

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

Qo‘lyozma huquqida

UDK 517.984

Mardanov Asliddin Xasamiddin o‘g‘li
«Bir bozonli sistemaga mos taqsimotning ba’zi xossalari»
5A130102 «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» mutaxassisligi
Matematik magistr akademik darajasini olish uchun

MAGISTRLIK DISSERTATSIYASI

**Dissertatsiya kaferda majlisida ko‘rib
chiqildi va himoyaga tavsiya etildi**

**Ilmiy rahbar
prof. J.I. Abdullayev**

**«Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
kafedrasi mudiri**

prof. J.I. Abdullayev

S A M A R Q A N D-2017

MUNDARIJA

Kirish	3
--------------	---

I BOB. O‘Z-O‘ZIGA QO‘SHMA

OPERATORLARNING SPEKTRAL YOYILMASI

1.1-§. Hilbert fazosida qo‘shma operatorlar.	8
1.2- §. Unitar va proyeksiyalovchi operatorlar	9
1.3 - §. Musbat operatorlar	16
1.4 -§. O‘z – o‘ziga qo‘shma operatorning spektri	18
1.5 -§. Spektral proyektorlar	21
1.6 -§. Operator qiymatli funksiyalar.	23

II BOB. KVANT EHTIMOLLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

2.1-§. Elementar hodisalarning diskret fazosi va aksiomalari	27
2.2-§. Tasodifiy miqdorlar.	32
2.3-§. Asosiy postulatlarining bayoni.	40
2.4-§. Asosiy postulatlardan kelib chiqadigan bazi natijalar	46
2.5-§. Kvantlash.	50
2.6-§. Aniqmaslik munosabatlari	54

III. BOB. BIR BOZONLI SISTEMAGA MOS

TAQSIMOTNING BA‘ZI XOSSALARI

3.1-§. Bir bozonli sistemaga mos energiya operatorining koordinat va impuls tasvirlari.	58
3.2-§. Bir zarrachali sistemaga mos taqsimot uchun ekstremal masala. ...	67
3.3-§. Ikki bozonli sistemaga mos taqsimotning xarakteristik xossalari.	71
Xulosa	74
Foydalanilgan adabiyotlar.	76

Kirish

1. Mavzuning dolzarbligi. Shryodinger tenglamasi – bu kvant nazariyasining asosiy tenglamasidir. Bu tenglamani o'rganish zamonaviy kvant ehtimollari nazariyasida muhim o'rin egallaydi. Matematik nuqtai nazardan ham bu tenglamani o'rganish katta qiziqish uyg'otadi. Kvant mexanikasining asosiy postulatlariga ko'ra kuzatiluvchan har qanday fizik miqdorning holati biror kompleks separabel Hilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma, quyidan chegaralangan operator bilan tavsiflanadi. Energiya har qanday kvantomexanik sistemada muhim fizik miqdor bo'lib hisoblanadi. Bu kuzatiluvchan miqdorga mos operatorni odatda H orqali belgilaydilar. Ma'lumki, energiya operatori H sistema evolyutsiyasining qonunini aniqlaydi. Vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydigan holatlar *statsionar (barqaror) holatlar* deyiladi. Energiya statsionar holatda ayni bitta qiymat energiya operatorining xos qiymatini bir ehtimol bilan qabul qiladi.

Statsionar holatlarni (H energiya operatorining xos vektorlarini) ifodalovchi $H\psi = \lambda\psi$ tenglama *Shryodinger tenglamasi* deyiladi. Shunday qilib, energiya operatori H ning spekti haqida ma'lumotga ega bolish, bu fizik sistema haqida muhim ma'lumotlarga ega bo'lish demakdir. Shryodinger tenglamasi yoki energiya operatori H ning spektral xossalarini o'rganishga bag'ishlangan ko'plab kitoblar, monografiyalar va maqolalar mavjud. Jumladan M.Rid va B.Saymonlarning 4 – tomlik (Matematik fizikaning zamonaviy usullari) ensiklopediyasi, F.A.Berezin va M.A.Shubinlarning Shryodinger tenglamalari, Axiezer N.I. va Glazman I.M. (Hilbert fazolarida chiziqli operatorlar) hamda L.A. Lyusternik, V.I.Sobolevlarning (Funksional analiz elementlari), T.A. Sarimsaqovning o'zbek tilidagi "Funksional analiz kursi", A.B.Hasonovning Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari nazariyasiga kirish nomli monografiyasi va J.I. Abdullayev, R.N. G'anixo'jayev, M.H. Shermatov, O.I.Egamberdiyevlarning «Funksional analiz va integral tenglamalar» nomli darslik kitoblaridir.

2. Masalaning qo'yilishi. Ushbu magistrlik dissertatsiyasida bir o'lchamli panjarada bir bozonli sistemaga mos energiya (Hamiltonian) operatori qaralgan bo'lib unga mos taqsimot funksiya uchun aniq formula topish, bazis holatlarda mos

energiyaning oʻrta qiymati va dispersiyasi uchun aniq ifodalar olish.

3. Ishning maqsadi va vazifalari. Bir oʻlchamli panjarada erkin harakatlanayotgan bir bozonli sistema energiyasi kuzatiladi. Bu kuzatiluvchan miqdorga (energiyaga) mos oʻz-oʻziga qoʻshma operatorlarni (Hamiltonianni) qurish. Energiya operatori xossaligidan foydalanib, kuzatilayotgan energiyaga mos taqsimotni topish va bazis holatlarda uning sonli xarakteristikalarini hisoblash, xossaligidan oʻrganish.

4. Ilmiy tadqiqot metodlari. Ushbu magistrlik dissertatsiyasini bajarish jarayonida ehtimollar nazariyasi elementlaridan, oʻz-oʻziga qoʻshma operatorlarning spektral nazariyasidan, taqsimotlar nazariyasi metodlaridan va xossaligidan foydalanildi.

5. Ishning ilmiy ahamiyati. Magistrlik dissertatsiyasi ishida olingan natijalardan kvant mexanikasi masalalarini, oʻz-oʻziga qoʻshma operatorlarning spektral xossaligidan tekshirishda, matematik fizika masalalarini tadqiq qilishda foydalanish mumkin.

6. Ishning amaliy ahamiyati. Magistrlik dissertatsiya ishida toʻplangan materiallardan kvant mexanikasi, statistik fizika va matematik statistika fanlaridan laboratoriya mashgʻulotlari va amaliyot darslarida foydalanish mumkin.

7. Ishning tuzilishi. Magistrlik dissertatsiyasi kirish qismi, uch bob, oʻn besh paragraf hamda oʻz ichiga 20 adabiyotni olgan foydalanilgan adabiyotlar roʻyxatidan iborat. Belgilashlar uch raqamli boʻlib, ular orasi nuqta bilan ajratilgan. Birinchi raqam bob nomerini, ikkinchi raqam paragraf nomerini bildiradi, uchinchi son esa tartib nomerini bildiradi. Masalan, 2.3.1-teorema yozuvi-ikkinchi bob uchinchi paragrafining 4-chi teoremasi ekanligini bildiradi, yoki (1.5.8) belgilash 1-bob, 5-chi paragrafdagi 8-chi formula ekanligini anglatadi.

I-bobda ushbu magistrlik dissertatsiyasida keng qoʻllaniladigan tushunchalar, taʼriflar va asosiy maʼlumotlar isbotsiz keltirilgan va misollar koʻrsatilgan.

II-bob olti (2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6) paragraflardan iborat boʻlib, 2.1-§ da elementar hodisalarning diskret fazosi va aksiomalari, 2.2-§ da tasodifiy miqdorlar

haqida asosiy ta'rif va teoremlar, 2.3-§ da asosiy postulatlarning bayoni, 2.4-§ asosiy postulatlardan kelib chiqadigan lemma va ba'zi natijalar, 2.5-§ da kvantlash va Geyzenberg munosabatlari, 2.6-§ da aniqmaslik munosabatlari haqidagi lemma va teoremlar keltirilgan.

III-bob uch (3.1,3.2,3.3,3) paragrafdan iborat bo'lib, 3.1-§ da Bir bozonli sistemaga mos energiya operatorining koordinat va impuls tasvirlaridan kelib chiqadigan ba'zi teoremlar keltirilgan, 3.2-§ bir zarrachali sistemaga mos taqsimot uchun ekstremal masala qaralgan, 3.3-§ da ikki bozonli sistemaga mos taqsimotning xarakteristik xossalari sistemaga mos taqsimotning bazi xossalari keltirilgan .

Dissertatsiya oxirida xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati keltirilgan.

8. Olingan natijalarning qisqacha bayoni. Bir bozonli sistemaga mos taqsimotning ba'zi xossalari qaraladi. Bu sistema uchun quyidagi natijalar olindi:

3.1.3-lemma. Energiya operatori H ning spektral proyektorlari E_λ lar quyidagicha bo'ladi:

$$(E_\lambda f) p = \begin{cases} 0, & \text{agar } \lambda \leq 0 \\ \chi_{A_\lambda} p f p, & 0 < \lambda \leq 2 \\ f p, & \text{agar } \lambda > 2. \end{cases}$$

Bir bozonli sistema energiyasining ψ_n bazis holatlarga mos taqsimot funksiyasi $\mathcal{P}_{\psi_n}$ aniq hisoblandi. Bu taqsimot funksiyalar barcha $\psi_n p = \frac{1}{2\pi} e^{inp}, n \in \mathbb{Z}$ bazis holatlar uchun bir xilligi ko'rsatildi.

3.1.5-teorema. Energiyaning barcha $\psi_n, n \in \mathbb{Z}$ bazis holatlardagi o'rta qiymati birga teng, ya'ni $a_{\psi_n} = H\psi_n, \psi_n = 1$.

3.1.6-teorema. Energiyaning istalgan $\psi_n, n \in \mathbb{Z}$ bazis holatlardagi dispersiyasi $\delta_{\psi_n} h = \frac{1}{2}$ ga teng.

3.1.8-teorema. Ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun $\exists f_n \in L_2 -\pi, \pi$ holat mavjudki,

$$2 - \frac{1}{n} < a_{f_n} H < 2.$$

3.1.9-teorema. Ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun $\exists g_n(H) \in L_2 -\pi, \pi$ holat mavjudki, $0 < a_{g_n} H < \frac{1}{n}$ bo'ladi.

3.2.2-teorema. Energiyaning ψ_0 bazis holatda o'lchangan qiymati h ning $[\lambda, \lambda + a)$ oraliqqa tushish ehtimoli $n \in \mathbb{Z}$ ga bog'liq emas. Energiyaning uzunligi a birlik bo'lgan $\lambda, \lambda + a, \lambda \in \mathbb{R}$ oraliqdan qiymatlar qabul qilish ehtimoli

$$\begin{aligned} P_{\psi_0} \lambda \leq h < \lambda + a &= P_{\psi_0} \lambda + a - P_{\psi_0} \lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \arccos 1 - \lambda - a - \arccos 1 - \lambda, \end{aligned}$$

o'zining eng katta qiymatiga $\lambda = 0$ yoki $\lambda = 2 - a$ da erishadi, ya'ni

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}} P_{\psi_0} \lambda \leq h < \lambda + a = P_{\psi_0} 0 \leq h < a = P_{\psi_0} 2 - a \leq h < 2.$$

Hamda o'zining eng kichik qiymatiga $\lambda = 1 - \frac{a}{2}$ da erishadi, ya'ni

$$\min_{\lambda \in (0,1)} P_{\psi_0} \lambda \leq h < \lambda + a = P_{\psi_0} 1 - \frac{a}{2} \leq h < 1 + \frac{a}{2}.$$

3.3.1-teorema. Energiyaning istalgan $\psi_n^+, n \in \mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ holatdagi o'rta qiymati 2 ga teng.

I BOB. O‘Z-O‘ZIGA QO‘SHMA OPERATORLARNING SPEKTRAL YOYILMASI

1.1-§. Hilbert fazosida qo‘shma operatorlar

$\mathcal{H}$ -Hilbert fazosi va A unda aniqlangan chiziqli chegaralangan operator bo‘lsin. A ning qiymatlar sohasi ham $\mathcal{H}$ da bo‘lsin. Har bir tayilangan $y \in \mathcal{H}$ element uchun $\mathcal{H}$ ning hamma yerida aniqlangan quyidagi chiziqli funksionalni qaraymiz:

$$f_y x = Ax, y, x \in \mathcal{H}. \quad 1.1.1$$

Hilbert fazolaridagi chiziqli uzluksiz funksionallarning umumiy ko‘rinishi haqidagi Riss lemmasiga [15] ko‘ra shunday yagona $y^* \in \mathcal{H}$ element topilib $f_y(x)$ quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$f_y x = x, y^*, x \in \mathcal{H}.$$

Ravshanki, y o‘zgarishi bilan f_y funksional ham o‘zgaradi, shu bilan birgalikda y^* element ham o‘zgaradi va natijada

$$y^* = A^*y$$

operatorga ega bo‘lamiz. Bu A^* operator $\mathcal{H}$ ning hamma yerida aniqlangan va $\mathcal{H}$ da qiymatlar qabul qiladi. Aniqlangan A^* operator A operator bilan quyidagi munosabat orqali bog‘langan:

$$Ax, y) = (x, A^*y ; x, y \in \mathcal{H}. \quad (1.1.2)$$

1.1.1-ta'rif. $\mathcal{H}$ ning hamma yerida aniqlangan va (1.1.2) munosabatni qanoatlantiruvchi A^* operator A ga qo'shma operator deb yuritiladi.

1.1.2-ta'rif. Agar $\mathcal{H}$ da aniqlangan chiziqli chegaralangan operator $A^* = A$ tenglikni qanoatlantirsa, A operator o'z-o'ziga qo'shma operator deyiladi.

1.1.1-misol. $L_2[0,1]$ Hilbert fazosida $K(x,t)$ yadroli

$$Kf(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t) dt$$

Fredholm operatorini qaraymiz. K operatorga qo'shma operatorni toping.

Yechish. Ixtiyoriy $f, g \in L_2[0,1]$ funksiyalar uchun

$$\begin{aligned} Kf, g &= \int_0^1 \int_0^1 K(x,t) f(t) dt \cdot g(x) dx = \int_0^1 \int_0^1 K(x,t) f(t) \cdot g(x) dx dt = \\ &= \int_0^1 f(t) \int_0^1 K(x,t) g(x) dx dt = \int_0^1 f(x) \int_0^1 K(t,x) g(t) dt dx = f, K^*g. \end{aligned}$$

Bu yerdan

$$K^*g(x) = \int_0^1 K(t,x) g(t) dt \quad (1.1.3)$$

va K^* qo'shma operator yadrosi $K(t,x)$ ko'rinishda bo'ladi. Agar $K = K^*$ bo'lsa, u holda

$$\int_0^1 K(x,t) f(t) dt = \int_0^1 K(t,x) f(t) dt$$

tenglik ixtiyoriy $f \in L_2[0,1]$ uchun bajarilishi kerak. Bundan

$$K(x,t) = K(t,x) \quad (1.1.4)$$

tenglikni olamiz. Demak, K operator o'z-o'ziga qo'shma bo'lishi uchun deyarli barcha $x, t \in [0,1]$ da (1.1.4) tenglik bajarilishi kerak.

Bu yerda $K(x, t)$ yadro $0,1 \times 0,1$ da uzluksiz deb faraz qilinadi.

Agar $K(x, t)$ haqiqiy yadro bo'lsa, $K = K^*$ bo'lishi uchun $K(x, t) = K(t, x)$ shart bajarilishi, ya'ni $K(x, t)$ simmetrik bo'lishi zarur va yetarli.

1.2- §. Unitar va proyeksiyalovchi operatorlar

Bu yerda biz Hilbert fazosida ikkita operatorlarning maxsus sinfini qaraymiz.

1.2.1-ta'rif. Agar $\mathcal{H}$ ning hamma yerida aniqlangan va qiymatlar sohasi $\mathcal{H}$ ga teng bo'lgan $\mathcal{U}$ chiziqli operator normani saqlab akslantirsa, ya'ni ixtiyoriy $x \in \mathcal{H}$ uchun

$$\mathcal{U}x = x \quad (1.2.1)$$

tenglik bajarilsa, $\mathcal{U}$ operator unitar deyiladi.

Osongina ko'rinadiki, bu akslantirish o'zaro bir qiymatlidir, chunki agar $\mathcal{U}x_1 = \mathcal{U}x_2$, ya'ni $\mathcal{U}(x_1 - x_2) = 0$ bo'lsa, u holda

$$x_1 - x_2 = \mathcal{U}(x_1 - x_2) = 0 \text{ va } x_1 = x_2.$$

Shuning uchun teskari operator mavjud va $\mathcal{U}x = y$, $x = \mathcal{U}^{-1}y$ hamda $\mathcal{U}^{-1}y = x = \mathcal{U}x = y$ bo'lgani uchun $\mathcal{U}^{-1}$ operator ham unitardir.

So'ngra (1.2.1) tenglikka ko'ra

$$\mathcal{U}x, \mathcal{U}x = \mathcal{U}x^2 = x^2 = x, x$$

va bundan

$$\mathcal{U}^*\mathcal{U}x, x = x, x = Ex, x,$$

bu yerda va keyinchalik E orqali birlik operatorni belgilaymiz. Nol operatorni θ simvol bilan belgilaymiz. $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ va E operatorlarning kvadratik formalari teng bo'lganligi uchun, bu operatorlar ustma – ust tushadi [18] (shuni e'tiborga olish kerakki, har qanday A operator uchun A^*A o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi):

$$\mathcal{U}^*\mathcal{U} = E. \quad (1.2.2)$$

Bu tenglikni chapdan $\mathcal{U}$ ga va o'ngdan $\mathcal{U}^{-1}$ ga ko'paytirib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\mathcal{U} \mathcal{U}^* = E. \quad (1.2.3)$$

Bu yerdan olamizki, $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$. Shunga o'xshash (1.2.2) dan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\mathcal{U}x, \mathcal{U}y = x, y.$$

Teskarisi, (1.2.2) va (1.2.3) shartlardan kelib chiqadiki, $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^*$ va $\mathcal{U}$ operator $\mathcal{H}$ ni $\mathcal{H}$ ga o'zaro bir qiymatli akslantirganligidan $\mathcal{U}$ ning unitar bo'lishi kelib chiqadi va

$$\|\mathcal{U}x\|^2 = \mathcal{U}x, \mathcal{U}x = \mathcal{U}^* \mathcal{U}x, x = x, x = \|x\|^2,$$

ya'ni $\mathcal{U}$ element normasini saqlaydi.

Unitar operatorga misol sifatida quyidagilarni keltirish mumkin.

$\ell_2 \mathbb{Z}$ fazoda $\mathcal{U}_s: \ell_2 \mathbb{Z} \rightarrow \ell_2 \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z}$ operatorlar oilasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\mathcal{U}_s f(n) = f(n+s), f \in \ell_2 \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z}. \quad (1.2.4)$$

1.2.1-misol. Har bir $s \in \mathbb{Z}$ uchun $\mathcal{U}_s$ unitar operator bo'lishini tekshiring.

Yechish. Dastlab $\mathcal{U}_s$ normani saqlashini ko'rsatamiz: $\mathcal{U}_s f = f$. Haqiqatan ham,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_s f\|^2 &= \mathcal{U}_s f, \mathcal{U}_s f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_s f(n)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+s)^2 = \sum_{n+s=m} f(m)^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m)^2 = \|f\|^2. \end{aligned}$$

Bundan $\mathcal{U}_s f = f$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi $\text{Im} \mathcal{U}_s = \ell_2 \mathbb{Z}$ ekanligini ko'rsatamiz, ya'ni ixtiyoriy $g \in \ell_2 \mathbb{Z}$ uchun $\mathcal{U}_s f = g$ tenglama yechimga ega ekanligini ko'rsatish yetarli $\mathcal{U}_s f(n) = g(n)$, u holda $f(n+s) = g(n)$ tenglama $f(n) = g(n-s)$ yechimga ega. Demak, $\mathcal{U}_s$ unitar operator.

Bizga $\mathcal{H}$ Hilbert fazosida ta'sir qiluvchi A chiziqli operator va $\mathcal{U}$ unitar operator berilgan bo'lsin. Agar A va B operatorlar uchun

$$B = \mathcal{U} A \mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U} A \mathcal{U}^* \quad (1.2.5)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, B va A operatorlar unitar ekvivalent deyiladi.

(1.2.5) tenglikdan ko‘rinib turibdiki, o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorga unitar ekvivalent operator ham o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘ladi.

