

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Qo‘lyozma huquqida

MADATOVA ZUXRA ABDIRAXIMOVNA

KUTISH JOYLARI SONI CHEKLI XIZMAT KO‘RSATISH
TARMOQLARI
BANDLIK DAVRI TAQSIMOTI VA O‘RTA QIYMATLARI UCHUN
ASIMPTOTIK MUNOSABATLAR

5A130102- «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
mutaxassisligi bo‘yicha magistr
akademik darajasini olish uchun yozilgan
DISSERTATSIYA

Ilmiy rahbar:

dots. H.Q. Qurbonov

SAMARQAND - 2017

Mundarija

Kirish	3
I bob. Ommaviy xizmat ko‘rsatish tarmoqlari bo‘yicha ishlarga oid tarixiy ma’lumotlar va asosiy tushunchalar	
1.1-§. Qisqacha tarixiy ma’lumotlar. Ommaviy xizmat ko‘rsatish tarmoqlarining matematik modeli.....	7
1.2-§. $M/G/1$ va $GJ/M/1$ xizmat ko‘rsatish tarmoqlarining bandlik davrlaritaqsimoti va o‘rta qiymati.....	13
II bob. $M/G/1/N$ va $GJ/M/1/N - 1$ tarmoqlar bandlik davri taqsimoti va o‘rta qiymatlari o‘rtasida ikkilanma munosabatlar	
2.1-§. $M/G/1/N$ va $GJ/M/1/N - 1$ xizmat ko‘rsatish tarmoqlari bandlik davri taqsimotlari uchun ikkilanma munosabat.....	23
2.2-§. Statsionar navbat uzunligi va bandlik davri o‘rta qiymatlari o‘rtasidagi munosabatlar haqida.....	28
2.3-§. $M/G/1/N$ va $GJ/M/1/N - 1$ ikkilanma xizmat ko‘rsatish tarmoqlari statsionar navbat uzunliklari o‘rtasidagi munosabatlar haqida.....	31
III bob. $M/G/1/N$ tarmoq bandlik davri taqsimoti va o‘rta qiymati uchun asimptotik munosabatlar	
3.1-§. $M/G/1/N$ xizmat ko‘rsatish tarmog‘i bandlik davri taqsimoti uchun asimptotik formula.....	36
3.2-§. $M/G/1/N$ xizmat ko‘rsatish tarmog‘i bandlik davri o‘rta qiymatining asimptotik holati va uning tadbiqi.....	41
3.3-§. $M/G/1/N$ sistemaning bandlik davri o‘rta qiymati uchun ayrim limit teoremlar.....	45
Xulosa	49
Foydalanilgan adabiyotlar	51

Kirish

1. Mavzuning dolzarbligi. Ommaviy xizmat ko'rsatish tarmoqlarida navbatning hosil bo'lishi hozirgi kunda odatdagi holat bo'lib qoldi. Kundalik hayotda navbatda turib vaqt yo'qotish muammosi oddiy bir shaxs uchun ancha yoqimsiz bo'lsada, har holda toqat qilish mumkin bo'lgan hol hisoblanishi mumkin. Lekin xizmat ko'rsatilishi lozim bo'lgan talablar sanoat korxonalarida, savdo tarmoqlarida, transportda, aloqa va boshqa kommunikatsiya tizimlarida to'planib qolib, uzun navbatlar hosil bo'ladigan bo'lsa, bu nafaqat vaqt yo'qotish, balki resurslarni vaqtida ishlatilmasligi, ularni saqlash, mahsulotlarning eskirishi, malumotlarning vaqtida uzatilmasligi natijasida kelib chiqadigan katta miqdordagi moddiy zarar ko'rish muammolarini keltirib chiqaradi. Shu sababli navbat uzunliklarini qisqartirish uchun xizmat ko'rsatish korxonalarini to'g'ri rejalashtirish, samarali xizmat ko'rsatishni ta'minlash hayotiy muhim ahamiyatga ega.

Xizmat ko'rsatish tarmoqlarining matematik tahliliga doir dastlabki ishlar o'tgan asrning boshlarida amalga oshirildi va Daniyalik olim Kopengagen telefon kompaniyasining ko'p yillik xodimi A.K.Erlangga tegishli. Shundan keyin bu sohaga qiziqish matematiklar, iqtisodchi hamda muhandislar o'rtasida kuchayib ketdi va transport, iqtisodiyot, texnika, tabiatshunoslik, savdo, harbiy ishlar sohalarini modellashtirish va tahlil etishga doir ko'plab ishlar nashr etildi.

Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasiga tegishli ishlar dastlab A.Ya.Xinchin [21] keyinchalik L.Takach [18], G.P.Klimov [11], B.V.Gnedenko va I.N.Kovalenko [6], L.Kleynrok [15], N.Djeysuol [7], T.L.Caati [17] , G.I.Ivchenko [10], A.A.Borovkov [3] va boshqalarning monografiya va darsliklarida umumiy lashtirilib, tizimga solindi.

Ushbu ishlarda asosiy e'tibor xizmat ko'rsatish tarmoqlarining navbat uzunligi, talablarning kutish vaqti, xizmat ko'rsatish qurilmasi yoki qurilmalarining uzluksiz xizmat bilan bandlik davri kabi xarakteristikalariga qaratiladi.

Ushbu dissertatsiya ishida kutish joylari soni chegaralangan xizmat ko'rsatish tarmoqlarining bandlik davri taqsimoti va o'rta qiymati uchun asimptotik munosabat tahlil qilinadi. Kutish joylar soni cheklanmagan tarmoqlar bandlik davri va uning o'rta qiymatlariga doir natijalar yuqorida aytib o'tilgan ishlarda batafsil keltirilgan. Kutish joylari soni cheklangan tarmoqlar bandlik davri taqsimoti bo'yicha dastlabki natija Xarrisga [23] tegishli bo'lib, keyinchalik uning asimptotik holalari $M \gg 1/N$ tarmoqlar uchun X.T.Tashmonov [19], $M \gg 1/N$ tarmoqlar uchun G.A.Azlarov va H.Qurbonovlar [2] tomonidan tahlil etilgan. Lekin ayrim jihatlari, qator amaliy va nazariy ahamiyatga ega bo'lgan holatlar tahlili yakuniga yetkazilmagan.

2. Masalaning qo'yilishi. $M \gg 1/N$ va $G/J \gg M \gg 1/N - 1$ xizmat ko'rsatish tarmoqlari o'rta qiymatlarining asimptotik holatlarini tahlil qilish. Ushbu tarmoqlar bandlik davrlari va o'rta qiymatlari o'rtasida ikkilanma munosabatlar o'rnatish, statsionar navbat uzunliklari taqsimoti va bandlik davri o'rta qiymatlari o'rtasida munosabat o'rnatish, hamda ushbu munosabatlardan navbat uzunligi taqsimotining asimptotik holatlarini o'rganishda foydalanish, shuningdek, ushbu munosabatlar orqali ayrim ma'lum natijalarni boshqa usulda keltirib chiqarish masalasi qo'yildi.

3. Tadqiqot ob'ekti va predmeti. Tadqiqot ob'ekti $M \gg 1/N$ va $G/J \gg M \gg 1/N - 1$ ommoviy xizmat ko'rsatish tarmoqlari hamda tadqiqot predmeti ushbu tarmoqlar bandlik davrlari taqsimoti va o'rta qiymatlari, statsionar navbat uzunliklari taqsimoti hisoblanadi.

4. Tadqiqotning maqsadi va vazifalari. Kutish joylari soni chegaralangan xizmat ko'rsatish tarmoqlari ($M \gg 1/N$ va $G/J \gg M \gg 1/N - 1$) bandlik davri taqsimoti va o'rta qiymatlarining asimptotik holatlarini tahlil qilish va ulardan statsionar navbat uzunliklari taqsimotlarini o'rganishda foydalanish maqsad qilib qo'yilda. Shu maqsadda bandlik davrlari taqsimotlari va o'rta qiymatlari o'rtasida ikkilanma munosabatlar o'rnatish, statsionar navbat uzunliklari taqsimoti va bandlik davri o'rta qiymatlari o'rtasida munosabat o'rnatish,

bandlik davri o'rtta qiymatlarining $N \rightarrow \infty$ va tarmoq yuklanmasi $\rho \rightarrow 1$ dagi asimptotik holatlarini aniqlash masalalarini hal qilish vazifalari qo'yildi.

5. Ilmiy yangiligi.

- 1) $M/G/1/N$ va $GJ/M/1/N-1$ xizmat ko'rsatish tarmoqlari bandlik davri taqsimotlari o'rtasida ikkilanma munosabat o'rnatildi.
- 2) $M/G/1/N$ va $GJ/M/1/N-1$ xizmat ko'rsatish tarmoqlari statsionar navbat uzunliklari taqsimotlari va $M/G/1/N$ xizmat ko'rsatish tarmog'i bandlik davri o'rtta qiymati o'rtasida munosabat o'rnatildi.
- 3) $M/G/1/N$ va $GJ/M/1/N-k$, $k=1, N-1$, tarmoqlar o'rtta qiymatlarining o'zaro aloqalari bo'yicha asimptotik munosabatlar keltirib chiqarildi.

6. Ilmiy tadqiqot usullari. Ushbu ishda ehtimollar nazariyasining umumiy tadqiqot metodlari bilan bir qatorda ikkilanma munosabat o'rnatish, xarakteristik va hosil qiluvchi funksiyalar, qayta tiklanish jarayonlari, kiritilgan Markov zanjirlari (qo'shimcha o'zgaruvchi kiritish) kabi tadqiqot metodlaridan foydalanildi.

7. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati. Ushbu olingan natijalar yangi bo'lib; keyinchalik umumiyroq xizmat ko'rsatish tarmoqlari (imtiyozli xizmat ko'rsatish tarmoqlari, $M/G/m/N$ $m \geq 1$, $GJ/M/m/N$, $G/G/1/N$ va h.k.) xarakteristikasini tahlil etish uchun mo'ljal bo'lib xizmat qiladi. Shuningdek, o'rnatilgan ikkilanma munosabatlar bir tarmoqqa tegishli xarakteristikalar uchun olingan natijalarni ikkinchi tarmoqning mos xarakteristikalariga bevosita ko'chirish imkonini beradi.

8. Ishning amaliy ahamiyati. Ma'lumki, ommoviy xizmat ko'rsatish tarmoqlariga doir xarakteristikalar (bandlik davri, navbat uzunligi, kutish vaqti va h.k) taqsimotlari hatto eng sodda (klassik) xizmat ko'rsatish tarmoqlari uchun ham deyarli aniq ko'rinishda emas, balki Laplas – Stiltjes almashtirishlari va hosil qiluvchi funksiyalar orqali ifodalanadi. Bu esa amaliyotda ushbu taqsimotlardan bevosita foydalanish imkonini bermaydi. Ishda olingan asimptotik taqsimot va ifodalar aniq ko'rinishga ega bo'lib, N ning yetarlicha

katta va tarmoq yuklanmasi ρ ning birga yetarlicha yaqin qiymatlarida ulardan to'g'ridan - to'g'ri foydalanish, tegishli kompyuter dasturlarini tuzish va hisob – kitob ishlarini soddalashtirish imkonini beradi.

9. Ishning tuzilishi. Ish kirish qismi va uchta bobga birlashtirilgan sakkizta paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar qismlaridan iborat. Bibliografiyada 4 ta darslik, 12 ta monografiya va 20 ta ilmiy maqolalar, jami 36ta adabiyot ro'yxati keltirilgan. Ish 54 betdan iborat.

10. Ishning qisqacha mazmuni. I bob ikkita paragrafdan iborat bo'lib, ommoviy xizmat ko'rsatish tarmoqlariga oid qisqacha tarixiy ma'lumotlar, xizmat ko'rsatish tarmoqlarining matematik modeli bo'yicha tushunchalar va asosiy xarakteristikalar (navbat uzunligi, kutish vaqti va bandlik davri) tasnifi, $M \leq G \leq 1$ va $G/J \leq M \leq 1$ tarmoqlar bandlik davrlari va ularning o'rta qiymatlarini aniqlashga doir ma'lumotlar berilgan.

II va III boblar bevosita muallif tomonidan, shuningdek, ilmiy rahbar bilan hamkorlikda olingan ilmiy natijalar bayoniga bag'ishlangan bo'lib, ushbu natijalar $M \leq G \leq 1/N$ va $G/J \leq M \leq 1/N - 1$ xizmat ko'rsatish tarmoqlarining bandlik davri taqsimotlari va o'rta qiymatlari o'rtasidagi ikkilanma munosabatlar, qaralayotgan tarmoqlar statsionar navbat uzunliklari va $M \leq G \leq 1/k$, $k = 1, N$ tarmoq bandlik davri o'rta qiymati o'rtasidagi munosabatlar, bandlik davri o'rta qiymatlari uchun asimptotik munosabatlar va ularning tadbiqlariga tegishlidir.

Ibob. Ommaviy xizmat ko'rsatish tarmoqlari bo'yicha ishlarga oid tarixiy ma'lumotlar va asosiy tushunchalar

1.1-§. Qisqacha tarixiy ma'lumotlar. Ommaviy xizmat ko'rsatish tarmoqlarining matematik modeli

1. Tarixiy ma'lumotlar. O'tgan asrning boshlarida iqtisodiyotda avtomatlashtirilgan boshqaruv tizimiga o'tishning boshlanishi, hayotga telefon va telegraf kabi aloqa tizimlarining kirib kelishi, ommaviy xizmat ko'rsatish sohalarining kengayishi, tabiiy fanlar (fizika, astronomiya, biologiya, geografiya) bo'yicha qator muammolarmatematiklar oldiga yangi tipdagimasalalarni, jumladan, xizmat ko'rsatish tarmoqlarini optimal rejalashtirish, xizmat ko'rsatish qurilmalarining samarali ishlashini ta'minlash, vaqt yo'qotish bilan bog'liq muammolarni hal qilish kabi vazifalarni ko'ndalang qilib qo'ydi. Dastlab ushbu muammolar asosan telefon stansiyasi abonentlariga xizmat ko'rsatish, savdo shaxobchalaridagi sotiladigan tovarlar zahirasiining optimal hajmini belgilash, ma'lum hududdagi savdo shaxobchalari va ulardagi sotuvchilarning ratsional miqdorini aniqlash masalasiga tegishli edi.

