

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
MEXANIKA–MATEMATIKA FAKULTETI

“Algebra va geometriya“ kafedrası

Rasulova Sevara Samiddin qizi

”Sirt ustidagi geodezik chiziqlar”

“5130100 – matematika“ ta`lim yo`nalishi bo'yicha
bakalavr darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar : dots. G'.A. Xasanov

2017-yil “__” _____

Bitiruv malakaviy ishi “Algebra va geometriya“ kafedrasida bajarildi .

Kafedraning 2017-yil “__” maydagi majlisida muhokama qilindi va himoyaga
tavsiya etildi (10 – bayonnoma).

Fakultet dekani :

prof. A. X. Begmatov

Kafedra mudiri:

dots. G`. A. Xasanov

Bitiruv malakaviy ishi YaDAKning 2017 yil “__” iyundagi majlisida himoya
qilindi va ____ ball bilan baholandi. (__ - bayonnoma).

YaDAK raisi:_____

A`zolari: _____

MUNDARIJA

KIRISH	3
I BOB. SIRTLAR NAZARIYASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI	5
1.1. Sirt va uning egri chiziqli koordinatalari	5
1.2. Sirtning birinchi kvadratik formasi va undagi chiziqlar orasidagi burchak	8
1.3. Sirtning urinma tekisligidan chetlanishi. Sirtning ikkinchi kvadratik formasi.	14
II BOB. GEODEZIK EGRILIK VA GEODEZIK CHIZIQLAR. . . .	21
2.1. Sirdagi chiziqning egriligi	21
2.2. Sirtning bosh yo'nalishlari, to'liq va o'rta egriliklari . . .	23
2.3. Geodezik egrilik va geodezik chiziqlar	30
2.4. Sirt ustidagi yarim geodezik koordinatalar sistemasi . . .	32
2.5. Maple dasturida misollar yechish	35
 Xulosa va takliflar . ..	 45
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.	46

KIRISH

Masalaning qo'yilishi: Sirtning ichki geometriyasini o'rganish differensial geometriyada va xususan sirtlar nazariyasida muhim o'rin tutadi, chunki ichki geometriya bilan bog'langan xossalar sirtning egilish natijasida o'zgarmaydi. Bu xossalar sirtning birinchi kvadratik formasi bilan aniqlanadi.

Shu maqsadda biz chiziqlarning bunday nuqtalarini o'rganish bilan birgalikda MAPLE dasturi yordamida, chiziqlarning hamma nuqtalarini topish, bu dastur yordamida grafiklarini osongina yasashga doir misollar ko'rib chiqamiz.

Mavzuning dolzarbligi: Bitiruv malakaviy ish mavzusining aktualligi shundan kelib chiqadiki, sirt ustidagi geodezik chiziqlar muhim amaliy ahamiyatga ega, chunki ular ma'lum darajada tekislikdagi to'g'ri chiziq kabi rol o'ynaydi. Shuning uchun mavzu amaliy ahamiyatga ega.

Ishning maqsad va vazifalari: Ma'lumki, sirtning ichki geometriyasining asosiy tushunchalaridan biri, chiziqlarning geodezik egriligi va geodezik chiziqlardir. Ushbu bitiruv malakaviy ishda sirt ustidagi chiziqlarning geodezik egriligi bilan bog'langan xossalar va ularni bog'lovchi formulalar o'rganiladi, hamda sirt ustidagi geodezik chiziqlar va ularni aniqlovchi differensial tenglamalar keltirilib chiqariladi.

Ishning tuzilishi: Ushbu malakaviy bitiruv ishi ikki bobdan iborat bo'lib u 7 ta paragraph, xulosa va adabiyotlar ro'yxatini o'z ichiga oladi.

Ishning ilmiy ahamiyati: Malakaviy bitiruv ishi referatif harakterga ega bo'lishi bilan bir qatorda unda MAPLE dasturi yordamida misollar yechib ko'rsatilib, ulardan tatqiqotlarda foydalanish mumkin.

Ishning amaliy ahamiyati: Matematik analiz, differensial geometriya va matematikaning boshqa fanlarining amaliyot darslarini o'tishda chiziqlarning tenglamalarini o'rganishda qo'llash mumkin.

Olingan natijalarning qisqacha mazmuni: Sirtning ichki geometriyasini o'rganish differensial geometriyada va xususan sirtlar nazariyasida muhim o'rin tutadi, chunki ichki geometriya bilan bog'liq xossalarni sirtning egish natijasida o'zgarib qoladi.

Sirtning ichki geometriyasining asosiy tushunchalaridan biri sirtidagi chiziqlarning geodezik egriligi va geodezik chiziqlardir. Bitiruv malakaviy ishida sirt ustidagi chiziqlarning geodezik egriligi bilan bog'liq xossalarni va ularni bog'lovchi formulalar o'rganilgan, hamda sirt ustidagi geodezik chiziqlar va ularni aniqlovchi differensial tenglamalar keltirib chiqarilgan.

Bitiruv malakaviy ishining birinchi bobida uchta paragrafdan tashkil topgan bo'lib, unda sirtning birinchi va ikkinchi kvadratik formalari hamda ularning koeffitsiyentlarini hisoblash formulalari keltirib chiqarilgan.

II bob beshta paragrafdan tashkil topgan bo'lib, uning birinchi paragrafida sirtidagi chiziqlarning egriligi masalasi qarang.

Bu bobning ikkinchi paragrafida esa Eyler formulalaridan foydalanib sirtning bosh egriliklari hamda sirtning to'la va o'rta egriliklari o'rganilgan. Bundan tashqari ular bilan bog'liq xossalarni chiqarilgan.

Uchinchi paragrafda esa sirt ustidagi chiziqlarning geodezik egriligi tushunchasi keltirilib, u bilan bog'langan bir nechta formulalar keltirilib chiqarilgan. Bundan tashqari geodezik chiziq uchun differensial tenglamalar hosil qilingan.

To'rtinchi paragrafda sirt ustida qulay bo'lgan yarim geodezik koordinatalar sistemasi kiritilgan va bu sistemaga nisbatan birinchi kvadratik forma sodda ko'rinishga keltirilgan.

Bu bobning beshinchi paragrafida esa MAPLE dasturi yordamida bir nechta misollar yechib ko'rsatilgan.

I BOB. SIRTLAR NAZARIYASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI

1.1-§. Sirt va uning egri chiziqli koordinatalari

Sirt tushunchasiga analitik geometriyada quyidagicha ta'rif beriladi: sirt deb shunday nuqtalar to'plamiga aytiladiki, ular ushbu tenglama bilan ifodalanadi:

$$F(x; y; z) = 0 \quad (1.1)$$

bu yerda $F(x, y, z)$ funksiya bo'lib, biror U sohada uzluksiz birinchi tartibli xususiy $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ hosilalarga ega deb faraz qilinadi [1].

Sirtning regulyar qismi deb, undagi shunday nuqtalar to'plamiga aytamizki, bu to'plam biror Dekart koordinatalar sistemasida ushbu tenglama bilan ifodalanadi:

$$z = f(x, y) \quad (1.2)$$

bunda x va y yopiq U sohada o'zgarganda, $f(x, y)$ funksiya shu sohada bir qiymatli bo'lib, uzluksiz birinchi tartibli xususiy hosilalarga egadir.

Bizga sirtning regulyar qismi (1.2) tenglama bilan berilgan bo'lsin. Bu tenglamada x va y erkli o'zgaruvchilar bo'lgani uchun, biz ularni ikkita yangi o'zgaruvchining bir qiymatli uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyalari deb, hisoblashimiz mumkin, ya'ni:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

Agar x va y ifodalarini (1.2) tenglamaga qo'ysak, z ham u va v ning bir qiymatli funksiyasi bo'ladi, chunki,

$$z = f[x(u, v), y(u, v)] = z(u, v)$$

Shunday qilib, sirt ustidagi nuqtalarning Dekart koordinatalari biror U sohada o'zgaradigan u va v parametrlarning funksiyalardir:

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases} \quad (1.3)$$

Demak, (1.2) sirtga qarashli har qanday regulyar qismni (1.3) ko'rinishdagi parametrik tenglamalar bilan ifodalash mumkin ekan. Bu tenglamalarni birlashtirib, vektor formada yoza olamiz:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \vec{x}(u, v)i + \vec{y}(u, v)j + \vec{z}(u, v)k, \quad (1.4)$$

$x; y; z$ funksiyalar, farazga asosan, U' sohada differensiallanuvchi va bir qiymatlidir, ya'ni $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ va $z = z(u, v)$ teskarilανuvchan funksiyalardir:

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z)$$

Demak, birinchidan

$$D = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

matritsaning rangi ikkiga teng, ya'ni undagi ikkinchi tartibli determinantlardan kamida bittasi noldan farqli, masalan,

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lgandagina yuz bera oladi. Ikkinchidan

$$[\vec{r}_u \times \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

bo'lgani sababli, $Rang D = 2$ bo'lganda, ya'ni bu determinantning ikkinchi va uchinchi

satrlari

proporsional bo'lmaganda,

$[\vec{r}_u \times \vec{r}_v] \neq 0$ yoki $r_u \nparallel r_v$

shart bajariladi. Xullas

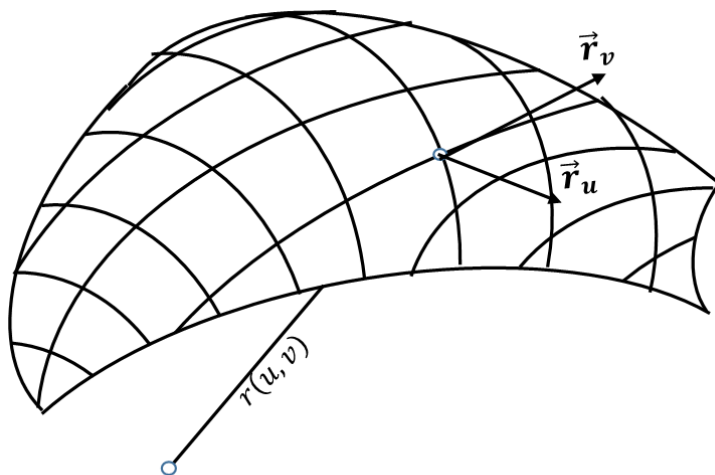
$z = f(x, y)$ shaklda

berilgan sirtni (1.3)

parametrik tenglamalar

bilan yoki vektor-

parametrik shakldagi (1.4)