1.2.2-misol. Furiye almashtirishi $\mathcal{F}: \ell_2 \mathbb{Z} \rightarrow L_2[-\pi, \pi]$ ning

$$\mathcal{F}f(p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\psi_n(p) = f(p), \quad \psi_n(p) = \frac{1}{2\pi} e^{inp}.$$

unitar akslantirish ekanligini ko‘rsating.

Yechish. Dastlab $\mathcal{F}$ normani saqlab akslantirishini ko‘rsatamiz:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}f\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{F}f(p)|^2 dp = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\psi_n(p) \right|^2 dp = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} f(n)\overline{f(m)} \psi_n(p)\overline{\psi_m(p)} dp = \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} f(n)\overline{f(m)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} e^{inp} \frac{1}{2\pi} e^{-imp} dp = \frac{1}{2\pi} \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} f(n)\overline{f(m)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)p} dp. \end{aligned}$$

Ma’lumki, agar $n \neq 0$ bo‘lsa,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inp} dp = \frac{1}{in} e^{inp} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{in} (e^{in\pi} - e^{-in\pi}) = 0.$$

Bundan

$$\|\mathcal{F}f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^2 = \|f\|_{\ell_2}^2$$

$$\mathcal{F}f = f.$$

Endi $\mathcal{F}\ell_2 \mathbb{Z} = L_2[-\pi, \pi]$ tenglikni ko‘rsatamiz. Buning uchun $\mathcal{F}f = g$ tenglamani ixtiyoriy $g \in L_2[-\pi, \pi]$ uchun yechimga ega ekanligini ko‘rsatish yetarli.

U holda $g \in L_2[-\pi, \pi]$ funksiyaning $\psi_n(p) = \frac{1}{2\pi} e^{inp}$ $n \in \mathbb{Z}$ ortonormal

bazisdagi Furiye koeffitsiyentlari $g_n = \int_{-\pi}^{\pi} g(p)\psi_n(p) dp$ sonlar

bo‘lgan $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ funksiya $\ell_2 \mathbb{Z}$ fazoga qarashli bo‘ladi, ya’ni $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $g_n = g(n)$ uchun $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(n)|^2 < \infty$ munosabat o‘rinli. Shunday qilib Furiye

akslantirishi $\mathcal{F}: \ell_2 \mathbb{Z} \rightarrow L_2[-\pi, \pi]$ unitar operator ekan.

1.2.2-ta’rif. $L - \mathcal{H}$ Hilbert fazosining qism fazosi bo‘lsin. Har bir $x \in \mathcal{H}$ quyidagicha bir qiymatli tasvirlanadi:

$$x = y + z,$$

bu yerda $y \in L$, $z \perp L$. Har bir x uchun $Px = y$ ni mos qo'yib, $\mathcal{H}$ ning hamma yerida aniqlangan P operatorni aniqlaymiz, uning qiymatlar sohasi L bo'ladi. Bu operatorni proyeksiyalash operatori yoki L ning ustiga ortogonal proyeksiyalash operatori deb ataymiz va o'xshash holda P_L ko'rinishida ham belgilaymiz.

Isbotlaymizki, P o'z-o'ziga qo'shma, normasi birga teng operator bo'ladi va $P^2 = P$ shartni qanotlantiradi.

Eng avvalo P – chiziqli operator ekanligini ko'rsatamiz. Agar

$$x_1 = y_1 + z_1 \quad \text{va} \quad x_2 = y_2 + z_2,$$

bu yerda, $y_1, y_2 \in L$, $z_1 \perp L$, $z_2 \perp L$ bo'lsa, u holda

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2,$$

bu yerda

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in L, \quad \alpha z_1 + \beta z_2 \perp L,$$

bu yerdan

$$P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Px_1 + \beta Px_2.$$

Keyin,

$$\|x\|^2 = \|y + z\|^2 = \|y + z\| \cdot \|y + z\| = \|y\|^2 + \|z\|^2,$$

chunki y va z elementlar o'zaro ortogonal. Shunga asosan,

$$\|y\| \leq \|x\|, \text{ ya'ni } \|Px\| \leq \|x\|$$

tengsizlik ixtiyoriy $x \in H$ uchun bajariladi. Bundan

$$\|P\| \leq 1$$

ni olamiz. Agar $x \in L$ bo'lsa, $x = y$, $z = 0$ bo'ladi. Shunga asosan,

$$Px = x, \text{ u holda } \|P\| = 1.$$

P ning o'z-o'ziga qo'shma ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $x_1, x_2 \in H$ va y_1, y_2 – ularning L dagi proyeksiyalari bo'lsin. U holda ushbuni olamiz:

$$Px_1, Px_2 = y_1, y_2.$$

Shunga o'xshash

$$x_1, Px_2 = x_1, y_2 = y_1, y_2 .$$

Shunga asosan,

$$Px_1, x_2 = x_1, Px_2 , \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{H}.$$

Endi $P^2 = P$ tenglikni isbotlaymiz. Ixtiyoriy $x \in \mathcal{H}$ uchun $Px \in L$. Shuning uchun, ixtiyoriy $x \in \mathcal{H}$ uchun

$$P^2x = P Px = Px, \quad \text{ya'ni } P^2 = P.$$

Teskarisi ham o'rinli ekanligini, ya'ni $P^2 = P$ shartni qanoatlantiruvchi o'z-o'ziga qo'shma operator qandaydir L qism fazoga ortogonal proyeksiyalovchi operator ekanligini ko'rsatamiz.

$L = \{y \in \mathcal{H} : y = Px, \forall x \in \mathcal{H}\}$ to'plamni qaraymiz, ya'ni $\mathcal{H}$ dagi barcha x elementlar uchun $y = Px$ ko'rinishda olinadigan elementlar to'plami L ni qaraymiz. P - chiziqli operator bo'lgani uchun $\forall y_1, y_2 \in L$ va α, β - sonlar uchun $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ elementlar topilib,

$$y_1 = Px_1, \quad y_2 = Px_2$$

va

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Px_1 + \beta Px_2 = P(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

bo'ladi. Bundan $\alpha y_1 + \beta y_2 \in L$, ya'ni L - chiziqli qism fazo bo'ladi. L ning yopiqqligini ko'rsatamiz. L dan olingan y_n ketma-ketlik y_0 elementga yaqinlashsin $y_n \rightarrow y_0$. Shunday $x_n \stackrel{\infty}{1} \subset \mathcal{H}$ ketma-ketlikning har bir n nomerida $y_n = Px_n$ tenglik bajariladi. Shuning uchun

$$Py_n = P^2x_n = Px_n = y_n.$$

P - chiziqli operator uzluksizligiga ko'ra, $y_n \rightarrow y_0$ ekanligidan $Py_n \rightarrow Py_0$ ekanligi kelib chiqadi. Agar $Py_n = y_n$ bo'lishini hisobga olsak, $y_n \rightarrow Py_0$ ekanligini olamiz. Shunga asosan, $y_0 = Py_0$ va $y_0 \in L$.

P operatorning o'z-o'ziga qo'shma operator ekanligidan va $P^2 = P$ shartdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x - Px, Px = Px - P^2x, x = Px - Px, x = 0, \quad \text{ya'ni } x - Px \perp Px.$$

L qism fazo o'zining aniqlanishidan kelib chiqadiki, P operator L

ga proyeksiyalash operatori bo‘ladi. Teskari tasdiq ham isbotlandi.

Isbotlangandan xususiy holda, $I - P$ operator ham proyeksiyalash operatori ekanligi kelib chiqadi.

Proyeksiyalash operatorlarining bir nechta xossalarini keltiramiz. Agar ikkita P_1 va P_2 proyeksiyalash operatorlari uchun $P_1P_2 = 0$ bo‘lsa, ular o‘zaro ortogonal deyiladi. $P_1P_2 = 0$ shart $P_2P_1 = 0$ shart bilan ham teng kuchli, chunki $(P_1P_2)^* = P_2P_1 = 0$ bo‘ladi va teskarisi ham o‘rinli.

Faraz qilaylik, P_1 va P_2 lar mos ravishda L_1 va L_2 qism fazolarga proyeksiyalash operatorlari bo‘lsin. P_1 va P_2 proyeksiyalash operatorlari o‘zaro ortogonal bo‘lishi uchun ularga mos L_1 va L_2 qism fazolar ortogonal bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Haqiqatdan ham, agar $P_1P_2 = 0$ bo‘lsa, u holda $\forall x_1 \in L_1, \forall x_2 \in L_2$ lar uchun quyidagilarni olamiz:

$$x_1, x_2 = P_1x_1, P_2x_2 = P_2P_1x_1, x_2 = 0, x_2 \text{ ya'ni } L_1 \perp L_2.$$

Teskari, agar $L_1 \perp L_2$ bo‘lsa, u holda $\forall x \in \mathcal{H}$ uchun $P_2x \in L_2$ va shunga asosan, $P_1P_2x = 0$, ya'ni $P_1P_2 = 0$.

1.2.1-lemma. Ikkita P_{L_1} va P_{L_2} proyeksiyalash operatorlarining yig‘indisi ham proyeksiyalash operatori bo‘lishi uchun, bu operatorlar ortogonal bo‘lishi zarur va yetarlidir. Agar bu shart bajarilgan bo‘lsa, u holda

$$P_{L_1} + P_{L_2} = P_{L_1 \oplus L_2}.$$

1.2.2-lemma. Ikkita P_{L_1} va P_{L_2} proyeksiyalash operatorlarining ko‘paytmasi ham proyeksiyalash operatori bo‘lishi uchun, bu operatorlar o‘rin almashinuvchi (kommutativ) bo‘lishi zarur va yetarlidir. Agar bu shart bajarilgan bo‘lsa, u holda

$$P_{L_1}P_{L_2} = P_{L_2}P_{L_1} = P_{L_1 \cap L_2}.$$

1.2.3-lemma. Ikkita P_1 va P_2 proyeksiyalash operatorlarining ayirmasi ham proyeksiyalash operatori bo‘lishi uchun, P_2 ning P_1 ga qism bo‘lishi zarur va yetarlidir. Agar bu shart bajarilgan bo‘lsa,

$L_{P_1-P_2}$ qism fazo L_{P_2} ning L_{P_1} gacha ortogonal to'ldiruvchisi bo'ladi, ya'ni $L_{P_1-P_2} = L_{P_1} \ominus L_{P_2}$.

1.3- §. Musbat operatorlar

Agar o'z-o'ziga qo'shma A operator noldan farqli bo'lsa va uning quyi chegarasi manfiymas bo'lsa, ya'ni $\forall x \in \mathcal{H}$ uchun

$$Ax, x \geq 0$$

va kamida bitta $x \in \mathcal{H}$ uchun $Ax, x > 0$ bo'lsa, A operator musbat operator deb ataladi va $A > \theta$ kabi belgilanadi.

A o'z-o'ziga qo'shma operator, o'z-o'ziga qo'shma B operatoridan katta ($A > B$) deyiladi, agar $A - B > \theta$ bo'lsa. Osongina ko'rsatish mumkinki, o'z-o'ziga qo'shma operatorlar to'plamida kiritilgan bu tengsizlik munosabati quyidagi xossalarga ega:

1. $A \geq B$ va $C \geq D$ dan $A + C \geq C + D$ kelib chiqadi;
2. $A \geq \theta$ va $\alpha \geq 0$ dan $\alpha A \geq 0$ kelib chiqadi;
3. $A \geq B$ va $B \geq D$ dan $A \geq D$ kelib chiqadi;
4. Agar $A > \theta$ va A^{-1} mavjud bo'lsa, u holda $A^{-1} > \theta$.

Har qanday $x \in \mathcal{H}$ element va ixtiyoriy nolmas chiziqli A operator uchun $Ax, Ax = A^*Ax, x \geq 0$, $A^*x, A^*x = A^*Ax, x \geq 0$ bo'lganligi sababli, A^*A va AA^* operatorlar musbat operatorlar bo'ladi. Xususan, ixtiyoriy o'z-o'ziga qo'shma nolmas operator uchun $A^2 > \theta$ bo'ladi.

1.3.1-teorema. Ikkita o'z-o'ziga qo'shma o'zaro o'rin almashinuvchi musbat A va B operatorlarning ko'paytmasi ham musbat operator bo'ladi.

Agar musbat A operator uchun shunday musbat B operator topilib $B^2 = A$ bo'lsa, B operatorni A operatorning kvadratik ildizi deymiz.

1.3.2-teorema. Har qanday musbat o'z-o'ziga qo'shma A operatoridan yagona musbat B kvadratik ildizi mavjud bo'lib, A operator bilan o'rin almashinuvchi bo'lgan har qanday operator bilan B operator o'rin almashinuvchi bo'ladi.

1.3.1-misol. $L_2[0,1]$ Hilbert fazoda ushbu

$$Ax(t) = tx(t), \quad \forall x \in L_2[0,1]$$

formula bilan aniqlanuvchi A operator musbat o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi va uning uchun musbat kvadrat ildiz bo'lib ushbu

$$Bx(t) = \bar{t}x(t), \quad \forall x \in L_2[0,1]$$

formula vositasida aniqlanuvchi B operator xizmat qilishini ko'rsating.

Yechish. Haqiqatdan ham, ixtiyoriy $\forall x \in L_2[0,1]$ uchun

$$Ax, x = \int_0^1 tx(t)x(t)dt = \int_0^1 t x(t)^2 dt \geq 0,$$

$$Bx, x = \int_0^1 \bar{t}x(t)x(t)dt = \int_0^1 \bar{t} x(t)^2 dt \geq 0,$$

$x_0(t) \equiv 1$ funksiya uchun

$$Ax_0, x_0 = \int_0^1 t x_0(t)^2 dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} > 0,$$

$$Bx_0, x_0 = \int_0^1 \bar{t} x_0(t) dt = \int_0^1 \bar{t} dt = \frac{2}{3} > 0.$$

Demak, har ikkala operator ham musbat.

Ixtiyoriy $x, y \in L_2[0,1]$ uchun

$$Ax, y = \int_0^1 tx(t)y(t)dt = \int_0^1 x(t)ty(t)dt = x, Ay,$$

$$Bx, y = \int_0^1 \bar{t} x(t)y(t)dt = \int_0^1 x(t)\bar{t}y(t)dt = (x, By)$$

va ixtiyoriy $x \in \mathcal{H}$ uchun

$$B^2x(t) = \bar{t} \bar{t}x(t) = tx(t) = Ax(t),$$

ya'ni $B^2 = A$. Demak, $B > 0$ operator musbat A operatorning musbat kvadrat ildizi bo'ladi.

1.4 - §. O‘z – o‘ziga qo‘shma operatorning spektri

Agar A – o‘z – o‘ziga qo‘shma operator bo‘lsa, uning barcha xos qiymatlari haqiqiydir, chunki $Ax = \lambda x$ tenglikdan $(Ax, x) = \lambda (x, x)$ skalyar ko‘paytmalarning haqiqiy sonlar bo‘lishi sababli λ ning haqiqiy ekanligi kelib chiqadi. Keyin, $A = A^*$ va xos qiymatlarning haqiqiy ekanligi sababli, A operatorning har xil xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlari o‘zaro ortogonaldir. Haqiqatdan ham, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ haqiqiy sonlar A operatorning xos qiymatlari va $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ elementlar ularga mos keluvchi (noldan farqli) xos vektorlari bo‘lsin, ya‘ni $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ va $Ax_2 = \lambda_2 x_2$. U holda

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &= \frac{1}{\lambda_1} (\lambda_1 x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1} (Ax_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1} (x_1, Ax_2) = \frac{1}{\lambda_1} (x_1, \lambda_2 x_2) = \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) = 0. \end{aligned}$$

Bu yerdan $(x_1, x_2) = 0$, ya‘ni x_1 va x_2 ortogonal elementlar bo‘ladi.

1.4.1-ta’rif. Agar $\lambda \in \mathbb{C}$ son uchun $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud bo‘lib, u X ning hamma yerida aniqlangan bo‘lsa, λ soni A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi,

$$R_\lambda A = (A - \lambda I)^{-1}$$

operator esa A operatorning λ nuqtadagi rezolventasi deyiladi. Barcha regulyar nuqtalar to‘plami $\rho(A)$ orqali belgilanadi.

1.4.2-ta’rif. A operatorning regulyar bo‘lmagan barcha nuqtalari to‘plami A operatorning spektri deyiladi va u $\sigma(A)$ orqali belgilanadi.

1.4.1 – teorema. Biror λ - soni o‘z – o‘ziga qo‘shma A operatorning regulyar qiymati bo‘lishi uchun, shunday $c > 0$ son topilib, har qanday $x \in H$ element uchun

$$\|A_\lambda x\| = \|Ax - \lambda x\| \geq c \|x\| \quad (1.4.1)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

1.4.1-natija. Biror λ son o‘z – o‘ziga qo‘shma A operatorning spektriga tegishli bo‘lishi uchun, shunday x_n , $\|x_n\| = 1$ ketma-ketlik mavjud bo‘lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0 \quad (1.4.2)$$

munosabat bajarilishi zarur va yetarli.

1.4.2-teorema. Agar $\lambda = \alpha + i\beta$ va $\beta \neq 0$ bo'lsa, u holda λ son A o'z-o'ziga qo'shma operator uchun regulyar qiymat bo'ladi.

1.4.3-teorema. A o'z-o'ziga qo'shma operator va

$$m = \inf_{\|x\|=1} Ax, x, \quad M = \sup_{\|x\|=1} Ax, x$$

bo'lsin. U holda A operator spektri to'liq m, M kesmada yotadi.

1.4.4-teorema. m va M sonlar spektr nuqtalari bo'ladi.

1.4.1-misol. Agar $A = E$ birlik operator $\mathcal{H}$ da berilgan bo'lsa, uning spektrini toping.

Yechish. Agar $\lambda = 1$ bo'lsa u holda ixtiyoriy $x \in \mathcal{H}$ uchun $Ax = \lambda x, \|x\| = 1 \cdot \|x\|$ ya'ni $\lambda=1$ son E operator uchun xos qiymat bo'ladi va unga mos xos qism fazo H ga teng bo'ladi, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}, \mathcal{H}_1 = \{x \in \mathcal{H} : Ex = 1 \cdot x\}$. Endi $\lambda \neq 1$ bo'lsin. U holda

$$A_\lambda x = (1 - \lambda)x = y \Rightarrow x = \frac{1}{1 - \lambda}y.$$

Demak,

$$R_\lambda x = \frac{1}{1 - \lambda}x.$$

va $R_\lambda = \frac{1}{1 - \lambda}E$ ni hosil qilamiz. Shunday ekan, $\lambda \neq 1$ bo'lganda R_λ chegaralangan operator va λ regulyar qiymat bo'ladi. Demak, $\sigma(A) = \{1\}$.

1.4.2-misol. $A: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$ operatorni quyidagi ko'rinishda aniqlaymiz:

$$Ax(t) = tx(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Bu operatorning quyi va yuqori chegaralarini, spektrini toping.

Yechish. Ixtiyoriy $x \in L_2[0,1]$ va $\|x\| = 1$ element uchun

$$0 \leq \int_0^1 Ax, x = \int_0^1 t x(t)^2 dt \leq \int_0^1 x(t)^2 dt = \|x\|^2 = 1$$

bo'lgani uchun $m \geq 0$ va $M \leq 1$. Ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun

$$x_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < t \leq 1, \end{cases}$$

ketma-ketlikni qaraymiz. U holda $x_n \in L_2[0,1]$ va $\|x_n\| = 1$,

$$(Ax_n, x_n) = \int_0^1 t x_n(t)^2 dt = \int_0^{\frac{1}{n}} t \cdot n^2 dt = n^2 \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{n}} = n^2 \cdot \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n}$$

bo'lgani uchun $n \rightarrow \infty$ da $(Ax_n, x_n) \rightarrow 0$. Demak, $m = 0$. Endi, bu

$$y_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n}, & 1 - \frac{1}{n} < t \leq 1, \end{cases}$$

ketma-ketlikni qarasak, $y_n \in L_2[0,1]$ va $\|y_n\| = 1$.

$$(Ay_n, y_n) = \int_0^1 t y_n(t)^2 dt = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 t \cdot n^2 dt = \frac{n^2}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right) = 1 - \frac{1}{2n}$$

bo'lgani uchun $n \rightarrow \infty$ da $(Ay_n, y_n) \rightarrow 1$.

Shunday, ekan $M = 1$ bo'ladi. Natijada hosil qilamizki, $m = 0, M = 1$. Shuning uchun, λ son A operator spektriga tegishli bo'lishi uchun $0 \leq \lambda \leq 1$ bo'lishi kerak.