Ommaviy xizmat ko'rsatish tarmoqlariga tegishli jarayonlarni tadqiq etishga doir dastlabki ishlar 1878- 1929- yillarda yashab o'tgan daniyalik olim Kopengagen telefon kompaniyasining xodimi A.K.Erlangga tegishli bo'lib, u asosan telefon stansiyasiga keladigan abonentlar oqimi hamda stansiyaning yuklanishi bilan bog'liq masalalarni real hayotdan bir muncha uzoqroq bo'lgan shartlarda bo'lsa ham hal qildi. A.K.Erlang tomonidan masalani reallikka yaqinlashtirish bo'yicha birmuncha ishlar muvaffaqiyatli hal etildi. Ushbu ishlardan keyin ommaviy xizmat ko'rsatish tarmoqlarini tahlili bilan shug'ullanuvchi matematik, muhandis va iqtisodchilar safi kengayib ketdi. Ma'lum bo'ldiki, tabiatshunoslik, texnika, iqtisodiyot, transport, harbiy ishlar, ishlab chiqarishni tashkil etishga doir ko'plab masalalarning matematik

modellari telefon stansiyasiga tegishli masalalar bilan mos tushadi. Har xil xizmat ko'rsatish tarmoqlarini modellashtirish bilan bir qatorda ushbu tarmoqlarga tegishli tasodifiy jarayonlarini tatqiq qilish metodlarini ishlab chiqishga doir ko'plab ishlar amalga oshirildi.

O'tgan asrning 30- yillarida va undan keyin sanoatda stanoklarni avtomatlashtirishga o'tilganligi, yadro fizikasining rivojlanishi bilan mutaxassislar oldiga ehtiyojning o'zi yangidan yangi vazifalarni qo'ydi va bu boradagi ko'plab masalalar muvaffaqiyatli hal qilindi.

Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasiga tegishli ishlar dastlab A.Ya.Xinchin [21] keyinchalik L.Takach [18], T.L.Saati [17], larning monografiya tipidagi kitoblarida umumlashtirildi. O'tgan asrning 70-yillarida Koen [13], D.Gross va C.M.Harris [15], G.B.Klimov [11], G.I.Ivchenko B.A.Kashtanov, I.N.Kovalinko [10], 80-yillarda I.N.Kleynrok [16], N.Djeysuol [7], B.V.Gnedenko, E.A.Danielyan, V.I.Dmitrov, G.P.Klimov, V.F.Matveev [8], 90-yillarda B.V.Gnedenko va I.N.Kovalinko [6] tomonidan monografiya va darsliklar yozildi. Ushbu adabiyotlarda ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi bo'yicha olingan natijalar umumiyashtirilib, ma'lum sistemaga solindi. Shu bilan birgalikda ommaviy xizmat ko'rsatish tarmoqlarini tadqiq qilish va asimptotik tahlil qilishga bag'ishlangan bir nechta kitoblar nashr etildi. Jumladan, A.A.Borovkov [3], L.Takach [18] ning kitoblarida ushbu muammolar yetarlicha chuqur tahlil etib berildi.

2. Ommaviy xizmat ko'rsatish tarmoqlarining matematik modeli va asosiy xarakteristikalar. Odatda xizmat ko'rsatish jarayoni quyidagicha ifodalanadi: tarmoqqa kelib tushadigan har bir talabga xizmat ko'rsatish qurilmasi bo'sh bo'lsa, shu zahotiy oq xizmat ko'rsatiladi, agar band bo'lsa, u holda navbatda turadi va xizmat tugagandan keyin tarmoqdan chiqib ketadi. Xizmat ko'rsatish jarayonining matematik tahlili uchun quyidagi ma'lumotlar talab etiladi:

a) Talablarning tarmoqqa kelib tushish qonuniyati.

Talablarning kelib tushish momentlari $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ bo'lsin. U holda

$z_k = t_k - t_{k-1}, k \geq 1$ tasodifiy miqdorlar bo'ladi. Aksariyat hollarda $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ laro'zaro bog'liq bo'lmagan va bir xil $A(x) = P(z_n < x)$ taqsimot funksiyasiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar hisoblanadi. $A(x)$ talablarning kelib tushish momentlari orasidagi vaqt uzunliklarining taqsimoti deyiladi. Ko'pchilik hollarda $A(x)$ funksiya λ parametrli ko'rsatkichli taqsimot, ya'ni

$$A(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

deb faraz qilinadi. Bu holda $(0, t)$ vaqt oralig'ida kelib tushgan talablar soni $\xi(t)$ Puasson taqsimotiga ega bo'ladi. Ya'ni

$$P \{ \xi(t) = n \} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \geq 0.$$

Shu sababli bunday hollarda tarmoqqa kelib tushuvchi talablar λ parametrli Puasson oqimini tashkil etadi deyiladi.

b) Talablarga xizmat ko'rsatish qonuniyati. $S_n, n \geq 1$, orqali tarmoqqa kelib tushgan n -talabga xizmat ko'rsatish vaqti uzunligini belgilaymiz. Aksariyat hollarda $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ lar o'zaro bog'liq bo'lmagan va bir xil $B(x) = P(S_n < x), n \geq 1$, taqsimot funksiyasiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar hisoblanadi. $B(x)$ xizmat ko'rsatish vaqti uzunliklari taqsimoti deyiladi. Xususiyl holda $B(x)$ taqsimot

$$B(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x}, & x > 0, \mu > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi va μ parametrli ko'rsatkichli taqsimot deyiladi.

c) Xizmat ko'rsatish qurilmalari soni. Xizmat ko'rsatish tarmoqlarida bitta yoki undan ko'p xizmat ko'rsatish qurilmalari mavjud bo'lishi mumkin. Bitta qurilmaga ega bo'lgan tarmoqlar birkanalli va bittadan ortiq qurilmaga ega tarmoqlar ko'p kanalli xizmat ko'rsatish tarmog'i deyiladi.

d) Xizmat ko'rsatish tartibi. Xizmat ko'rsatish tartibi deganda talablarga xizmat ko'rsatish uchun belgilangan qoidalar tushuniladi. Eng ko'p uchraydigan xizmat ko'rsatish tartiblari quyidagilar hisoblanadi:

„Birinchi bo‘lib keldi, birinchi bo‘lib xizmat ko‘rsatildi”, ya’ni talablarga ularning kelish tartibi bo‘yicha xizmat ko‘rsatish;

„Oxirida keldi, birinchi bo‘lib xizmat ko‘rsatildi”, ya’ni talablarga ularning kelishiga teskari tartibda xizmat ko‘rsatish. Ushbu tartib „inversion tartib” deb ham ataladi.

„Guruhli xizmat ko‘rsatish”. Ushbu holda alohida bitta talabga emas, ma’lum chekli guruhga (xususiy holda boshqa talablar bo‘lmaganda bitta talabga) xizmat ko‘rsatiladi;

„Imtiyozli xizmat ko‘rsatish”. Ushbu holda tarmoqqa kelib tushuvchi talablar xizmatning zaruriyat darajasiga qarab turlarga ajratiladi va har bir tur ba’zi turlarga nisbatan yuqori imtiyozga ega bo‘ladi, ya’ni imtiyozi yuqori bo‘lgan talabga imtiyozi past bo‘lgan talablardan oldin xizmat ko‘rsatiladi. Aytaylik, talablar imtiyoziga qarab r ta turga ajratilgan va birinchi tur eng yuqori imtiyozga, ikkinchi tur undan keyingi imtiyozga va h.k. ga ega bo‘lsin, ya’ni agar $i < j$ bo‘lsa, i – turdagi talabga j – turdagi talabdan oldin xizmat ko‘rsatilsin. Bu holda imtiyozli xizmat ko‘rsatishning quyidagi variantlari amaliyotda ko‘p uchraydi:

1) Mutlaq imtiyoz: Ushbu holda $i < j$ bo‘lsa, j – turdagi talabga xizmat ko‘rsatilayotganda tarmoqqa i – turdagi talab kelib tushsa, j – turdagi talabning xizmati uzib qo‘yiladi va i – turdagi talabga xizmat ko‘rsatish boshlanadi.

2) Nisbiy imtiyoz: $i < j$ holda qurilmadagi j – tur talabning xizmati oxirigacha davom etadi va xizmat tugagandan keyin qurilmaga i – tur talab qabul qilinadi.

3) Aralash imtiyoz: $i < j$ holda j – turdagi talabga xizmat ko‘rsatish vaqtiga bog‘liq holda 1) va 2) variantlardan biri tanlanadi.

Mutlaq imtiyozli xizmat ko‘rsatish tarmog‘i ham o‘z navbatida quyidagi tiplarga ajratiladi.

1) Oxirigacha xizmat ko‘rsatadigan mutlaq imtiyoz: xizmati uzib qo‘yilgan talabga xizmat yuqori imtiyozli talablar qolmagandan keyin uzib qo‘yilgan joyidan davom ettiriladi;

2) Xizmat takrorlanadigan mutlaq imtiyoz: xizmati uzib qo'yiladigan talabga dastlabki tartibda xizmat ko'rsatiladi, ya'ni xizmat uzilgancha ko'rsatilgan xizmat vaqti takrorlanadi;

3) Boshqatdan xizmat ko'rsatiladigan mutlaq imtiyoz: xizmat tiklangandan keyin xizmat uzilgan momentgacha ko'rsatilgan xizmat vaqti etiborga olinmaydi va xizmat boshqatdan boshlanadi.

Xizmat ko'rsatish tarmoqlarini rejalashtirish va xizmat ko'rsatish samaradorligini taminlash hamda vaqt yo'qotish bilan bog'liq muammolarni hal etish nuqtai nazaridan quyidagi xarakteristikalarini tahlil qilish muhim hisoblanadi:

a) Navbat uzunligi. Tarmoqning t momentdagi navbat uzunligi shu momentda xizmat qilinayotgan va navbatda turgan talablar soni bilan aniqlanadi. Navbat uzunligini o'rganish tarmoqni rejalashtirishva umuman nazariy nuqtai nazaridan muhim hisoblanadi;

b) Kutish vaqti (ba'zi hollarda tarmoqda bo'lish vaqti). t momentda tarmoqqa kelib tushgan talablarning kutish vaqti t momentdan tarmoqda navbatda turgan va xizmat ko'rsatilayotgan talablarga to'liq xizmat ko'rsatilgancha bo'lgan vaqt uzunligi bilan aniqlanadi. t momentdagi kutish vaqti odatda virtual kutish vaqti deb ham ataladi. Ushbu xarakteristikani o'rganish vaqt yo'qotish bilan bog'liq muammolarni hal etish uchun zarur hisoblanadi;

c) Bandlik davri. Tarmoqda birorta ham talab bo'lmagan vaqt oralig'i tarmoqning band bo'lmagan davri deyiladi. Bandlik davri esa tarmoqning uzluksiz xizmat bilan band bo'lgan (band bo'lmagan davrga o'tmagan) vaqt uzunligi bilan aniqlanadi. Aytish mumkinki, xizmat jarayoni ketma-ket keladigan bandlik va band bo'lmagan davrlardan iborat bo'ladi.

Bandlik davrini tahlil qilish xizmat ko'rsatish samaradorligini ta'minlash nuqtai nazaridan muhim hisoblanadi.

Xizmat ko'rsatish tarmoqlarini matematik modeli qisqacha $A|B|n|N$ ko'rinishda belgilanadi. Bu yerda A – talablarning kelib tushish qonuniyati, B – talablarga xizmat ko'rsatish qonuniyati, n – xizmat ko'rsatish

qurilmalari soni, N –kutish joylari soni yoki kutish vaqtiga qo'yilgan chegara. Agar $N = \infty$ bo'lsa, u tushirilib qoldiriladi va tarmoq $A|B|n$ ko'rinishda belgilanadi. Agar talablarning kelish va ularga xizmat ko'rsatish qonuniyati ko'rsatgichli taqsimot bo'lsa, M harfi va agar ixtiyoriy taqsimot bo'lsa G harfi ishlatiladi. Masalan, $M|M|1, M|G|1|N, G|M|n$ va h.k.

Imtiyozli xizmat ko'rsatish tarmoqlari uchun quyidagi belgilashlar ishlatiladi:

$$\vec{A}_r | \vec{B}_r | n | N_1, N_2, \dots, N_r, \vec{A}_r | \vec{B}_r | n | N, \dots,$$

bu yerda r - talablar turlarining soni, $N_1, N_2, \dots, N_r$ lar mos holda tegishli turdagi talablar uchun belgilangan kutish joylari soni, agar turlar uchun alohida kutish joylari belgilanmasdan umumiy kutish joylari soni belgilangan bo'lsa, $N_1, N_2, \dots, N_r$ lar o'rniga o'sha joylar soni N yoziladi.