Chizma 1.1

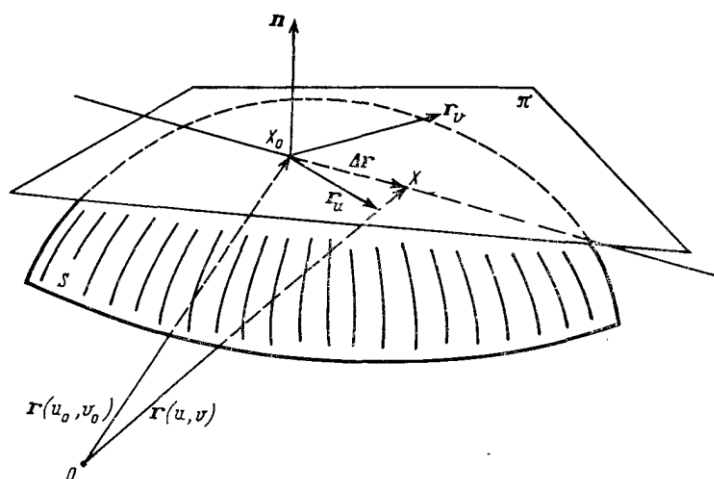
tenglama bilan ifodalash mumkin bo'lib, $\text{rang} D = 2$ yoki $r_u \nparallel r_v$ sharti bajariladi (chizma-1.1)

Shunday qilib, (1.3) tenglamalarga kiruvchi x ; y ; z funksiyalarga nisbatan qo'yilgan shartlar bajarilgan taqdirda, bu tenglamalar regulyar sirtning, umuman esa sirtning aniqlovchi. Olib borilgan mulohazalarga ko'ra, (1.3) tenglamalar sirtning parametrik tenglamalarini, $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ esa sirtning vektor-parametrik tenglamasini tasvirlaydi. u va v parametrlarning U sohadagi har bir qiymatiga sirtning biror nuqtasi mos keladi. Bu sonlar sirtidagi **nuqtaning egri chiziqli koordinatalari** deyiladi [1, 2, 6].

Endi $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ larning parallelmaslik shartini tekshiramiz. O'zgaruvchi $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ vektor uchun $v = v_0$ shart o'rinli deb faraz qilinsa, $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ vektor bitta u o'zgaruvchining funksiyasi bo'lib, sirt ustida biror egri chiziq chizadi. v_0 ning qiymatlarini o'zgartirsak, bu chiziq ham o'zgara boradi va bitta v_0 parametrli oilani tashkil qiladi.

Xuddi shu singari (1.4) tenglamada $u = u_0$ desak, sirt ustida yotuvchi chiziqlarning ikkinchi oilasi hosil bo'ladi. Chiziqlarning bu ikki oilasi sirtning **koordinat chiziqlari** deyilib, ularning birinchisini **u chiziqlar oilasi**, ikkinchisini **v chiziqlar oilasi** deb ataymiz. O'zgaruvchi $\vec{r}(u, v)$ vektorning u bo'yicha xususiy hosilasidan hosil bo'lgan $\vec{r}_u$ vektor u chiziqqa urinma, $\vec{r}_v$ esa v chiziqqa urinma bo'ladi.

Koordinata chiziqlarining ikkala oilasi koordinatalar to'rini tashkil qiladi. Sirtning regulyar qismida har bir nuqtadan to'rga qarashli ikkita chiziq o'tadi. **Sirtida joylashgan biror sohaning har bir nuqtasidan**



faqat bitta chiziq o'tsa, bunday to'r durust to'r deyiladi.

Sirtning har bir oddiy nuqtasida tayin urinma tekislik topiladi, uni $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar aniqlaydi, chunki $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar kollinear emas. Shunga asosan, bu urinma tekislikdagi o'zgaruvchan nuqtaning radius vektorini $\vec{\rho}$ bilan belgilasak, bu tekislikning vektor formadagi tenglamasi

$$(\vec{\rho} - \vec{r})[\vec{r}_u \times \vec{r}_v] = 0,$$

bo'lib, koordinat formadagi tenglamasi esa

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

bo'ladi.

Urinish nuqtasida urinma tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq normal deyiladi, uning vektor formadagi tenglamasi:

$$\vec{R} - \vec{r} = \lambda[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]$$

va koordinat formadagi tenglamasi:

$$\frac{\xi - x}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{\eta - y}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{\zeta - z}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

Agar sirt $z = f(x, y)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, undan ham parametrik tenglamalarga o'tish mumkin:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v). \end{cases}$$

Bu holda vektor formadagi tenglama

$$\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + f(u, v)\vec{k}$$

ko'rinishni oladi. Ikki vektorning vektorial ko'paytmasi $[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]$ sirtning normali bo'ylab yo'nalgandir; shu vektorning yo'nalishi ***sirtning musbat tomoni*** deyiladi va quyidagicha belgilashni kiritamiz:

$$\vec{N} = [\vec{r}_u \times \vec{r}_v], \quad \vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]|}$$

Bu yerda $\vec{n}$ –normalning birlik vektori.

1.2-§. Sirtning birinchi kvadratik formasi va undagi chiziqlar orasidagi burchak

Endi sirt ustida shunday nuqtalar to'plamini ko'ramizki, ularning egri chiziqli (u, v) koordinatalari biror t erkli o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsin:

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

Bunda $u(t)$ va $v(t)$ lar uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyalardir. Bu tenglamalar sirtida yotuvchi qandaydir L chiziqni ifodalaydi, chunki sirtning $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ tenglamasiga (1.5) ni qo'ysak,

$$\vec{r} = \vec{r}\{u(t), v(t)\} = \vec{r}(t) \quad (1.6)$$

tenglama hosil bo'ladi. Demak, t o'zgarishi bilan tegishli nuqtalar to'plami bir o'lchovli bo'ladi.

Agar (1.5) tenglamadan t ni yo'qotsak,

$$f(u, v) = 0 \quad \text{yoki} \quad v = v(u) \quad (1.7)$$

tenglama sirt ustidagi chiziqning egri chiziqli koordinatalariga nisbatan tenglamasini ifodalaydi.

Sirtidagi L chiziqning (1.6) tenglamasini t bo'yicha differensiallasak, ushbu

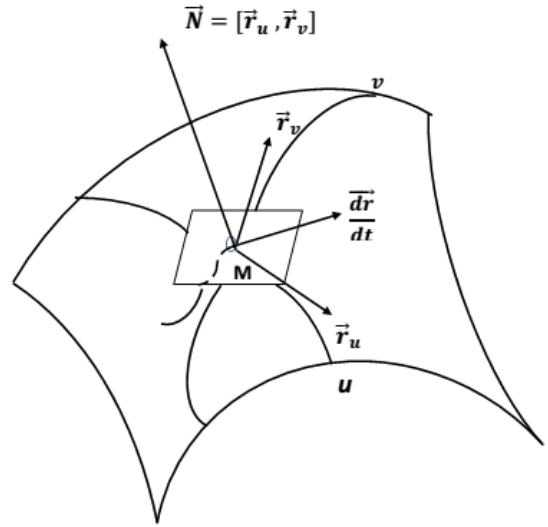
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt} \quad (1.8)$$

vektor hosil qilinib, u L chiziqqa urinmadir, $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ esa shu nuqtadan o'tuvchi koordinat chiziqlarning urinmalaridir. Chiziqda olingan $M \in L$ nuqtaning oddiyligidan bu urinmalarning hammasi bir tekislikda yotishi kelib chiqadi. Tekislikda L chiziqning yo'nalishi $dy:dx$ (yoki $dx:dy$) ga bog'liq bo'lgani kabi, sirt ustidagi chiziqning yo'nalishi ham $\frac{dv}{dt}$ va $\frac{du}{dt}$ nisbatlarga bog'liqdir. Boshqacha aytganda, bu yo'nalish $dv:du$ (yoki $du:dv$) nisbatga bog'liq.

Haqiqatan ham, (1.8) dan ko'rinadiki, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ hosila $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ lar bilan $\frac{dv}{dt}$ va $\frac{du}{dt}$ larning funksiyasi, biroq $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ lar berilgan M nuqtada o'zgarmas vektorlardir (chizma 1.2).

Endi sirtning birinchi kvadratik formasi tushunchasi va uni hisoblash usullarini ko'rib chiqamiz [1, 2, 5].

Bizga $(u, v) \in D$ sohada $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ tenglama bilan S silliq sirt berilgan bo'lib, $r_u \nparallel r_v$ yani $[r_u \times r_v] \neq 0$ shart bajarilsin.



Sirtning birinchi kvadratik formasi deb ushbu

$$I = d\vec{r}^2 \quad (1.9)$$

ifodaga aytiladi. Bizga ma'lumki, $\vec{r}(u, v)$ vektorning differensial qayidagicha bo'ladi

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv.$$

Endi uning skalyar kvadratini topamiz:

$$d\vec{r}^2 = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2 = \vec{r}_u^2 du^2 + 2(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) du dv + \vec{r}_v^2 dv^2$$

Bu ifoda S sirtning har bir nuqtasida du va dv differensiallarning kvadratik formasidir.

Birinchi kvadratik forma musbat aniqlangandir [6].