Endi $(0,1)$ kesma A operator spektri bo'lishini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $\lambda \in (0,1)$ sonni qaraylik. U holda shunday $\varepsilon > 0$ son mavjudki, $\lambda + \varepsilon \in (0,1)$ bo'ladi. $\lambda, \lambda + \varepsilon$ kesmani qaraymiz va unga mos

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & t \in [\lambda, \lambda + \varepsilon] \\ 0, & t \in [0,1] \setminus [\lambda, \lambda + \varepsilon] \end{cases}$$

funksiyani olamiz.

$$\int_0^1 x_\varepsilon(t)^2 dt = \int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt = 1$$

bo'lgani uchun $x_\varepsilon \in L_2[0,1]$ va $\|x_\varepsilon\| = 1$.

Keyin, $(A_\lambda x_\varepsilon, x_\varepsilon) = \int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} (t - \lambda) x_\varepsilon(t)^2 dt$ bo'lganligi sababli

$$A_{\lambda} x_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\lambda}^{\lambda+\varepsilon} (t - \lambda)^2 dt = \frac{1}{\varepsilon} \frac{(t - \lambda)^3}{3} \Big|_{\lambda}^{\lambda+\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon^3}{3} = \frac{\varepsilon^2}{3}.$$

Bundan $\varepsilon \rightarrow 0$ da $A_{\lambda} x_{\varepsilon} \rightarrow 0$ ni olamiz. 1.4.1-natijaga ko'ra $\lambda \in \sigma(A)$.

Shunday ekan, $0 \leq \lambda \leq 1$ bo'lganda λ spektr nuqtasi bo'ladi (chunki $m = 0$ va $M = 1$ lar ham spektrga tegishli). Demak, $\sigma A = [0, 1]$.

Shu bilan bir vaqtda A ning xos qiymatlari yo'q. Haqiqatdan ham,

$$A_{\lambda} x t = t - \lambda x t. \quad (1.4.3)$$

Agar $A_{\lambda} x t = 0$ desak, u holda $t - \lambda x t = 0$ tenglik $0,1$ kesmaning deyarli hamma yerida bajaralishi kerak. Bu yerdan kelib chiqadiki, deyarli hamma yerda $x t = 0$ bo'ladi, ya'ni (1.4.3) tenglama faqat nol yechimga ega. Shuning uchun λ xos qiymat emas.

1.5 - § Spektral proyektorlar

Ixtiyoriy o'z – o'ziga qo'shma operatorlar uchun quyidagi tasdiq o'rinli.

1.5.1-lemma. O'z – o'ziga qo'shma va o'zaro o'rin almashinuvchi $AB = BA$ A va B operatorlar berilgan bo'lib, $A^2 = B^2$ bo'lsin. P orqali $L = \text{Ker } A - B$ qism fazoga akslantiruvchi proyeksiyalash operatorini belgilaymiz. U holda:

1) $A - B$ bilan o'rin almashinuvchi ixtiyoriy chiziqli chegaralangan C operator P bilan ham o'rin almashinuvchi;

2) $Ax = 0$ dan $Px = x$ kelib chiqadi;

3) $A = 2P - E - B$.

1.5.1-teorema. Har bir A o'z-o'ziga qo'shma operator uchun shunday E_+ proyeksiyalash operatori mavjudki, u quyidagi xossalarga ega:

1) A bilan o'rin almashinuvchi ixtiyoriy chiziqli chegaralangan C operatorni olsak u E_+ bilan ham o'rin almashinuvchi;

2) $AE_+ \geq 0$, $A(E - E_+) \leq 0$;

3) agar $Ax = 0$ bo'lsa, $E_+x = x$ bo'ladi.

1.5.2-teorema. Har qanday o'z – o'ziga qo'shma A operator shunday λ parametrli E_{λ} , $-\infty < \lambda < \infty$, proyeksiyalovchi operatorlar oilasini hosil

qiladiki, bu oiladagi operatorlar quyidagi xossalarga bo'ysunadi:

1) Ixtiyoriy C operator uchun $AC = CA$ dan ixtiyoriy λ da $E_\lambda C = CE_\lambda$ tenglik kelib chiqadi;

2) agar $\lambda < \mu$ bo'lsa, $E_\lambda \leq E_\mu$ bo'ladi;

3) E_λ - operator qiymatli funksiya bo'lib o'ngdan uzluksiz, ya'ni $E_{\lambda+0} = E_\lambda$;

4) Ixtiyoriy $-\infty < \lambda \leq m$ uchun $E_\lambda = 0$, ixtiyoriy $M < \lambda < \infty$ uchun $E_\lambda = E$, bu m va M mos ravishda A operatorning quyi va yuqori chegaralari.

E_λ , $-\infty < \lambda < \infty$, operatorlar oilasini A operator hosil qilgan birning yoyilmasi deyimiz.

O'z – o'ziga qo'shma operatorlar uchun spektral yoyilma.

1.5.3 -teorema. Agar $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ va $A = A^*$ bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli

$$A = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda,$$

bu yerda integral, operatorlar fazosida tekis yaqinlashish ma'nosida, integral yig'indilarning limiti sifatida tushuniladi, ε esa ixtiyoriy musbat son.

Eslatma. Operatorlar fazosidagi tekis yaqinlashish ma'nosida A_k operatorlar ketma – ketligining A operatorga yaqinlashishi har bir $x \in \mathcal{H}$ elementda A_k ketma – ketlikning A operatorga nuqtaviy yaqinlashishini ta'minlagani sababli va $A_k x, x$ kvadratik formalar ketma–ketligining Ax, x kvadratik formaga yaqinlashishini ta'minlaydi. Shu sababli 1.5.3–teoremaga asoslanib quyidagilarni olamiz

$$1) \quad Ax = \lim_{k=1}^n \nu_k E_{\Delta_k} x = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda x, \forall x \in H,$$

$$2) \quad Ax, x = \lim_{k=1}^n \nu_k E_{\Delta_k} x, x = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda d(E_\lambda x, x), \forall x \in H.$$

1.6 - § Operator qiymatli funksiyalar

Bizga quyi chegarasi m va yuqori chegarasi M ga teng bo'lgan o'z – o'ziga

qo'shma A operator berilgan bo'lib, E_λ — A operator hosil qilgan birning yoyilmasi bo'lsin, $F(\lambda)$ orqali m, M kesmada aniqlangan zinapoyasimon kompleks qiymatli ixtiyoriy funktsiyani belgilaymiz. Agar $\lambda_0, F(\lambda)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo'lsa u holda $F \lambda_0 = F(\lambda_0 + 0)$ shart bajarilsin deb kelishib olamiz. Endi

$$\int_m^{M+\varepsilon} F(\lambda) dE_\lambda$$

ko'rinishdagi integrallarni aniqlaymiz. Berilgan, $F(\lambda)$ funksiyaning m, M kesmadan $[M, M + \varepsilon)$ yarim intervalga $\lambda > M$ uchun $F \lambda = F(M)$ shart bilan davom ettiramiz. Deylik, $[m, M + \varepsilon)$ yarim interval $\Delta_k = [\lambda_k, \mu_k], k = 1, 2, \dots, n$ bo'lakchalarga bo'lingan bo'lib, $F \lambda_k = \nu_k$ bo'lsin, bunda

$$\Delta_k = [m, M + \varepsilon] \quad k=1, 2, \dots, n$$

Faraz qilamiz, $F(\lambda)$ zinapoyasimon funksiya bo'lganligi uchun har bir bo'lakchada bittadan ko'p qiymat qabul qilmasin desak, ta'rifga ko'ra

$$\int_m^{M+\varepsilon} F \lambda dE_\lambda = \sum_{k=1}^n \nu_k E(\Delta_k)$$

ko'rinib turibdiki, quyidagicha tenglikni ham yozish mumkin

$$\int_m^{M+\varepsilon} F \lambda dE_\lambda = \sum_{k=1}^n \nu_k E(\Delta_k)$$

bu yerda Δ_k yarim intervallar quyidagi shartlarga bo'ysunadi:

$$a) \quad \Delta_k = [m, M + \varepsilon] \quad k=1, 2, \dots, n$$

b) Har bir Δ_k da $F(\lambda)$ funksiya birgina qiymat qabul qiladi.

Bu tengliklar bilan aniqlangan $\int_m^{M+\varepsilon} F \lambda dE_\lambda$ operatorni $F(A)$ ko'rinishda belgilaymiz va λ haqiqiy o'zgaruvchining $F(\lambda)$ funksiyasiga mos keluvchi, A operatorning funksiyasi deb ataymiz. Shunday qilib, biz $m, M + \varepsilon$ da yuqoridagi shartlarda aniqlanuvchi $F(\lambda)$ zinapoyasimon funksiyalar va A operatorning

funksiyalari o'rtasidagi moslikga ega bo'lamiz.

Bu moslik quyidagi xossalarga ega:

1) agar $F(\lambda) = \alpha F_1(\lambda) + \beta F_2(\lambda)$ bo'lsa u holda

$F(A) = \alpha F_1(A) + \beta F_2(A)$ (moslikni additivlik xossasi);

2) agar $F(\lambda) = F_1(\lambda) \cdot F_2(\lambda)$ bo'lsa u holda $F(A) = F_1(A) \cdot F_2(A)$

(moslikni multiplikativlik xossasi);

3) $F(\lambda) \Leftrightarrow F(A)^*$, ya'ni $F(\lambda)$ ning kompleks qo'shmasiga $F(A)$ ga qo'shma operator mos keladi;

4) $F(A) \leq \max_{m \leq \lambda \leq M} F(\lambda)$;

5) Ixtiyoriy chiziqli chegaralangan B operator uchun $AB = BA$ munosabatdan $F(A)B = BF(A)$ kelib chiqadi.

Xususiyl holda, $F(A)$ operatorning aniqlanishidan kelib chiqadiki, $E_\Delta = \chi(A)$, bu yerda $\chi(A) - \Delta$ yarim intervalning xarakteristik funksiyasidir. Endi $F(\lambda)$ m, M kesmada aniqlangan ixtiyoriy uzluksiz funksiya bo'lsin. Bu funksiyaning har bir $\lambda \in [m, M + \varepsilon)$ uchun $F(\lambda) = F(M)$ deb olamiz $[m, M + \varepsilon)$ yarim intervalga davom ettiramiz. Veyershtass teoremasiga ko'ra $[m, M + \varepsilon)$ da $F(\lambda)$ ga tekis yaqinlashuvchi zina-poyasimon funksiyalarning $F_n(\lambda)$ ketma-ketligiga mos keluvchi $F_n(A)$ operatorlar ketma-ketligini qaraymiz.

Ravshanki, $n, m \rightarrow \infty$ da

$$F_n(A) - F_m(A) \leq \max_{\lambda} F_n(\lambda) - F_m(\lambda)$$

Chiziqli chegaralangan operatorlar fazosining to'laligi sababli $F_n(A)$ operatorlar ketma – ketligi qandaydir B chiziqli chegaralangan operatorga yaqinlashadi, ya'ni

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(A).$$

Ta'rifga moslab

$$B = \int_m^{M+\varepsilon} F(\lambda) dE_\lambda = F(A)$$

deb olamiz. Keyinchalik B operatorni $F(A)$ orqali ham belgilaymiz va λ haqiqiy

o'zgaruvchining $F(\lambda)$ uzluksiz funksiyasiga mos keluvchi A operatorning funksiyasi deb ataymiz. Ishonch hosil qilish qiyin emaski, $F(A)$ operatorning aniqlanishi $F(\lambda)$ ga tekis yaqinlashuvchi $F_n(\lambda)$ ketma-ketlikni tanlanishiga bog'liq emas va uzluksiz funksiya bo'lgan hol uchun ham $F(\lambda) \rightarrow F(A)$ moslikning 1) – 5) xossalari saqlanib qoladi. Xususiyl holda

$$A^n = \int_m^{M+s} \lambda^n dE_\lambda, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ga ega bo'lamiz.

Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari va operatorning funksiyalari orasidagi olingan moslik o'z - o'ziga qo'shma operatorlarning bir qator xossalarini o'rganishda, xususan spektral xossalarini o'rganishda keng qo'llaniladi. Biz bu yerda quyidagi teoremlar bilan chegaralanamiz.

1.6.1-teorema. Berilgan λ_0 son uchun A o'z- o'ziga qo'shma operator rezolventasi $R_{\lambda_0} = (A - \lambda_0 E)^{-1}$ mavjud bo'lishi uchun quyidagi shartlardan birortasining bajarilishi yetarli:

- 1) λ_0 son haqiqiy emas;
- 2) λ_0 son m, M kesmada yotmaydi;
- 3) agar $\lambda_0 \in (m, M)$ bo'lsa, u holda m, M ichida shunday α, β ,
 $\alpha < \lambda_0 < \beta$ interval mavjud bo'lib, uning ichida E_λ o'zgarmas bo'ladi.

II BOB. KVANT EHTIMOLLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

2.1-§. Elementar hodisalarning diskret fazosi va aksiomalari

Elementar hodisalar fazosi–ehtimolliklar nazariyasi uchun asosiy tushuncha bo‘lib, unga ta’rif berilmaydi. Formal nuqtai nazardan bu ixtiyoriy to‘plam hisoblanib, uning elementlari o‘rganilayotgan tajribaning “bo‘linmaydigan” va bir vaqtda ro‘y bermaydigan natijalaridan iborat bo‘ladi. Elementar hodisalar fazosini Ω harfi bilan belgilab, uning elementlarini (elementar hodisalarni) esa ω harfi bilan ifodalaymiz. Elementar hodisalardan iborat bo‘lgan to‘plamlar *tasodifiy hodisalar* deb hisoblanadi.

2.1.1-ta’rif. Tasodifiy hodisa (yoki hodisa) deb, tajriba natijasida ro‘y berishi oldindan aniq bo‘lmagan hodisaga aytiladi.

Tasodifiy hodisalarni, odatda, lotin alifbosining bosh harflari $A, B, C \dots$ lar bilan belgilanadi. Demak $A, B, C \dots$ lar Ω ning qism to‘plamlarini ifodalaydi.

Elementar hodisalar fazosi Ω ning ixtiyoriy A qism to‘plami ($A \subset \Omega$) *tasodifiy*

hodisa deyiladi va A hodisa ro'y berdi deganda shu A to'plamga kirgan biror elementar hodisaning ro'y berishi tushuniladi.

Tajriba natijasida har gal ro'y beradigan hodisa *muqarrar hodisa* (Ω) deyiladi, chunki hamma elementar hodisalar Ω ni tashkil qiladi.

Birorta ham elementar hodisani o'z ichiga olmagan hodisa *mumkin bo'lmagan hodisa* deyiladi va $\emptyset$ bilan belgilanadi.

Shunday qilib har qanday A tasodifiy hodisa elementar hodisalar to'plamidan tashkil topgan bo'ladi va A ga kiradigan ω larning birortasi ro'y bersa ($\omega \in A$), A hodisa ro'y berdi deb hisoblanadi.

Agar A ga kirgan elementar hodisalardan birortasi ham ro'y bermasa, u holda A hodisa ro'y bermadi va aksincha A ga teskari hodisa (uni A orqali belgilaymiz) ro'y bergan deb hisoblanadi.

2.1.2-ta'rif. A va A lar o'zaro qarama-qarshi hodisalar deyiladi.

2.1.3-ta'rif. A va B hodisalar yig'indisi deb, A va B hodisalarning kamida bittasi ya'ni yoki A , yoki B , yoki A va B birgalikda) ro'y berishidan iborat $C = A \cup B$ ($C = A + B$) hodisaga aytiladi.

2.1.4-ta'rif. A va B hodisalar ko'paytmasi deb, A va B hodisalar ikkalasi ham (ya'ni A va B birgalikda) ro'y berishidan iborat $C = A \cap B$ ($C = A \cdot B$) hodisaga aytiladi.

2.1.5-ta'rif. Agar A hodisa ro'y berishidan B hodisaning ham ro'y berishi kelib chiqsa A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi va $A \subseteq B$ ko'rinishida yoziladi.

2.1.6-ta'rif. Agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo'lsa, u holda A va B hodisalar teng (teng kuchli) hodisalar deyiladi va $A = B$ ko'rinishida yoziladi.

Endi tajriba natijasida ro'y beradigan elementar hodisalar soni chekli yoki sanoqli bo'lgan holni qaraymiz.

Elementar hodisalarning diskret fazosi – chekli yoki sanoqli elementar hodisalardan iborat to'plamdir, ya'ni

$$\Omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \text{ yoki } \Omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$$

2.1.7-ta'rif. Agar Ω to'plamda aniqlangan $P(\omega)$ funksiya uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

$$0 \leq P \omega \leq 1, \quad P \omega = 1, \\ \omega \in \Omega$$

u ehtimolliklar taqsimoti deyiladi.

Ixtiyoriy A hodisaning ($A \subset \Omega$) ehtimolligi deb quyidagi songa aytiladi:

$$P A = \sum_{\omega \in A} P \omega. \quad (2.1.1)$$

Amalga oshishi bir xil imkoniyatli bo'lgan hodisalar *teng imkoniyatli hodisalar* deyiladi.

Umuman Ω to'plam chekli yoki sanoqli (diskret) bo'lgan holda uning ixtiyoriy qismi (to'plam ostisi) tasodifiy hodisa sifatida qabul qilinadi. Masalan, Ω to'plam n ta elementar hodisa $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ lardan iborat bo'lsa, bu fazo (to'plam) bilan bog'liq

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n, \dots, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$$

2^n ta tasodifiy hodisalar sistemasi yuzaga keladi.

Yuqorida, elementar hodisalar to'plami Ω diskret bo'lgan holda hodisa sifatida Ω to'plamning ixtiyoriy qismini olish mumkinligini eslatib o'tgan edik, demak $\mathfrak{S}$ hodisalar sistemasi

$$\mathfrak{S} = \{A: A \subseteq \Omega\}.$$

$\mathfrak{S}$ sistemada esa ehtimollik $P(\cdot)$ konstruktiv ravishda (2.1.1) tenglik bilan aniqlangan edi.

Ayaylik elementar hodisalar fazosi Ω ixtiyoriy to'plam bo'lib, $\mathfrak{S}$ esa Ω ning qism to'plamlaridan tashkil topgan biror sistema bo'lsin.

2.1.8-ta'rif. Agar quyidagi shartlar bajarilsa, $\mathfrak{S}$ sistema algebra tashkil qiladi deyimiz:

$$A_1: \Omega \in \mathfrak{S};$$

$$A_2: \text{Agar } A \in \mathfrak{S}, B \in \mathfrak{S} \text{ bo'lsa, } A \cup B \in \mathfrak{S}, A \cap B \in \mathfrak{S} \text{ bo'ladi};$$

$$A_3: \text{Agar } A \in \mathfrak{S} \text{ bo'lsa, } A = \Omega \setminus A \in \mathfrak{S} \text{ bo'ladi.}$$

Ravshanki, A_2 da keltirilgan ikkita munosabatdan bittasini talab qilinishi yetarli bo'ladi, chunki ikkinchisi A_3 ni hisobga olgan holda doim bajariladi.

$\mathfrak{S}$ algebrani ba'zi hollarda halqa deb ham qabul qilinadi, chunki $\mathfrak{S}$ da qo'shish

va ko‘paytirish amallari mavjudki (to‘plamlar nazariyasi ma’nosida), ularga nisbatan $\mathfrak{F}$ yopiq sistema bo‘ladi. $\mathfrak{F}$ algebra birlik elementga ega bo‘lgan halqadir, chunki $\Omega \in \mathfrak{F}$ ekanligidan har qanday $A \in \mathfrak{F}$ uchun $A\Omega = \Omega A = A$ tenglik o‘rinlidir.

2.1.9-ta’rif. Agar

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, A va B hodisalar bog‘liqsiz deyiladi.

2.1.10-ta’rif. Agar

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, A va B hodisalar birgalikda emas deyiladi.

2.1.11-ta’rif. To‘plamlar sistemasi $\mathfrak{F}$ σ -algebra tashkil qiladi deymiz, agar quyidagi xossa ixtiyoriy to‘plamlar ketma-ketligi uchun bajarilsa:

A'_2 : Agar har qanday $n \in \mathbb{N}$ uchun $A_n \in \mathfrak{F}$ bo‘lsa, u holda

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$$

bo‘ladi.

Qayd qilib o‘tamizki, A_2 xossadagi kabi A'_2 da ham keltirilgan 2 ta munosabatdan bittasini bajarilishi yetarli, chunki (ikkilik prinsipi)

$$A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

tenglik o‘rinli. $\mathfrak{F}$ – σ -algebra, σ -halqa yoki hodisalarning Borel maydoni deb ham yuritiladi.

