delta(\beta) = \left((x-2)^2 - 2 \right) (1-b) \beta^4 + o(\beta^4) = 0.$$

Endi β^4 oldidagi koeffitsiyentni nolga tenglashtirib, $(1-b) < 0$ ekanligini hisobga olsak

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ ga kelamiz. Demak, $H(\pi - 2\beta)$ operatorning xos qiymatlari

$$\begin{aligned} z_1^{(1)}(\beta) &= 1 - (2 + \sqrt{2})\beta^2 + o(\beta^2) \\ z_1^{(2)}(\beta) &= 1 - (2 - \sqrt{2})\beta^2 + o(\beta^2) \end{aligned} \quad (9)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Ma'lumki, $z_1 = 1$ soni $H(\pi)$ operator uchun ikki karrali xos qiymat edi. Demak kichik qo'zg'alishlarda bu xos qiymat ikkita oddiy $z_1^{(1)}(\beta)$ va $z_1^{(2)}(\beta)$ xos qiymatlarga ajraladi, ya'ni β ning kichik qiymatlarida $H(\pi - 2\beta)$ operatorning $z_1 = 1$ nuqta atrofida ikkita $z_1^{(1)}(\beta)$ va $z_1^{(2)}(\beta)$ oddiy xos qiymatlari mavjud.

Bu xos qiymatlarga mos xos funksiyalarni topamiz. $z_1^{(1)}(\beta)$ va $z_1^{(2)}(\beta)$ larning (9) ifodalarini (6) sistemaga qo'yib, $c_1 = \sqrt{2}c_2$ va $c_1 = -\sqrt{2}c_2$ munosabatlarni olamiz, u holda $z_1^{(1)}(\beta)$ va $z_1^{(2)}(\beta)$ xos qiymatlarga mos xos funksiyalar uchun quyidagi ko'rinishni olamiz:

$$f_1^{(1)}(p) = c_2 \left(\sqrt{2} + 2 \cos 2p \right) \left(\frac{1}{2 - z_1^{(1)}(\beta)} + \frac{2\beta \cos p}{(2 - z_1^{(1)}(\beta))^2} + \frac{4\beta^2 \cos^2 p}{(2 - z_1^{(1)}(\beta))^3} + o(\beta^2) \right) \quad (10)$$

$$f_1^{(2)}(p) = c_2 \left(-\sqrt{2} + 2 \cos 2p \right) \left(\frac{1}{2 - z_1^{(2)}(\beta)} + \frac{2\beta \cos p}{(2 - z_1^{(2)}(\beta))^2} + \frac{4\beta^2 \cos^2 p}{(2 - z_1^{(2)}(\beta))^3} + o(\beta^2) \right) \quad (11)$$

$\frac{1}{2-z_1^{(1)}(\beta)}$ va $\frac{1}{2-z_1^{(2)}(\beta)}$ ifodalarni mos ravishda $\frac{1}{2-z_1^{(1)}(\beta)} = 1 - (2 + \sqrt{2})\beta^2 + o(\beta^2)$ va $\frac{1}{2-z_1^{(2)}(\beta)} = 1 - (2 + \sqrt{2})\beta^2 + o(\beta^2)$ shakllarda ifodalaymiz hamda ularni (10) va (11) larga qo'yib, $f_1^{(1)}(p)$ va $f_1^{(2)}(p)$ xos funksiyalar uchun quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$f_1^{(1)}(p) = c_2 \left(\sqrt{2} + 2 \cos 2p + 2\beta \cos p \left(\sqrt{2} + 2 \cos 2p \right) + 2\beta^2 \cos 4p + o(\beta^2) \right),$$

$$f_1^{(2)}(p) = c_2 \left(-\sqrt{2} + 2 \cos 2p + 2\beta \cos p \left(-\sqrt{2} + 2 \cos 2p \right) + 2\beta^2 \cos 4p + o(\beta^2) \right).$$

Adabiyotlar

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Москва.: Мир. 1972.
2. Фаддеев Л.Д. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора Шредингера. Вестник ЛГУ. № 7. Выпуск-2. 1957. ст.147-166.
3. Бирман М.Ш. О числе собственных значений в задаче квантового рассеяния. Вестник ЛГУ. № 13. Выпуск-3. 1961. ст.163-166.
4. P.P.A. Faria da Vieg, L.Ioriatti and M.O'.Carrol. Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schrodinger Hamiltonian. Phys. Rev. 2002. E(3) 66, 016130, 9 pp.
5. Абдуллаев Ж.И., Собственные значения двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке, Узбекский Математический Журнал, № 1, 2005. ст.3-11.
6. Абдуллаев Ж.И., Монотонность собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке, ДАН РУз, 2005, № 2, ст.11-16.
7. Абдуллаев Ж.И. Связанные состояния системы двух фермионов на одномерной решетке. Теоретическая и математическая физика. 2006. Том-147, № 1. ст.36-47.
8. Абдуллаев Ж.И. Теория возмущений для двухчастичного оператора Шредингера на решетке. Теоретическая и математическая физика. 2005. Том-145, № 1, ст.212-220.
9. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том-4, Анализ операторов, Москва, Наука, 1982.