Haqiqatdan ham, $\vec{r}^2 > 0$ va birinchi kvadratik formaning determinanti ham musbat chunki,

$$\begin{vmatrix} \vec{r}_u^2 & (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) \\ (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) & \vec{r}_v^2 \end{vmatrix} = \vec{r}_u^2 \vec{r}_v^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = [\vec{r}_u \times \vec{r}_v]^2 > 0.$$

Bundan esa I ning ya'ni (1.9) kvadratik formaning musbatligi kelib chiqadi.

Odatda, birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlari uchun quyidagicha belgilashlar ishlatiladi:

$$\begin{aligned} E &= \vec{r}_u^2 = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u) \\ F &= (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) \\ G &= \vec{r}_v^2 = (\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Bu belgilashlardan foydalanib (1.8) ni quyidagicha yozish mumkin,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad EG - F^2 > 0.$$

Endi (1.10) koeffitsiyentlarning koordinatalarga nisbatan ifodalarini keltiramiz.

Agar $\vec{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$, $(u, v) \in D$, bo'lsa, u holda

$\vec{r}_u = \{x_u, y_u, z_u\}$ va $\vec{r}_v = \{x_v, y_v, z_v\}$ bo'lgani uchun yuqoridagi koeffitsiyentlar ushbu

$$\begin{aligned} E &= \vec{r}_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F &= (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G &= \vec{r}_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \end{aligned}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Quyida biz har xil ko'rinishdagi tenglamalar bilan berilgan sirtlarning birinchi kvadratik formasini va uning E, F, G koeffitsiyentlarini qanday hisoblash masalalarini ko'rib chiqamiz [1, 2, 6].

1. Bizga biror S sirt differensiallanuvchi $z = f(x, y)$ funksiya grafigi shaklida berilgan bo'lsin. O'zgaruvchi nuqtaning radius vektorini quyidagicha yozamiz:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \{x, y, f(x, y)\}.$$

U holda

$$\vec{r}_u = \vec{r}_x = \{1; 0; f_x\}, \quad \vec{r}_v = \vec{r}_y = \{0; 1; f_y\}$$

ekanligidan

$$E = \vec{r}_u^2 = 1 + f_x^2, \quad F = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) = f_x \cdot f_y, \quad G = \vec{r}_v^2 = 1 + f_y^2$$

kelib chiqadi va birinchi kvadratik forma ushbu

$$I = (1 + f_x^2)^2 du^2 + f_x \cdot f_y dudv + (1 + f_y^2)^2 dv^2 \quad (1.11)$$

shaklga ega bo'ladi.

2. Endi aylanma sirtlar, XOZ tekisligida joylashgan L chiziqning Oz o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan sirtni qaraylik.

Faraz qilaylik, L chiziq

$$x = f(u) > 0; \quad z = g(u)$$

parametrik tenglama bilan berilgan bo'lsin. ($f(u) > 0$ shart chiziqning aylanish o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtni qaraylik). Sirtidagi biror P nuqtaning holatini aniqlash uchun u parametrning qiymatini, ya'ni berilgan L chiziqdagi P_0 nuqta va L chiziqning Oz o'qi atrofida aylanish burchagi v ni bilish yetarlidir. P nuqtaning x, y, z koordinatalari u va v orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$x = f(u)\cos v, \quad y = f(u)\sin v, \quad z = g(u).$$

Endi aylanma sirtning birinchi kvadratik formasini topamiz. Buning uchun quyidagilarni topamiz;

$$\vec{r}_u = \{x_u, y_u, z_u\} = \{f'(u)\cos v; f'(u)\sin v; g'(u)\}$$

$$\vec{r}_v = \{x_v, y_v, z_v\} = \{-f(u)\sin v; f(u)\cos v; 0\}$$

Endi bulardan foydalanib birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlarini hisoblaymiz:

$$E = f'^2 + g'^2, \quad F = 0, \quad G = f'^2.$$

Shunday qilib, aylanma sirtning birinchi kvadratik formasi quyidagicha bo'ladi.

$$I = (f'^2 + g'^2)du^2 + f'^2 dv^2. \quad (1.12)$$

3. Nihoyat, endi sirt $F(x, y, z) = 0$ oshkormas ko'rinishdagi tenglama bilan berilgan bo'lsin. Uning birinchi kvadratik formasini hisoblash masalasini ko'rib chiqamiz. Bizga ma'lumki, sirtida Riman metrikasi (birinchi kvadratik formasi) – bu oddiy $dx^2 + dy^2 + dz^2$ kvadratik formadir. Shuning uchun, avvalo $F(x, y, z) = 0$ to'la differensialini topsak,

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$$

bo'ladi.

Agar qarayotgan sirtning barcha nuqtalarida $F_z \neq 0$ bo'lsa, u holda yuqoridagi tenglikdan quyidagi

$$dz = -\frac{F_x}{F_z} dx - \frac{F_y}{F_z} dy$$

tenglikga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, $F(x, y, z) = 0$ sirtida $x = u, y = v$ desak,

$$dx^2 + dy^2 + \left(-\frac{F_x}{F_z} dx - \frac{F_y}{F_z} dy\right)^2$$

hosil bo'ladi. Endi uni soddalashtirsak

$$\left(1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2\right) dx^2 + 2 \frac{F_x F_y}{F_z^2} dx dy + \left(1 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2\right) dy^2$$

tenglikga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlari quyidagicha ekan,

$$E = 1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2, \quad F = \frac{F_x F_y}{F_z^2}, \quad G = 1 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2. \quad (1.13)$$

Sirt ustida yotuvchi chiziqlar orasidagi burchak deganda, ularning kesishish nuqtalariga o'tkazilgan urinmalari orasidagi burchakni tushunamiz [1, 3].

Agar sirtning birinchi kvadratik formasi va sirt ustida bir-biri bilan kesishgan chiziqlar o'zining tenglamalari bilan berilgan bo'lsa, bu chiziqlar orasidagi burchakni aniqlash mumkin.

Sirt ustidagi chiziqlarning kesishgan nuqtasini M bilan belgilaymiz. Chiziqlarning bu umumiy nuqtadagi urinma vektorlari $\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{r_u}du + \overrightarrow{r_v}dv$ va $\overrightarrow{\delta r} = \overrightarrow{r_u}\delta u + \overrightarrow{r_v}\delta v$ bo'lsin. $\overrightarrow{r_u}$ va $\overrightarrow{r_v}$ qiymatlar sirtning tenglamasidan topiladi. $\overrightarrow{dr}$ va $\overrightarrow{\delta r}$ vektorlar orasidagi burchakni chiziqlar orasidagi burchak deb qabul qilamiz. Vektorlar orasidagi φ burchakni aniqlash uchun bu vektorlarni o'zaro skalyar ko'paytiramiz:

$$(\overrightarrow{dr} \cdot \overrightarrow{\delta r}) = |\overrightarrow{dr}| \cdot |\overrightarrow{\delta r}| \cos \varphi$$

Bundan:

$$\cos \varphi = \frac{(\overrightarrow{dr} \cdot \overrightarrow{\delta r})}{|\overrightarrow{dr}| \cdot |\overrightarrow{\delta r}|};$$

$$|\overrightarrow{dr}| = ds = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

$$|\overrightarrow{\delta r}| = ds_1 = \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}$$

Bulardan, chiziqlar orasidagi burchak uchun

$$\cos \alpha = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \quad (1.14)$$

formula hosil bo'ladi.

Koordinata to'ri uchun u chiziq bo'yicha $du \neq 0$, $dv = 0$ va v chiziq bo'yicha $\delta u = 0$, $\delta v \neq 0$ tenglamalar hosil bo'ladi. Shu sababli, (1.14) formulaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

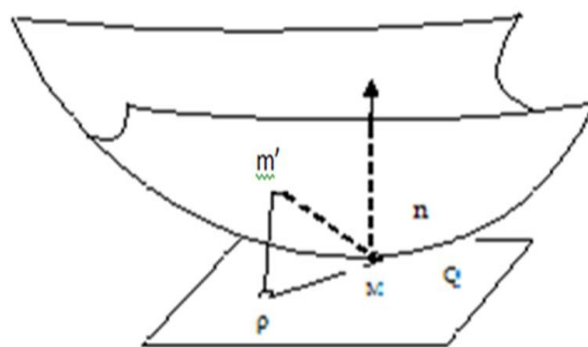
Bu yerdan ortogonal to'r uchun $F = 0$ hosil qilamiz.

1.3 §. Sirtning urinma tekisligidan chetlanishi. Sirtning ikkinchi kvadratik formasi.

Ma'lumki, sirtning ichki geometriyasi deganda sirt mustaqil obyekt sifatida qaralib, uning ustida o'lchashga doir masalalar ko'riladi. Bu jihatdan sirt planimetriyada qaraladigan tekislikni eslatadi. U yerda tekislik go'yo fazo bilan aloqasiz ravishda mavjud bo'lib, shunday soha rolini o'ynaydiki, biz shu sohadagi turli figuralarning xossalarni o'rganamiz. Stereometriyada esa tekislikni nuqta va to'g'ri chiziq bilan birga qarab, ularning o'zaro vaziyatlari tekshiriladi [1].

Egri sirtni planometrik nuqtai nazaridan qarash orqali ichki geometriya tushunchasiga keltiradi. Sirtning birinchi kvadratik forma va unga doir munosabatlar radius-vektordan (yoki uning koordinatalaidan) olingan birinchi tartibli hosilalargina bog'liqdir. Endi biz sirtning „Stereometrik“ xossalarni, ya'ni sirdagi chiziqlarning urinma tekislikdan chetlanishini o'rganamiz [1, 5, 6].