Keltirilganlardan kelib chiqadiki, algebra chekli sonda bajariladigan to‘plamlarni qo‘shish, ko‘paytirish, to‘ldiruvchi to‘plamlarga o‘tish amallariga nisbatan yopiq bo‘lgan to‘plamlar sistemasi bo‘lar ekan. σ -algebra esa bu amallarni sanoqli sonda bajarilishiga nisbatan yopiq sistemadir.

Agar Ω to‘plam va uning to‘plam ostilaridan tuzilgan algebra yoki σ -algebra $\mathfrak{F}$ berilgan bo‘lsa, $(\Omega, \mathfrak{F})$ **o‘lchovli fazo** deyiladi. O‘lchovli fazo tushunchasi, to‘plamlar nazariyasi, o‘lchovlar nazariyasi va ehtimolliklar nazariyasida juda

muhimdir. Quyidagi teoremaga asoslanib, o'lchovli $(\Omega, \mathfrak{F})$ fazolarni o'rganishda $\mathfrak{F}$ sistema σ -algebra tashkil qilgan holni ko'rish bilan chegaralanib qolish yetarli ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Ω to'plamning ixtiyoriy qismini ω - to'plam deb ataymiz.

2.1.1-teorema. $\mathfrak{F}_0$ ixtiyoriy ω - to'plamlar sistemasi bo'lsin. U holda ω -to'plamlarning shundek σ -algebrasi $\mathfrak{F}$ mavjudki, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

I. $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$

II. Agar $\mathfrak{F}_1$ ω -to'plamlarning σ -algebrasi bo'lib, $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_1$ bo'lsa, u holda $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$.

I va II xossalardan kelib chiqadiki, har qanday ω -to'plamlarning sistemasi uchun uni qoplovchi (o'z ichiga oluvchi) minimal σ -algebra $\mathfrak{F}$ mavjud bo'lar ekan. Kelgusida bu σ -algebrani $\mathfrak{F}_0$ sistema hosil qilgan σ -algebra deymiz va $\mathfrak{F} = \sigma(\mathfrak{F}_0)$ deb belgilaymiz. σ -algebraning ta'rifidan kelib chiqadiki, $\sigma(\mathfrak{F}_0)$ ning ixtiyoriy ω -to'plami (hodisasi) A , shu $\mathfrak{F}_0$ sistemasining elementlaridan sanoqli sondagi $\cup$, $\cap$ va to'ldiruvchi to'plamlarga o'tish amallari orqali hosil bo'lgan to'plamdan iborat bo'ladi.

Endi $(\Omega, \mathfrak{F})$ o'lchovli fazoda ehtimollik tushunchasi qanday kiritilganini eslatib o'tamiz.

2.1.12-ta'rif. $(\Omega, \mathfrak{F})$ o'lchovli fazodagi ehtimollik P , $\mathfrak{F}$ σ -algebraning to'plamlarida aniqlangan sonli funksiya bo'lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

P_1 : Har qanday $A \in \mathfrak{F}$ uchun $P(A) \geq 0$.

P_2 : $P(\Omega) = 1$.

P_3 : Agar $\mathfrak{F}$ ga tegishli hodisalar ketma-ketligi $A_n, n \geq 1$ uchun $A_i \cdot A_j = A_i \cap A_j = \emptyset, (i \neq j)$ bo'lsa,

$$P \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = P \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

P_3 xossa ehtimollikning σ -additivlik xossasi deyiladi.

$\Omega, \mathfrak{F}, P$ uchlik ehtimollik fazosi deyiladi.

Ehtimollik P o'lchovli $\Omega, \mathfrak{F}$ fazodagi taqsimot yoki yanada soddaroq ravishda, Ω dagi taqsimot deb ham yuritiladi.

Shunday qilib, ehtimollik fazosi berilgan deganda, o'lchovli fazoda sanoqli additiv, manfiy bo'lmagan qiymatlarni qabul qiluvchi va $P \Omega = 1$ bo'lgan o'lchovni berish tushuniladi.

Quyida biz ehtimollikning asosiy xossalarini keltiramiz.

$$1^0. P \emptyset = 0.$$

$$2^0. P A = 1 - P(A).$$

$$3^0. \text{ Agar } A \subset B \text{ bo'lsa, u holda } P(A) \leq P(B).$$

$$4^0. 0 \leq P(A) \leq 1.$$

$$5^0. P A \cup B = P A + P B \setminus A \cap B = P A + P B - P(A \cap B).$$

$$6^0. P A \cup B \leq P A + P(B).$$

$$7^0. \text{ Ixtiyoriy } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ hodisalar uchun}$$

$$\begin{aligned} P \bigcap_{i=1}^n A_i &= P(A_1) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) + \dots \\ &+ (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \end{aligned}$$

tenglik bajariladi. Bu munosabat Bul formulasi deyiladi.

2.2-§. Tasodifiy miqdorlar

2.2.1-ta'rif. $\Omega, \mathfrak{F}, P$ —ehtimollar fazosi va $\xi = \xi(\omega)$ — Ω da aniqlangan sonli funksiya bo'lsin. Agar har qanday haqiqiy x uchun

$$\omega; \xi(\omega) \leq x \in \mathfrak{F} \quad (2.2.1)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda bunday $\xi = \xi(\omega)$ funksiyaga *tasodifiy miqdor* deyiladi.

Funksional analiz kursidan ma'lumki, (2.2.1) shartni qanoatlantiruvchi, Ω da aniqlangan $\xi = \xi(\omega)$ funksiyaga $\mathfrak{F}$ σ —algebraga nisbatan o'lchovli funksiya deyiladi. Shunday qilib, $\Omega, \mathfrak{F}, P$ fazodagi tasodifiy miqdor $\mathfrak{F}$ σ —algebraga nisbatan o'lchovli funksiyadan iborat ekan.

2.2.2-ta'rif. Ixtiyoriy $x \in R$ son uchun aniqlangan

$$F(x) = P(\xi \leq x) = P(\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x)$$

funksiyaga ξ tasodifiy miqdorning *taqsimot funksiyasi* deyiladi.

Tasodifiy miqdorning yana bir eng sodda misoli sifatida $A \in \mathfrak{F}$ hodisaning $I_A(\omega)$ indikatorini qarash mumkin;

$$I_A = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{agar } \omega \in A \\ 0, & \text{agar } \omega \notin A. \end{cases}$$

$$\xi(\omega) \leq x = \begin{cases} \emptyset, & x < 0, \\ A, & 0 \leq x < 1, \\ \Omega, & x \geq 1, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

munosabatdan $I_A(\omega)$ funksiyaning tasodifiy miqdor ekanligi kelib chiqadi. Uning taqsimot funksiyasi (2.2.2) munosabatga ko'ra

$$F(x) = P(A), \quad \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

ko'rinishga ega.

2.2.3-ra'rif. Agar $A_i \in \mathfrak{F}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ bo'lsin, u holda

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega); \quad x_i \in R \quad (2.2.3)$$

ko'rinishda ifodalangan tasodifiy miqdorga *diskret tasodifiy miqdor* deyiladi.

Agar (2.2.3) yig'indi chekli bo'lsa, u holda bunday tasodifiy miqdorga *sodda* (yoki elementar) tasodifiy miqdor deyiladi.

Taqsimot funksiya xossalarini keltiramiz. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lsin. U holda $F(x)$ quyidagi xossalarga ega:

1. Agar $x_1 < x_2$ bo'lsa, u holda $F(x_1) \leq F(x_2)$ (*monotonlik xossasi*);
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ (*chegaralanganlik xossasi*);
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0 + \varepsilon} F(x) = F(x_0)$ (*o'ngdan uzluksizlik xossasi*)

2.2.1-teorema. Agar $F(x)$ funksiya 1, 2 va 3 xossalarga ega bo'lsa, u holda shunday $\Omega, \mathfrak{F}, P$ ehtimollik fazosi va unda aniqlangan ξ tasodifiy miqdor mavjud bo'lib, $F_{\xi}(x) = F(x)$ bo'ladi.

Ba'zida tasodifiy miqdor uning taqsimot funksiyasi yordamida emas, balki

boshqa usullarda aniqlanishi mumkin. Aniq qoidalar orqali tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasini topish imkoniyatini beruvchi har qanday xarakteristika tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb ataladi. Biror ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni sifatida $x_1 < \xi \leq x_2$ tengsizlik ehtimolligini aniqlovchi $P_{x_1; x_2}$ interval funksiyani olishimiz mumkin. Haqiqatan ham, agar $P_{x_1; x_2}$ ma'lum bo'lsa, u holda taqsimot funksiyasini

$$F(x) = P_{-\infty; x}$$

formula orqali topishimiz mumkin. O'z navbatida, $F(x)$ yordamida ixtiyoriy x_1 va x_2 lar uchun $P_{x_1; x_2}$ funksiyani topishimiz mumkin:

$$P_{x_1; x_2} = F(x_2) - F(x_1).$$

Tasodifiy miqdorlar orasidan chekli yoki sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qiladiganlarini ajratib olamiz. Bunday tasodifiy miqdorlar diskret tasodifiy miqdorlar deyiladi. Musbat ehtimolliklar bilan $x_1, x_2, x_3 \dots$ qiymatlarni qabul qiluvchi ξ tasodifiy miqdorni to'laligicha xarakterlash uchun $p_k = P_{\xi = x_k}$ ehtimolliklarni bilish yetarli, ya'ni p_k ehtimolliklarni barchasi yordamida $F(x)$ taqsimot funksiyasini quyidagi tenglik yordamida topish mumkin:

$$F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k$$

bu yerda yig'indi $x_k \leq x$ bo'lgan indekslar uchun hisoblanadi.

Ixtiyoriy diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi uzilishga ega va ξ ning qabul qilishi mumkin bo'lgan x qiymatlarida sakrash orqali o'sib boradi. $F(x)$ taqsimot funksiyaning x nuqtadagi sakrash miqdori $F(x) - F(x-0)$ ayirmaga teng.

Agar ξ tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin bo'lgan ikkita qiymati interval bilan ajratilgan va bu intervalda ξ tasodifiy miqdorning boshqa qiymati bo'lmasa, u holda bu intervalda $F(x)$ taqsimot funksiya o'zgarmas bo'ladi. Chekli sondagi qiymatlarni qabul qiluvchi ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ ning grafigi zinapoya ko'rinishidagi kamaymaydigan siniq chiziqdan iborat bo'ladi.

Diskret taqsimot qonunini jadval ko'rinishida berish qulay bo'ladi, ya'ni

Qiymatlar	x_1	x_2	x_3	$\dots$
Ehtimolliklar	p_1	p_2	p_3	$\dots$

Bu yerda yuqorida aytib o'tilganidek,

$$p_k = P \xi = x_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Endi tasodifiy miqdorlarning yana bir muhim tipini – absolyut uzluksiz tasodifiy miqdorlarni keltiramiz.

Bu tipga taqsimoti $p_\xi(B)$ ni ixtiyoriy Borel to'plami B uchun quyida keltirilgan ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lgan ξ tasodifiy miqdorlar kiradi:

$$P_\xi(B) = P\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \in B\} = \int_B p(x) dx$$

bu yerda

$$p(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

$P_\xi(B)$ absolyut uzluksiz taqsimot deyiladi.

O'lchovlarning davom ettirishning yagonaligi teoremasidan [1], yuqorida keltirilgan absolyut uzluksizlik ta'rifiga barcha $x \in \mathbb{R}$ lar uchun

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du$$

ko'rinishiga ekvivalent ekanligini aniqlash qiyin emas. Bunday xossaga ega bo'lgan taqsimot funksiyasi absolyut uzluksiz deb ataladi.

$p(x)$ funksiya yuqoridagi tengliklardan aniqlanadi va *taqsimot zichligi* (*zichlik funksiyasi*) deb ataladi. Bu funksiya uchun $p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ tenglik o'rinli. Masalan, $a; \sigma^2$ parametrli normal qonun uchun zichlik funksiyasi quyidagicha bo'ladi [8]:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar. $\Omega, \mathfrak{F}, P$ ehtimollik fazosida $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlarni qaraymiz. Har bir $\omega \in \Omega$ ga bu tasodifiy miqdorlar n -

o'lchovli vektor $\xi \omega = \xi_1 \omega, \xi_2 \omega, \dots, \xi_n(\omega)$ ni mos qo'yadi.

2.2.4-ta-rif. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar orqali berilgan $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ akslantirish *tasodifiy vektor* yoki *ko'p o'lchovli tasodifiy miqdor* deyiladi.

$\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ akslantirishni $\Omega, \mathfrak{B}$ ni $\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n$ fazoga o'lchovli akslantirish sifatida qarash mumkin, bu yerda $\mathfrak{B}^n - \mathbb{R}^n$ dagi Borel to'plamlari σ -algebrasi. Shuning uchun ixtiyoriy Borel to'plami $\mathfrak{B}$ uchun ξ vektorning taqsimoti deb ataluvchi $P_\xi B = P(\xi \in B)$ funksiya aniqlangan.

$F_{\xi_1, \dots, \xi_n} x_1, \dots, x_n = P \xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n$ funksiya $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorning birgalikdagi taqsimot funksiyasi deb ataladi.

Tasodifiy vektor taqsimot funksiyasining ba'zi xossalarini keltiramiz:

1. $\lim_{x_n \rightarrow +\infty} F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1})$,
2. $\lim_{x_n \rightarrow -\infty} F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Limitlar oxirgi argument bo'yicha olinganligi muhim ahamiyatga ega emas, chunki tasodifiy miqdorlarni har doim qayta nomerlash mumkin.

$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$ taqsimot funksiyasi $P_\xi(B)$ taqsimotni bir qiymatli aniqlashini ko'rish qiyin emas.

Xuddi bir o'lchovli holga o'xshab, agar tasodifiy vektor komponentalari ko'pi bilan sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qilsa, u holda tasodifiy vektorlarning taqsimoti diskret tipga tegishli deymiz.

2.2.5-ta'rif. Agar ixtiyoriy $B \subset \mathbb{R}^n$ Borel to'plami uchun

$$P_\xi B = P \xi \in B = \int_B p(x) dx$$

bo'lsa, bu yerda $p(x) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} p(x) dx = 1$, u holda tasodifiy vektorning taqsimoti *absolyut uzluksiz tipga tegishli* deyiladi.

Bu ta'rifni unga ekvivalent bo'lgan

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n} x_1, \dots, x_n = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$$

ko'rinishga almashtirish mumkin.

Yuqoridagi $p(x)$ funksiya ξ taqsimotning zichligi (zichlik funksiyasi) yoki $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ birgalikdagi taqsimotining zichligi deyiladi. Uning uchun deyarli hamma yerda

$$\frac{\partial^n F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = p(x_1, \dots, x_n)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Ehtimolliklar nazariyasining muhim tushunchasi bo‘lgan hodisalarning bog‘liqsizligi o‘z ma‘nosini tasodifiy miqdorlar uchun ham saqlab qoladi. Hodisalar bog‘liqsizligiga mos ravishda quyidagini aytish mumkin: Agarda to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy $B_1, \dots, B_n$ Borel to‘plamlari uchun

$$P \xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n = P \xi_1 \in B_1 \cdot P \xi_2 \in B_2 \cdot \dots \cdot P(\xi_n \in B_n)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz deyiladi.

Buni taqsimot funksiyalari tilida quyidagicha aytish mumkin: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz bo‘lishi u holda ixtiyoriy x_i larda

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli. Bu yerda $F_{\xi_i}(x_i) - \xi_i$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasidir.

Agar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar mos ravishda $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ taqsimot zichliklariga ega bo‘lsalar, u holda n o‘lchovli $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tasodifiy miqdor $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$ ko‘paytma bilan ifodalanadigan taqsimot zichligiga ega bo‘ladi.

Tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi. ξ sodda tasodifiy miqdor cheklita x_k qiymatlarni p_k ehtimolliklar bilan qabul qilsin. Unda,

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1.$$

2.2.6-ta’rif. ξ sodda tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb, ushbu

$$M\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k$$

tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdorlarning mumkin bo'lgan qiymatlari soni sanoqli bo'lishi ham mumkin. Bu holda $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ va matematik kutilmani ta'riflash uchun

$$M\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i \quad (2.2.4)$$

qatordan foydalaniladi. Matematik kutilma mavjud bo'lishi uchun (2.2.4) qatorni absolyut yaqinlashuvchi deb faraz qilinadi.

2.2.7-ta'rif. Agar (2.2.4) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ qiymatlarni $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ ehtimollar bilan qabul qiluvchi, ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ songa aytiladi

2.2.8-ta'rif. Absolyut uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb, ushbu

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx \quad (2.2.5)$$

integralga (agar bu integral absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa) aytiladi.

Bu yerda p absolyut uzluksiz ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi.

2.2.9-ta'rif. Taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot dF(x) \quad (2.2.6)$$

songa aytiladi.

Bu yerda (2.2.6) tenglikning o'ng tomonidagi integral Stiltes integrali.

Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. O'zgarmas sonning matematik kutilmasi shu sonning o'ziga teng.

2-xossa. $M\xi \leq M\xi$ tengsizlik o'rinli.

3-xossa. $M\xi, M\eta$ va $M(\xi + \eta)$ larning ixtiyoriy ikkitasi mavjud bo'lsa, u holda ushbu $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$ tenglik o'rinli bo'ladi.

4-xossa. O'zgarmas sonni matematik kutilma ishorasidan tashqariga chiqarib yozish mumkin: $M(c\xi) = cM\xi$.

5-xossa. ξ va η tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasin. Agar $M\xi$ va $M\eta$ mavjud bo‘lsa, u holda $M(\xi\eta)$ mavjud bo‘ladi va $M \xi\eta = M\xi \cdot M\eta$.

6-xossa. Agar $\alpha \leq \xi \leq \beta$ bo‘lsa, $\alpha \leq M\xi \leq \beta$.

7-xossa. Agar nomanfiy ξ tasodifiy miqdor uchun $M\xi = 0$ bo‘lsa, u holda $\xi = 0$ tenglik 1 ehtimollik bilan bajariladi.

Dispersiya va o‘rtacha kvadratik chetlanish. Tasodifiy miqdorning uning o‘rtacha qiymatidan chetlanishini xarakterlash, ya’ni bu miqdor qiymatlarining tarqoqligini xarakterlash uchun uning boshqa sonli xarakteristikasi – dispersiyasi kiritiladi.

2.2.10-ta’rif. Tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb, shu tasodifiy miqdor va uning matematik kutilmasi orasidagi ayirma kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi, ya’ni

$$D\xi = M \xi^2 - M\xi^2. \quad (2.2.7)$$

Agar ξ tasodifiy miqdor x_k qiymatlarni mos p_k ehtimolliklar bilan qabul qilsa $k = 1, 2, \dots, \eta = (\xi - M\xi)^2$ tasodifiy miqdor $(x_k - M\xi)^2$ qiymatlarni ham p_k ehtimolliklar bilan qabul qiladi va shu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uchun

$$M\eta = D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M\xi)^2 p_k \quad (2.2.8)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini ushbu formula bilan hisoblash qulaydir:

$$D\xi = M\xi^2 - M\xi^2. \quad (2.2.9)$$

2.2.11-ta’rif. Absolyut uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb quyidagi

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 p(x) dx$$

integralning (agar u mavjud bo‘lsa) qiymatiga aytiladi.

Dispersiya quyidagi xossalarga ega:

1- xossa. O‘zgarmas sonning dispersiyasi 0 ga teng.

2-xossa. Agar tasodifiy miqdor o‘zgarmas songa ko‘paytirilsa, u holda

o'zgarmas sonni kvadratga oshirib, dispersiya ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$D c\xi = c^2 D\xi.$$

3-xossa. O'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi bu tasodifiy miqdorlar dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D \xi + \eta = D\xi + D\eta.$$

2.2.1-natija. Chekli sondagi o'zaro bog'liq bo'lmagan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi ularning dispersiyalari yig'indisiga teng:

$$D \sum_{k=1}^n \xi_k = \sum_{k=1}^n D\xi_k.$$

2.2.12-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi deb dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma = \sqrt{D\xi}.$$

O'rtacha kvadratik chetlanish σ amaliyot masalalarida ko'p ishlatiladi.