„ $\rightarrow$ ” belgi kelib tushish va xizmat ko'rsatish qonuniyati har tur uchun har xilligini bildiradi. „ $\rightarrow$ ” tushiribqoldirilsa, ushbu qonuniyat barcha tur uchun bir

xil ekanligini anglatadi. Masalan, $\vec{M}_2 | \vec{M}_2 | 1 | \infty, \infty$ model ikki turdagi talablar har xil parametrli Puasson oqimini tashkil etishi va ularga bir xil parametrli ko'rsatkichli taqsimot bo'yicha xizmat ko'rsatilishini bildiradi. Ba'zan xizmat ko'rsatish tartibini belgilaydigan qo'shimcha belgilash ham kiritiladi va kutish joylari sonidan keyin qo'yiladi. Masalan, $\vec{M}_2 | \vec{M}_2 | n | N_1, N_2, | f_i^j$, bu yerda $i = 0, 1, 2$ va $j = 0, 1$ qiymatlarni qabul qiladi. $i = 0$ imtiyozsiz xizmatni, $i = 1$ nisbiy imtiyozni va $i = 2$ mutlaq imtiyozni bildiradi. Yuqoridagi indeks barcha turlar umumiy kutish joylariga ega bo'lganda ishlatiladi va yuqoridagi indeks barcha turlar umumiy kutish joylariga ega bo'lganda ishlatiladi va $j = 0$ barcha kutish joylari band holda yangi kelgan talab imtiyozidan qat'iy nazar qabul qilinmasligini va $j = 1$ barcha joylar band holda yuqori imtiyozli talab kelib tushsa, navbatda turgan eng quyi imtiyozli talablardan biri o'z joyini bo'shatib berishi va tarmoqdan chiqib ketishini bildiradi.

1.2-§. M G 1 va $GJ|M|1$ xizmat ko'rsatish tarmoqlarining bandlikdavlari taqsimoti va o'rta qiymati

Bitta xizmat ko'rsatish uskunasidan iborat xizmat ko'rsatish sistemasiga $A(t)$ taqsimot funksiyasi orqali aniqlanadigan rekkurent chaqiruvlar oqimi kelayotgan bo'lsin. Bu chaqiriqlarga bir xil $B(t)$ taqsimot funksiya bo'yicha xizmat ko'rsatilsin. Agar chaqiruv sodir bo'lganda uskuna boshqa chaqiriqqa xizmat ko'rsatayotgan bo'lsa, u navbatga qo'yiladi va xizmat boshlanishini kutib turadi.

Vaqtning uskuna uzluksiz xizmat ko'rsatayotgan oralig'ini uning bandlik davri deb ataymiz. Bandlik davri taqsimot funksiyasini $\Pi(t)$ orqali belgilaymiz.

1.2.1-teorema. Agar $A(t) = 1 - e^{-at}$ bo'lsa, u holda

$$\pi(s) = \beta(s) + a - a\pi(s) \quad (1.2.1)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bu funksional tenglama $Re s > 0$ yarim tekislikda analitik, $\pi(s) < 1$ shartni qanoatlantiruvchi va

$$\pi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\Pi(t), \quad (\Pi(t) - \text{kamaymovchi funksiya})$$

ko'rinishda ifodalanuvchi yagona $\pi(s)$ funksiyani aniqlaydi. Bu yerda

$$\Pi(+\infty) = \begin{cases} 1, & \text{agar } a\beta_1 \leq 1, \\ \rho, & \text{agar } a\beta_1 > 1; \end{cases} \quad (1.2.2)$$

$a\beta_1 > 1$ bo'lganda $\rho = \beta(a - a\rho)$ tenglikning $0,1$ ga qarashli yagona ildizi. Bundan tashqari

$$\pi_1 = \int_0^{\infty} t d\Pi(t) = \begin{cases} \frac{\beta_1}{1 - a\beta_1}, & \text{agar } a\beta_1 < 1, \\ +\infty, & \text{agar } a\beta_1 \geq 1. \end{cases}$$

1.2.2-teorema. Agar $B(t) = 1 - e^{-bt}$, $b > 0$ bo'lsa, u holda

$$\pi(s) = \frac{b[1 - \gamma(s)]}{s + b[1 - \gamma(s)]}, \quad (1.2.3)$$

$$\gamma(s) = a/s + b - b\gamma(s), \quad (1.2.4)$$

tengliklar o'rinli bo'lib, bu tengliklar $Re s > 0$ yarim tekislikda $\gamma(s) < 1$ va $\pi(s) < 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\pi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\Pi(t) \quad (\Pi(t) - \text{kamaymovchi funksiya})$$

ko'rinishda ifodalanuvchi yagona $\pi(s)$, $\gamma(s)$ analitik juftlikni aniqlaydi.

Bunda

$$\Pi(+0) = 0, \quad (1.2.5)$$

$$\Pi(+\infty) = \min(1, a_1 b).$$

Bundan tashqari

$$\pi_1 = \begin{cases} \frac{b^{-1}}{1 - \sigma}, & \text{agar } a_1 b > 1 \\ +\infty, & \text{agar } a_1 b \leq 1 \end{cases}$$

bu yerda σ ($\alpha, b > 1$ bo'lganda) $\sigma = \alpha(b - b\sigma)$ tenglamaning $(0,1)$ ga tegishli yagona ildizi.

Izoh. $\Pi(+\infty) < 1$ bo'lgan hol shuni anglatadiki, bandlik davri cheksiz qiymatni ham qabul qilishi mumkin (ya'ni sistema hech qachon bandlikdan xalos bo'lolmaydi) va uning ehtimoli $1 - \Pi(+\infty) > 0$ ga teng.

1.2.1-teoremani isbotlashdan oldin quyida keltiriladigan mulohazalar yordamida isbotlanadigan

$$\Pi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(au)^n}{n!} e^{-au} \Pi_n(t-u) dB(u), \quad (1.2.6)$$

$$\Pi_n(t) = [\Pi(t)]^n,$$

formulaning o'rinli ekanligiga e'tiborimizni qaratamiz.

Faraz qilaylik, xizmat ko'rsatish tarmog'i inversiyali bo'lsin, ya'ni chaqiriqlarni xizmatga qabul qilish tartibiga bog'liq bo'lmasin. Bu xizmat ko'rsatilishi kutilayotgan chaqiruvlardan oxirgisini qabul etilishini anglatadi. Ko'rinib turibdiki, xizmat ko'rsatishning bunday tartibi sistemaning bandlik davriga ta'sir ko'rsatmaydi.

Bandlik davrining boshlanishida sistemada bitta chaqiruv mavjud bo'lsin. Faraz qilaylik, unga xizmat ko'rsatish vaqti $u(\leq t)$ bo'lsin. Bu vaqt oralig'ida sistemaga $\frac{(au)^n}{n!} e^{-au}$ ehtimol bilan n ta chaqiruv kelishi mumkin. Sistemaning qolgan bandlik vaqti n ta bandlik davrlarining yig'indisiga teng bo'ladi (va u $t-u$ dan oshmasligi kerak). Laplas – Stiltjes almashtirishlarida (1.2.6) formula quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{aligned} \pi(s) &= s \int_0^{\infty} e^{-st} dt \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(au)^n}{n!} e^{-au} \Pi_n(t-u) dB(u) = \\ &= s \int_0^{\infty} dB(u) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(au)^n}{n!} e^{-au} \Pi_n(t-u) e^{-st} dt = \\ &= s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(au)^n}{n!} e^{-au} \int_0^{\infty} e^{-su} dB(u) \int_0^{\infty} e^{-sv} \Pi_n(v) dv = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(au)^n}{n!} e^{-au} e^{-su} \pi(s)^n dB(u) = \int_0^{\infty} e^{-s+au-a\pi(s)u} dB(u), \end{aligned}$$

bundan esa (1.2.1) kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, s kompleks son $\operatorname{Re} s > 0$ shartni qanatlantirsin.

$$z = \beta s + a - az \quad (1.2.7)$$

tenglamani qaraymiz. (1.2.7) ning chap va o'ng tomonlari $|z| \leq 1$ doirani o'zida saqlovchi sohada (masalan, $\operatorname{Re} s + a - az > 0$, ya'ni $\operatorname{Re} z < 1 + a^{-1}$ sohada) z bo'yicha analitik bo'ladi. Bundan tashqari $z = 1$ bo'lganda

$$\operatorname{Re} s + a - az = \operatorname{Re} s + a(1 - \operatorname{Re} z) > 0.$$

Shuning uchun

$$\beta s + a - az \leq \beta \operatorname{Re} s + a - az < 1 = z,$$

bu yerdan Rushe teoremasiga ko'ra, z va $z - \beta s + a - az$ funksiyalar $|z| \leq 1$ doirada bir xil sondagi nollarga ega bo'ladi. Shunday qilib, (1.2.7) tenglama, $\operatorname{Re} s > 0$ ni qanoatlantiruvchi har bir s uchun $|\pi(s)| \leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi yagona $z = \pi(s)$ funksiyani aniqlaydi. Oshkormas funksiya haqidagi teorema yordamida tekshirish mumkinki, πs funksiya $\operatorname{Re} s > 0$ yarim tekislikda analitik funksiya bo'ladi.

Boxner-Xinchin teoremasi yordamida $\pi(s)$ funksiyani biror monoton kamaymovchi $\Pi(t)$ funksiyaning Laplas-Stiltes almashtirishi yordamida tasvirlash mumkinligini isbotlash mumkin.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Pi(t)$$

limit mavjud bo'lgani uchun

$$\Pi(+0) = \pi(+\infty)$$

yoki (1.2.1) ga ko'ra $\pi s \leq 1$, $\beta + \infty = \beta(0)$ bo'lgani uchun

$$\Pi + 0 = \beta(0)$$

tenglilarni hosil qilamiz.

Xuddi shunday, chekli yoki cheksiz

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Pi t = \Pi + \infty$$

limit mavjud bo'lgani uchun

$$\Pi + \infty = \pi + 0 \quad (1.2.8)$$

tenglik bajarilishini ko'rsatish mumkin. Bu yerda

$$\pi + 0 = \beta a - a\pi + 0 ; \quad (1.2.9)$$

bo'lib, $Re s > 0$ yarim tekislikda $0 \leq \pi + 0 \leq \Pi + \infty = \pi + 0$ va $\pi s \leq 1$ bo'lgani uchun $\pi s - 0 \leq \pi(+0) \leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy son bo'ladi.

Endi $\alpha\beta_1 \leq 1$ bo'lganda

$$x = \beta a - ax \quad (1.2.10)$$

tenglama $[0,1]$ da yagona $x_1 = 1$ yechimga, $\alpha\beta_1 > 1$ bo'lganda esa $x_0 = \rho$, $x_1 = 1$, $(0 < \rho < 1)$ yechimlarga ega ekanligini ko'rsatamiz.

(1.2.10) ning chap va o'ng tomonlarini grafik ravishda tasvirlaymiz. $\beta a - ax$ funksiya grafigining qavariqligi pastga yo'nalganligi uchun $(0,1)$ da nolning mavjudligi masalasi $\beta a - ax$ funksiyaning $x = 1 - 0$ nuqtadagi holatini tekshirishga keltiriladi. Uning bu nuqtadagi hosilasi $\alpha\beta_1$ ga teng. Agar $\alpha\beta_1 > 1$ bo'lsa, u holda (1.2.10) ning $0,1$ ga tegishli yagona ildizi mavjud; agar $\alpha\beta_1 \leq 1$ bo'lsa, u holda (1.2.10) tenglama $0,1$ da yechimga ega emas. Shuni qayd etish kerakki, kompleks tekislikning $|x| \leq 1$ yopiq doirasida tenglama topilgan ildizlar bilan bir xil bo'lgan faqat haqiqiy ildizlarga ega bo'lar ekan.

Shunday qilib, $\alpha\beta_1 \leq 1$ bo'lganda $\pi + 0 = 1$, $\alpha\beta_1 > 1$ bo'lganda $\pi(+0)$ uchun ikkita hol bo'lishi mumkin: $\pi + 0 = 1$ va $\pi + 0 = \rho < 1$. Aslida esa $\pi + 0 = \rho$ bo'ladi. Bu tasdiq ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\pi \varepsilon$ ildiz $\pi \varepsilon = \beta(\varepsilon + \alpha - \alpha\pi(\varepsilon))$ tenglamaning $\pi \varepsilon < 1$ shartni qanoatlantiruvchi yagona ildiz ekanligidan bevosita kelib chiqadi.

Teorema isbotini yakunlash uchun

$$\pi_1 = \int_0^{\infty} t d\Pi t = -\pi'(+0)$$

tenglikni e'tiborga olish yetarli.

1.2.2-teoremaning isboti. Qandaydir chaqiriqning kelishi bilan xizmat boshlanadigan sistemaga ushbu xizmat davomida k ta ($k \geq 0$) chaqiriqlar kelgan holda sistemaning ushbu chaqiriqlardan ozod bo'lish vaqtigacha bo'lgan vaqt oralig'ining uzunligini ζ_k deb belgilaymiz. Xizmat qilish vaqtining davomiyligi eksponensial taqsimotga ega ekanligi munosabati bilan ζ_k , $k \geq 1$ bo'lgan holda, ungacha qancha vaqt xizmat ko'rsatilganidan bog'liq emas. Ma'lumki, ζ_0 sistemaning bandlik davridir. Shartli ravishda

$$\Pi_k t = P \zeta_k \leq t, \quad \Pi_k t = 1 - \Pi_k t, \quad k \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \Pi_k t &= 1 - A t e^{-bt} + \frac{bt}{1!} e^{-bt} + \dots + \frac{(bt)^k}{k!} e^{-bt} \\ &+ \int_0^t e^{-bu} \Pi_{k-1} t - u + \frac{bu}{1!} e^{-bu} \Pi_k t - u + \dots \\ &+ \frac{bu^k}{k!} e^{-bu} \Pi_1 t - u dA u, \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

tengliklar quyidagi mulohazalar asosida olinishi mumkin. Bandlik davri $\zeta_k > t$ bo'lishi uchun quyidagi hollardan birining bajarilishi zarur va yetarli bo'ladi:

1) t vaqt davomida chaqiriqlar tushmaydi hamda bu vaqt oralig'ida k dan ko'p bo'lmagan chaqiriqlarga xizmat ko'rsatiladi;

2) birinchi chaqiriq $u \leq t$ vaqtda kelib tushadi va asbob i ta chaqiriqlarga ($i = 0, 1, 2, \dots, k$) xizmat qiladi. Shundan so'ng $(k + 1 - i)$ inchi chaqiriqning xizmati bilan boshlanayotgan bandlik davri $t - u$ dan katta bo'lmaydi.