Sirtning fazodagi egriligini xarakterlash uchun du va dv larga nisbatan ikkinchi kvadratik formani kiritishga to'g'ri keladi. Sirtning M nuqtasidan M' nuqtasiga yo'nalgan vektorni Δr , shu nuqtadagi birlik normal vektorini n va sirdagi M



1.2-chizma

nuqtada o'tkazilgan urinma tekislikning shu sirdan chetlanishini h desak, bu chetlanish $(n \cdot \Delta r)$ skalyar ko'paytmaga teng bo'ladi:

$$h = (n \cdot \Delta r) = (n \cdot dr) + \frac{1}{2}(n \cdot d^2r) + (du^2 + dv^2).$$

Bu formulada $\rho = \sqrt{du^2 + dv^2}$ bilan ε ham 0 ga intiladi yoki boshqacha aytganda, u du va dv ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorni ifodalaydi. Bu yerda $(n \cdot dr) = 0$ chunki dr urinma n ga tik bo'lgan tekislikda yotadi. Shuning uchun,

$$h = \frac{1}{2}(n \cdot d^2r) + \varepsilon(du^2 + dv^2).$$

Chetlanishning bosh qismi $\frac{1}{2}(n \cdot d^2r)$. Ammo

$$(n \cdot d^2r) = (n \cdot (r_{vv} du^2 + 2r_{uv} du dv + r_{vv} dv^2 + r_u d^2u + r_v d^2v)).$$

Endi $(n \cdot r_u) = (n \cdot r_v) = 0$ ni e'tiborga olsak,

$$(n \cdot d^2r) = (n \cdot r_{uu})du^2 + 2(n \cdot r_{uv})du dv + (n \cdot r_{vv})dv^2$$

bo'ladi.

Bu tenglamaning o'ng tomoni du va dv larga nisbatan kvadratik formadir, uning koeffitsiyentlari quyidagicha belgilanadi:

$$L = (n \cdot r_{uu}), \quad M = (n \cdot r_{uv}), \quad N = (n \cdot r_{vv}), \quad .$$

Hosil bo'lgan

$$Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2$$

forma **sirtning ikkinchi kvadratik formasi** deyiladi va u quyidagicha belgilanadi:

$$II = (n \cdot d^2r) = Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2$$

Agar birinchi kvadratik forma sirtning geometriyasini aniqlovchi yoy elementlarini berilgan bo'lsa, ikkinchi kvadratik forma sirtning tashqi ko'rinishni aks etradi (1.2-chizma).

Bu yerda $\frac{II}{2} = \frac{1}{2}(n \cdot d^2r)$ ifoda h chetlanishning bosh qismiga teng bo'lgani uchun sirtni egib uning shaklini o'zgartirganda h chetlanish va demak u bilan birga ikkinchi kvadratik forma ham o'zgaradi (birinchi kvadratik ds^2 formaning o'zgarmasligini eslatamiz!).

Sirtning birinchi kvadratik formasi M ga yaqin hamma M' nuqtalar uchun har vaqt musbat edi, lekin ikkinchi kvadratik forma esa M dagi (Q) urinma tekislikdan bir tomonda yotuvchi nuqtalar uchun musbat bo'lib, (Q) ning ikkinchi tomonidagi nuqtalar uchun manfiydir (chunki ikkinchi kvadratik forma h chetlanishdagi bosh qismining yarimiga teng).

Ravshanki, tekislik uchun chetlanish aynan nolga teng $h = 0$ demak ikkinchi kvadratik forma va shu bilan uning koeffitsiyentlari ham aynan nolga teng:

$$L = M = N = 0$$

Buning teskarisi ham o'rinlidir, ya'ni biror sirt uchun ikkinchi kvadratik forma aynan nolga teng bo'lsa, u holda u albatta tekislik bo'ladi.

Agar

$$L = M = N = 0$$

shart sirtning ayrim nuqtalaridagina bajarilsa, biz sirtning bunday nuqtalarini uning zichlanish nuqtalari deymiz.

Geometrik mulohazalardan ($h \approx 0$) ravshanki, zichlanish nuqtasi atrofida sirt o'zining urinma tekisligiga odatdagi nuqtalarga qaraganda zichroq jipslashadi (h kamida uchinchi tartibli cheksiz kichikdir).

Endi ikkinchi kvadratik forma va uning koeffitsiyentlari uchun boshqa ifodalarni beramiz: uning uchun $(n \cdot dr) = 0$ ni differensiallaymiz:

$$(n \cdot d^2r) + (dn \cdot dr) = 0, \quad (n \cdot d^2r) = -(dr \cdot dn)$$

shu sababli

$$II = (n \cdot d^2r) = -(dr \cdot dn)$$

va

$$L = (r_{uu} \cdot n) = -(r_u \cdot n_u), \quad M = (r_{uv} \cdot n) = -(r_u \cdot n_v), \quad N = -(r_v \cdot n_u)$$

bo'ladi. Birlik vektor n uchun yuqorida ushbu ifodani bergan edik:

$$n = \frac{[r_u \times r_v]}{\sqrt{EF - F^2}} = \frac{1}{w} [r_u \times r_v], \quad W^2 = EF - F^2.$$

bundan foydalansak ikkinchi kvadratik forma

$$II = (n \cdot d^2r) = -(dr \cdot dn) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

ko'rinishni oladi va uning koeffitsiyentlari uchun ushbu formulalar hosil qilinadi.

$$L = (n \cdot r_{uu}) = \frac{1}{w} (r_u \cdot r_v \cdot r_{uu}) = \frac{1}{\sqrt{EF - F^2}} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix} \quad (1.15)$$

$$M = (n \cdot r_{uv}) = \frac{1}{w} (r_u \cdot r_v \cdot r_{uv}) = \frac{1}{\sqrt{EF - F^2}} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix} \quad (1.16)$$

$$N = (n \cdot r_{vv}) = \frac{1}{w} (r_v \cdot r_u \cdot r_{vv}) = \frac{1}{\sqrt{EF - F^2}} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \end{vmatrix} \quad (1.17)$$

Bu yerda

$$2h \approx Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (1.18)$$

jumladan, sirt $z = f(x, y)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v) \quad \text{va} \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

deb faraz qilib, (1.15), (1.16), (1.17) dan L , M , N uchun ushbu ifodalarni hosil qilamiz

$$L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Birinchi kvadratik forma va unga doir munosabatlar egri chiziqli koordinatalarning birinchi tartibli hosilalarga bog'liq edi. Ikkinchi kvadratik forma va uning koeffitsiyentlari orqali ifodalanuvchi munosabatlar ikkinchi tartibli hosilalarga bog'liqdir.

Demak, birinchi kvadratik forma sirt nuqtasining birinchi tartibli differensial atrofini, ikkinchi kvadratik forma esa uning ikkinchi tartibli differensial atrofini xarakterlar ekan.

Agar sirtning biror nurtasida ikkinchi kvadratik formasining barcha koeffitsiyentlari nolga teng bo'lsa, ya'ni $L = M = N = 0$ bo'lsa, boshqacha aytganda, ikkinchi kvadratik forma $II = 0$ bo'lsa, sirtning bunday nuqtalariga sirtning **zichlanish nuqtalari** deyiladi [1].

Buning geometrik izohi quyidagicha, ya'ni zichlanish nuqtasi atrofida sirt o'zining urinma tekisligiga odatdagi nuqtalariga qaraganda zichroq jipslashadi.

Tekislikning ikkinchi kvadratik formasi va shu bilan birgalikda uning koeffitsiyentlari ham nolga teng bo'ladi. Buning teskarisi ham o'rinli, ya'ni agar biror sirtning ikkinchi kvadratik formasi aynan nolga teng bo'lsa, u sirt albatta **tekislik** bo'ladi.

Haqiqatan ham. Tekislik $Ax + By + Cz + D = 0$ berilgan $C \neq 0$ faraz etsak, $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ bo'ladi. Bunda

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv 0, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv 0, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv 0$$

Demak ikkinchi kvadratik forma aynan nolga teng. Aksincha, bu uchta hosila aynan nolga teng bo'lsa, *sirt - tekislikdir*;

Agar sirtning *I* birinchi va *II* ikkinchi kvadratik forma koeffitsiyentlari proporsional bo'lsa, ya'ni $\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$ tenglik bajariladigan nuqtalarga sirtning **dumalanish nuqtalari** deyiladi [1].

Sfera uchun birinchi va ikkinchi kvadratik formaning koeffitsiyentlari proporsional bo'ladi, va aksincha ya'ni $\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$ tenglikni qanoatlantiruvchi har qanday sirt albatta sfera bo'ladi.

Haqiqatan ham. Koordinatalar boshi sfera markazida yotgan bo'lib birlik normal $\bar{n}$ bo'lsa sferaning tenglamasi $r = Rn$ (R — sfera radiusi) ko'rinishga ega bo'ladi. Bundan

$$r_u = Rn_u, \quad r_v = Rn_v$$

va

$$r_u^2 = R(r_u \cdot n_u), \quad (r_u \cdot r_v) = R(r_v \cdot n_u), \quad r_v^2 = R(r_v \cdot n_v),$$

yoki (1.15), (1.16), (1.17) formulalarga asosan ushbuni hosil qilamiz,

$$E = -RL, \quad F = -RM, \quad G = -RN$$

Bulardan

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = -\frac{1}{R}. \quad (1.19)$$

Shunday qilib, sfera uchun birinchi va ikkinchi kvadratik formalarning mos koeffitsiyentlari proporsionaldir. Aksincha (ikkinchi tartibli cheksiz kichiklarga nazarda tutilsa), shu xossaga ega bo'lgan har qanday sirt sferadir.

II BOB. GEODEZIK EGRILIK VA GEODEZIK CHIZIQLAR

2.1-§. Sirtidagi chiziqning egriligi

Ikkinchi kvadratik forma tushunchasi sirt ustidagi chiziqlarning egriligini aniqlab, shu bilan birga sirtning ham egriligini aniqlash imkonini beradi.

Faraz qilaylik,

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k$$

Biror regulyar sirtning vektor formadagi tenglamasi bo'lib, bu yerda

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (2.1)$$

funksiyalar (u, v) sohada m marta uzluksiz differensiallanuvchi, ya'ni sirt o'zining har bir nuqtasi atrofida (2.1) shakldagi parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsin.