2.3-§. Asosiy postulatlarning bayoni

Kvant nazariyasi rivojlanishining boshlang'ich nuqtasi 1900-yilda M.Plankning nurlanish nazariyasi bo'yicha qilgan ishidan iborat. Klassik fizika prinsiplarini issiqlik nurlanishi energiyasi taqsimotining spektral analiziga qo'llash "ultrabinafsha halokatiga" olib keladi: bu holda muvozanatli nurlanish energiyasining zichligi cheksiz katta bo'ladi. Bu har qanday haroratga modda va nurlanish orasida issiqlik muvozanati bo'lishi mumkin emasligini anglatadi, shunday ekan, modda energiyani absolyut nol haroratga(cha) soviguncha taratishi kerak. Nurlanish energiyasi taqsimotining tajriba bilan mos keladigan qonunini olish uchun Plank elektromagnit nurlanish alohida porsiyalar-kvantlar bilan chiqariladi va yutiladi, kvant energiyasi E nurlanishning aylanma chastotasi ν ga proporsional:

$$E = h\nu$$

deb faraz qildi, bu yerda

$$h = 1,05 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$$

$h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ o'zgarmas Plank doimiysi deb ataladi.

A.Eynshteyn 1905-yilda yorug'lik diskret kvantlar (fotonlar) bilan nafaqat chiqariladi va yutiladi, balki tarqaladi ham deb faraz qilib, fotoeffekt qoidasini tushuntirib berdi. Eynshteyn har bir yorug'lik kvantiga nafaqat Plank formulasiga ko'ra energiyani, balki uzunligi p , yorug'lik to'liqini uzunligi λ bilan

$$p = \frac{2\pi h}{\lambda}$$

munosabat orqali bog'langan impuls vektorini ham mos qo'ydi. Eynshteynning farazini 1923-yilda A.Kompton o'z tajribasi bilan tasdiqladi. U fotonlar elektronlar bilan to'qnashganda energiya va impulsning saqlanish qonunlari Plank va Eynshteyn formulalariga asosan bajarilishini ko'rsatdi. L.de Broyl 1924-yilda, ko'rsatilgan munosabatlar, to'liqlar va zarrachalar o'rtasidagi universal dualizmni xarakterlaydi, degan farazni ilgari surdi. Xususan, har qanday zarrachaning harakati bilan de Broyl uzunligi

$$\lambda = \frac{2\pi h}{p}$$

ga teng bo'lgan to'liqinni bog'ladi, bunda p –zarracha impulsi vektorining uzunligi.

Mikrozarrachalarning to'liqin xossalari keyinchalik K. Devisson va A. Djermerning elektronlarning kristallik panjaralarda difraksiyasi bo'yicha tajribalarida (1927-yilda) va boshqa tajribalarda topildi.

E.Rezerfort tomonidan taklif etilgan va tajribada asoslangan atomning planetar modeli ham klassik fizikaning asosiy qoidalariga zid keladi. Klassik elektrodinamikaga ko'ra elektronlar yadro atrofida yopiq orbitalar bo'yicha harakatlanib, har qanday tezlanib harakatlanayotgan zaryadlar singari, elektromagnit to'liqlarni chiqarishi kerak. Natijada, energiyani yo'qota borib, elektronlar 10^{-9} s tartibdagi vaqt ichida yadroga qulashi (tushishi) kerak (amalda bu narsa ro'y bermaydi). Bundan tashqari, klassik mexanikaga ko'ra elektron istalgan orbita bo'yicha harakatlanishi va demak, istalgan to'liqin uzunligidagi yorug'likni taratishi mumkin, lekin yaxshi ma'lumki ko'pgina moddalarning

nurlanish spektrlari diskretdir. Atomlar tuzilishini tushuntirish uchun Nels Bor 1913-yilda klassik fizikaning qoidalarini ularga zid qo'shimcha postulatlar bilan qo'shuvchi nazariyani taklif qildi. Xususan, Bor statsionar orbitalar mavjudligini o'rnatdi. Ular bo'ylab harakatlanayotgan elektron yorug'lik tarqatmaydi, bunda elektronning energiyasi faqat diskret qiymatlar qabul qilishi mumkin. Elektron bir statsionar orbitadan boshqasiga o'tganda energiyasi shu orbitalar energiyalarining ayirmasi bilan aniqlanadigan foton taraladi yoki yutiladi. A.Zommerfeld tomonidan to'ldirilgan va mukammallashtirilgan bu nazariyani "eski kvant nazariyasi" deb atashadi. Bor tomonidan to'g'riroq va ziddiyatlarsiz nazariyani izlash bosqichi sifatida qaralgan eski kvant nazariyasi atom spektrlarining tuzilishini umumiy holda tushuntirish va vodorod atomining hamda bir elektronli ionlarning xossalari miqdoriy tavsifini berishga imkon yaratdi. Murakkabroq atomlar va molekulalarning xossalari bu nazariya to'liq tushuntirib bera olmadi.

Mikrodunyo hodisalarining izchil nazariyasi V.Geyzenberg, E.Shryodinger, M.Born, P.Yordan, N.Bor, V.Pauli, P.A.M.Dirak va boshqa olimlar tomonidan yaratilgan kvant mexanikasidir. 1925-yilda B.Geyzenberg atom hodisalarining nazariyasiga yangi yondashuvni belgilab berdi. Bu yo'nalishda Born, Geyzenberg va Yordanlar matsiraviy mexanikani ishlab chiqishdi. Unda fizik miqdorlar sonlar yoki sonli funksiyalar bilan emas, balki cheksiz matritsalar bilan ifodalangan. Shryodinger, de Broylning g'oyalarini rivojlantirib, 1926-yilda to'lqin mexanikasini yaratdi. Unda fizik miqdorlarning qiymatlarini hisoblash chiziqli defferensial operatorlarning xos qiymatlarini topishga keltiriladi. Shryodinger va boshqa mualliflar matritsaviy va to'lqin mexanikalari bitta nazariyani bayon qilishning ikki usuli ekanligini o'rnatganlaridan keyin bu nazariyani kvant mexanikasi deb atasha boshlashdi. Kvant mexanikasi formal apparatini qurish yigirmanchi yillarning oxiriga kelib asosan va talqin qilish masalalari keyingi yillarda ham faol muhokama etildi. Kvant mexanikasi apparatining qat'iy matematik asoslanishi yigirmanchi va o'ttizinchi yillar oralig'ida I.fon Neyman tomonidan ishlab chiqildi [14].

Mikroobyektning qandaydir fizik miqdorini o'lchash uchun

mikroobyektni asbob bilan o'zaro ta'sir qilishga majbur etish kerak. Bu o'zaro ta'sir natijasida asbobning makroskopik holati o'zgaradi, yani o'lchash akti yuz beradi. Odatda mikroobyekt asbob bilan o'zaro ta'sir qilganda ko'chkisimon jarayonni (masalan, Vilson kamerasida bug' kondensatsiyasini) chaqiradi, bu esa asbobning makroholatining o'zgarishiga olib keladi.

Umumiy holda o'lchash natijasini oldindan aniq aytib berish mumkin emas ekan (hatto o'lchash o'tkaziladigan sharoitlar haqida barcha mumkin bo'lgan ma'lumotlar to'planganda ham). O'lchash natijasi tasodifiy miqdor bo'lib, kvant mexanikasida bunday miqdorlarning taqsimot qonunlari o'rganiladi. Qiymatlarini tajribada aniqlash mumkin bo'lgan fizik miqdorlar kuzatiluvchan (наблюдаемыми) miqdorlar deyiladi. O'lchash natijalari haqiqiy sonlar deb hisoblanadi.

Quyida bayon qilingan kvant mexanikasi asosiy postulatlarining sistemasi I.fon Neyman tomonidan taklif etilgan [14].

2.3.1-postulat. Kvant mexanikasidagi sistemaning holatlari Ω kompleks separabel Hilbert fazosining (birlik) vektorlari bilan ifodalanadi. Bunda ikkita vektor ayni bitta holatni faqat va faqat nolmas kompleks ko'paytuvchiga farq qilgandagina ifodalaydi. Har bir kuzatiluvchan miqdorga Ω da chiziqli o'z-o'ziga qo'shma operatorni bir qiymatli mos qo'yish mumkin.

Ω holatlar fazosi, uning elementlari esa holatlar vektorlari deyiladi. Biz hamisha (agar aksi aytilmagan bo'lmasa) fizik sistemaning holatini ifodalovchi $\psi \in \Omega$ vektorning uzunligi birga teng deb hisoblaymiz. Ba'zan sistemaning holati $\psi \in \Omega$ vektor bilan ifodalanishini nazarda tutib, sistema ψ holatda deb ataymiz. Kuzatiluvchan a miqdorga mos operatorni a bilan belgilaymiz. Agar kuzatiluvchan $a_1, a_2, \dots, a_n$ miqdorlarning qiymatlarini bitta tajribada (bitta tajriba qurilmasida) istalgan aniqlikda o'lchash mumkin bo'lsa, ular bir

vaqtda (yoki birgalikda) oʻlchanadigan miqdorlar deyiladi. Shunday ekan, ixtiyoriy $\psi \in \Omega$ holatda $a_1, a_2, \dots, a_n$ tasodifiy miqdorlar birgalikdagi taqsimot funksiyasiga ega. Bu funksiyani $\mathcal{F}_\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ orqali belgilaymiz. Boshqacha aytganda $\mathcal{F}_\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ argumentlarning tayinlangan qiymatlarida kuzatiluvchan $a_1, a_2, \dots, a_n$ miqdorlarning ψ holatda oʻlchangan qiymatlari mos ravishda $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sonlardan oshmasligining ehtimolidir.

2.3.2-postulat. Kuzatiluvchan miqdorlar faqat va faqat ularga mos oʻz-oʻziga qoʻshma operatorlar oʻzaro oʻrin almashinuvchan boʻlgandagina bir vaqtda oʻlchanadigan boʻladi. Agar kuzatiluvchan $a_1, a_2, \dots, a_n$ miqdorlar bir vaqtda oʻlchanadigan boʻlsa, u holda ψ holatda ularning birgalikdagi taqsimot funksiyasi

$$\mathcal{F}_\psi \lambda_1, \dots, \lambda_n = E_{\lambda_1}^{(1)} E_{\lambda_2}^{(2)} \dots E_{\lambda_n}^{(n)} \psi^2 \quad (2.3.1)$$

koʻrinishga ega, bu yerda $E_{\lambda_1}^{(1)}, E_{\lambda_2}^{(2)}, \dots, E_{\lambda_n}^{(n)}$ - $a_1, a_2, \dots, a_n$ operatorlarga mos birining yoyilmalaridan olingan proyektorlar.

Ravshanki, agar ψ vektorni sistemaning xuddi shu holatini ifodalovchi boshqa vektor bilan almashtirsak (2.3.1) ifodaning qiymati oʻzgarmaydi. $E_{\lambda_1}^{(1)}, E_{\lambda_2}^{(2)}, \dots, E_{\lambda_n}^{(n)}$ proyektorlar oʻzaro oʻrin almashinuvchan boʻlgani uchun (2.3.1) ifodaning qiymati $a_1, a_2, \dots, a_n$ kuzatiluvchan miqdorlar qanday tartibda qaralayotganidan ham bogʻliq emas. Agar qandaydir bitta a kuzatiluvchan miqdor oʻlchanadigan boʻlsa, u holda bu miqdorlarning ψ holatdagi taqsimot funksiyasi

$$\mathcal{F}_\psi \lambda = E_\lambda \psi^2 \quad (2.3.2)$$

koʻrinishga ega, bu yerda E_λ - a operator birining yoyilmasidan olingan proyektor. Bu munosabat (2.3.1) munosabatning xususiy holidir.

Energiya har qanday kvantomexanik sistemada muhim fizik miqdor boʻlib hisoblanadi. Bu kuzatiluvchan miqdorga mos operatorni H orqali belgilaymiz. Quyidagi postulat H energiya operatori sistema evolyutsiyasining qonunini

aniqlashini takidlaydi.

2.3.3-postulat. Biror $t = 0$ vaqt momentida sistemaning holati ψ_0 vektor bilan tasvirlansin. U holda ixtiyoriy t vaqt momentida sistemaning holati $\psi(t) = U_t \psi_0$ vektor bilan tasvirlanadi, bu yerda U_t evolutsiya operatori deb ataluvchi unitar operator. Agar $\psi(t)$ vektor-funksiya H operatorning $D(H)$ aniqlanish sohasiga aqalli $t = 0$ tushsa, differensiallanuvchi bo'ladi va

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = H\psi(t) \quad (2.3.3)$$

munosabat o'rinli, bu yerda $\hbar$ – Plank doimiysi.

(2.3.3) munosabat kvant mexanikasining asosiy tenglamasi bo'lib, u Shryodinger tenglamasi deyiladi.

Kelgusida, agar teskarisi aytilmagan bo'lsa, H energiya operatori (kuzatiluvchan miqdorlarga mos boshqa miqdorlar kabi) vaqtdan bog'liq emas deb faraz qilanadi. Bu xususiy holda 2.3.3-postulatning asosiy tasdig'ini quyidagicha bayon qilishimiz mumkin: U_t evolutsiya operatorlari $-\frac{i}{\hbar}H$ operator bilan tug'dirilgan uzluksiz bir parametrli grupp tashkil qiladi, ya'ni

$$\psi(t) = U_t \psi_0 = e^{-\frac{i}{\hbar}tH} \psi_0 \quad (2.3.4)$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatan ham, bunday gruppalarining xossalari va (2.3.4) tenglikdan $\psi_0 \in D(H)$ mansublik faqat va faqat $\psi(t)$ vektor funksiya $t = 0$ da differensiallanuvchi va $\frac{d\psi(t)}{dt}|_{t=0} = -\frac{i}{\hbar}H\psi_0$ bo'lgandagina o'rinli bo'ladi. Bu holda barcha t larda $\psi(t)$ vektor funksiyasining hosilasi mavjud va $\psi(t) \in D(H)$ haqiqatan ham,

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(t)}{dt} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{U_s \psi(t) - U_t \psi_0}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{U_s \psi(t) - U_t \psi(t)}{s} = \frac{d}{ds} U_s \psi(t) |_{s=0} = \\ &= -\frac{i}{\hbar} H \psi(t). \end{aligned}$$

Shunday ekan, biz Shryodinger tenglamasiga keldik. $D(H)$ Ω da zich bo'lganligi uchun U_t grupp Shryodinger tenglamasi bilan bir qiymatli aniqlanadi.

2.3.4-postulat. Ω fazoning har bir nolmas vektoriga sistemaning biror holati

mos keladi va har qanday o'z-o'ziga qo'shma operator biror kuzatiluvchan miqdorga mos keladi.

2.3.4-postulatdan superpozitsiya prinspi kelib chiqadi: agar sistema ψ_1 va ψ_2 vektorlar bilan ifodalanadigan holatlarda bo'lishi mumkin bo'lsa, unda u ularning superpozitsiyasi, yani ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi bilan ifodalanadigan holatda ham bo'lishi mumkin.

2.4-§. Asosiy postulatlardan kelib chiqadigan bazi natijalar

a – ixtiyoriy kuzatiluvchan miqdor, $a - D(a)$ sohada aniqlangan unga mos o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsin; bundan keyin istalgan A operatorning aniqlanish sohasini $D(A)$ bilan belgilaymiz. Kuzatiluvchan a miqdorning ψ holatda o'rta qiymati, boshqacha aytganda matematik kutilmasini a_ψ orqali belgilaymiz.

2.4.1-lemma. Agar $\psi \in D(a)$ bo'lsa u holda a kuzatiluvchan miqdor ψ holatda

$$a_\psi = a\psi, \psi \quad (2.4.1)$$

o'rta qiymatga ega.

Isbot. O'z-o'ziga qo'shma operatorning spektral yoyilmasi haqidagi teoremaga ko'ra

$$a\psi, \psi = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_\lambda \psi, \psi)$$

o'rinli, bu yerda E_λ , a operatorga birning yoyilmasidagi proyektor, $E_\lambda^2 = E_\lambda$ (proyektorning xossasi) va E_λ operatorlar o'z-o'ziga qo'shma bo'lganligi uchun

$$E_\lambda \psi, \psi = E_\lambda^2 \psi, \psi = E_\lambda \psi, E_\lambda \psi = E_\lambda \psi^2$$

tengliklar bajariladi, shuning uchun (2.3.2) munosabatdan

$$a\psi, \psi = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d E_\lambda \psi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d \mathcal{F}_\psi \lambda$$

kelib chiqadi. Aynan shuni isbotlash talab qilingan edi, chunki $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda d \mathcal{F}_\psi \lambda - \mathcal{F}_\psi \lambda$ taqsimot funksiyali tasodifiy miqdorning matematik kutilmasidan iborat.

$f \lambda$ – haqiqiy qiymatli, o‘lchovli va $d E_\lambda \psi, \psi$ o‘lchov bo‘yicha deyarli chekli, masalan uzluksiz funksiya bo‘lsin. U holda $f(a)$ o‘z-o‘ziga qo‘shma operator aniqlangan. Kuzatiluvchan a miqdor λ qiymatni qabul qilganda $f \lambda$ qiymatni qabul qiladigan kuzatiluvchan miqdorni $f a$ orqali belgilaymiz.

2.4.2-lemma. Agar $\psi \in D(f a)$ bo‘lsa, u holda $f a$ kuzatiluvchan miqdor ψ holatda

$$f a \psi = (f a) \psi, \psi \quad (2.4.2)$$

o‘rta qiymatga ega.

2.4.2-lemmadan $f a$ kuzatiluvchan miqdorga mos keluvchi o‘z-o‘ziga qo‘shma operator $f(a)$ bilan ustma-ust tushadi.

Tasodifiy miqdor qiymatlarining o‘rta qiymat bilan solishtirgandagi sochilmasi dispersiya bilan xarakterlanadi. Kuzatiluvchan a miqdorning ψ holatdagi dispersiyasi ya’ni, $(a - a_\psi)^2$ miqdorning o‘rta qiymatini $\delta_\psi(a)$ orqali belgilaymiz.

2.4.3-lemma. Kuzatiluvchan a miqdorning ψ holatdagi dispersiyasi faqat va faqat $\psi \in D(a)$ bo‘lganda mavjud. Bu holda

$$\delta_\psi a = a\psi - a_\psi \psi^2 \quad (2.4.3)$$

tenglik o‘rinli.

2.4.4-lemma. Kuzatiluvchan a miqdor ψ holatda ma’lum λ qiymatni 1 ehtimol bilan qabul qilishi uchun $\psi - a$ operatorning λ xos qiymatiga mos xos vektori bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. Agar a kuzatiluvchan miqdor ψ holatda λ qiymatni 1 ehtimol bilan qabul qilsa, u holda $\delta_\psi a = 0, a_\psi = \lambda$ bo‘ladi.

Shuning uchun (2.4.3) formuladan $a\psi - \lambda\psi = 0$, ya’ni $a\psi = \lambda\psi$ kelib chiqadi. Agar $a\psi = \lambda\psi$ ekanligi ma’lum bo‘lsa, u holda (2.4.1) formuladan $a_\psi = a\psi, \psi = \lambda \psi, \psi = \lambda$ kelib chiqadi, shunga ko‘ra esa $\delta_\psi a = a\psi - a_\psi \psi^2 = 0$.

Ayniqsa, fizik sistemaning holati energiya operatorining xos vektori bilan ifodalanadigan hol muhim. $t = 0$ vaqt momentida sistemaning holati H energiya

operatorining λ_0 xos qiymatiga mos ψ_0 xos vektori bilan ifodalansin. U holda $\psi(t) = e^{-i\lambda_0 \frac{t}{\hbar}} \psi_0$ vektor funksiya Shryodinger tenglamasini qanoatlantiradi.

$\psi(t)$ vektor ψ_0 dan faqat son ko'paytuvchi bilan farq qiladi va demak, sistemaning xuddi o'sha holatini ifodalaydi. Endi $U_t \psi_0 = c(t) \psi_0$ deb faraz qilamiz, bu yerda U_t – evolyutsiya operatori, $c(t)$ esa – son ko'paytuvchi, $c(t) = (U_t \psi_0 | \psi_0)$ bo'lgani uchun bu funksiya uzluksiz, U_t gruppaning $U_t U_s = U_{t+s}$ xossasiga ko'ra $c(t+s) = c(t) c(s)$ munosabat kelib chiqadi. Ma'lumki bu funksional tenglamani qanoatlantiruvchi uzluksiz funksiya eksponentadan iborat. Demak $c(t)$ funksiya differensiallanuvchi. Shuning uchun

$$H\psi_0 = i\hbar \frac{d}{dt} U_t \psi_0 |_{t=0} = \lambda_0 \psi_0, \text{ bu yerda } \lambda_0 = i\hbar \frac{dc(t)}{dt} |_{t=0}$$

natijada quyidagi tasdiq isbotlandi.