Faraz qilaylik,

$$\begin{aligned}
 R(z, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \Pi_k(t); \\
 R(z, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \Pi_k(t) = (1 - z)^{-1} - R(z, t); \\
 r(z, s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} d_t R(z, t); \\
 r(z, s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} d_t R(z, t) = (1 - z)^{-1} - r(z, t);
 \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

(1.2.11) ning chap va o'ng qismlarini z^{k+1} ga ko'paytirib, k bo'yicha 0 dan $+\infty$ gacha yig'ib chiqib, quyidagini olamiz.

$$\begin{aligned}
 zR(z, t) &= 1 - A(t) \frac{z}{1 - z} e^{-bt(1-z)} \\
 &+ \int_0^{\infty} e^{-bu(1-z)} [R(z, t-u) - R(0, t-u)] dA(u),
 \end{aligned}$$

bundan Laplas – Stiltes almashtirishiga o'tsak,

$$\begin{aligned}
 zr(z, s) &= \frac{z}{1 - z} \frac{s}{s + b - bz} [1 - \alpha(s + b - bz) \\
 &+ \alpha(s + b - bz) r(z, s) - r(0, s)],
 \end{aligned}$$

yoki

$$r(z, s) = \frac{z - \alpha(s + b - bz)}{z - \alpha(s + b - bz) + 1} =$$

$$= \frac{z}{1-z} \frac{s}{s+b-bz} (1-\alpha s + b - bz) r_{0,s} . \quad (1.2.13)$$

tenglik hosil bo'ladi

1.2.1-teoremaning isboti kabi, funksional tenglamani quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$\gamma(s) = \alpha s + b - b\gamma(s) .$$

Bu tenglamaning yagona yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dC(t) ,$$

bu yerda $C(t)$ —kamaymaydigan funksiya bo'lib, bunda

$$C(+0) = \gamma(+\infty) = A(0) ;$$

$$C(+\infty) = \gamma(+0) = \begin{cases} 1, & \text{agar } \alpha_1 b \leq 1 ; \\ \sigma, & \text{agar } \alpha_1 b > 1 , \end{cases}$$

bu yerda σ ($\alpha_1 b > 1$ bo'lganda) $\sigma = \alpha(b - b\sigma)$ tenglamaning $(0,1)$ oraliqda yotuvchi yagona ildizidir. $z = \gamma(s)$ da (1.2.13) munosabatdan

$$r_{0,s} = \frac{s}{s+b-b\gamma(s)} \quad (1.2.14)$$

va bundan

$$\pi(s) = r_{0,s} = 1 - r_{0,s} = \frac{b[1-\gamma(s)]}{s+b[1-\gamma(s)]}$$

tenglikga ega bo'lamiz. Bu yerda

$$\pi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\Pi(t) ,$$

$\Pi(t)$ - kamaymovchi funksiyaligidan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\pi(s) = \frac{\frac{b}{s}[1 - \gamma(s)]}{1 + \frac{b}{s}[1 - \gamma(s)]},$$

$\frac{b}{s}[1 - \gamma(s)]$ funksiya

$$\int_0^t b[1 - \gamma(u)] du.$$

funksiyaning Laplas – Stiltes almashtirishidir.

1.2.2 – teoremaning qolgan tasdig'i odatdagicha tekshiriladi.

Haqiqatan ham, biz bir muncha katta qiymat oldik, ya'ni

$$\begin{aligned} r(z, s) &= z - \alpha s + b - bz^{-1} \times \\ &\times z \frac{1 - \alpha s + b - bz}{1 - z} \frac{s}{s + b - bz} \\ &- \alpha s + b - bz \frac{s}{s + b - bz}. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Bir nechta misollar ko'rib chiqamiz.

$$\int_0^\infty t dB(t) < \int_0^\infty t dA(t) < +\infty$$

deb faraz qilaylik.

1.2.1-misol. $A(t) = 1 - e^{-at}$, $a > 0$. bandlik davrining birinchi va ikkinchi tartibli momentlari

$$\pi_1 = \frac{\beta_1}{1 - a\beta_1},$$

$$\pi_2 = \frac{\beta_2}{(1 - a\beta_1)^3}.$$

bo‘ladi.

1.2.2-misol. $A(t) = 1 - e^{-at}$, $B(t) = 1 - e^{-bt}$. (1.2.1) dan

$$\pi(s) = \frac{b}{s + b + a - a\pi(s)},$$

ni olamiz, bundan

$$\pi(s) = \frac{s + a + b - \sqrt{(s + a + b)^2 - 4ab}}{2a}$$

(“-” ishorasini olamiz, chunki $|\pi(s)| \leq 1$).

Bandlik davrining dastlabki to‘rtta momentlari

$$\pi_1 = b - a^{-1},$$

$$\pi_2 = 2b(b - a^{-3}),$$

$$\pi_3 = 6b(a + b)(b - a^{-5}),$$

$$\pi_4 = 24b(a^2 + 3ab + b^2)(b - a^{-7});$$

va bandlik davri dispersiyasi $\pi_2 - \pi_1^2 = (a + b)(b - a^{-3})$ bo‘ladi.

II bob. $M/G/1/N$ va $GJ/M/1/N-1$ tarmoqlar bandlik davri taqsimoti va oʻrta qiymatlari oʻrtasida ikkilanma munosabatlar

2.1-§. $M/G/1/N$ va $GJ/M/1/N-1$ xizmat koʻrsatish tarmoqlari bandlik davri taqsimotlari uchun ikkilanma munosabat

Quyidagicha aniqlanadigan $F_1 - M/G/1/N$ va $F_2 - GJ/M/1/N-1$ bir kanalli xizmat koʻrsatish tarmoqlarini qaraymiz:

1) F_1 tarmoqda talablarning kelib tushish momentlari orasidagi vaqt uzunliklari va F_2 tarmoqda talablarga xizmat koʻrsatish vaqti uzunliklari bir xil λ parametrlil koʻrsatgichli taqsimot funksiyasiga ega;

2) F_1 tarmoqda talablarga xizmat koʻrsatish vaqti uzunliklari va F_2 tarmoqda talablarning kelib tushish momentlari orasidagi vaqt uzunliklari oʻzaro bogʻliq boʻlmagan va bir xil $B \times [B+0=0]$ taqsimot funksiyasiga ega boʻlgan tasodifiy miqdorlarni tashkil etadi;

3) Kutish joylari soni F_1 tarmoqda N ga va F_2 tarmoqda $N-1$ ga teng.

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$\xi_1(t)$ va $\xi_2(t)$ mos holda F_1 va F_2 tarmoqlarda t momentda mavjud boʻlgan talablar soni;

ζ_1 va ζ_2 mos holda F_1 va F_2 tarmoqning boshlangʻich bandlik davrlari;

$$g^{(j)} = g^{(j)}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dP(\zeta_1 < x/\xi_1, 0 \leq j), \quad \operatorname{Re} s \geq 0,$$

$$f^{(j)} = f^{(j)}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dP(\zeta_2 < x/\xi_2, 0 \leq j), \quad \operatorname{Re} s \geq 0,$$

$$b(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dB(x).$$

[12] va [1] ishlarda g^j va f^1 funksiyalarni aniqlovchi funksiyalar keltirilib chiqarilgan. Shuningdek, [23] ishda ζ_1 miqdorning taqsimoti uchun asimptotik ko'rinishlar topilgan. Qaralayotgan ishda $f^{(1)}$ va $g^{(j)}$ funksiyalar o'rtasida bog'lanish (ikkilanma munosabat) o'rnatiladi. Ushbu munosabat yordamida ζ_1 uchun olingan har qanday natijani ζ_2 ga o'tkazish mumkin bo'ladi.

2.1.1-teorema. $N \geq 3$ da quyidagi munosabat o'rinli:

$$f^1 = 1 - s \cdot s + \lambda \cdot 1 - 2g^1 + g^2 \cdot^{-1} \cdot 1 - 1 + \frac{s}{s + \lambda} g^1 +$$

$$+ l \cdot s \cdot g^{N-1} + \frac{s}{s + \lambda} \cdot \sum_{k=0}^{N-3} \frac{\lambda}{s + \lambda} g^{k+2}, \quad (2.1.1)$$

bu yerda

$$l \cdot s = \frac{\lambda}{s + \lambda} \cdot \frac{s}{\lambda} - 1 + b \cdot s \cdot \frac{b \cdot s + \lambda}{b \cdot s + \lambda - b \cdot s + 1}.$$

Isbot. [1] ishda f^1 uchun ushbu formula keltirib chiqarilgan:

$$f^1 = 1 - \frac{sP_{N-1}}{Q_{N-1} - Q_{N-2}}, \quad N \geq 3 \quad (2.1.2)$$

bu yerda P_k va Q_k lar

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k P_k = \frac{1}{b \cdot s + \lambda - \lambda v - v} \cdot \frac{1 - b \cdot s + \lambda - \lambda v}{s + \lambda - \lambda v},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k Q_k = \frac{1}{b \cdot s + \lambda - \lambda v - v}$$

tengliklardan aniqlanadi. Bu tengliklardan

$$Q_{N-1} - Q_{N-2} = (s + \lambda)P_{N-1} - \lambda P_{N-2}$$

munosabat kelib chiqadi va (2.1.2) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{1 - f^{-1}}{s} = \frac{P_{N-1}}{(s + \lambda)P_{N-1} - \lambda P_{N-2}}. \quad (2.1.3)$$

[12] ishda quyidagi formula isbotlangan:

$$g^{(j)} = a_{N-j} \cdot a_N^{-1}, \quad j > 0, \quad (2.1.4)$$

bu yerda a_k ushbu hosil qiluvchi funksiya orqali aniqlanadi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k a_k = \frac{v b(s) - b(s + \lambda - \lambda v)}{(1 - v)[v - b(s + \lambda - \lambda v)]}. \quad (2.1.5)$$

Bu tenglikni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{(1 - v)^2}{1 - b(s)} \sum_{k=0}^{\infty} v^k a_k = \frac{v(1 - v)}{b(s + \lambda - \lambda v) - v} + \frac{1 - v}{1 - b(s)}. \quad (2.1.6)$$

Agar

$$s + \lambda - \lambda v \sum_{k=0}^{\infty} v^k P_k = \frac{(1 - v)}{b(s + \lambda - \lambda v) - v} - 1$$

tenglik e'tiborga olinsa, (2.1.6) dan quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$s + \lambda - \lambda v \sum_{k=0}^{\infty} v^k P_k = \frac{(1 - v)^2}{1 - b(s)} \sum_{k=0}^{\infty} v^k a_k - \frac{1 - v b(s)}{1 - b(s)}. \quad (2.1.7)$$

Bundan darajali qatorlarning tenglik shartiga ko'ra

$$(s + \lambda)P_{N-1} - \lambda P_{N-2} = \frac{1}{1 - b(s)} a_N - 2a_{N-1} + a_{N-2} \quad (2.1.8)$$

munosabatni hosil qilamiz.

$$\text{Agar } \frac{v\lambda}{s + \lambda} < 1 \text{ da}$$

$$\frac{1}{s + \lambda - \lambda v} = \frac{1}{s + \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} v^k \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k$$

yoyilma o‘rinli ekanligi e‘tiborga olinsa, (2.1.7) dan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} v^k P_k &= \frac{1}{s + \lambda} \cdot \frac{1}{1 - b s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k a_k \cdot \\ &\cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k - [1 - vb(s)] \sum_{k=0}^{\infty} v^k \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Bu yerda

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \sum_{k=0}^{\infty} v^k \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k a_{k-n}$$

tenglik o‘rinli bo‘lganligi sababli (2.1.9) ushbu ko‘rinishga keladi:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} v^k P_k &= \frac{1}{s + \lambda} \cdot \frac{1}{1 - b s} \cdot \\ &\cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} v^k c_k - \sum_{k=0}^{\infty} v^k \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k \right), \end{aligned}$$

bu yerda

$$c_k = \sum_{n=0}^k v^n \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^n a_{k-n}.$$

Bu yerdan v^k ning koeffitsiyentlarini tenglashtirib

$$\begin{aligned} P_{N-1} &= \frac{1}{s + \lambda} \cdot \frac{1}{1 - b s} \cdot c_N - 2c_{N-1} + c_{N-2} \\ &- \frac{\lambda}{s + \lambda} \cdot \frac{\lambda}{s + \lambda} - b s \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Agar

$$c_N - 2c_{N-1} + c_{N-2} = a_n - 1 + \frac{s}{s+\lambda} a_{N-1} + \frac{\lambda}{s+\lambda} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\lambda}{s+\lambda}^k a_{N-k-2}$$

munosabat e'tiborga olinsa, (2.1.4), (2.1.8) va (2.1.10) ga ko'ra (2.1.2) dan ushbu tenglikga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} \frac{1-f^1}{s} &= \frac{1}{s+\lambda} (1 - 2g^1 + g^2)^{-1} \cdot \\ &\cdot (1 - 1 + \frac{s}{s+\lambda} g^1 + \frac{s}{s+\lambda} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\lambda}{s+\lambda}^k g^{(k+2)} - \\ &- \frac{\lambda}{s+\lambda}^{N-1} a_N^{-1} [\frac{\lambda}{s+\lambda} - b(s)] \quad . \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

(2.1.5) dan $a_0 = 1$, $a_1 = 1 + \frac{1-b}{s} b^{-1}(s+\lambda)$ tengliklar o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Shunday qilib,

$$\frac{1}{a_N} = \frac{a_1}{a_N} \cdot \frac{1}{a_1} = g^{N-1} \cdot (1 + \frac{1-b}{b(s+\lambda)})^{-1}.$$

Bunga asosan (2.1.11) dan (2.1.1) formula hosil bo'ladi.