Bu sirt ustidagi (Γ) chiziqning egriligini k bilan, uning M nuqtasida sirtning birlik normal vektorini $\vec{n}$ bilan, shu nuqtasidagi bosh normal va $\vec{n}$ vektor orasidagi burchakni θ bilan belgilasak, u holda

$$II = (\vec{n} \cdot d^2\vec{r}) = -(\overrightarrow{dr} \cdot \overrightarrow{dn}) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

ni $I = ds^2$ ga bo'lib va $\frac{d^2s}{ds^2} = k \cdot \vec{v}$ ni e'tiborga olib, quyidagini olamiz:

$$\frac{II}{I} = k(\vec{v} \cdot \vec{n})$$

yoki

$$k \cos \theta = \frac{II}{I} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \quad (2.2)$$

Demak, tayin M nuqtada umumiy urinmali ikki chiziq (Γ) va (Γ') olinsa (5-chizma), ular uchun (2.2) ning, shuningdek, k' va θ' ga nisbatan tuzilgan shunday tenglikning o'ng tomonlari va chap tomonlari teng bo'ladi, ya'ni

$$k \cos \theta = k' \cos \theta' \quad (2.3)$$

Endi MT urinmadan va sirtning shu M nuqtasidagi $\vec{n}$ normaldan o'tuvchi (Π_0) tekislikni olaylik. Kesimda urinmasi MT dan iborat (Γ_0) chiziq hosil qilinadi.

Uni biz **normal kesim** deymiz [1, 5]. Uning yopishma tekisligi (Π_0) dan iborat bo'lib, normali $\vec{n}$ bo'yicha yo'nalgan. Demak, bu (Γ_0) chiziq uchun $\theta_0 = 0$ yoki $\theta_0 = \pi$, ya'ni $\cos\theta_0 = \pm 1$.

(Γ) va (Γ_0) chiziqlar umumiy MT urinmaga egadir. Shuning uchun, yuqoridagi xulosaga asosan:

$$k_0 \cos\theta_0 = k \cos\theta$$

yoki

$$\pm k_0 = k \cos\theta \quad (2.4)$$

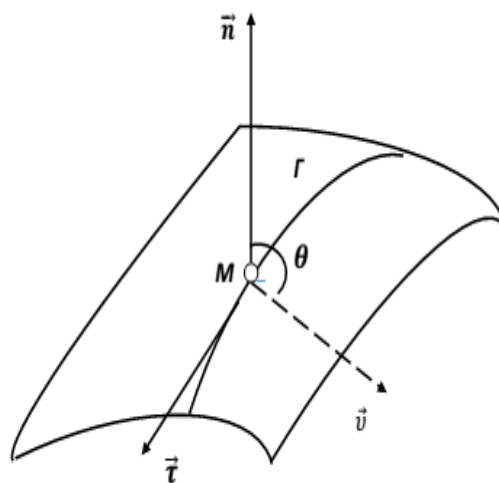
yoki egrilik radiuslari kiritilsa:

$$\rho = \check{R} \cos\theta \quad (2.5)$$

bu yerda $\rho = \frac{1}{k}$ va $\check{R} = \frac{1}{\rho}$

(2.5) tenglik ushbu **Menye teoremasini** ifodalaydi: sirt ustida yotuvchi (Γ) chiziqning M nuqtasidagi egrilik radiusi shu nuqtadan o'tgan normal kesimning egrilik radiusini (Γ) chiziqning yopishma tekisligiga proyeksiyalash natijasida hosil bo'ladi.

Menye teoremasi sirt ustidagi chiziq egriligini topishni yengillashtiradi. (Γ) chiziqning berilgan nuqtadagi normal kesimning $\check{k}$ egriligi **normal egrilik** deyiladi. Demak sirtida yotuvchi chiziqning odatdagi k egriligidan tashqari yana normal egrilik tushunchasi kiritiladi. Keyingi bo'limda bunday chiziq uchun geodezik egrilik tushunchasini ham kiritamiz.



5-chizma

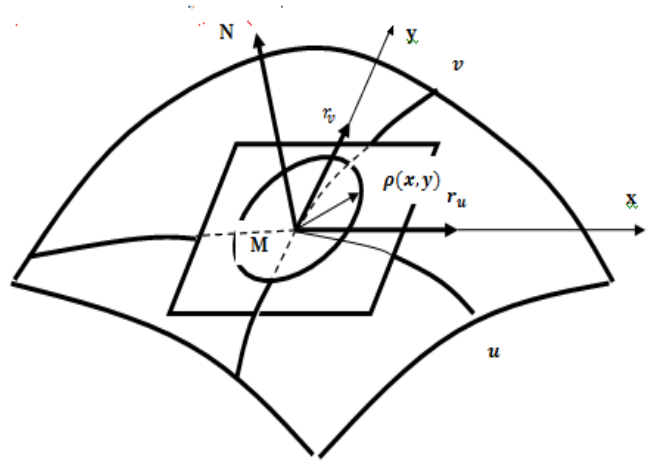
2.2-§. Sirtning bosh yo'nalishlari, to'liq va o'rta egriliklari

Oldingi paragrafdan ma'lumki, S sirtning berilgan M nuqtadagi normal egriligi $\tilde{k}$ uchun quyidagi formula o'rinli [1, 5, 6]

$$\tilde{k} = k \cos \theta = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2} \quad (2.6)$$

Kesuvchi tekislik normal atrofida aylansa, ya'ni $du:dv$ o'zgara borsa, tegishli normal kesimning $\tilde{k}$ egriligi ham o'zgara boradi. Biz hozir shu o'zgarishning xarakterini o'rganmoqchimiz.

Buning uchun sirtning M nuqtasidagi urinma tekisliklarida har bir normal kesimning urinmasiga shunday MP kesmani qo'yamizki, u shu kesimning egrilik radiusining absolyut qiymatidan olingan ildizlarga teng bo'lsin: $MP = \sqrt{|R|}$. Urinma



tekislikda hosil qilingan P nuqtalarning geometrik o'rni **egrilik indikatrasi** deyiladi. Ba'zan u Diyupen indikatrasi deb ham aytiladi. Sirdagi har bir nuqtada ma'lum bir indikatrasi bor (yuqoridagi chizma).

Indikatrining tenglamasi mana shudir; bundan indikatrasi ikkinchi tartibli markaziy chiziqli degan xulosaga kelamiz. Bu chiziqlining M nuqtadan o'ta olmasligini nazarga olmasak, bu chiziqli – ellips yoki ikkita qo'shma giperbola yoki ikkita parallel to'g'ri chiziqli ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Shu munosabat bilan sirtning nuqtalari uch sinfga bo'linadi.

1) Indikatrasi ellipsdan iborat bo'lsa, u holda $LN - M^2 > 0$ bo'lib M -elliptik nuqta deyiladi.

2) Indikatrisa ikkita qo'shma giperbola bo'lgan holda $LN - M^2 < 0$ bajarilib, M giperbolik nuqta deyiladi.

3) Indikatrisa ikkita parallel to'g'ri chiziqni ifodalaganda, $LN - M^2 = 0$ bo'ladi va M parabolik nuqta deyiladi.

Sirtning berilgan nuqtasidagi hamma normal kesimlarining egrilik markazlari shu nuqtadagi normalda joylashadi. Elliptik nuqta bu markazlar urinma tekislikdan bir tarafga, giperbolik nuqtada undan turli tarafdin bir tarafdin, giperbolik nuqtada undan turliu tarafdin joylashadi, chunki birinchi holda (2.6) kvadratik formaning ishorasi sanaladi, ikkinchi holda esa saqlanmaydi [1].

Indikatrisaning bosh yo'nalishlaridagi normal kesimlarini *bosh kesimlar deb* ularning egriliklarini *bosh egriliklar* ($\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$) deb egrilik markazlarini esa *bosh egrilik markazlari* ($\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$) deb ataymiz.

$\overline{MP} = xi + yj$ yo'nalishdagi normal kesimning birinchi bosh kesim bilan tashkil qilgan burchakni φ desak, $\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$, $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$ bo'ladi. Koordinata o'qlar bosh yo'nalishlar bo'yicha yo'nalgani sababli $D' = 0$ (qo'shmalik sharti) va $F = 0$ (ortogonallik sharti) bajariladi. U holda $\tilde{k}$ ning ifodasi D' bo'lmaydi.

$$\tilde{k} = L \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + N \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = L \cos^2 \varphi + N \sin^2 \varphi.$$

Shartga ko'ra, $\varphi = 0$ va $\varphi = \frac{\pi}{2}$ da mos ravishda birinchi va ikkinchi bosh yo'nalishlar hosil qilinadi, ya'ni

$$\begin{aligned} \varphi = 0 \text{ da } \tilde{k}_1 &= L \cos 0 = L, \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ da } \tilde{k}_2 &= N \sin \frac{\pi}{2} = N. \end{aligned}$$

$\tilde{k}$ uchun ushbu formula hosil qilinadi;

$$\tilde{k} = \tilde{k}_1 \cos^2 \varphi + \tilde{k}_2 \sin^2 \varphi \quad (2.7)$$

(2.7) ga Eyler formulasi deyiladi. U berilgan normal kesimning egriligi $\tilde{k}$ ni bosh egriliklar $\tilde{k}_1$, $\tilde{k}_2$ orqali va shu normal kesimning birinchi bosh kesim bilan tashkil qilgan φ burchagi orqali ifodalanadi.

Tanlangan sistemada indikatriza tenglamasi ham soddalashadi:

$$Lx^2 + Ny^2 = \pm 1,$$

$$\tilde{k}_1 x^2 + \tilde{k}_2 y^2 = \pm 1.$$

Eyler formulasidan muhim xulosalar chiqarish mumkin:

1) Bosh yo'nalishga simmetrik ikkita normal kesimning egriligi bir xildir, chunki, (2.21) formuladagi φ o'rniga $-\varphi$ qo'yilsa, natija o'zgarmaydi;

2) Bir-biriga tik bo'lgan har qanday ikkita normal kesim egriliklarining $k + k'$ yig'indisi bosh egriliklarning $\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2$ yig'indisiga teng.