2.4.5-lemma. Sistemaning holati vaqt o'tishi bilan o'zgarmasligi uchun u energiya operatorining xos vektori bilan ifodalanishi zarur va yetarli.

Vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydigan holat statsionar holat deyiladi. Energiya statsionar holatda ayni bitta qiymat – energiya operatorining xos qiymatini 1 ehtimol bilan qabul qiladi.

Statsionar holatlarni (H energiya operatorining xos vektorlarini) ifodalovchi $H\psi = \lambda\psi$ tenglamani ko'pincha Shryodinger tenglamasi deyishadi.

a – ixtiyoriy kuzatiluvchan miqdor, a – unga mos o'z-o'ziga qo'shma operator $E_\lambda - a$ operator birining yoyilmasidan olingan proyektorlar bo'lsin. Agar Δ – haqiqiy sonlarning, barcha $\psi \in \Omega$ lar uchun $d E_\lambda \psi, \psi$ o'lchovga nisbatan o'lchovli to'plami bo'lsa, u holda $f_\Delta(\lambda)$ orqali λ to'plamning, $\lambda \in \Delta$ bo'lganda bir qiymatni va $\lambda \notin \Delta$ bo'lganda nol qiymatni qabul qiluvchi, xarakteristik funksiyani belgilaymiz.

$$E_\Delta = f_\Delta(a)$$

deb olamiz. E_Δ operator o'z-o'ziga qo'shma va $(E_\Delta)^2 = E_\Delta$ chunki, $(f_\Delta)^2 = f_\Delta$. Shu sababli E_Δ – ortogonal proyektor; agar Δ_1 va Δ_2 to'plamlar kesishmasa, u holda $E_{\Delta_1} E_{\Delta_2} = f_{\Delta_1} a f_{\Delta_2} a = 0$ ya'ni mos qism fazolar ortogonal. Agar $\Delta - \lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi λ

sonlardan iborat $(\lambda_1, \lambda_2]$ yarim interval bo'lsa, u holda $E \Delta = E \Delta_2 - E \Delta_1$; agar $\lambda_1 = -\infty, \lambda_2 = \lambda$ bo'lsa $E \Delta$ operator birning yoyilmasidagi E_λ proektorga aylanadi. Nihoyat agar Δ faqat bitta λ nuqtadan iborat bo'lsa, u holda $E \Delta = E_\lambda - E_{\lambda-0}$, bu yerda $E_{\lambda-0} - E_{\lambda-\varepsilon}$ operatorlarning ε miqdor musbat bo'lib, nolga intilgandagi limiti.

2.4.6-lemma. Kuzatiluvchan a miqdorning ψ holatda o'lchangan qiymati Δ to'plamda saqlanish ehtimoli $E(\Delta)\psi^2$ ga teng.

Isbot. Ko'rsatib o'tilgan ehtimol quyidagiga teng.

$$\begin{aligned} dP_{\psi} \lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Delta} \lambda dP_{\psi} \lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Delta} \lambda d(E_{\lambda} \psi, \psi) = (f_{\Delta} a \psi, \psi) = \\ &= E \Delta^2 \psi, \psi = E \Delta \psi, E \Delta \psi = E(\Delta) \psi^2. \end{aligned}$$

2.4.6-lemmadan kuzatiluvchan a miqdor faqat Δ to'plamga tegishli qiymatlarni 1 ehtimol bilan qabul qilishi uchun ψ holat $E \Delta$ proyektorning qiymatlar sohasi $\Omega_{\Delta} = E \Delta \Omega$ da saqlanishi zarur va yetarli. Agar Δ to'plam a operatorning yagona λ xos qiymatidan tashkil topgan bo'lsa, u holda 2.4.4-lemmaga ko'ra, $\Omega_{\Delta} = (E_{\lambda} - E_{\lambda-0})\Omega$ qism fazo a operatorning λ xos qiymatiga mos barcha xos vektorlardan iborat bo'ladi. Agar λ son a operatorning xos qiymati bo'lmasayu, lekin λ nuqtani saqlovchi ixtiyoriy Δ interval uchun $E \Delta \neq 0$ bo'lsa, u holda kuzatiluvchan a miqdor λ qiymatni 1 ehtimol bilan qabul qiladigan holat mavjud bo'lmasada, ammo bu kuzatiluvchan miqdor λ ga istalgancha yaqin qiymatlar qabul qiladigan holatlarni topish mumkin.

$\psi = \psi_m S_m d\sigma_m - \psi$ vektor a operatorning S_m umumlashgan xos vektorlari bo'yicha yoyilmasi bo'lsin. Agar $\psi_m \neq 0$ munosabat faqat S_m umumlashgan vektorning xos qiymati Δ to'plamga tegishli bo'lgandagina bajarilsa, u holda $\psi \in \Omega_{\Delta}$. Shunday qilib, agar ψ vektor a operatorning xos qiymatlari λ dan kichik farq qiladigan umumlashgan vektorlarining "uzluksiz chiziqli kombinatsiyasidan" iborat bo'lsa, u holda a kuzatiluvchan miqdorning ψ holatda qabul qiladigan qiymatlari ham λ dan kichik farq qiladi. Shu sababli ko'pincha a operatorning λ xos qiymatiga mos umumlashgan xos vektori sistemaning a

kuzatiluvchan miqdor λ qiymatni 1 ehtimol bilan qabul qiladigan holatini ifodalaydi deyiladi.

2.5-§. Kvantlash

n ta erkinlik darajali klassik σ_{kl} dinamik sistemani qaraymiz. Bunday sistemaning holati umumlashgan $q_1, q_2, \dots, q_n$ koordinatalar va umumlashgan $p_1, p_2, \dots, p_n$ impulsning qiymatlari majmui bilan bir qiymatli aniqlanadi. Soddalik uchun sistemaning H energiyasi vaqtdan oshkor bog‘liq emas, hamda impuls va koordinatalar orqali

$$H = \sum_{k=1}^n \frac{p_k^2}{2m_k} + v(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (2.5.1)$$

ko‘rinishida ifodalanadi deb faraz qilamiz, bu yerda m_k — o‘zgarmas koeffitsiyentlar va har bir q_k koordinata butun haqiqiy sonlar o‘qini o‘tishi mumkin.

Bunga misol sifatida potensial o‘zaro ta’sirga ega l ta zarrachadan (material nuqtadan) iborat sistemani keltirish mumkin. U $n = 3l$ erkinlik darajasiga ega; bunda $q_{3r-2}, q_{3r-1}, q_{3r} - r$ chi zarrachaning to‘g‘ri burchakli koordinatalari, $p_{3r-2}, p_{3r-1}, p_{3r} -$ impuls komponentlari, $m_{3r-2} = m_{3r-1} = m_{3r} - r$ chi zarracha massasi, $v(q_1, q_2, \dots, q_n)$ — potensial energiya.

σ_{kl} sistemaning kvant o‘xshashi bo‘lib, limiti σ_{kl} ga teng bo‘lgan σ_{kv} kvantomexanik sistemani qurishning qat’iymas evristik usuli mavjud. Bu usulga ko‘ra σ_{kv} sistemaning holatlar fazosi Ω sifatida n ta haqiqiy $q_1, q_2, \dots, q_n$ o‘zgaruvchilarning Lebeg o‘lchovi bo‘yicha kvadrati bilan integrallanuvchi kompleks qiymatli funksiyalar fazosi $L^2(R^n)$ ni olish kerak. Har bir q_k koordinataga q_k o‘zgaruvchiga ko‘paytirish operatori q_k ni mos qo‘yish kerak: $q_k \psi(q_1, q_2, \dots, q_n) = (q_k \psi)(q_1, q_2, \dots, q_n)$; har qanday o‘lchovli haqiqiy qiymatli funksiyaga ko‘paytirish operatori singari q_k operator o‘z-o‘ziga qo‘shma. Har bir p_k impulsiga $p_k = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}$ o‘z-o‘ziga qo‘shma operator mos qo‘yiladi, bu yerda h — Plank doimiysi, i — esa mavhum birlik. Furrye almashtirishida bu operator yuqoridagi o‘zgarmasga ko‘paytirilgan koordinata

operatoriga o'tadi.

Energiya operatori sifatida

$$-\frac{\hbar^2}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{m_k} \frac{\partial^2}{\partial q_k^2} + V(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (2.5.2)$$

differensial operatorining o'z-o'ziga qo'shma kengaytmasi H ni olish kerak.

(2.5.2) odatda Shryodinger operatori deyiladi.

Kuzatiluvchan koordinatani vaqt bo'yicha differensiallaymiz $\frac{dq_k}{dt} =$

$\frac{i}{\hbar} H, q_k$. (2.5.2) formuladan foydalanib va hisoblashlarni bajarib osongina

$\frac{dq_k}{dt} = \frac{1}{m_k} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_k}$ ekanligini olamiz. Shunday qilib, $p_k = m_k \frac{dq_k}{dt}$ ya'ni

koordinatalar va impulslar orasidagi bog'lanish klassik mexanikadagi kabi.

Albatta keltirilgan lemmani to'la qat'iy deb hisoblash mumkin emas, chunki H energiya operatori yetarlicha korrekt aniqlanmagan edi.

To'g'ridan-to'g'ri hisoblash orqali impulslar va koordinata operatorlari

$$p_k, q_k = \frac{\hbar}{i} I; \quad p_k, q_k = 0, k \neq j \quad (2.5.3)$$

munosabatlarni qanoatlantirishini osongina tekshirish mumkin, bu yerda I birlik operator. Bu (1925-yilda Born va Yordan tomonidan olingan) munosabatlar Geyzenbergning kommutatsion munosabatlari deyiladi. Klassik mexanikada impulslar va koordinatalar Puasson qavslariga nisbatan xuddi shunga o'xshash munosabatlar bilan bog'langan.

Klassik σ_{kl} mexanik sistemadan σ_{kv} kvantomexanik sistemaga o'tish kvantlash deb ataladi. Biz σ_{km} sistemaning energiyasi koordinatalar va impulslar orqali (2.5.1) formula bilan ifodalanadi deb faraz qilgan edik. Bu cheklashdan qutilish mumkin edi, lekin bu holda kvantlash qoidalarini ancha murakkab-lashtirishga to'g'ri kelar edi. Umumiy holda turli – tuman kvantlash usullari mavjud, lekin Geyzenberg munosabatlarini va tabiiy qo'shimcha cheklashlarni qanoatlantiruvchi o'z-o'ziga qo'shma operatorlarni sirasini aytganda yagona usul bilan qurish mumkin.

Shuni nazarda tutish kerakki, klassik sistemalardan kvantlash yo'li bilan olish

mumkin bo'lmagan muhim kvantomexanik sistemalar mavjud. Bular qatoriga birinchi navbatda spinli zarrachalar (elektronlar, protonlar va boshqalar) va bir xil zarrachalardan iborat sistemalar (masalan, ko'p elektornli sistemalar) kiradi.

σ_{kv} sistemaning t vaqt mometidagi holati t ning har bir tayinlangan qiymatida $\Omega = L^2(R^n)$ fazoga tegishli $\psi(q_1, \dots, q_n, t)$ funksiya bilan ifodalanadi. Bunda

$\psi(q_1, \dots, q_n, t) = e^{\frac{i}{\hbar} t H} \psi(q_1, \dots, q_n, 0)$. Shryodinger tenglamasi esa

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{m_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k^2} + V(q_1, q_2, \dots, q_n) \psi \quad (2.5.4)$$

ko'rinishga ega.

$n+1$ ta haqiqiy o'zgaruvchilarning $\psi(q_1, \dots, q_n, t)$ funksiyasi σ_{kv} sistemaning to'liq funksiyasi deyiladi. Ko'p hollarda σ_{kv} sistemaning tayinlangan vaqt momentidagi holatini ifodalaydigan n o'zgaruvchili $\psi(q_1, \dots, q_n)$ funktsiyani ham to'liq funksiyasi deb ataydilar.

q_k koordinata operatoriga mos birning yoyilmasidan olingan $E_\lambda^{(k)}$ proyektor (operator) $q_k \leq \lambda$ da 1 qiymatni va $q_k > \lambda$ da nol qiymatni qabul qiladigan funktsiyaga ko'paytirish operatori. Shuning uchun ψ holatda $q_1, \dots, q_n$ miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasi

$$\mathcal{F}_\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \int_{-\infty}^{\lambda_1} \dots \int_{-\infty}^{\lambda_n} \psi(q_1, \dots, q_n)^2 dq_1 \dots dq_n$$

dan iborat. Demak, to'liq funksiyasi modulining kvadrati $q_1, \dots, q_n$ miqdorlarning birgalikdagi taqsimot zichligi bilan ustma-ust tushadi va o'lchash natijasida $q_1, \dots, q_n$ koordinatalarning qiymatlarini $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ oraliqlarda topish ehtimoli

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \psi(q_1, \dots, q_n)^2 dq_1 \dots dq_n$$

ga teng.

To'liq funksiyasining keltirilgan talqini va mos ravishda kvant mexanikasining statistik talqini 1926-yilda Born tomonidan taklif qilingan.

Kvantomexanik sistema holatlari Ω ning biror funksiyalar fazosiga izomorfizmi bu sistemaning tasviri deb aytiladi. Yuqorida biz σ_{kv} sistemaning koordinatali deb ataluvchi tasvirini bayon qildik, lekin u tasvirlar ichida yagona va eng qizig'i emas.

$$F: \psi(q) \rightarrow \psi(p) = \frac{1}{2\pi h^{\frac{n}{2}}} \int \psi(q) e^{-\frac{i}{h}pq} dq \quad (2.5.5)$$

operatorni qaraymiz, bu yerda $q = (q_1, \dots, q_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $qp = \sum_{j=1}^n p_j q_j$, $dq = dq_1 \dots dq_n$ va integral butun R^n fazo bo'ylab olinadi.

Bu operator $p_k = p_k / \hbar$, $q_k = q_k / \hbar$, $k = 1, \dots, n$ o'zgaruvchilar almashtirishi orqali Furrye – Plancherel almashtirishiga keltiriladi. Shunday ekan, F operator $q_1, q_2, \dots, q_n$ o'zgaruvchilarning kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalari fazosini $p_1, p_2, \dots, p_n$ o'zgaruvchilarning kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalari fazosiga izomorf va izometrik akslantiradi. Shunday qilib, σ_{kv} sistemaning tabiiy ravishda impulsli deb ataluvchi tasviri kelib chiqadi.

Sistemaning koordinatali tasvirda $\psi(q_1, \dots, q_n)$ funksiya bilan ifodalanadigan holati, impulsli tasvirda ba'zan impulsli tasvirdagi to'liq funksiyasi deb ataluvchi $\psi(p_1, \dots, p_n)$ funksiya bilan ifodalanadi. Furrye – Plancherel almashtirishining ma'lum xossalardan

$$\psi(q) = \frac{1}{2\pi h^{\frac{n}{2}}} \int \psi(p) e^{-\frac{i}{h}pq} dp \quad (2.5.6)$$

ekanligi kelib chiqadi, bu yerda belgilashlar (2.5.5) formuladagiga o'xshash. Bunda q_k koordinata operatoriga impulsli tasvirda $i\hbar \frac{\partial}{\partial p_k}$ operator, p_k impuls operatoriga esa p_k o'zgaruvchiga ko'paytirish operatori mos keladi. Demak, $\psi(p_1, \dots, p_n)^2$ miqdor $p_1, \dots, p_n$ miqdorlarning birgalikdagi taqsimoti zichligidan iborat va o'lchash impulsning qiymatlarini $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ intervallarda topish ehtimoli

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \psi(p_1, \dots, p_n)^2 dp_1 \dots dp_n$$

ga teng.

2.6-§. Aniqmaslik munosabatlari

Ixtiyoriy a va b kuzatiluvchan miqdorlarni qaraymiz, ularga mos o'z-o'ziga qo'shmas operatorlar a va b bo'lsin. Holatlar fazosida shunday birlik ψ vektorni tayinlaymizki, $(ab - ba)\psi$ ifoda ma'noga ega bo'lsin. a va b lar a va b kuzatuvchan miqdorlarning ψ holatdagi o'rta qiymatlari (ya'ni matematik kutilmalari) bo'lsin. Kuzatiluvchan a va b miqdorlarni o'lchash natijalaridagi aniqmasliklar bu miqdorlarning dispersiyalari bilan harakterlanadi:

$$\delta a = a\psi - a\psi^2 \text{ va } \delta b = b\psi - b\psi^2,$$

$$\Delta a = \overline{\delta a} = a\psi - a\psi, \Delta b = \overline{\delta b} = b\psi - b\psi \text{ deb olamiz.}$$

2.6.1- lemma. Kuzatiluvchan a va b miqdorlarning ψ holatda ularning o'rta qiymatlaridan Δa va Δb o'rtacha kvadratik chetlatishlari

$$\Delta a \cdot \Delta b \geq \frac{1}{2} \|ab - ba\|_{\psi, \psi} \quad (2.6.1)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Isbot. $a_1 = a - aI$, $b_1 = b - bI$ deb olamiz, bu yerda I — birlik operator $ab - ba = a_1b_1 - b_1a_1$ ekanligiga tekshirish oson. Shuning uchun

$$\begin{aligned} \|ab - ba\|_{\psi, \psi} &= \|a_1b_1 - b_1a_1\|_{\psi, \psi} = \|a_1b_1\psi, \psi - (b_1a_1\psi, \psi)\| = \\ &= \|b_1\psi, a_1\psi - a_1\psi, b_1\psi\| = 2\operatorname{Im} (a_1\psi, b_1\psi) \leq \\ 2 \|a_1\psi, b_1\psi\| &\leq 2 \|a_1\psi\| \cdot \|b_1\psi\| = 2 \|a_1\psi - a_1\psi\| \|b_1\psi - b_1\psi\| = 2\Delta a \cdot \Delta b. \end{aligned}$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi.

Agar $ab - ba = \frac{\hbar}{i}I$ munosabat o'rinli bo'lsa, a va b kuzatiluvchan miqdorlar *kanonik qo'shma* deyiladi. Bu holda (2.6.1) tengsizlikning o'ng tomoni ψ dan bog'liq emas va $\frac{\hbar}{2}$ bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib quyidagi tasdiq isbotlandi.

2.6.2-lemma. Agar kuzatiluvchan a va b miqdorlar *kanonik qo'shma*

bo'lsalar, u holda har qanday holatda bu miqdorlarning, ularning o'rtacha qiymatlaridan o'rtacha kvadratik chetlanishlari Δa va Δb lar

$$\Delta a \cdot \Delta b \geq \frac{h}{2} \quad (2.6.2)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

2.6.1- natija. q_k koordinata mos p_k impuls komponentasini o'lchash aniqmasligi ixtiyoriy tayinlangan holat uchun

$$\Delta p_k \cdot \Delta q_k \geq \frac{h}{2} \quad (2.6.3)$$

munosabat bilan ifodalanadi.

Aniqmaslik munosabatlari qanday fizik miqdorlarning bir vaqtda o'lchash mumkinligi masalasi bilan uzviy bog'liq. Ixtiyoriy kuzatiluvchan a miqdorni o'lchash jarayonini shunday tashkillashtirish mumkinki, o'lchash natijasini qayta tiklash mumkin deb hisoblanadi. Bu shuni anglatadiki, agar birinchi o'lchashdan keyin yetarlicha tez (sistemaning holati Shryodinger tenglamasiga ko'ra o'zgara olmasin) ikkinchi o'lchash bajarilsa, bu ikkinchi o'lchashning natijasi katta ishonch bilan birinchi o'lchash natijasi asosida aniqlash mumkin bo'lgan qandaydir λ_1 va λ_2 lar oralig'ida bo'ladi. Bunga λ_1, λ_2 intervalning uzunligi (o'lchash jarayonini tashkillashtirish asosida) istalgancha kichik qilinishi mumkin. Shunday qilib, a miqdorni kerakli tartibda tashkillashtirilgan o'lchash yordamida sistemani Δa miqdor yetarlicha kichik bo'ladigan holatga keltirish mumkin. Shuning uchun, agar kuzatiluvchan a va b miqdorlar bir vaqtda o'lchanadigan bo'lsalar, Δa va Δb miqdorlar istalgancha kichik boladigan holat mavjud deb hisoblash tabiiy.

Bu yerdan va (2.6.2) tengsizlikdan kanonik qo'shma miqdorlarni bir vaqtda o'lchash mumkin emasligi kelib chiqadi; bunday o'lchashlar bir-biriga zid tajriba qurilmalarini talab qiladi.