2.2-§.Statsionar navbat uzunligi va bandlik davri o' rta qiymatlari o' rtasidagi munosabatlar

Quyidagicha xarakterlanadigan $F_1 - M | G | 1 | N$ va $F_2 = GJ | G | 1 | N - 1$

xizmat ko' rsatish sistemalarini qaraymiz:

1. F_1 sistemada talablarning ketma-ket kelish momentlari orasidagi vaqt uzunliklari va F_2 sistemada talablarga xizmat ko' rsatish vaqti uzunliklari

$$A_x = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0 \end{cases}$$

taqsimot funksiyasiga ega.

2. F_1 sistemada talablarga xizmat ko' rsatish vaqti uzunliklari va F_2 sistemada talablarning ketma-ket kelish momentlari orasidagi vaqt uzunliklari o' zaro bog' liq bo' lmagani tasodifiy miqdorlar bo' lib, umumiy $B(x) [B + 0 = 0]$ taqsimot funksiyasi va

$$\mu^{-1} = \int_0^{\infty} x dB_x$$

o' rta qiymatga ega.

3. Sistemalar bitta xizmat ko' rsatish qurilmasidan iborat va talablarga ularning kelish tartibida xizmat ko' rsatiladi.

4. Kutish joylari soni F_1 sistemada N ga va F_2 sistemada $N-1$ ga ($N \geq 1$) teng.

F_1 va F_2 xizmat ko' rsatish sistemalari odatda, ikkilanma xizmat ko' rsatish tarmoqlari deyiladi.

Ushbu belgilashlarni kiritamiz:

$\xi_{1N} t$ va $\xi_{2N} t$ mos holda F_1 va F_2 sistemalarda t momentda mavjud bo' lgan talablar soni;

$\zeta_k - M | G | 1 | k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ sistemaning bandlik davri, ya'ni qurilma uzluksiz xizmat bilan band bo' lgan vaqt uzunligi;

$$\begin{aligned} P_N k &= \lim_{t \rightarrow \infty} P \xi_{1N}(t) = k, \quad k = \overline{0, N+1}, \\ Q_N k &= \lim_{t \rightarrow \infty} P \xi_{2N}(t) = k, \quad k = \overline{0, N} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

[1] va [5]ishlarda $P_N k$ va $Q_N k$ ehtimollarning mavjudligi isbotlangan va ularni aniqlovchi munosabatlar keltirib chiqarilgan. Ushbu munosabatlar hosilaviy funksiyalar orqali ifodalangan va yetarlicha murakkab ko' rinishda bo' lib, ulardan amalda foydalanish ma'lum qiyinchiliklar tug' diradi. Qaralayotgan ishda $P_N k$ va $Q_N k$ ehtimollar $M\zeta_k, k=0,1,2,\dots$, o' rta qiymatlar orqali ifodalanadi va uning ayrim tadbirlari keltiriladi.

2.2.1-teorema. Quyidagi munosabatlar o' rinli:

$$\begin{aligned} \text{a) } P_N 0 &= 1 + \lambda M\zeta_N^{-1}, \\ P_N k &= \frac{\mu M\zeta_k - M\zeta_{k-1}}{1 + \lambda M\zeta_N}, \quad k = \overline{1, N}, \\ P_N N+1 &= \frac{1 - \mu - \lambda M\zeta_N}{1 + \lambda M\zeta_N}, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } Q_N 0 &= \frac{1 - \mu - \lambda M\zeta_N}{\lambda M\zeta_N}, \\ Q_N k &= \frac{\mu M\zeta_{N-k+1} - M\zeta_{N-k}}{1 + \lambda M\zeta_N}, \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Ushbu teoremaning isbotida [1] va [5]ishlardagi $M\zeta_N P_N k$ va $Q_N k$ ehtimollar hamda [22] ishdagi $M\zeta_k$ o' rta qiymatni aniqlovchi munosabatlardan foydalanilgan.

2.2.2-teorema. $k = \overline{1, N+1}$ lar uchun ushbu tenglik o' rinli:

$$Q_N N-k+1 = \frac{1 + \lambda M\zeta_N}{\lambda M\zeta_N} P_N k. \quad (2.2.4)$$

(2.2.4)tenglik (2.2.2) va (2.2.3)tengliklardan bevosita kelib chiqadi.

ξ_{1N} va ξ_{2N} mos holda F_1 va F_2 sistemalarning statsionar navbat uzunliklari, ya'ni $P_N k = P \xi_{1N} = k$ va $Q_N k = P \xi_{2N} = k$ bo' lsin.

$k > 0$ da

$$P \xi_{1N} = k = P \xi_{1N} = k, \xi_{1N} > 0 = P \xi_{1N} > 0 \quad P \xi_{1N} = k / \xi_{1N} > 0$$

va 2.2.1-teoremaga ko' ra

$$P \xi_{1N} > 0 = 1 - P_N 0 = \frac{\lambda M \xi_N}{1 + \lambda M \xi_N}$$

ekanligini e'tiborga olsak, (4) tenglik ushbu ko' rinishga ega bo' ladi:

$$P \xi_{2N} = N - k + 1 = P \xi_{1N} = k / \xi_{1N} > 0 \quad (2.2.5)$$

(2.2.5) munosabat F_1 va F_2 sistemalar statsionar navbat uzunliklari taqsimoti uchun ikkilanmalik munosabatidir. (2.2.5) tenglik (2.2.1) limitlar Markov zanjirini tashkil etuvchi nuqtalar (reginiratsiya momentlari) bo' yicha olinganda (2.2.3) ishda keltirib chiqarilgan edi.

$\rho = \lambda \mu^{-1} - F_1$ sistemaning yuklanishi bo' lsin.

2.2.3-teorema. $\rho_1 > 1$ da quyidagi munosabatlar o' rinli:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N N + 1 = 1 - \rho_1^{-1},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N N - k = \mu^{-1} r^k (1 - r), \quad k \geq 0,$$

bu yerda r miqdor $x = \bar{b} \lambda - \lambda x$ tenglamaning $0,1$ intervalda yotuvchi yagona yechimi,

$$\bar{b} s = \int_0^{\infty} e^{-sx} dB(x).$$

2.3-§. $M|G|1|N$ va $GJ|M|1|N-1$ ikkilanma xizmat ko'rsatish tarmoqlari statsionar navbat uzunliklari o'rtasidagi munosabatlar

Bir kanalli xizmat ko'rsatish tarmog'iga λ parametrli Puasson talablar oqimi kelib tushayotgan bo'lsin, ya'ni talablarning kelib tushish momentlari orasidagi vaqt uzunliklari bir xil

$$A_x = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0 \end{cases}$$

taqsimotga ega bo'lsin.

Talablarga ularning kelish tartibida xizmat ko'rsatiladi va xizmat ko'rsatish vaqti uzunliklari o'zaro bog'liq bo'lmagan hamda bir xil $B(x) - B(+0) = 0$ taqsimotga va μ^{-1} o'rta qiymatga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlarni tashkil etadi. Kutish joylari soni N ($N \geq 1$) ga teng, ya'ni tarmoqda xizmat ko'rsatilayotgani bilan birga ko'pi bilan $N+1$ ta talab bo'lishi mumkin. Yuqorida ta'riflangan tarmoq, odatda, $M|G|1|N$ deb belgilanadi.

$M|G|1|N$ tarmoqda A_x va B_x taqsimotlar o'rnini o'zaro almashtirib hamda kutish joylari soni $N-1$ ga teng deb hisoblab, ikkinchi $GJ|M|1|N-1$ tarmoqni hosil qilamiz. Ushbu tarmoqlar ikkilanma xizmat ko'rsatish tarmoqlari deb ataladi.

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$$\zeta_k - M|G|1|k \text{ tarmoqning bandlik davri, } k = \overline{1, N};$$

$\xi_{1N}(t)$ va $\xi_{2N}(t)$ mos holda $M|G|1|N$ va $GJ|M|1|N-1$ tarmoqlarda t momentda mavjud bo'lgan talablar soni;

$$\rho_1 = \lambda \mu^{-1} \text{ va } \rho_2 = \mu \lambda^{-1} \text{ mos holda } M|G|1|N \text{ va } GJ|M|1|N-1$$

tarmoqlarning yuklanishi;

$$\bar{b}_s = \int_0^{\infty} e^{-sx} dB \quad x, \quad \operatorname{Re} s \geq 0,$$

$$\bar{g}_k(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dP(\zeta_k < x), \quad \operatorname{Re} s \geq 0. \quad (2.3.1)$$

$$P_N k = \lim_{t \rightarrow \infty} P \zeta_{1N}(t) = k, \quad k = \overline{0, N+1},$$

$$Q_N k = \lim_{t \rightarrow \infty} P \zeta_{2N}(t) = k, \quad k = \overline{0, N}$$

[1] va [5] ishlarda (2.3.1) limitlarning mavjudligi isbotlangan hamda $P_N k$ va $Q_N k$ ehtimollarni aniqlovchi formulalar keltirib chiqarilgan. Ushbu ehtimollar hosilaviy funksiyalar bilan aniqlangan parametrlar orqali ifodalangan va bu ularning tatbiqida ma'lum qiyinchiliklar tug'diradi.

Qaralayotgan ishda $P_N k$ va $Q_N k$ ehtimollarning $M\zeta_k$, $k = \overline{1, N}$ lar orqali ifodalangan ko'rinishlari keltiriladi hamda ularning ayrim tatbiqlari ko'rsatiladi. Jumladan, $P_N k$ va $Q_N k$ taqsimotlar o'rtasida ikkilanmalik munosabati o'rnatiladi hamda ularning $N \rightarrow \infty$ dagi asimptotik holati aniq ko'rinishda topiladi.

Shuni qayd etib o'tamizki, talablarning kelib tushish momentlar ($GJ|M|1|N-1$ sistemada) va xizmatning tugash momentlari ($M|G|1|N$ sistemada) bo'yicha olingan limitik taqsimotlar o'rtasida ikkilanmalik munosabati [4] ishda o'rnatilgan edi. Ushbu limitik taqsimotlar $P_N k$ va $Q_N k$ lardan farq qiladi.

2.3.1-teorema. Quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$a) \quad P_N 0 = 1 + \lambda M \zeta_N^{-1},$$

$$P_N k = \frac{\mu M \zeta_k - M \zeta_{k-1}}{1 + \lambda M \zeta_N}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (2.3.2)$$

$$P_N N+1 = \frac{1 - \mu - \lambda M \zeta_N}{1 + \lambda M \zeta_N},$$

$$b) \quad Q_N \ 0 = \frac{1 - \mu - \lambda \ M \zeta_N}{\lambda M \zeta_N}, \quad (2.3.3)$$

$$Q_N \ k = \frac{\mu \ M \zeta_{N-k+1} - M \zeta_{N-k}}{1 + \lambda M \zeta_N}, \quad k = \overline{1, N}.$$

2.3.2-teorema. $k = \overline{1, N+1}$ da quyidagi tenglik o‘rinli:

$$P \ \xi_{2N} = N - k + 1 = P \ \xi_{1N} = k / \xi_{1N} > 0 ,$$

bu yerda ξ_{1N} va $\xi_{2N} \ M | G | 1 | N$ va $GJ | M | 1 | N - 1$ tarmoqlarning statsionar navbat uzunliklari .

2.3.3-teorema. $\rho_1 > 1 \ \rho_2 = \rho_1^{-1} < 1$ da ushbu munosabatlar o‘rinli:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N \ N + 1 = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_N \ 0 = 1 - \rho_1^{-1}, \quad (2.3.4)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N \ N - k + 1 = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_N \ k = \rho_1^{-1} r^{k-1} \ 1 - r , \quad k \geq 1,$$

bu yerda r miqdor $v = \bar{b} \ \lambda - \lambda v$ tenglamaning birdan farqli eng kichik yechimi. [25] ishda $GJ | M | 1$ tarmoqning statsionar navbat uzunligi taqsimoti uchun (2.3.4) munosabatdagi ifoda topilgan edi. Qaralayotgan ishda ushbu munosabat boshqa , nisbatan oson yo‘l bilan isbot qilinadi.