3) Agar M dumalanish nuqtasi bo'lmasa ($\tilde{k}_1 \neq \tilde{k}_2$), bosh kesmalarning $\tilde{k}_1$ va $\tilde{k}_2$ egriliklari k ning ekstrimal qiymatlaridan iborat. Normal egrilik bosh yo'nalishda maksimum va minimum qiymatlarga erishadi $\tilde{k}_1 < \tilde{k} < \tilde{k}_2$.

Agar bosh yo'nalishlar koordinatalar o'qlarining yo'nalishlari bilan ustma-ust tushmasa, u holda ikkita bosh yo'nalishni $du:dv$ va $\delta u:\delta v$ nisbatlar ortogonallik va qo'shmalik shartlarini qanoatlantiradi:

$$Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0,$$

$$Ldu\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v = 0$$

Bu ikki tenglamani δu va δv ga nisbatan bir jinsli deb, qarasak sistemaning yechilish shartidan ushbuni hosil qilamiz

$$\begin{vmatrix} Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \\ Edu + Fdv & Fdu + Gdv \end{vmatrix} = 0 \quad (2.8)$$

bu tenglik $du:dv$ ga nisbatan kvadratik tenglamani ifodalab, u yo'nalishning bosh yo'nalishdan iborat bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shartni beradi. Uni ochiq yozaylik,

$$(FL - EM)du^2 + (EN + GL)du dv + (GM + FL)dv^2 = 0$$

bu so'nggi tenglamani esa saqlash uchun qulay shaklda yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \quad (2.9)$$

$du:dv$ ga nisbatan bu kvadratik tenglama bo'lib ayniyat emasdir, chunki faqat quyidagi ikki holdagi (2.9) tenglama aynan bajariladi.

1) Dumaloqlanish nuqtasida determinantning ikkinchi va uchinchi satrlari proporsionaldir; bunday nuqtada bir-biriga tik istalgan ikki yo'nalish bosh yo'nalishlar rolini o'ynaydi. Shu bilan birga bu nuqtada barcha yo'nalishlardagi normal kesimlarning $\tilde{k}$ egriliklari bir xildir [6].

2) Sirtning zichlanish nuqtasida $L = M = N = 0$ bo'lib bunday nuqtada istalgan yo'nalishdagi normal kesimning egriligi nolga tengdir: $\tilde{k} \equiv 0$

Bu ikki holni tekshirmay, sirtning berilgan nuqtasidagi bosh egriliklarni hisoblaylik.

(2.8) tenglikdan ikkinchi tartibli determinantning sirlari proporsional degan natija kelib chiqadi:

$$Ldu + Mdv = \lambda(Edu + Fdv), Mdu + Ndv = \lambda(Fdv + Gdv),$$

Bu yerda λ proporsionallik koeffitsiyenti. Birinchi tenglikni du ga va ikkinchisini dv ga ko'paytib, hadma-had qo'shsak

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = \lambda(Edu^2 + 2Fdv + Gdv^2)$$

bo'lib, demak λ ko'paytuvchi normal kesimning egriligiga tengdir $\lambda = \tilde{k}$. Shu sababli,

$$\begin{aligned} Ldu + Mdv &= \tilde{k}(Edu + Fdv) \\ Mdu + Ndv &= \tilde{k}(Fdv + Gdv) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Biroq bu yerda $dv:dv$ nisbat bosh yo'nalishiga doir bo'lganidan, $\tilde{k}$ o'rniga $\tilde{k}_1$ va $\tilde{k}_2$ ni qo'yish ham mumkin va bundan foydalanib, biz $\tilde{k}_1$ va $\tilde{k}_2$ ni ham topamiz. (2.10) dan quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} (L + \tilde{k}E)du + (M - \tilde{k}F)dv &= 0 \\ (M - \tilde{k}F)du + (N - \tilde{k}G)dv &= 0 \end{aligned}$$

Bu ikki tenglama du va dv differensiallarga nisbatan bir jinsli sistemani ifodalanganiligi uchun, uning noldan farqli yechimga ega bo'lish shartini yozamiz:

$$\begin{vmatrix} L - \tilde{k}E & M - \tilde{k}F \\ M - \tilde{k}F & N - \tilde{k}G \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$LN - M^2 - (EN - 2FM + GL)\tilde{k} + (EG - F^2)\tilde{k}^2 = 0 \quad (2.11)$$

Ravshanki, bu tenglamaning ikki ildizi $\tilde{k}_1$ va $\tilde{k}_2$ –bosh egriliklardir. Viet formulalariga ko'ra

$$\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

Berilgan nuqtadagi bosh egriliklarning ko'paytmasi sirtning shu nuqtadagi to'liq (ba'zan Gauss) egriligi deb va ularning yarim yig'indisi sirtning shu nuqtadagi o'rta egriligi deb ataladi. Ularni biz mos ravishda K va H bilan belgilaymiz:

$$K = \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad 2H = \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \quad (2.12)$$

Shunday qilib, to'liq egrilik birinchi va ikkinchi kvadratik forma diskriminantlarining nisbatiga tengdir [1, 6].

Endi (2.11) tenglama ushbu shaklni oladi:

$$\tilde{k}^2 - 2H\tilde{k} + K = 0$$

Bu tenglamaning ildizlari $\tilde{k}_1$ va $\tilde{k}_2$ har vaqt haqiqiydir, chunki tenglamaning diskriminanti:

$$\Delta = H^2 - K = \frac{1}{4}(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2)^2 - \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 = \frac{1}{4}(\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2)^2 > 0$$

Agar sirt $z = f(x, y)$ tenglama bilan berilgan holda,

$$L = \frac{r}{W}, \quad M = \frac{s}{W}, \quad N = \frac{t}{W}$$

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad 2H = \frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}} \quad (2.13)$$

(2.12) dan ushbu xulosani chiqaramiz:

Sirtning elliptik nuqtalarida $K > 0$.

Giperbolik nuqtalarida $K < 0$.

Parabolik nuqtalarida $K = 0$.

(2.13) formulaning birinchisidan ko'rinadiki, yoyiluvchi sirt uchun $rt - s^2 = 0$ yoki $K = 0$, ya'ni yoyiluvchi har qanday sirt uchun to'liq egrilik nolga tengdir.

2.3-§. Geodezik egrilik va geodezik chiziqlar

Sirt ustida yotuvchi Γ chiziqlarning shu sirt "ichida" qanchalik egilganligini bilish maqsadida chiziqlarning berilgan M nuqtasida sirtga urinma Π tekislik o'tkazib, chiziqdagi M nuqtaning

yetarlicha kichik atrofni shu tekislikka proyeksiyalaymiz.

Bu vaqtda urinma tekislikda qandaydir Γ' chiziq hosil qilinadi. Ana shu Γ'

chiziqlarning M nuqtasidagi egriligi Γ chiziqlarning M

nuqtadagi **geodezik (tangensial) egriligi** deyiladi va u k_g bilan belgilanadi [5, 6].

Chiziqlarning geodezik egriligi ifodasini keltirib chiqarish uchun, M nuqtadagi

urinma tekislikda shunday birlik $\vec{m}$ vektor yasaymizki, u birlik urinma $\vec{r}$ vektor bilan sirt normalidagi birlik $\vec{n}$ vektorning vektorial ko'paytmasiga teng bo'lsin:

$$\vec{m} = [\vec{n} \times \vec{r}] = [\vec{n} \times \dot{\vec{r}}] \quad (2.14)$$

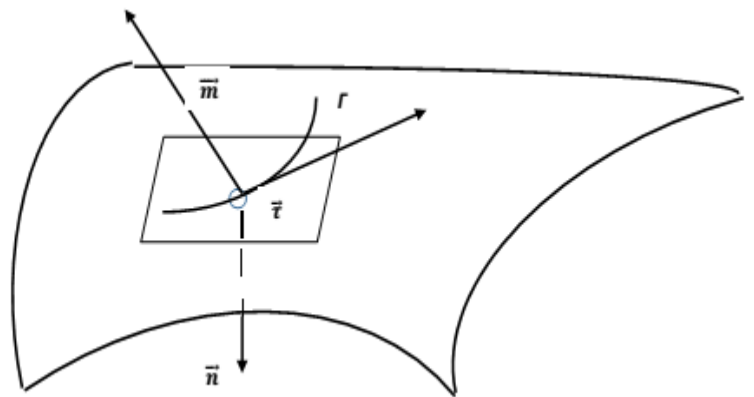
Bu vektor Γ chiziqlarning normallaridan biridir. Bu uchta $\vec{r}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ vektor M nuqtada Γ chiziq uchun tabiiy uchyotlik rolini o'ynaydi (7-chizma)

Uchta vektor, ya'ni egrilik vektori $\ddot{\vec{r}} = \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{kv}$, sirtning normali $\vec{n}$ va yasalgan $\vec{m}$ vektor Γ chiziqlarning normal tekisligida yotadi. Shuning uchun, ulardan birini

qolgan ikkitasining yo'nalishi bo'yicha yoyish mumkin: $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MG}$. Bu

yerdagi $\overrightarrow{MN}$ va $\overrightarrow{MG}$ vektorlarni egrilik vektori $\overrightarrow{MC}$ ning sirt normaliga va urinma tekislikka tushirilgan proyeksiyalari deb qarash mumkin. Yassi Γ_1 chiziq

uchun normal rolini $\vec{m}$ vektor o'ynaydi. Ravshanki, $\overrightarrow{MN} = k_n \vec{n}$; biz bu vektorni Γ'



chiziqning normal egrilik vektori deb ataymiz. $\overrightarrow{MG}$ vektorining **geodezik egrilik vektori** deyimiz, uning tegishli ishorasi bilan olingan uzunligini esa **geodezik egrilik** deb ataymiz(8-chizma).