2.6.1-tasdiq. $a_1, a_2, \dots, a_n$ kuzatiluvchan miqdorlar faqat $a_1, a_2, \dots, a_n$ operatorlar o'zaro o'rin almashinuvchan bo'lgandagina bir vaqtda o'lchovli bo'ladi.

Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ operatorlar o'zaro o'rin almashinuvchan bo'lsalar, u holda

shunday o‘z-o‘ziga qo‘shma a operator va $f_1, f_2, \dots, f_n$ funksiyalar mavjudki, $a_1 = f_1 a, \dots, a_n = f_n(a)$ bo‘ladi. 2.3.4-postulatga ko‘ra a operatorga biror kuzatiluvchan a miqdor mos keladi. Shu sababli a miqdorni o‘lchash barcha $a_1, a_2, \dots, a_n$ miqdorlarning qiymatlarini ham beradi, shunday ekan bu kuzatiluvchan miqdorlarni bir vaqtda o‘lchovli deb atash mumkin. Keltirilgan lemma super tanlash qoidalari mavjud bo‘lgan holda osongina umumlashtiriladi.

Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ kuzatuvchan miqdorlar bir vaqtda o‘lchovli va $a_1, a_2, \dots, a_n$ lar bilan bir vaqtda o‘lchovli har qanday kuzatiluvchan miqdor bu miqdorlarning biror funksiyasidan iborat bo‘lsa, $a_1, a_2, \dots, a_n$ kuzatiluvchan miqdorlar to‘la majmuani hosil qiladi deyiladi.

2.6.3-lemma. Kuzatiluvchan $a_1, a_2, \dots, a_n$ miqdorlar to‘la majmua hosil qilishi uchun $a_1, a_2, \dots, a_n$ operatorlar o‘zaro o‘rin almashinuvchan bo‘lishi va oddiy birgalikdagi spektrga ega bo‘lishi zarur va yetarli. Bu holda Ω holatlar fazosining n ta $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ o‘zgaruvchilarning biror $d\mu$ o‘lchov bo‘yicha kvadrati bilan jamlanuvchi barcha funksiyalarning $L^2(R^n, d\mu)$ fazosiga shunday izomorfizm mavjudki, bu izomorfizm a_i operatorga λ_i erkli o‘zgaruvchiga ko‘paytirish operatori mos keladi (o‘lchov bir qiymatli tanlanmaydi).

III. BOB. BIR BOZONLI SISTEMAGA MOS TAQSIMOTNING BA'ZI XOSSALARI

3.1-§. Bir bozonli sistemaga mos energiya operatorining koordinat va impuls tasvirlari

Ma'lumki, [14] bir o'lchamli panjarada bir kvant zarrachaning (bozonning) energiyasi kuzatilayotgan bo'lsa, unga mos holatlar fazosi

$$\ell_2 \mathbb{Z} = \{f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}; \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^2 < \infty\}$$

separabel kompleks Hilbert fazosi bo'ladi. Bu yerda bozonni $A \subset \mathbb{Z}$ to'plamdan topish ehtimoli $\sum_{n \in A} |f(n)|^2$ ga teng. Bir zarrachaning energiyasiga mos operator

$\ell_2 \mathbb{Z}$ fazoda quyidagicha aniqlanadi:

$$Hf(n) = -\frac{1}{2} (f(n+1) + f(n-1) - 2f(n)) = \Delta f(n). \quad (3.1.1)$$

Bu operator $\ell_2 \mathbb{Z}$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operator bo'ladi. Bu fazoda (1.2.4) unitar operatorni qaraymiz.

3.1.1-lemma. Ixtiyoriy $s \in \mathbb{Z}$ va (1.2.4) tenglik bilan aniqlangan unitar

operator uchun $\mathcal{U}_s H = H \mathcal{U}_s$ tenglik o‘rinli.

Boshqacha aytganda barcha $s \in \mathbb{Z}$ lar uchun $\mathcal{U}_s$ operator, energiya operatori H bilan o‘rin almashinuvchidir.

Isbot. Ixtiyoriy $f \in \ell_2 \mathbb{Z}$ uchun

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_s H f(n) &= \mathcal{U}_s \left(\frac{1}{2} (2f(n) - f(n+1) - f(n-1)) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} (f(n+1+s) + f(n-1+s) - 2f(n+s)). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Xuddi shunday

$$\begin{aligned} H \mathcal{U}_s f(n) &= H(f(n+s)) = \frac{1}{2} (2f(n+s) - \\ &\quad - f(n+1+s) - f(n-1+s)) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

hisoblandi. (3.1.2) va (3.1.3) tengliklarning o‘ng tomonlari o‘zaro teng bo‘lganligi uchun ularning chap qismlari ham tengdir, ya’ni $\mathcal{U}_s H f = H \mathcal{U}_s f$. Bundan $\mathcal{U}_s H = H \mathcal{U}_s$ tenglikka kelamiz.

Murakkab bo‘lmagan hisoblashlar ko‘rsatadiki barcha $s \in \mathbb{Z}$ va $t \in \mathbb{Z}$ lar uchun $\mathcal{U}_s \mathcal{U}_t = \mathcal{U}_{s+t}$ tenglik o‘rinli.

Xuddi shunday oson ko‘rsatish mumkinki,

$$H = -\frac{1}{2} (\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_{-1} - 2\mathcal{U}_0) \quad (3.1.4)$$

tenglik ham o‘rinli.

3.1.1-teorema. (3.1.1) tenglik bilan aniqlangan energiya operatori $H: \ell_2 \mathbb{Z} \rightarrow \ell_2 \mathbb{Z}$, o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘ladi.

Isbot. 1.1.2-ta’rifga ko‘ra

$$\begin{aligned} Hf, g &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} Hf(n) \cdot g(n) = -\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (f(n+1) + f(n-1) - 2f(n)) g(n) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+1) g(n) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n-1) g(n) - 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) g(n) \right). \end{aligned}$$

Bundan birinchi yig‘indida $n+1=m$ deb, ikkinchi yig‘indida $n-1=m$ va uchinchi yig‘indida $n=m$ almashtirishlarni olamiz natijada:

$$\begin{aligned}
Hf, g &= -\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) g(n-1) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) g(n+1) - 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) g(n) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) (g(n-1) + g(n+1) - 2g(n)) = f, H^*g
\end{aligned}$$

ni hosil qilamiz. Bu yerdan

$$(H^*f)(n) = -\frac{1}{2} f(n-1) + f(n+1) - 2f(n)$$

ni olamiz.

H ning chegaralangan ekanligidan, $DH = \ell_2 \mathbb{Z}$. U holda $DH^* = \ell_2 \mathbb{Z}$.

Demak, H energiya operatori o'z-o'ziga qo'shma ekan. Teorema isbotlandi.

(3.1.1) tasvir energiya operatorining koordinat tasviri deyiladi. Koordinat tasvirdan impuls tasvirga o'tish Furiye almashtirishi (1.2.2-misolga qarang) orqali amalga oshiriladi.

$$\mathcal{F}: \ell_2 \mathbb{Z} \rightarrow L_2[-\pi, \pi], \quad \mathcal{F}f(p) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{inp}.$$

3.1.2-lemma. Istalgan $s \in \mathbb{Z}$ uchun

$$\mathcal{F}\mathcal{U}_s\mathcal{F}^{-1}f(p) = e^{-isp} f(p) = \mathcal{U}_sf(p)$$

tenglik o'rinli. Ya'ni $\mathcal{F}\mathcal{U}_s\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{U}_s$ yoki $\mathcal{F}\mathcal{U}_s = \mathcal{U}_s\mathcal{F}$ tenglik o'rinli.

Isbot. Lemmani isbotlash uchun $\mathcal{F}\mathcal{U}_s = \mathcal{U}_s\mathcal{F}$ tenglikni ko'rsatish yetarli. Shu maqsadda $\mathcal{F}\mathcal{U}_sf$ va $\mathcal{U}_s\mathcal{F}f$ larni hisoblaymiz:

$$\mathcal{F}\mathcal{U}_sf(p) = \mathcal{F} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+s) e^{inp} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+s) \frac{1}{2\pi} e^{inp}$$

Bunda $n+s=m$, $n=m-s$ almashtirishni olamiz, u holda

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\mathcal{U}_sf(p) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) \frac{1}{2\pi} e^{i(m-s)p} = e^{-isp} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) \frac{1}{2\pi} e^{imp} = \\
&= e^{-isp} \cdot f(p), \quad p \in [-\pi, \pi].
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

$$\mathcal{U}_s\mathcal{F}f(p) = \mathcal{U}_s \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{inp} = \sum_{n+s \in \mathbb{Z}} f(n+s) e^{inp}$$

Bu yig'indida ham $n+s=m$, $n=m-s$ almashtirish olamiz, u holda

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_s \mathcal{F} f(p) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) e^{i(m-s)p} = e^{-isp} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) \frac{1}{2\pi} e^{imp} = \\ &= e^{-isp} f(p), \quad p \in (-\pi, \pi). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Demak, (3.1.5) va (3.1.6) tengliklarning o'ng qismlari teng va bundan chap qismlari ham tengdir. Lemma isbotlandi.

3.1.2-teorema. Energiya operatorining impuls tasviri $H = \mathcal{F}H\mathcal{F}^{-1}$ bo'ladi va H energiya operatori $L_2(-\pi, \pi)$ Hilbert fazosini o'zini-o'ziga quyidagi formula yordamida akslantiradi:

$$Hf(p) = (1 - \cos p) f(p), \quad f \in L_2(-\pi, \pi). \quad (3.1.7)$$

(3.1.7) tasvir bir zarrali sistemaga mos energiya operatorining impuls tasviri deyiladi.

Isbot. (3.1.7) tasvirni o'rinli ekanligini ko'rsatish uchun (3.1.4) tenglikdan foydalanamiz.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}H\mathcal{F}^{-1}f(p) &= -\frac{1}{2} \mathcal{F}(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_{-1} - 2\mathcal{U}_0) \mathcal{F}^{-1}f(p) = \\ &= -\frac{1}{2} (\mathcal{F}\mathcal{U}_1\mathcal{F}^{-1} + \mathcal{F}\mathcal{U}_{-1}\mathcal{F}^{-1} - 2\mathcal{F}\mathcal{U}_0\mathcal{F}^{-1}) f(p) = \\ &= -\frac{1}{2} (e^{-ip}f(p) + e^{ip}f(p) - 2f(p)) = -\frac{e^{-ip} + e^{ip}}{2} - 1 f(p) = \\ &= (1 - \cos p) f(p). \end{aligned}$$

3.1.1-ta'rif. ψ_n bazis vektorlarga mos holatlarni bazis holatlar deb ataymiz.

3.1.3-teorema. (3.1.7) tenglik bilan aniqlangan H energiya operatori o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator bo'ladi.

Isbot. H ni chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz:

$$\|Hf\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |Hf(p)|^2 dp = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos p)^2 |f(p)|^2 dp \leq 4 \int_{-\pi}^{\pi} |f(p)|^2 dp = 4 \|f\|^2.$$

Bu yerdan $\|Hf\| \leq 2 \|f\|$, ya'ni $\|H\| \leq 2$. Bu esa H ning chegaralanganligi bildiradi. 1.1.1-ta'rifga ko'ra

$$(Hf, g) = \int_{-\pi}^{\pi} Hf(p) \overline{g(p)} dp = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos p) f(p) \overline{g(p)} dp =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(p) (1 - \cos p) g(p) dp = (f, H^* g).$$

Demak, $H^* g(p) = (1 - \cos p) g(p) = Hg(p)$ va $H = H^*$, ya'ni H o'z-o'ziga qo'shma operator.

3.1.4-teorema. Energiya operatori H ning spektri $\sigma H = [0, 2]$ kesmadan iborat.

Isbot. Energiya operatori H ning quyi chegarasi $m = 0$ va yuqori chegarasi $M = 2$ bo'lgani uchun I bob 1.3.4-teorema ko'ra $\sigma H \subset [0, 2]$ munosabat o'rinli bo'ladi. $\sigma H = [0, 2]$ tenglik 1.4.2-misoldagidek ko'rsatiladi.

Demak, energiyaning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari $[0, 2]$ kesmani tutash to'ldiradi.

3.1.3-lemma. Energiya operatori H ning spektral proyektorlari E_λ lar quyidagicha bo'ladi:

$$(E_\lambda f)(p) = \begin{cases} 0, & \text{agar } \lambda \leq 0 \\ \chi_{A(\lambda)}(p) f(p), & 0 < \lambda \leq 2 \\ f(p), & \text{agar } \lambda > 2. \end{cases}$$

Isbot. Quyidagi A_λ to'plamni kiritamiz:

$$A(\lambda) = \{p \in [-\pi, \pi] : 1 - \cos p \leq \lambda\} = [-\arccos(1 - \lambda), \arccos(1 - \lambda)].$$

Bu $A(\lambda)$ to'plam xarakteristik funksiyasini quramiz:

$$\chi_{A(\lambda)}(p) = \begin{cases} 1, & p \in A(\lambda) \\ 0, & p \notin A(\lambda). \end{cases}$$

$(E_\lambda f)(p) = \chi_{A(\lambda)}(p) f(p)$, $f \in L_2[-\pi, \pi]$ operatorni qaraymiz:

- 1) $\lambda \in (-\infty; 0]$ bo'lsa $E_\lambda = 0$ bo'ladi,
- 2) $\lambda \geq 2$ bo'lsa, $E_\lambda = E$ bo'ladi,
- 3) $\lambda < \mu$ da $E_\lambda \leq E_\mu$, ya'ni $A(\lambda) \subset A(\mu)$ uchun $\chi_{A(\lambda)}(p) \leq \chi_{A(\mu)}(p)$ va $E_\mu - E_\lambda \geq 0$ o'rinli bo'ladi:

$$(E_\mu - E_\lambda) f, f = \int_{-\pi}^{\pi} (E_\mu - E_\lambda)(p) f(p)^2 dp =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{A(\mu)}(p) - \chi_{A(\lambda)}(p) f(p)^2 dp = \int_{A(\mu) \setminus A(\lambda)} f(p)^2 dp \geq 0.$$

Demak, $E_\mu \geq E_\lambda$.

3.1.4-lemma. H operator birining yoyilmasidagi proyektorlar, E_λ lar bilan ustma-ust tushadi:

$$H = \int_0^{2+\varepsilon} \lambda dE_\lambda. \quad (3.1.8)$$

Isbot. (3.1.8) ni ko'rsatish uchun, istalgan $f \in L_2[-\pi, \pi]$ uchun

$Hf, f = \int_0^{2+\varepsilon} \lambda d(E_\lambda f, f)$ ni ko'rsatish kifoya.

$$\begin{aligned} \lambda d(E_\lambda f, f) &= \int_0^2 \lambda d \int_{-\pi}^{\pi} E_\lambda f(p) f(p) dp = \\ &= \int_0^2 \lambda d \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{A_\lambda}(p) f(p)^2 dp = \int_0^2 \lambda d \int_{-\arccos(1-\lambda)}^{\arccos(1-\lambda)} f(p)^2 dp = \\ &= \int_0^2 \lambda d \int_0^{\arccos(1-\lambda)} f(p)^2 dp + \int_0^2 \lambda d \int_{-\arccos(1-\lambda)}^0 f(p)^2 dp. \end{aligned}$$

Integrallarning birinchisini integrallaymiz:

$$\int_0^2 \lambda d \int_0^{\arccos(1-\lambda)} f(p)^2 dp = \int_0^2 \lambda f(\arccos(1-\lambda))^2 \cdot \frac{d\lambda}{1-(1-\lambda)^2} =$$

integralning o'zgaruvchilarini almashtiramiz

$\arccos 1-\lambda = p, 1-\lambda = \cos p, d\lambda = \sin p dp$, bundan

$$= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos p}{1-\cos^2 p} f(p)^2 \sin p dp = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos p}{\sin p} f(p)^2 dp. \quad (3.1.9)$$

Ikkinchi integralda ham xuddi shunday amallarni bajarib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_0^2 \lambda d \int_{-\arccos(1-\lambda)}^0 f(p)^2 dp = - \int_0^{\pi} \frac{1-\cos p}{\sin p} f(p)^2 dp =$$

$$= \int_{-\pi}^0 (1 - \cos p) f(p)^2 dp. \quad (3.1.10)$$

(3.1.9) va (3.1.10) tengliklarni mos ravishda o'ng va chap qismlarini qo'shamiz natijada

$$\int_{-\pi}^0 \lambda d(E_\lambda f, f) = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos p) f(p)^2 dp = (Hf, f).$$

Lemma isbotlandi.

3.1.5-teorema. Energiyaning barcha ψ_n , $n \in \mathbb{Z}$ bazis holatlardagi o'rta qiymati birga teng, ya'ni $(\psi_n, H\psi_n) = 1$.

Isbot. 2.4.1-lemmaga ko'ra energiyaning ψ_n bazis holatdagi o'rta qiymati $(\psi_n, H\psi_n)$ skalyar ko'paytmaning qiymatiga teng. Bu skalyar ko'paytmani hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} (\psi_n, H\psi_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(p) H\psi_n(p) dp = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos p) e^{inp} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos p) dp = 1. \end{aligned}$$

Bu yerda biz $e^{inp} = 1$ ayniyatdan foydalandik.

3.1.6-teorema. Energiyaning istalgan ψ_n , $n \in \mathbb{Z}$ bazis holatlardagi dispersiyasi $(\psi_n, H^2\psi_n) = \frac{1}{2}$ ga teng.

Isbot. Energiyaning barcha ψ_n , $n \in \mathbb{Z}$ bazis holatlardagi o'rta qiymati birga tengligidan hamda 2.4.3-lemmadan energiyaning ψ_n bazis holatdagi dispersiyasi $(\psi_n, H^2\psi_n)$ ga teng: ψ_n bazis holat va H operatorning aniqlanishidan quyidagilarni olamiz:

$$(\psi_n, H^2\psi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(p) H^2\psi_n(p) dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 p e^{inp} dp$$

Oxirgi integralni hisoblashda $\cos^2 p = \frac{1}{2}(1 + \cos 2p)$ va $e^{inp} = 1$ ayniyatlardan foydalanamiz, natijada

$$H\psi_n - \psi_n^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos 2p \, dp = \frac{1}{4\pi} (2\pi + 0) = \frac{1}{2}.$$

3.1.7-teorema. Istalgan $\lambda \in (0,2)$ soni uchun shunday $f_\lambda \in L_2[-\pi, \pi]$ holat mavjudki $a_{f_\lambda} H = \lambda$ bo'ladi.

Teoremaning isboti o'rta qiymat haqidagi teoremadan kelib chiqadi [10].

3.1.8-teorema. Ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun $\exists f_n \in L_2[-\pi, \pi]$ holat mavjudki,

$$2 - \frac{1}{n} < a_{f_n} H < 2.$$

Isbot. f_n funksiyani quyidagi ko'rinishda tuzib olamiz:

$$f_n(p) = \begin{cases} 0, & \text{agar } p \in [-\pi, \pi - \frac{1}{n}] \\ \frac{1}{n}, & \text{agar } p \in [\pi - \frac{1}{n}, \pi] \end{cases}.$$

Barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun $f_n = 1$. Endi (2.4.1) tenglikdan foydalanib f_n holat uchun o'rta qiymatni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} a_{f_n} H &= H f_n, f_n = \int_{-\pi}^{\pi} H f_n(p) f_n(p) dp = \int_{\pi - \frac{1}{n}}^{\pi} n (1 - \cos p) dp = \\ &= n \left[\frac{1}{n} + \sin \frac{1}{n} \right] = 1 + n \sin \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

(3.1.8) yig'indini Makloren qatoriga yoyamiz:

$$\begin{aligned} 1 + n \sin \frac{1}{n} &= 1 + n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{3! \cdot n^3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)! \cdot n^{2n-1}} + \dots \right] = \\ &= 1 + n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{3! \cdot n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] = 2 - \frac{1}{6n^2} > 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Demak, $a_{f_n} H \in (2 - \frac{1}{n}, 2)$. Teorema isbotlandi.

3.1.9-teorema. Ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun $\exists g_n(H) \in L_2[-\pi, \pi]$ holat mavjudki, $0 < a_{g_n} H < \frac{1}{n}$ bo'ladi.