2.3.1-teoremaning isboti. [1] va [5] ishlarda $P_N \ k$ va $Q_N \ k$ ehtimollar uchun quyidagi munosabatlar o‘rnatilgan:

$$a) \quad P_N \ 0 = [1 + \rho \ 1 + \lambda f_N]^{-1},$$

$$P_N \ 1 = \lambda f_1 P_N \ 0 , \quad (2.3.5)$$

$$P_N \ k = \lambda \ f_k - f_{k-1} \ P_N \ 0 , \quad k = \overline{2, N},$$

$$P_N \ N + 1 = 1 - 1 + \lambda f_N \ P_N \ 0$$

$$b) \quad Q_N \ 0 = 1 - \lambda f_N q_{N-1}^{-1},$$

$$Q_N \ k = \lambda \ f_{N-k+1} - f_{N-k} \ q_{N-1}^{-1}, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad (2.3.6)$$

$$Q_N \ N = \lambda f_1 q_{N-1}^{-1},$$

bu yerda f_k va q_k lar ushbu hosilaviy funksiyalar bilan aniqlanadi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k f_k = \frac{v}{\lambda - \lambda v} \cdot \frac{1 - \bar{b}}{\bar{b}} \frac{\lambda - \lambda v}{\lambda - \lambda v - v}, \quad (2.3.7)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k q_k = \frac{1}{\bar{b} \lambda - \lambda v - v}.$$

Shuningdek, [24] ishda ushbu tenglik ko'rsatilgan :

$$\bar{g}_k s = \frac{\Delta_{k-1} s}{\Delta_k s}, \quad (2.3.8)$$

bu yerda $\Delta_k s$ ushbu tenglikdan aniqlanadi :

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k \Delta_k s = \frac{v \bar{b} s - \bar{b} s + \lambda - \lambda v}{1 - v [\bar{b} s + \lambda - \lambda v]}. \quad (2.3.9)$$

Agar $M\zeta_k = -\bar{g}_k' 0$ va (2.3.9) ga ko'ra $\Delta_k 0 = 1$ tenglikni e'tiborga olsak, (2.3.8) dan

$$M\zeta_k = \Delta_k' 0 - \Delta_{k-1}' 0, \quad k \geq 1 \quad (2.3.10)$$

tenglikka ega bo'lamiz. (2.3.9) ning ikkala tomonini s bo'yicha differensiallab, (2.3.10) ga ko'ra ushbu munosabatga ega bo'lamiz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} v^k M\zeta_k = \frac{v}{\mu [\bar{b} \lambda - \lambda v - v]}. \quad (2.3.11)$$

(2.3.7) va (2.3.11) larga ko'ra

$$\mu M\zeta_k = q_{k-1}, \quad M\zeta_k = \frac{1}{\mu} (1 + \lambda f_k)$$

tengliklarni hosil qilamiz. Ushbu tengliklarga ko'ra (2.3.5) va (2.3.6) munosabatlardan teoremaning isboti kelib chiqadi.

2.3.2-teoremaning isboti. (2.3.2) va (2.3.3) munosabatlarga ko'ra $k = \overline{1, N+1}$ da

$$Q_N \quad N - k + 1 = \frac{1 + \lambda M\zeta_N}{\lambda M\zeta_N} P_N \quad k \quad (2.3.12)$$

tenglikga ega bo'lamiz. $k \geq 1$ da

$$P \quad \xi_{1N} = k = P \quad \xi_{1N} = k, \quad \xi_{1N} > 0 = P \quad \xi_{1N} > 0 \quad P \quad \xi_{1N} = k / \xi_{1N} > 0$$

va (2.3.2) tengliklarga ko'ra

$$P_{\xi_{1N} > 0} = 1 - P_N(0) = \frac{\lambda M \zeta_N}{1 + \lambda M \zeta_N}$$

munosabat o‘rinli bo‘lishini e‘tiborga olsak, (2.3.12) dan 2.3.2 – teoremadagi tenglikni hosil qilamiz.

2.3.3-teoremaning isboti. [13] ishda ushbu asimptotik munosabat isbotlangan:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M \zeta_{N-k}}{M \zeta_N} = \begin{cases} r^k, & \rho_1 > 1, \\ 1, & \rho_1 \leq 1. \end{cases} \quad (2.3.13)$$

Agar [11] ishdagi (62-bet) tasdiqqa ko‘ra $\rho_1 > 1$ da

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M \zeta_N = \infty$$

bo‘lishi e‘tiborga olinsa, (2.3.2) va (2.3.3) tengliklardan (2.3.13) ga ko‘ra (2.3.4) munosabatlar bevosita kelib chiqadi.

IIIbobb. $M/G/1/N$ tarmoq bandlik davri taqsimoti va o'rta qiymati uchun asimptotik munosabatlar

3.1-§. $M/G/1/N$ xizmat ko'rsatish tarmog' i bandlik davri taqsimoti uchun asimptotik formula

Quyidagicha xarakterlanadigan $M/G/1/N$ xizmat ko'rsatish tarmog'ini qaraymiz: tarmoqqa λ parametrli Puasson talablar oqimi kelib tushadi, talablarga xizmat ko'rsatish vaqti uzunliklari o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lib, bir xil $B(x)$ zichlik funksiyasiga ega va

$$\mu^{-1} = \int_0^{\infty} xB(x) dx, \quad \sigma^2 = \int_0^{\infty} x^2 B(x) dx < \infty.$$

Talablarning kutish joylari soni N ga ($N \geq 1$) teng, ya'ni tarmoqda xizmat ko'rsatilayotgani bilan birga $N + 1$ ta talab mavjud bo'lsa, yangi kelgan talab qabul qilinmaydi va tarmoqdan chiqib ketadi hamda tarmoqdagi keyingi jarayonga ta'sir ko'rsatmaydi. Talablarga ularning kelish tartibida xizmat ko'rsatiladi.

Ushbu belgilashlarni kiritamiz:

$\xi_N(t)$ – t momentda tarmoqda mavjud bo'lgan talablar soni,

ζ_N – tarmoqning bandlik davri,

$\nu(t)$ – qurilmadagi talab xizmatining boshlanish momentidan t momentgacha bo'lgan vaqt uzunligi,

$$\eta(x) dx = P\{x \leq \nu(t) < x + dx / \nu(t) > x\},$$

$$P_N(k, x, t) = P\{\xi_N(t) = k, x \leq \nu(t) < x + dx\},$$

$$P_N(\nu, s) = \sum_{k=1}^{N+1} \int_0^{\infty} \nu^k e^{-st} P\{\xi_N(t) = k\} dt, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

$$S(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} S(x) dx, \quad \text{Re } s > 0,$$

$$g_N(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dP(\zeta_N \leq t), \quad \text{Re } s > 0.$$

[24] ishda $g_N(s)$ funksiyani aniqlovchi formula keltirilgan bo'lib, ushbu formulada hosil qiluvchi funksiya va Laplas – Stiltes almashtirishlari orqali ifodalangan funksiyalar ishtirok etadi. Bu esa formuladan bevosita foydalanish imkonini bermaydi. Qaralayotgan ishda $g_N(s)$ funksiya uchun uning asimptotik holatlarini o'rganish imkonini beruvchi ifoda keltirib chiqariladi. Bunda [12] ishda olingan quyidagi natijadan foydalanilgan:

$$P(v, s) = \frac{v^2 - v g_N(s) + \lambda(1-v) v^{N+1} D(v, s)}{v - S(\lambda(1-v) + s)} \cdot \frac{1 - S(\lambda(1-v) + s)}{\lambda(1-v) + s}, \quad v \leq 1, \text{Re } s \geq 0,$$

bu yerda

$$D(v, s) = P(N+1, s) + \frac{s + \lambda(1-v)}{1 - S(\lambda(1-v) + s)} \cdot \frac{v-1}{s} \cdot Q(v, s),$$

$$Q(v, s) \leq P(N+1, s) \mu^{-1}.$$

Faraz qilaylik, $\rho = \lambda\mu^{-1}$ va $b = b(N, \rho)$ $N \rightarrow \infty$ va $\rho \rightarrow 1$ da nolga intiluvchi funksiya bo'lsin.

3.1.1-teorema. $N \rightarrow \infty$ va $\rho \rightarrow 1$ da ixtiyoriy s ($\text{Re } s > 0$) uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$g_N(s)b = \frac{p_2(1-p_1)p_1^N + p_1(p_2-1)p_2^N}{1-p_1p_1^N + p_2-1p_2^N} + o\left(\frac{1}{b} + 1 - \rho\right), \quad 3.1.1$$

bu yerda

$$p_1 = p_1 \quad bs = 1 + \frac{bs}{\lambda} - \frac{\rho - 1 + \sqrt{(\rho - 1)^2 + 2\lambda\sigma^2 bs}}{\sigma^2 \lambda^2},$$

$$p_2 = p_2 \quad bs = 1 + \frac{bs}{\lambda} - \frac{\rho - 1 - \sqrt{(\rho - 1)^2 + 2\lambda\sigma^2 bs}}{\sigma^2 \lambda^2}.$$

(3.1.1) tenglik [15] ishda olingan natijaga aniqlik kiritadi va nisbatan osonroq usulda isbot qilinadi.

Isbot. Ma'lumki, biror sohada analitik bo'lgan funksiya kasr ko'rinishda berilgan bo'lsa, maxraj nolga aylanadigan nuqtalarda surat ham albatta nolga aylanadi.

$P \quad v, s$ funksiya $v \leq 1$ va $\operatorname{Re} s \geq 0$ da analitik funksiyadir.

$S \quad s$ funksiyani $s = 0$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyib, ushbu tenglikka ega bo'lamiz:

$$v - S \quad \lambda \quad 1 - v + s = v - p_1 \quad s \quad v - p_2 \quad s + o(\lambda \quad 1 - v + s)^2,$$

bu yerda $p_1 \quad s$ va $p_2 \quad s$ teoremda keltirilgan funksiyalar. U holda analitiklik xossasiga asosan (1) dan $N \rightarrow \infty$ va $\rho \rightarrow 1$ da

$$g_N \quad sb - p_1 - \lambda \quad 1 - \rho_1 \quad p_1^N D \quad p_1, sb = o[\lambda \quad 1 - \rho_1 + sb]^2,$$

$$g_N \quad sb - p_2 - \lambda \quad 1 - \rho_2 \quad p_2^N D \quad p_2, sb = o[\lambda \quad 1 - \rho_2 + sb]^2$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu munosabatlardan

$$\begin{aligned} g_N \quad sb &= \frac{p_2 \quad 1 - p_1 \quad p_1^N + p_1 \quad p_2 - 1 \quad p_2^N}{1 - p_1 \quad p_1^N + p_2 - 1 \quad p_2^N} - \\ &- \frac{\lambda \quad 1 - p_1 \quad p_2 - 1 \quad p_1 p_2^N}{1 - p_1 \quad p_1^N + p_2 - 1 \quad p_2^N} \cdot D \quad p_1, sb - D \quad p_2, sb + \\ &+ \frac{1 - p_2 \quad p_2^{N-1} o \quad \lambda \quad 1 - \rho_1 + sb^2 + 1 - p_1 \quad p_1^{N-1} o \quad \lambda \quad 1 - \rho_2 + sb^2}{1 - p_1 \quad p_1^N + p_2 - 1 \quad p_2^N} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Aniqlik uchun $\rho < 1$ deb olaylik. U holda

$$\begin{aligned} p_1 sb &= 1 - \frac{b}{1 - \rho + \bar{b}} \theta_1, \\ p_2 sb &= 1 + \frac{1 - \rho + \bar{b}}{b} \theta_2 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

munosabatlarga ega bo‘lamiz, bu yerda

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{s}{\lambda} \frac{2}{\theta} - \frac{\bar{b} - 1 + \rho}{b}, \quad \theta_2 = \frac{\theta}{\lambda^2 \sigma^2} + \frac{sb}{\lambda(1 - \rho + \bar{b})}; \\ \theta &= \frac{1 - \rho + \sqrt{(1 - \rho)^2 + 2s\sigma^2 \lambda b}}{1 - \rho + \bar{b}} \end{aligned}$$

(3.1.3) ga ko‘ra $N \rightarrow \infty$ va $\rho \rightarrow 1$ da ushbu munosabat o‘rinli:

$$\frac{1 - p_1}{1 - p_1} \frac{p_1 p_2^N}{p_1^N + p_2 - 1} \approx e^{-N\theta_2 \frac{1 - \rho + \bar{b}}{b}} + \frac{1 - \rho + \bar{b}^2 \theta_2}{b\theta_1} \cdot e^{\frac{Nb\theta_1}{1 - \rho + \bar{b}}}^{-1}.$$

Ixtiyoriy $s, Res > 0$ uchun

$$0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \theta_1 < \infty, \quad 0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \theta_2 < \infty \quad (3.1.4)$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Demak,

$$\frac{1 - p_1}{1 - p_1} \frac{p_1 p_2^N}{p_1^N + p_2 - 1} < \infty. \quad (3.1.5)$$

Ushbu

$$\begin{aligned} D_{p_1, sb} - D_{p_2, sb} &= \\ &= \frac{\lambda(1 - p_2 + sb)}{1 - s\lambda(1 - p_2 + sb)} Q_{p_2, sb} \\ &+ \frac{\lambda(1 - p_1 + sb)}{1 - s\lambda(1 - p_1 + sb)} Q_{p_1, sb} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

tenglikdan, $Q(v, s)$ absolyut qiymati bo'yicha chegaralangan funksiya ekanligi e'tiborga olinsa, $\rho \rightarrow 1$ va $N \rightarrow \infty$ da

$$D_{p_1, sb} - D_{p_2, sb} = O(1 - \rho + \bar{b})$$

munosabat kelib chiqadi. (3.1.5) va (3.1.6) larga ko'ra (3.1.2) tenglikning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchi $\rho \rightarrow 1$ va $N \rightarrow \infty$ da $o(1 - \rho + \bar{b})$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Shuningdek, (3.1.3) tengliklarga asosan (3.1.2) ning o'ng tomonidagi uchinchi qo'shiluvchi $o(1 - \rho + \bar{b})^2$ ga teng bo'ladi.