Shunday qilib, $\ddot{\vec{r}} = \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{k\vec{v}} = k_n \vec{n} + k_g \vec{m}$ (2.15)

Endi geodezik egrilik uchun (2.14) va (2.15) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$k_g = (\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{m}) = (\dot{\vec{r}} \cdot [\vec{n} \times \dot{\vec{r}}]) = (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \vec{n}).$$

Agar odatdagicha θ harfi bilan $\vec{n}$

va $\vec{v}$ orasidagi burchakni belgilasak $k_n = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} = k \sin \theta$ va $k_g = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{m} = k \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = k \sin \theta$ bo'ladi. Xullas,

$$k_g = k \cdot \sin \theta = (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \vec{n}) \quad (2.16)$$

Bundan quyidagi ikkita xulosani yozish mumkin:

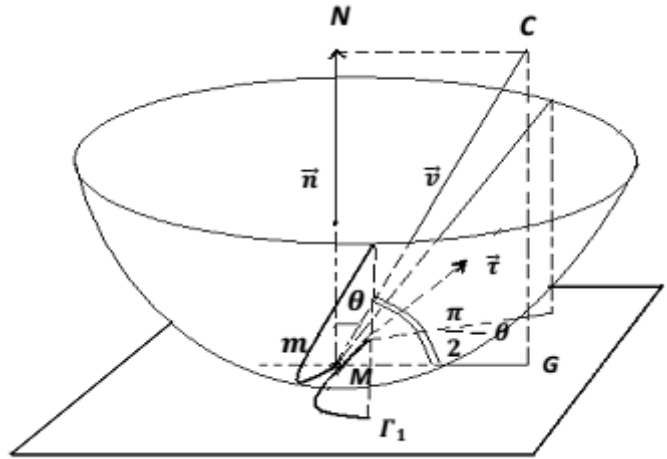
1. Sirt ustidagi har qanday to'g'ri chiziqning geodezik egriligi nolga teng (chunki $k = 0$ va $\dot{\vec{r}} = 0$).
2. $\theta = 0$ da $k_g = 0$, ya'ni bosh normal sirt normal bo'ylab yo'nalgan chiziq uchun ham $k_g = 0$.

Sirt ustida yotuvchi chiziqning har bir nuqtasidagi geodezik egriligi nolga teng bo'lsa, u chiziq **sirtning geodezik chizig'i** deyiladi [1].

Geodezik chiziqlarning ba'zi bir xossalarini o'rganish maqsadida geodezik egrilikning boshqa formulalarini keltirib chiqaramiz va geodezik chiziqlarning differensial tenglamalarini tuzamiz .

Yuqoridagi (2.16) formuladan foydalanamiz. Γ chiziq bo'ylab egri chiziqli u^1, u^2 koordinatalarini ***s* yoyning funksiyalari** deb hisoblaymiz. ‘

U holda,



$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_1 \dot{u}^1 + \vec{r}_2 \dot{u}^2$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{11}(\dot{u}^1)^2 + 2\vec{r}_{12}\dot{u}^1\dot{u}^2 + \vec{r}_{22}(\dot{u}^2)^2 + \vec{r}_1\ddot{u}^1 + \vec{r}_2\ddot{u}^2.$$

Qisqacha belgilash usuli bilan yozsak, bu ikki formula simmetrik shaklni oladi:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_\alpha \dot{u}^\alpha, \quad \ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + \vec{r}_\gamma \ddot{u}^\gamma.$$

Endi derivation formulalar, ya'ni $\vec{r}_{ik} = \Gamma_{ik}^\alpha \vec{r}_\alpha + b_{ik} \vec{n}$ dan foydalanib, ikkinchi hosilani almashtiramiz.

$$\vec{r}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^1 \vec{r}_1 + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \vec{r}_2 + b_{\alpha\beta} \vec{n}$$

U holda

$$\ddot{\vec{r}} = \Gamma_{\alpha\beta}^1 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \vec{r}_1 + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \vec{r}_2 + b_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \vec{n} + \vec{r}_1 \ddot{u}^1 + \vec{r}_2 \ddot{u}^2. \quad (2.17)$$

Endi $[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]$ ni tuzamiz va ushbu

$$[\vec{r}_1 \times \vec{r}_1] = 0, \quad [\vec{r}_1 \times \vec{r}_2] = -[\vec{r}_2 \times \vec{r}_1], \quad [\vec{n} \times \vec{n}] = 0,$$

$$(\vec{n} \cdot \vec{n}) = 1, \quad [\vec{r}_1 \times \vec{r}_2] = -[\vec{r}_2 \times \vec{r}_1] = \sqrt{g} \vec{n}, \quad \sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

tenglikni e'tiborga olib, $(\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n})$ aralash ko'paytmani hisoblaymiz:

$$k_g = (\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n}) = \sqrt{g}(\Gamma_{\alpha\beta}^2 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \dot{u}^1 - \Gamma_{\alpha\beta}^1 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \dot{u}^2 + \dot{u}^1 \ddot{u}^2 - \dot{u}^2 \ddot{u}^1) \quad (2.18)$$

yoki

$$k_g = \sqrt{g}[\dot{u}^1(\Gamma_{\alpha\beta}^2 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + \ddot{u}^2) - \dot{u}^2(\ddot{u}^1 + \Gamma_{\alpha\beta}^1 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta)]. \quad (2.19)$$

Bu geodezik egrilik uchun izlangan formuladir. Yig'ish indekslarini ishlatmasak, u quyidagi shaklni oladi:

$$k_g = \sqrt{g}[\ddot{u}^2 \dot{u}^1 - \dot{u}^1 \ddot{u}^2 + \Gamma_{11}^2 (\dot{u}^1)^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) (\dot{u}^1)^2 \dot{u}^2 - \\ - (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^2) \dot{u}^1 (\dot{u}^2)^2 - \Gamma_{22}^1 (\dot{u}^2)^3] \quad (2.20)$$

Oxirgi ikki formuladan muhim natija kelib chiqadi:

Sirt ustidagi chiziqlarning geodezik egriligi ichki geometriyasiga taalluqli bo'lib, faqat shu chiziqlarning shakliga bog'liqdir. U ikkinchi kvadratik formaga umuman bog'liq bo'lmaganligi sababli, sirtning egish jarayonida o'zgarmaydi [6].

Geodezik chiziqlarning differensial tenglamasini hosil qilish maqsadida, uning egrilik vektori $\ddot{\vec{r}}$ uchun boshqa ifoda topamiz. Buning uchun (2.18) da $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ vektorlar oldidagi koeffitsiyentlarni yig'amiz:

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{u}^1 + \Gamma_{\alpha\beta}^1 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta) \vec{r}_1 + (\ddot{u}^2 + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta) \vec{r}_2 + b_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \vec{n} \quad (2.21)$$

Bu vektorlarning urinma tekislikda yotgan tashkil etuvchisi $\overrightarrow{MG}$ vektordir; demak, bu vektorni (2.19) dan hosil qilish uchun sirt normalining $\vec{n}$ bo'yicha yo'nalgan qismini tashlasak yetarlidir:

$$\overrightarrow{MG} = (\ddot{u}^1 + \Gamma_{\alpha\beta}^1 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta) \vec{r}_1 + (\ddot{u}^2 + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta) \vec{r}_2 \quad (2.22)$$

Geodezik chiziq uchun geodezik egrilik nolga teng va shu bilan birga, geodezik vektor ham nol-vektorga tengdir, $\overrightarrow{MG} = 0$.

Sirt ustidagi maxsus nuqtalar qaralmaganligi sababli, (2.22) ga kiruvchi $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ vektorlar oldidagi koeffitsiyentlar nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:

$$\ddot{u}^1 + \Gamma_{\alpha\beta}^1 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0, \quad \ddot{u}^2 + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0 \quad (2.23)$$

yoki

$$\frac{d^2 u^1}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 u^2}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0, \quad (2.24)$$

yoki

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (2.25)$$

(2.20) tenglamadan ko'rinadiki, (2.23) shartlar bajarilganda $k_g = 0$.

Shunday qilib, geodezik chiziq bo'ylab egri chiziqli u^1, u^2 koordinatalar s ning funksiyalari deb hisoblansa, ular ikkita ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama sistemasi bo'lgan (2.24) sistemani qanoatlantiradi, $u^1(s), u^2(s)$ funksiyalar ushbu shartni ham qanoatlantirishi kerak.

$$g_{11} + \left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + 2g_{12} \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} + g_{22} \left(\frac{du^2}{ds}\right)^2 = 1$$

(2.22) sistema **Koshi sistemasidir**, chunki bunga kiruvchi Γ_{ij}^k simvollar u^1, u^2 ning tayin funksiyalaridir va ikkinchi tartibli hosilalar ma'lum ravishda birinchi tartibli hosilalar orqali ifodalangandir [2, 4].

Haqiqatdan, (2.24) ochib yozsak:

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = -\Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 - 2\Gamma_{11}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} - \Gamma_{11}^1 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} = -\Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 - 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} - \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

Biz bu yerda u^1, u^2 dan u, v belgilarga qaytdik.

Bu sistemani tekshirishni osonlashtirish maqsadida, erkli o'zgaruvchi deb hisoblangan s o'rniga u (yoki v)ni olib undan u, v nisbatan ikkinchi tartibli bitta differensial tenglamani hosil qilish mumkin. Shu maqsadda, geodezik egrilikning (2.20) dagi ifodasi endi $v = v(u)$ tenglama bilan berilgan chiziqqa moslaymiz.