Isbot. $g_n(p)$ funksiyani quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$g_n(p) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{agar } p \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & \text{agar } p \notin \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun $g_n = 1$. Bu g_n uchun (2.4.1) tenglikka ko'ra o'rta qiymatni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} a_{g_n} H &= H g_n, g_n = \int_{-\pi}^{\pi} H g_n(p) g_n(p) dp = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{n}{2} (1 - \cos p) dp = \\ &= \frac{n}{2} \left[\frac{2}{n} - 2 \sin \frac{1}{n} \right] = 1 - n \sin \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

(3.1.10) ayirmani ham Makloren qatoriga yoyamiz va baholaymiz:

$$1 - n \sin \frac{1}{n} = 1 - n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{3! \cdot n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] = \frac{1}{6n^2} < \frac{1}{n}.$$

Demak, $g_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$. Teorema isbotlandi.

3.2-§. Bir zarrachali sistemaga mos taqsimot uchun ekstremal masala

Quyida biz I fon Neyman [14] tomonidan taklif qilingan (2.3.1) va (2.3.3) kvant mexanikasining asosiy postulatlaridan foydalanamiz.

Bir o'lchamli panjara $\mathbb{Z}$ da erkin harakatlanayotgan zarra (bozon) ga mos energiya operatori $\ell_2(\mathbb{Z})$ kompleks Hilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma operator sifatida (3.1.1) va (3.1.2) tengliklar bilan aniqlanadi.

Ma'lumki, $L_2[-\pi, \pi]$ kompleks Hilbert fazosida

$$\psi_n(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inp}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

sistema ortonormal bazis tashkil qiladi.

$\mathcal{F}_\psi \lambda = E_\lambda \psi^2$, ψ_n , $n \in \mathbb{Z}$ — bazis holatlar deyiladi. Bu shunday holatlarki, bozonni n nuqtadan topish ehtimoli birga teng,

$$f_n(m) = \begin{cases} 1, & \text{agar } n = m \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } n \neq m \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

3.2.1-lemma. Energiyaning ψ_n bazis holatdagi taqsimot funksiyasi $\mathcal{P}_{\psi_n}$ uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$\begin{aligned} & 0, \quad \text{agar} \quad \lambda \leq 0 \\ \mathcal{P}_{\psi_n} \lambda = E_\lambda \psi_n^2 &= \frac{1}{\pi} \arccos 1 - \lambda, \quad 0 < \lambda \leq 2 \\ & 1, \quad \text{agar} \quad \lambda > 2. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Isbot. Osongina k o'rsatish mumkinki, $\lambda \leq 0$ va $\lambda > 2$ bo'lsa, u holda E_λ operatorning aniqlanishiga ko'ra $\forall \psi_n, n \in \mathbb{Z}$ uchun mos holda $\mathcal{P}_{\psi_n} \lambda = 0$ va $\mathcal{P}_{\psi_n} \lambda = 1$ bo'ladi. Endi $0 < \lambda \leq 2$ da ψ_0 bazis holat uchun $E_\lambda \psi_0^2$ ni topamiz:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\psi_0} \lambda = E_\lambda \psi_0^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{A_\lambda}(p) \psi_0(p)^2 dp = \int_{-\arccos(1-\lambda)}^{\arccos(1-\lambda)} \psi_0(p)^2 dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \arccos 1 - \lambda = \frac{1}{\pi} \arccos 1 - \lambda. \end{aligned}$$

Demak, bu taqsimot funksiyalar barcha $\psi_n, n \in \mathbb{Z}$ bazis holatlar uchun bir xil.

Chunki $\forall n \in \mathbb{Z}$ uchun $\mathcal{P}_{\psi_n} \lambda = \mathcal{P}_{\psi_0} \lambda$ bo'lyapti.

(3.2.1) dan hosila taqsimot zichligini beradi. Taqsimotning zichlik funksiyasi p_{ψ_n} quyidagiga teng:

$$\begin{aligned} & 0, \quad \text{agar} \quad \lambda \leq 0 \\ \mathcal{P}'_{\psi_n} \lambda = p_{\psi_n} \lambda &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\lambda(2-\lambda)}, \quad 0 < \lambda \leq 2 \\ & 0, \quad \text{agar} \quad \lambda > 2. \end{aligned}$$

3.2.1-natija. Barcha $\psi_n, n \in \mathbb{Z}$ bazis holatlarda energiyaning o'rta qiymati va dispersiyasi ham bir xil ya'ni, ular $n \in \mathbb{Z}$ ga bog'liq emas.

Quyidagi ekstremal masalani qaraymiz. Uzunligi a ($a \in (0, 2)$), birlik bo'lgan kesmaga energiyaning qiymati ψ_0 holatda a ning qanday qiymatida eng katta ehtimolli bo'ladi.

3.2.2-teorema. Energiyaning ψ_0 bazis holatda o'lchangan qiymati h ning $[\lambda, \lambda + a)$ oraliqqa tushish ehtimoli $n \in \mathbb{Z}$ ga bog'liq emas. Energiyaning uzunligi a birlik bo'lgan $\lambda, \lambda + a, \lambda \in \mathbb{R}$ oraliqdan qiymatlar qabul qilish ehtimoli

$$\begin{aligned} P_{\psi_0} \lambda \leq h < \lambda + a &= \mathcal{P}_{\psi_0} \lambda + a - \mathcal{P}_{\psi_0} \lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \arccos 1 - \lambda - a - \arccos 1 - \lambda, \end{aligned}$$

o‘zining eng katta qiymatiga $\lambda = 0$ yoki $\lambda = 2 - a$ da erishadi, ya’ni

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}} P_{\psi_0} \lambda \leq h < \lambda + a = P_{\psi_0} 0 \leq h < a = P_{\psi_0} 2 - a \leq h < 2 .$$

Hamda o‘zining eng kichik qiymatiga $\lambda = 1 - \frac{a}{2}$ da erishadi, ya’ni

$$\min_{\lambda \in (0,1)} P_{\psi_0} \lambda \leq h < \lambda + a = P_{\psi_0} 1 - \frac{a}{2} \leq h < 1 + \frac{a}{2} .$$

Isbot. Bizga ma’lumki [8] energiyaning ψ_0 bazis holatda o‘lchangan qiymati h ning $[\lambda, \lambda + a)$ oraliqqa tushish ehtimoli quyidagiga teng:

$$\begin{aligned} P_{\psi_0} \lambda \leq h < \lambda + a &= \mathcal{P}_{\psi_0} \lambda + a - \mathcal{P}_{\psi_0} \lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \arccos 1 - \lambda - a - \arccos(1 - \lambda) . \end{aligned}$$

Endi bu taqsimot funksiyani $f \lambda$ funksiya ko‘rinishida olamiz

$$f \lambda = \frac{1}{\pi} \arccos 1 - \lambda - a - \arccos(1 - \lambda)$$

va bu funksiyaning ekstremum qiymatlarga erishadigan kritik nuqtalarini topamiz.

Bu masalani Ferma teoremasidan [10] foydalanib hal qilamiz. Buning uchun $f \lambda$ funksiyadan λ bo‘yicha hosilasini olamiz:

$$f'(\lambda) = \frac{1}{\pi} \arccos 1 - \lambda - a - \arccos(1 - \lambda)' = 0$$

$$\frac{1}{1 - (1 - \lambda - a)^2} - \frac{1}{1 - (1 - \lambda)^2} = 0.$$

Bu tenglamani yechamiz va maxsus nuqtalarini topamiz: $\lambda = 1 - \frac{a}{2}$, $\lambda = 0$ va $\lambda = 2 - a$. Bu nuqtalarda $f \lambda$ funksiyaning qiymatlarini hisoblaymiz

$$\begin{aligned} f 1 - \frac{a}{2} &= \frac{1}{\pi} \arccos 1 - 1 + \frac{a}{2} - a - \arccos 1 - 1 + \frac{a}{2} = \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{a}{2}, \end{aligned}$$

$$f 0 = f 2 - a = \frac{1}{\pi} \arccos 1 - a .$$

$f 1 - \frac{a}{2}$ funksiyaning eng kichik qiymati, $f 0 = f 2 - a$ funksiyaning eng katta qiymati bo‘ladi. Teorema isbotlandi.

Yuqoridagi qiymatlarni masalan, $a = 1$ uchun tekshirib ko‘ramiz, u holda

$$\begin{aligned}
\min_{\lambda \in (0,1)} P_{\psi_0} \lambda \leq h < \lambda + 1 &= P_{\psi_0} \frac{1}{2} \leq h < \frac{3}{2} = \mathcal{P}_{\psi_0} \frac{3}{2} - \mathcal{P}_{\psi_0} \frac{1}{2} = \\
&= \frac{1}{\pi} \arccos -\frac{1}{2} - \arccos \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}. \\
\max_{\lambda \in (0,1)} P_{\psi_0} \lambda \leq h < \lambda + 1 &= \mathcal{P}_{\psi_0} 2 - \mathcal{P}_{\psi_0} 1 = \frac{1}{\pi} \arccos -1 - \arccos(0) \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}. \\
\min_{\lambda \in (0,1)} P_{\psi_0} \lambda \leq h < \lambda + 1 &= P_{\psi_0} \frac{1}{2} \leq h < \frac{3}{2} = \mathcal{P}_{\psi_0} \frac{3}{2} - \mathcal{P}_{\psi_0} \frac{1}{2} = \\
&= \frac{1}{\pi} \arccos -\frac{1}{2} - \arccos \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

3.3-§. Ikki bozonli sistemaga mos taqsimotnig xarakteristik xossalari

Ikki bozonli sistemaga mos energiya operati H kompleks Hilbert fazosi $L_2^{sym} T^2 = f \in L_2 T^2 : f(k_1, k_2) = f(k_2, k_1)$ da quyidagicha aniqlanadi:

$$H: L_2^{sym} T^2 \rightarrow L_2^{sym} T^2, \quad T = [-\pi, \pi].$$

$$Hf(k_1, k_2) = 2 - \cos k_1 - \cos k_2 f(k_1, k_2) \quad (3.3.1)$$

Quyidagi $k_1 + k_2 = k$, $\frac{k_1 - k_2}{2} = p$ belgilashni kiritamiz.

$$L_2^{sym} T^2 = \bigoplus_T L_2^e(T), \quad L_2^e T = f \in L_2 T : f(-p) = f(p),$$

$$H = \bigoplus_T H(k), \quad H(k) : L_2^e(T) \rightarrow L_2^e(T),$$

$$(H(k)f)(p) = 2 - 1 - \cos \frac{k}{2} \cos p f(p). \quad (3.3.2)$$

$H(k)$ operatorning spektri faqat uzluksiz bo'lib, u

$$\sigma(H(k)) = \left[2 - 2 \cos \frac{k}{2}; 2 + 2 \cos \frac{k}{2} \right]$$

kesmadan iborat. Keyinchalik biz $k = 0$ deb hisoblaymiz.

H operator $L_2^{sym} T^2$ Hilbert fazosini o'zini-o'ziga akslantirivchi o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi. (3.3.1) tenglik bilan aniqlangan H operator ikki bozonli sistemaga mos energiya operatori deyiladi. (3.3.2) tenglik bilan aniqlanuvchi $H(k)$, $k \in T$ operatorlar energiya operatori H ning qatlamlari deyiladi.

Agar $k = 0$ bo'lsa (keyinchalik biz $k = 0$ bo'lgan holni qaraymiz) $H(0)$ operator quyidagicha aniqlanadi:

$$(H(0)f)(p) = 2(1 - \cos p)f(p), \quad p \in T = [-\pi, \pi] \quad (3.3.3)$$

(3.3.3) tenglik bilan aniqlangan $H(0)$ operator o'z-o'ziga qo'shma, chegaralangan operator bo'ladi. Uning spektri $\sigma H(0) = [0, 4]$ kesmadan iborat, [1] ya'ni energiyaning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari $[0, 4]$ kesmani tutash to'ldiradi. $L^2_e(T)$ kompleks Hilbert fazosida quyidagi ortonormal bazisni qaraymiz:

$$\psi_0^+(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \psi_n^+(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos np, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.3.4)$$

3.3.1-ta'rif. ψ_n^+ bazis vektorlarga mos holatlarni *bazis holatlar* deb ataymiz.

3.3.1-teorema. Energiyaning istalgan $\psi_n^+, n \in \mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ holatdagi o'rta qiymati 2 ga teng.

Isbot. 2.4.1-lemmaga ko'ra energiyaning ψ_n^+ bazis holatdagi o'rta qiymati ((3.3.1) formulaga qarang) $(H(0)\psi_n^+, \psi_n^+)$ skalyar ko'paytmaning qiymatiga teng. Bu skalyar ko'paytmani hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} (H(0)\psi_n^+, \psi_n^+) &= \int_{-\pi}^{\pi} (H(0)\psi_n^+)(p) \psi_n^+(p) dp = \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos p) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos np \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos np dp = 2. \end{aligned}$$

3.3.2-teorema. Energiyaning istalgan $\psi_n^+, n \in \mathbb{Z}_+$ bazis holatdagi dispersiyasi

$$\delta_{\psi_n^+} H(0) = \begin{cases} 3, & \text{agar } n = 1 \text{ bo'lsa} \\ 2, & \text{agar } n \neq 1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ga teng.

Isbot. 2.4.3-lemmaga ko'ra energiyaning ψ_n^+ bazis holatdagi dispersiyasi

$H - 2\psi_n^+{}^2$ ga teng: ψ_n bazis holat ((3.3.4) ga qarang) va $H(0)$ operatorning aniqlanishidan ((3.3.3) ga qarang) quyidagilarni olamiz:

$$\delta_{\psi_n} H(0) = H(0)\psi_n^+ - 2\psi_n^+{}^2 = H(0)\psi_n^+ - \psi_n^+, H(0)\psi_n^+ - \psi_n^+ =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (2 - 2\cos p - 2) \frac{1}{\pi} \cos np^2 dp = \begin{cases} 3, & \text{agar } n = 1 \\ 2, & \text{agar } n \neq 1. \end{cases}$$

Xulosa

Kvant mexanikasining asosiy postulatlariga ko'ra kuzatiluvchan har qanday fizik miqdorning holati, biror kompleks separabel Hilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma va quyidan chegaralangan H operator bilan tavsiflanadi. Masalan, H operatorning xos vektorlari sistemaning bog'langan holatlari deyiladi, bu xos vektorga mos xos qiymatlar shu holatning sath energiyalari deyiladi. Shunday qilib, agar biz H operatorning spektral xossalarini to'liq o'rgansak, u holda biz fizik sistema haqida batafsil ma'lumotga ega bo'lamiz. Shu maqsadda biz bir o'lchamli panjarada bir kvant zarraning (bozonning) taqsimot funksiyasini, energiyasi va ekstremal xossalarini ko'rib chiqdik. O'z-o'ziga qo'shma operatorlarni spektral xossalarini o'rganishga bag'ishlangan ko'plab kitoblar mavjud. Shu jumladan F.A.Berezin va M.A.Shubinlarning Shryodinger tenglamalari [14], Axiezer N.I. va Glazman I.M. (Hilbert fazolarida chiziqli operatorlar [18]) hamda L.A. Lyusternik, V.I.Sobolevlarning (Funksional analiz elementlari), hamda J.I. Abdullayev, R.N. G'anixo'jayev, M.H. Shermatov, O.I.Egamberdiyevlarning «Funksional analiz va integral tenglamalar» nomli darslik [1] kitoblaridir.

Ehtimoliy masalalarni yoritishda S.H.Sirojiddinov va M.M.Mamatovlarning "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika" [9] va A.Abdushukurov, T.Zuparovlarning "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika" nomli [8] darslik kitoblaridan foydalanildi.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasi bir o'lchamli panjaradagi bir bozonli sistemaga mos kuzatiluvchan miqdorning (energiyaning) taqsimot qonunlarini (matematik kutilmasi, dispersiyasi, statsionar holatlari) o'rganishga bag'ishlangan.

Bir bozonli sistema energiyasi $[0, 2]$ kesmadan qiymatlar qabul qiluvchi absolyut uzluksiz tasodifiy miqdor ekanligi ko'rsatildi. Energiya operatori H ning spektral proyektorlari E_λ topildi. Bir bozonli sistema energiyasining bazis holatlarga mos taqsimot funksiyasi $\mathcal{P}_{\psi_n}$ hisoblandi. Bu taqsimot funksiyalar barcha ψ_n $p = \frac{1}{2\pi} e^{inp}, n \in \mathbb{Z}$ bazis holatlar uchun bir xilligi ko'rsatildi.

Yuqoridagi ψ_n bazis holatlarda bir bozonli sistema energiyasining oʻrta qiymati va dispersiyasini hisoblandi. Har bir ψ_n bazis holatda bir bozonli sistema energiyasining oʻrta qiymati $a_{\psi_n} = 1$ va dispersiyasi $\delta_{\psi_n} h = \frac{1}{2}$ ekanligi isbotlandi. Shuningdek dissertatsiya ishining 3.2-§ da bir zarrachali sistemaga mos taqsimot uchun ekstremal masala qaralgan boʻlib, uzunligi a ($a \in (0, 2)$) boʻlgan kesmaga energiyaning qiymati ψ_0 holatda a ning qanday qiymatida eng katta ehtimolli boʻlishi aniqlandi.

Bundan tashqari 3.3-§ da ikki bozonli sistemaga mos taqsimotning xarakteristik xossalari ham oʻrganilgan va ψ_n^+ bazis holatlar uchun oʻrta qiymati, dispersiyasi hisoblandi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Abdullayev J.I, Gʻanixoʻjayev R.N, Shermatov M.H, Egamberdiyev O.I. «Funksional analiz». Darslik. Toshkent. LIGHT-GROUP. 2015.
2. Abdullayev J.I, Gʻanixoʻjayev R.N, Shermatov M.H, Egamberdiyev O.I. «Funksional analiz» Oʻquv qoʻllanma. Toshkent-Samarqand, 2009.
3. Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А. Конечность числа собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке. Теоретическая и математическая физика, Т. 152, № 3, 2007. 502-517.
4. Абдуллаев Ж.И., Кулиев К.Д Связанные состояния системы двух бозонов

- на двумерной решетке. Теоретическая и математическая физика. Том 186, № 2. 36-47. 2016 Т.
5. Абдуллаев Ж.И. Собственные значения двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке. Узбекский Математический Журнал, № 1, 2005. С. 3-11.
 6. Абдуллаев Ж.И., Лакаев С.Н. Асимптотика дискретного спектра разностного трехчастичного оператора Шредингера на решетке. Теоретическая и математическая физика. 2003, Вып. 136, №.2, 231-245.
 7. Abdullayev J.I., Eshqobilov Ya.X., Ikromov I.A., G'anixo'jayev R.N „Funksional analiz. Misol va masalalar yechish” Toshkent. Tafakkur Bo‘stoni – 2015.
 8. A.Abdushukurov, T.Zuparov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Darslik. Tafakkur Bo‘stoni. Toshkent, 2015.
 9. S.H.Sirojiddinov va M.M.Mamatov “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika”. O‘quv qo‘llanma. O‘qituvchi. Toshkent, 1980.
 10. Sh.Alimov, R.Ashurov. Matematik tahlil 1-qism. Toshkent, Kamalak, 2012, 466.
 11. Колмогоров А.Н, Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва, Наука, 2009. 624.
 12. Лакаев С.Н. Некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса. Труды семинара им. И.Г.Петровского. 1986. Вып. II. С. 210-138.
 13. Лакаев С.Н. О дискретном спектре обобщенной модели Фридрихса, ДАН. Уз ССР. №.4. с.9-10.
 14. Ф.А. Березин, М.А. Шубин М.Ш. Уравнение Шредингера. Изд. Московского университета. 2003.
 15. Рид М, Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1, Функциональный анализ, Москва, Наука, 1977.
 16. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4, Анализ операторов, Москва, Наука, 1982.
 17. P P.A. Faria da Viega, L.Ioriatti and M.O‘Carrol. Energy-momentum spectrum

of some two-particle lattice Schrödinger Hamiltonian. Phys. Rev. E(3) 66, 016130, 9 pp. (2002).

18. Ахиезер Н.И, Глазман И.М. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Москва. Наука, 1968.

19. Абдуллаев Ж.И, Марданов А.Х. Бухоро давлат университети <<Математик физика ва замонавий анализнинг турдош масалалари>> республика илмий-амалий анжумани материаллари Бухоро, 2015-йил 26-27 ноябрь.

20. A.X.Mardanov, N.U.Safarov. Самарқанд давлат чет тиллар институти <<XXI аср - интеллектуал авлод асри>> шиори остида ўтказилган Самарқанд ҳудудий илмий - амалий конференцияси материаллари Самарқанд, 2016-йил 2-3 июн.