Isbot qilingan teoremaning natijasi sifatida bandlik davri o'rta qiymati uchun ushbu asimptotik munosabat o'rinli ekanligini ko'rsatish qiyin emas: $N \rightarrow \infty$ va $\rho \rightarrow 1$ da

$$M\zeta_N = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} (1 - b^{-N} b_{1N}), \quad (3.1.7)$$

bu yerda

$$b = 1 - \frac{2(1-\rho)}{\lambda^2 \sigma^2},$$

$$b_{1N} = 1 + O(1-\rho)(1-b^{-N})^{-1}.$$

Agar $g'_N(0) = -M\zeta_N$ tenglik e'tiborga olinsa, (3.1.7) munosabat teoremadan bevosita kelib chiqadi.

3.2-§. $M|G|1|N$ xizmat ko'rsatish tarmog' i bandlik davri o' rta qiymatining asimptotik holati va uning tadbiqu

Bir kanalli xizmat ko'rsatish sistemasiga λ parametrli Puasson talablar oqimi kelib tushayotgan bo'lsin. Talablarga ularning kelish tartibida xizmat ko'rsatiladi. Xizmat ko'rsatish vaqti uzunliklari bog'liq bo'lmagan va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lib, $B \in [B + 0, \infty)$ taqsimotga va μ^{-1} o' rta qiymatga ega. Sistemaning kutish joylari soni N ga ($N \geq 1$) teng, ya'ni bir paytning o'zida sistemada xizmat ko'rsatilayotgan talab bilan birga $N + 1$ ta talab bo'lishi mumkin. Ushbu sistema odatda, $M|G|1|N$ orqali belgilanadi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$\rho = \lambda \mu^{-1}$ –sistemaning yuklanishi;

$\zeta_k - M|G|1|k$, $k = 1, N$, sistemaning bandlik davri, ya'ni sistema uzluksiz xizmat bilan band bo'lgan vaqt uzunligi;

ξ_N – sistemaning statsionar navbat uzunligi;

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} x^2 dB(x),$$

$$b(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dB(x), \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

$$g_N(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dP_k(x), \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

$$P_N(k) = P(\xi_N = k), \quad k = 0, N + 1.$$

[23] ishda $g_N(s)$ va $M\zeta_N$ larni aniqlovchi formulalar hosila funksiyalar orqali ifodalangan va amalyotda ulardan bevosita foydalanish imkoniyati yo'q.

Ushbu ishda $M\zeta_N$ ning $N \rightarrow \infty$ va $\rho \rightarrow 1$ dagi asimptotik holati o'rganiladi va uning tatbiqi sifatida ξ_N ning taqsimot funksiyasi uchun o'tish holatlari

qaraladi. $M\zeta_N$ uchun olingan munosabatdan xususiyl holda $N = \infty$ da 11 (62-bet) ishdagi natija kelib chiqadi.

3.2.1-teorema. $N \rightarrow \infty$ va $\rho \rightarrow 1$ da ushbu munosabat o'rinli:

$$M\zeta_N = \frac{1 - b^{-N}}{\lambda(1 - \rho)} + \theta_{N, \rho} \quad 1 - \rho, \quad (3.2.1)$$

bu yerda

$$b = 1 + \frac{2(1 - \rho)}{\lambda^2 \sigma^2}, \quad \limsup_{N, \rho} \theta_{N, \rho} < \infty.$$

Izoh. Ushbu teoremada va bundan keyingi hamma joyda $\rho \rightarrow 1$ munosabat $\lambda \rightarrow \mu$ sifatida tushuniladi.

Isbot. [12] ishdagi quyidagi tenglik isbotlangan:

ixtiyoriy N va ρ uchun $s \rightarrow 0$ da

$$g_{N, s} = \frac{p_2 p_1^N (1 - p_1) + p_1 p_2^N (p_2 - 1)}{p_1^N (1 - p_1) + p_2^N (p_2 - 1)} + \theta_{N, \rho, s} \quad 1 - \rho, \quad (3.2.2)$$

bu yerda

$$p_{1,2} = 1 + \frac{s}{\lambda} + \frac{1 - \rho \pm \sqrt{(1 - \rho)^2 + 2\lambda\sigma^2 s}}{\lambda^2 \sigma^2},$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \max_{N, \rho} \theta_{N, \rho, s} < \infty.$$

(3.2.2) dan quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\frac{1 - g_{N, s}}{s} = \frac{1 - p_1 (p_2 - 1) (p_2^N - p_1^N)}{s[p_1^N (1 - p_1) + p_2^N (p_2 - 1)]} + \theta_{N, \rho, s} \quad 1 - \rho \quad (3.2.3)$$

$s \rightarrow 0$ da ixtiyoriy fiksirlangan N va ρ lar uchun ushbu munosabatlarga ega bo'lamiz:

$$\frac{1 - g_{N, s}}{s} = -g'_N(0) = M\zeta_N, \quad (3.2.4)$$

$\rho < 1$ da

$$\frac{1 - p_1}{s} = -\frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda(1 - \rho \pm \sqrt{(1 - \rho)^2 + 2\lambda\sigma^2 s})} \rightarrow \frac{1}{\lambda(1 - \rho)} \quad (3.2.5)$$

$$p_2 \rightarrow 1 + \frac{2(1 - \rho)}{\lambda^2 \sigma^2} = b,$$

$\rho > 1$ da

$$p_1 \rightarrow 1 - \frac{2\rho - 1}{\lambda^2 \sigma^2} = b,$$

$$\frac{p_2 - 1}{s} \rightarrow \frac{1}{\lambda(1 - \rho)} \quad (3.2.6).$$

(3.2.4) - (3.2.6) munosabatlarga ko'ra (3.2.3) dan (3.2.1) tenglik kelib chiqadi.

3.2.2-teorema. $N \rightarrow \infty$, $\rho \uparrow 1$ va $N(1 - \rho) \rightarrow \alpha$ $0 \leq \alpha \leq \infty$ da quyidagi limit munosabatlar o'rinli:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\xi_N < x) = F_{\alpha, A}(x),$$

bu yerda

$$\delta_{N, \rho} = \frac{1 - \rho^N}{1 - \rho}, \quad m = \frac{2}{\lambda^2 \sigma^2},$$

$$A = \alpha(1 - e^{-\alpha})^{-1},$$

$$F_{\alpha, A}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1 - e^{-m\alpha \frac{x}{A}}}{1 - e^{-m\alpha}}, & 0 < x \leq A \\ 1, & x > A \end{cases}, \quad (3.2.7)$$

1) $\alpha = 0$ da

$$F_{0,1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases},$$

2) $\alpha = \infty$ da

$$F_{\infty, \infty}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-mx}, & x > 0. \end{cases}$$

Isbot. [20] ishda $P_N(k)$ va $M\xi_k$ lar ($k = 0, N$) o'rtasidagi quyidagi bog'lanishlar keltirilgan:

$$P_N(0) = (1 + \lambda M\xi_N)^{-1}, \quad (3.2.8)$$

$$P_N(k) = \mu(M\xi_k - M\xi_{k-1}) P_N(0), \quad k = 1, N.$$

Agar

$$P(\xi_N < x) = \sum_{k=0}^{[x]} P_N(k)$$

tenglik e'tiborga olinsa (x — x ning butun qismi), (3.2.8) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P \xi_N < x = \frac{\mu M \zeta_{[x]}}{1 + \lambda M \zeta_N}.$$

U holda 1-teoremaga asosan

$$P \xi_N < x = \frac{\rho^{-1} (1 - b^{-x}) + \theta(x, \rho)(1 - \rho)^2}{1 - \rho + 1 - b^{-N} + \theta(N, \rho)(1 - \rho)^2}. \quad (3.2.9)$$

$N \rightarrow \infty$, $\text{vap} \uparrow 1$ da $N(1 - \rho) \rightarrow \alpha$ ($0 < \alpha < \infty$) bo'lsin.

U holda ushbu limit teoremlar o'rinli bo'ladi:

$$\rho^N = 1 - \frac{2(1 - \rho)N}{\lambda^2 \sigma^2} \rightarrow e^{-\alpha},$$

$$b^{-N} = 1 + \frac{2(1 - \rho)N}{\lambda^2 \sigma^2} \rightarrow e^{-\frac{2\alpha}{\mu^2 \sigma^2}} = e^{-m\alpha} \quad 3.2.10.$$

Agar

$$\frac{x(1 - \rho^N)}{1 - \rho} = \frac{x(1 - \rho^N)}{1 - \rho} - \tau(N, \rho, x) \quad (\text{bu yerda } 0 < \tau(N, \rho, x) < 1)$$

tenglik e'tiborga olinsa, (3.2.10) ga asosan

$$b^{-\left[\frac{x(1 - \rho^N)}{1 - \rho}\right]} = b^{-N \frac{x(1 - \rho^N)}{N(1 - \rho)}} \cdot b^{N \frac{\tau(N, \rho, x)}{N}} \rightarrow b^{-\frac{m\alpha}{A}x}$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bundan va (3.2.10) ga ko'ra (3.2.9) dan teoremaning $0 < \alpha < \infty$ holdagi isboti kelib chiqadi. $\alpha = 0$ va $\alpha = \infty$ hollarni (3.2.7) dan α bo'yicha tegishli limitlarga o'tib hosil qilish mumkin.

3.3-§. $M|G|1|N$ sistemaning bandlik davri o' rta qiymati uchun ayrim limitteoremlar

Bitta xizmat ko' rsatish qurilmasidan iborat bo' lgan sistemaga λ parametrli Puasson talablar oqimi kelib tushayotgan bo' lsin, ya'ni talablarning kelib tushish momentlari orasidagi vaqt uzunliklari bir xil

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0 \end{cases}$$

taqsimotga ega bo' lsin.

Talablarga ularning kelish tartibida xizmat ko' rsatilsin va xizmat ko' rsatish vaqti uzunliklari o' zaro bog' liq bo' lmagan va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo' lib, $B(x)$ $B(+0)=0$ taqsimotga va μ^{-1} o' rta qiymatga ega bo' lsin.

Faraz qilaylik, sistemaning kutish joylari soni N ga teng, ya'ni sistemada xizmat ko' rsatilayotgan talab bilan birga ko' pi bilan $N+1$ ta ($N \geq 1$) talab bo' lishi mumkin.

Yuqorida ta'riflangan xizmat ko' rsatish sistemasi odatda, $M|G|1|N$ orqali belgilanadi.

Ushbu ishda qaralayotgan sistema bandlik davri o' rta qiymatining asimptotik holatlari tahlil qilinadi. Bandlik davri o' rta qiymati aniq ko' rinishda emas, balki hosila funksiyalar orqali ifodalanganligi sababli undan bevosita foydalanib bo' lmaydi. Ma' lumki, xizmat ko' rsatish sistemasining ko' plab xarakteristikalarini (bandlik davri, navbat uzunligi, kutish vaqti) tahlili aynan bandlik davri o' rta qiymatining asimptotik holatlariga bog' liq.

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$\zeta_k = M|G|1|k$, $k = \overline{1, N}$, sistemaning bandlik davri,

$$b(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dB(x), \operatorname{Re} s \geq 0,$$

$$g_k(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dP(\zeta_k < x), \operatorname{Re} s \geq 0,$$

$$\rho = \lambda\mu^{-1} - \text{sistemaning yuklanishi.}$$

$r - \nu = b(\lambda - \lambda\nu)$ tenglamaning $\rho \neq 1$ da birdan farqli va $\rho = 1$ da birga teng bo'lgan yagona yechimi.

3.3.1-teorema. Ushbu munosabatlar o'rinli:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (r^k M_{\zeta_N} - M_{\zeta_{N-k}}) = \frac{1 - r^k}{\mu(\rho - 1)} \quad (3.3.1)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} r^N (M_{\zeta_N} - M_{\zeta_{N-k}}) = \frac{r^k - 1}{\mu[\lambda b'_\nu(\lambda - \lambda\nu) + 1]}. \quad (3.3.2)$$

3.3.2-teorema. Ushbu munosabatlar o'rinli:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_{\zeta_{N-k}}}{M_{\zeta_N}} = f(x) = \begin{cases} r^k, & \rho \geq 1, \\ 1, & \rho < 1; \end{cases} \quad (3.3.3)$$

$\rho > 1$ da

$$\lim_{N \rightarrow \infty} r^N M_{\zeta_N} = \frac{1}{\mu[\lambda b'_\nu(\lambda - \lambda\nu) + 1]}. \quad (3.3.4)$$

3.3.1-teoremaning isboti. [24] ishda quyidagi munosabat isbotlangan:

$$g_k(s) = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} \frac{s}{s}, \quad (3.3.5)$$

bu yerda Δ_k ushbu tenglikdan aniqlanadi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k \Delta_k s = \frac{vb(s) - b(\lambda + \lambda - \lambda\nu)}{1 - \nu [v - b(\lambda - \lambda\nu)]}. \quad (3.3.6)$$

Ma'lumki, $M_{\zeta_k} = -g'_k(0)$. Bunga ko'ra (3.3.5)dan quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$M_{\zeta_k} = \Delta'_k(0) - \Delta'_{k-1}(0), \quad k \geq 1. \quad (3.3.7)$$

(3.3.6) tenglikning ikkala tomonini s bo'yicha differensiallab, $s=0$ da (3.3.7) munosabatga ko'ra ushbu tenglikga ega bo'lamiz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} v^k M\zeta_k = \frac{v}{\mu[b\lambda - \lambda v - v]}. \quad (3.3.8)$$

Faraz qilaylik, r soni $v = b\lambda - \lambda v$ tenglamaning birdan farqli eng kichik yechimi bo'lsin. U holda quyidagi munosabat o'rinli:

$$b\lambda - \lambda v - v = a v^{v-1} v^{-r},$$

bu yerda $v=1$ va $v=r$ da $a v \neq 0$. Bunga va (3.3.8) tenglikga ko'ra

$$\frac{v}{\mu a v} = \frac{v-1}{\mu} \frac{v-r}{v} \frac{v}{[b\lambda - \lambda v - v]} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k e_k, \quad (3.3.9)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} e_1 &= rM\zeta_1, \\ e_2 &= rM\zeta_2 - r+1 M\zeta_1, \\ &\vdots \\ e_k &= rM\zeta_k - r+1 M\zeta_{k-1} + M\zeta_{k-2}, \quad k \geq 3. \end{aligned}$$

(3.3.9) munosabatdan mos holda $v=1$ va $v=r$ larda ushbu tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k = \frac{1-r}{\mu \rho - 1}, \quad (3.3.10)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k e_k = \frac{r-1}{\mu [\lambda b_v' \lambda - \lambda v + 1]}. \quad (3.3.11)$$

Boshqa tomondan

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N e_k = \lim_{N \rightarrow \infty} rM\zeta_N - M\zeta_{N-1}, \quad (3.3.12)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k e_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N r^k e_k = \lim_{N \rightarrow \infty} r^N M\zeta_N - M\zeta_{N-1}. \quad (3.3.13)$$

(3.3.10 - 3.3.13) munosabatlardan $k=1$ holda teoremaning isboti kelib chiqadi. $k \geq 2$ bo'lgan hol uchun teorema matematik induksiya metodi bilan isbotlanadi.

3.3.2-teoremaning isboti. Ma'lumki, ([11] 63-bet)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M\zeta_N = \begin{cases} \frac{1}{\mu \rho - 1}, & \rho < 1, \\ \infty, & \rho \geq 1. \end{cases} \quad (3.3.14)$$

(3.3.1) tenglikka ko'ra

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M \zeta_N \left(r^k - \frac{M \zeta_{N-k}}{M \zeta_N} \right) = \frac{1-r^k}{\mu \rho - 1} < \infty.$$

Bundan (3.3.3) munosabatga ega bo'lamiz. Xuddi shuningdek, (3.3.14) ga ko'ra (3.3.2) dan (3.3.4) munosabat kelib chiqadi

Izoh. Agar

$$\sigma^2 = \int_0^\infty x^2 dB(x) < \infty$$

bo'lsa, u holda ushbu munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1-r^k}{\mu \rho - 1} = \frac{2k}{\mu^3 \sigma^2}, \quad (\lambda \rightarrow \mu), \quad (3.3.15)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1-r^k}{\mu [\lambda b_v' \lambda - \lambda v + 1]} = \frac{2k}{\mu^3 \sigma^2}. \quad (3.3.16)$$

(3.3.15) munosabat (3.3.9) va quyidagi tenglikdan kelib chiqadi:

$$a_{v-1} - r = \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2} (v-1) \left(v-1 - \frac{2(1-\rho)}{\lambda^2 \sigma^2} \right) + o(|v-1|^2).$$

(3.3.16) esa bevosita (3.3.15) tenglikning natijasidir.

Xulosa.

Dissertatsiya ishida o'rganilgan masalalar asosan $M \leq G \leq N$ va $G \leq M \leq N - 1$ xizmat ko'rsatish tarmoqlariga tegishli bo'lib, ushbu tarmoqlarning bandlik davrlari o'rta qiymatlarini tadqiq etishga qaratilgan. Ma'lumki, tarmoqning bandlik davrini, ya'ni uzluksiz xizmat bilan band bo'lgan davrni tahlil qilish orqali xizmat ko'rsatish qurilmasi yoki qurilmalarining samarali ishlashi bilan bog'liq masalalar hal etiladi. Bandlik davri bilan bog'liq ko'plab masalalarda uning taqsimotini aniqlash muhim bo'lmay, ayrim xarakteristikalar, jumladan o'rta qiymat haqida ma'lumotlarni bilish yetarli bo'ladi. Shu bilan birgalikda, bilamizki, $G \leq M \leq N - 1$ xizmat ko'rsatish tarmog'i $M \leq G \leq N$ tarmoqqa qaraganda mavjud holatni aniqroq ifodalaydi, lekin ushbu tarmoqqa tegishli masalalarni hal etish nisbatan murakkabroqdir. Qator hollarda ushbu muammoni qaralayotgan tarmoqlar bandlik davrlari taqsimoti va o'rta qiymatlari o'rtasida ikkilanma munosabatlar o'rnatish orqali hal etish mumkin bo'ladi, ya'ni bir tarmoq uchun o'rnatilgan natijalar bevosita ikkilanma xizmat ko'rsatish tarmog'iga o'tkaziladi.

Qaralayotgan ishda quyidagi masalalar hal etilda va o'rganildi.

1. $M \leq G \leq N$ va $G \leq M \leq N - 1$ tarmoqlar bandlik davrlari taqsimotlarining Laplas – Stiltes almashtirishlari o'rtasida ikkilanma munosabat o'rnatildi.
2. $M \leq G \leq N$ va $G \leq M \leq N - 1$ tarmoqlar bandlik davrlari o'rta qiymatlari orasida ikkilanma munosabat o'rnatildi.
3. $M \leq G \leq N$ tarmoq bandlik davri taqsimotining Laplas – Stiltes almashtirishi uchun asimototik ko'rinish topildi.
4. $M \leq G \leq N$ tarmoqning bandlik davri o'rta qiymati uchun limit teoremlar isbot qilindi va ular yordamida qator ma'lum natijalar keltirib chiqarildi.

5. $M \times G \times 1 \times N$ va $G \times J \times M \times 1 \times N - 1$ xizmat ko'rsatish tarmoqlari statsionar navbat uzunliklari taqsimoti va $M \times G \times 1 \times k$, $k = 1, N$ tarmoqning bandlik davri o'rta qiymatlari orasida munosabat o'rnatildi.
6. $M \times G \times 1 \times N$ va $G \times J \times M \times 1 \times N - 1$ tarmoqlar statsionar navbat uzunliklari uchun asimptotik ko'rinish topildi.

Olingan natijalar yangi bo'lib, ommoviy xizmat ko'rsatish tarmoqlariga tegishli, tarmoqni optimal rejalashtirish va qurilmaning effektiv ishlashi bilan bog'liq qator masalalarni nisbatan oson hal etish imkonini beradi, umumiyroq tarmoqlarni tahlil qilish uchun mo'ljal (orientir) bo'lib xizmat qiladi.

Ushbu dissertatsiya ishida qaralgan masalalarni quyidagi ko'rinishlarda davom ettirish mumkin:

1. $M \times G \times m \times N$ va $G \times J \times M \times m \times N - 1$ tarmoqlarining bandlik davri taqsimoti va o'rta qiymatlarini o'rganish.
2. Keltirilgan natijalarni absolyut va nisbiy imtiyozli xizmat ko'rsatish tarmoqlari bandlik davri taqsimoti va o'rta qiymatlari uchun olish.
3. O'rganilgan masalalarni $G \times G \times 1 \times N$ va $G \times G \times m \times N$ xizmat ko'rsatish tarmoqlari uchun qarab chiqish.
4. Ishda keltirilgan natijalarni ko'p fazali va kutish joylar soni chegaralangan xizmat ko'rsatish tarmoqlari uchun olish.
5. Olingan natijalarni tatbiqi bilan bog'liq masalalarni hal etish.
6. Ishda qaralgan masalalarni kutish vaqti chegaralangan xizmat ko'rsatish tarmoqlari uchun o'rganish.
7. Qaralgan masalalarni ko'p o'lchovli taqsimotlar, jumladan bandlik davri va bu davrda xizmat ko'rsatilgan talablar sonini birgalikdagi taqsimoti, statsionar navbat uzunligi va kutish vaqtining birgalikdagi taqsimoti uchun o'rganib chiqish.

Ushbu masalalarni hal etish nisbatan murakkab bo'lib, qator holatlarda mavjud tadqiqot metodlari bilan bir qatorda alohida usullardan foydalanish talab etiladi. Shu bilan birgalikda ushbu masalalarni hal etish, ayniqsa, $G \times G \times 1 \times 1$

tipdagi xizmat ko'rsatish tarmoqlari xarakteristikalarini tahlil qilish muhim ilmiy va amaliy ahamiyatga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Азларов Т.А., Тахиров А. Случайные процессы и статистические выводы, вып. 4, Ташкент, Фан, 1974, 4-7.
2. Азларов Г.А., Курбонов Х. Соотношение двойственности для распределений длины очереди систем $M/G/1$ и $G/M/1$. Изв. АН УзССР, Серия физ.мат.наук. 1982, N1. 3-8.
3. Боровков А.А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972.
4. Боровков А.А. Асимптотические методы теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1980.
5. Висков О.В., Исмоилов А.И. Система массового обслуживания с ограниченной очередью, Исследования по математической статистике и смежные вопросы, науч. Труды. ТашГУ, вып. 402, 1972, 17-29, 28-31.
6. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н., Лекции по теории массового обслуживания, изд-во КВИРТУ, 1974.
7. Джейсуол Н. Очереди с приоритетами. – М.:Мир, 1973, 280 бет.
8. Гнеденко Б.В., Димитров Б.Н., Климов Г.П., Матвеев В.Ф. Приоритетные система обслуживания. – М.: МГУ, 1973, 447 бет.
9. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987, 336 бет.
10. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. теория массового обслуживания. – М.: Высшая школа, 1982.

11. Климов Г.Б. Стохастические системы обслуживания. - М.:Наука, 1966, 239 б.
12. Курбанов Х. Переходные явления для распределения периода занятости система массового обслуживания $M/G/1/N$. “Предельные теорема для случайных процессов и статистические выводы”, Сб трудов. ИМАНУ₃ССР, 1981, 108-122 .
13. Курбанов Х. Некоторые предельные теоремы, связанные со средним значением периода занятости систем с ограниченной очередью, науч. тр. СамГУ, 1990, 61-64 .
14. Курбанов Х Соотношения двойственности и переходные явления в системах с ограниченной очередью, Дисс. на соискание уч.степени к.ф.м.н, Ташкент, 1987, 122 стр.
15. Клейнрок И.Н. Вычислительная система очередями. –М.: Мир, 1979.
16. Курбанов Х. Распределение периода занятости системы с прерыванием и ограниченной очередью, Сб.тр.СамГУ, 1991, 51-54.
17. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. – М.: Советское радио, 1971.
18. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. – М.:Мир, 1971.
19. Ташманов Х.Т. Асимптотический анализ системы массового обслуживания $M/M/1/N$. “Предельные теорема и мат. статистика”, Ташкент, “фан”, 1976.
20. Ташманов Х.Т., Курбанов Х.К. Исследование распределения стационарных длины очередей двойственных систем. Сб. науч. тр ТашГУ, 1987, 79-82 бет.
21. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. –М.: Физматгиз, 1963.
22. Шахбазов А.А. Об одном соотношении двойственности в теории массового обслуживания . Изв АН УзССР, N3, 1975, 17-21.

23. Harris T.J. The remaining busy period of finite queue, Oper. Res., v19, 1971, 219-233 .
24. Harris T.J. The remaining busy period of finite quere, Oper. Res., N5, 1966, 947-949.
25. Cohen J.W. The single server Queue. Wiley (New – York), 1969.
26. Qurbonov H. Navbat uzunligi chegaralangan xizmat ko'rsatish tarmog'ining bandlik davri. SamDu ilmiy maqolalar to'plami, 1996, 48-50.
27. Qurbonov H., Madatova Z. $M/G/1/N$ va $GJ/M/1/N-1$ xizmat ko'rsatish tarmoqlari bandlik davri taqsimotlari uchun ikkilanma munosabat. SamDU ilmiy axborotnomasi, 2017-yil, 1-son (101), 76-79-betlar.
28. Qurbonov H., Madatova Z. Statsionar navbat uzunligi va bandlik davri o'rta qiymatlari o'rtasidagi munosabatlar haqida. "Matematikaning dolzarb muammolari" nomli Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi 2016-yil 17-may, 298-300-betlar.
29. Qurbonov H., Madatova Z. $M/G/1/N$ va $GJ/M/1/N-1$ ikkilanma xizmat ko'rsatish tarmoqlari statsionar navbat uzunliklari o'rtasidagi munosabatlar haqida. Yosh olim va talabalarning "XXI asr intellektual avlod asri" nomli V Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi 2017-yil 12-13- yanvar, 270-275-betlar.
30. Qurbonov H., Madatova Z. $M/G/1/N$ xizmat ko'rsatish tarmog'i statsionar navbat uzunligi taqsimoti uchun asimptotik munosabatlar, International Conference on Nonlinear Analysis and its applications, September 19-21, 2016, Samarkand Uzbekistan
31. Qurbonov H., Madatova Z. $M/G/1/N$ xizmat ko'rsatish tarmog'i bandlik davri taqsimoti uchun asimptotik formula. Yosh olimlar Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi 2017-yil 31 mart – 1-aprel II qism.
32. Qurbonov H., Madatova Z. $M/G/1/N$ xizmat ko'rsatish tarmog'i bandlik davri o'rta qiymatining asimptotik holati va uning tadbiqu. "Ta'lim, fan va ishlab chiqarish integratsiyasida intellektual salohiyatli yoshlar-mamlakat

taraqqiyotining muhim omili” mavzusidagi XIII Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi 2016-yil 29-30 aprel, N5, 18-20-betlar.

33. Qurbonov H., Madatova Z. $M G 1|N$ sistemaning bandlik davri o‘rta qiymati uchun ayrim limit teoremlar. “Analizning dolzarb muammolari” nomli Respublika ilmiy konferensiyasi 2016-yil 22-23aprel, 330-332-betlar.
34. Ziyonet.uz sayti.
35. Mathnet.ru sayti.
36. Wikipedia.org sayti.