Erkli o'zgaruvchi hozir bizda $u(= u^1)$ bo'lib, $v(= u^2)$ uning funksiyasidir. v ning u ga nisbatan hosilalarini shtrixlar bilan belgilaymiz:

$$v' = \frac{dv}{du} = \frac{\dot{v}}{\dot{u}}, \quad v'' = \frac{d^2v}{du^2} = \frac{\dot{u}\ddot{v} - \dot{v}\ddot{u}}{\dot{u}^3}.$$

Endi (2.20) da $\dot{u}^3$ ni qavsdan chiqarib,

$$ds = \sqrt{g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2}$$

o'rniga $ds = du\sqrt{g_{11} + 2g_{12}v' + g_{22}v'^2}$ ni qo'ysak, ushbu muhim formula hosil bo'ladi:

$$k_g = \sqrt{g} \frac{v'' + \Gamma_{11}^2 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)v' - (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)v'^2 - \Gamma_{22}^1v'^3}{(g_{11} + 2g_{12}v' + g_{22}v'^2)^{3/2}} \quad (2.24)$$

Bu holda geodezik chiziqning differensial tenglamasi ushbu shaklni oladi:

$$\frac{d^2v}{du^2} = \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{du}\right)^3 + (2\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^2) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) \frac{dv}{du} - \Gamma_{11}^2 \quad (2.25)$$

2.4-§. Sirt ustidagi yarim geodezik koordinatalar sistemasi

Yuqoridagi bo'limdagi (2.25) tenglama sirt ustidagi chiziqlarning differensial tenglamasidir:

$$\frac{d^2v}{du^2} = \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{du}\right)^3 + (2\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^2) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) \frac{dv}{du} - \Gamma_{11}^2 \quad (2.26)$$

Geodezik chiziq tenglamasini $v = v(u)$ shaklda izlasak, (2.26) dan shuni ko'ramizki, noma'lum $v(u)$ funksiyaning ikkinchi hosilasini uning birinchi hosilasiga nisbatan uchinchi darajali ko'phad shaklda ifodalanadi. Bu ko'phadning

koeffitsiyentlari esa u argumentning va izlangan v funksiyaning ma'lum funksiyalaridir [6].

Tekshirilayotgan tenglama

$$\frac{d^2v}{du^2} = F\left(u, v, \frac{dv}{du}\right)$$

shakldagi differensial tenglama bo'lganidan, uning integrali ikkita ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liqdir:

$$v = v(u, C_1 C_2).$$

Ikkinchi tartibli differensial tenglama mavjudlik teoremasiga asosan, boshlang'ich $\left(u_0, v_0, \left(\frac{dv}{du}\right)_0\right)$ qiymatlarni ixtiyoriy ravishda tanlab olib, $u = u_0$ qiymatda noma'lum v funksiya v_0 ga, uning hosilasi esa $\left(\frac{dv}{du}\right)_0$ ga teng bo'lishini talab qilish mumkin:

$$v|_{u=u_0} = v_0, \quad \left.\frac{dv}{du}\right|_{u=u_0} = \left(\frac{dv}{du}\right)_0.$$

$M_0(u_0, v_0)$ nuqta sirtidagi boshlang'ich nuqtani, $\left(\frac{dv}{du}\right)_0$ esa u nuqtadan chiquvchi geodezik chiziq yo'nalishini ifodalaydi.

Demak, sirt ustidagi geodezik chiziqlar ikki parametrli oilani tashkil qilib, har bir $M_0(u_0, v_0)$ nuqtadan har bir $\left(\frac{dv}{du}\right)_0$ yo'nalishda faqat bitta geodezik chiziq o'tkazish mumkin. $M_0(u_0, v_0)$ nuqta atrofida bu chiziq $v = v(u)$ tenglama bilan ifodalanadi.

Sirtidagi geodezik chiziqlarning bir parametrli oilasini olaylik. Bu oilaga nisbatan qo'yilgan talablardan bizga hozir kerak bo'lgani shuki, U sohaning bir nuqtasidan bitta geodezik chiziq o'tadi, ya'ni soha ichida oila chiziqlari kesishmaydi (sohaning tashqarisida kesishsa mayli). Soha ichidagi har bir nuqtadan har bir yo'nalishda faqat bitta geodezik chiziq o'tganligi uchun bunday oila "*geodezik chiziqlar maydoni*" ni tashkil qiladi [5].

Bir parametrlil oilaning geodezik chiziqlariga ortogonal bo'lgan chiziqlar oilasini hamma vaqt topish mumkin. Ana shu ikki oilani koordinat chiziqlari sifatida tanlab olaylik; bu vaqtda koordinat to'riga qarashli bitta oila geodezik chiziqlardan, ikkinchisi esa ularning ortogonal trayektoriyalaridan iborat bo'ladi. Bunday koordinat to'ri **yarim geodezik to'r** va tegishli sistema esa **yarim geodezik koordinatalar sistemasi** deyiladi [1, 5].

u^1 chiziqlar (ya'ni, $u^2 = v = \text{const}$) sifatida geodezik chiziqlarni va u^2 chiziqlar (ya'ni, $u^1 = u = \text{const}$) sifatida bu geodezik chiziqlarning ortogonal trayektoriyalarini qabul qilamiz, bunday sistemalar sirtning chiziqli elementi sodda shaklni oladi: $ds^2 = g_{11} du^2 + g_{22} dv^2$, bu yerda $v = \text{const}$ geodezik chiziq bo'lgani uchun (2.25) tenglamada

$dv = 0$, $d^2v = 0$ deb faraz qilsak, $-\Gamma_{11}^2 = 0$ kelib chiqadi. U sohaning hamma nuqtalarida:

$$-\Gamma_{11}^2 = 0, \quad g_{12} = 0 \quad (2.27)$$

bo'ladi. Koordinata to'rining ortogonallik sharti $g_{12} = 0$ ni e'tiborga olsak, Γ_{11}^2 ning ifodasi soddalashadi:

Demak, (2.27) shart

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2g_{22}} \frac{dg_{11}}{dv}$$

$$\frac{dg_{11}}{dv} = 0, \quad g_{12} = 0$$

shartiga ekvivalent, ya'ni g_{11} koeffitsiyent farqi u ning funksiyasiga bo'ladi. Xullas,

$$ds^2 = g_{11}(u)du^2 + g_{22}(u, v)dv^2.$$

Bu ifodani yana ham soddalashtirish mumkin: u chiziq ($v = \text{const}$) ning yoyi $\int \sqrt{g_{11}(u)}du$ bo'lib, u faqat u ga bog'liqdir. U holda:

$$ds^2 = du^2 + g_{22}(u, v)dv^2 \quad (2.28)$$

Yarim geodezik sistemada ds^2 mana shu shaklni oladi, ya'ni $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$.

Biror geodezik chiziq bo'ylab harakat qilganda, $v = \text{const}$ bo'lib, u holda $ds = du$, bu esa yangi u parametrning geodezik chiziq uchun yoy uzunligi rolini o'ynaganini ko'rsatadi va $u = a$, $v = b$ ga mos keluvchi ikkita ortogonal trayektoriya orasidagi u chiziqning uzunligi $(b - a)$ ga teng degan xulosaga keltiradi. Bu uzunlik v ga bog'liq bo'lmaganligidan, u shu ikki trayektoriya orasidagi hamma u chiziqlar $v = \text{const}$ – geodezik chiziqlar uchun bir xil ekanligini ko'ramiz.

Bu mulohazalar geodezik chiziqlar oilasining ortogonal trayektoriylarini **geodezik parallelar** deb atashga asos beradi [2, 6].

2.5 §. Maple dasturida misollar yechish.

Misol 1 [5]. Birinchi kvadratik formasi

$$dr^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$$

bo'lgan sirtida $u = \pm av$, $v = 1$ egri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchak yuzini toping.

Yechilishi.

```
> "SIRT YUZASINI TOPISH (birinchi kvadratik formalar
bilan berilgan bo`lsa)";
```

```
"SIRT YUZASINI TOPISH (birinchi kvadratik formalar bilan berilgan bo`lsa)"
```

```
> restart;
```

```
> a>0;
```

```
0 < a
```

```
> E:=1;
```

```
E := 1
```

```
> F:=0;
```

```
F := 0
```

```
> G:=u^2+a^2;
```

```
G := u^2 + a^2
```

```
> S:=simplify(int(int(sqrt(E*G-F*F),u=-
a*v..a*v),v=0..1),trig);
```

$$S := \frac{1}{6} \frac{4\sqrt{2}(a^2)^{(3/2)} - 6a^2\sqrt{2}\sqrt{a^2} + 3a^3\ln(a + \sqrt{2}\sqrt{a^2}) - 3a^3\ln(-a + \sqrt{2}\sqrt{a^2}) + 4a^2}{a}$$

```
> "Eslatma : oraliqni o`zingiz qo`ying" "yechim bir xil
chiqmasa, u holda soddalashtiring";
```

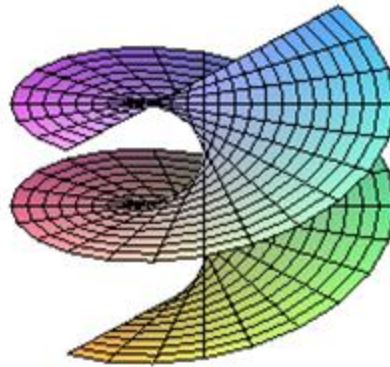
"Eslatma : oraliqni o`zingiz qo`ying" "yechim bir xil chiqmasa, u holda soddalashtiring"

```
> restart;
```

```
> "GRAFIK KO`RINISHI";
```

"GRAFIK KO`RINISHI"

```
> plot3d([u*cos(v),u*sin(v),5*v],u=-Pi..Pi,v=-Pi..Pi);
```



Misol 2. Ushbu $x = R \cos u \cos v$, $y = R \cos u \sin v$, $z = R \sin u$ sfera va uning ekvatori bilan chegaralangan sohaning yuzini aniqlang.

Yechilishi.

```
> restart;
```

```
> "BIRINCHI KVADRATIK FORMA";
```

"BIRINCHI KVADRATIK FORMA"

```
> x:=R*cos(v)*cos(u);
```

$$x := R \cos(v) \cos(u)$$

```
> y:=R*sin(v)*cos(u);
```

$$y := R \sin(v) \cos(u)$$

```
> z:=R*sin(u);
```

$$z := R \sin(u)$$

```
>E:=simplify((diff(x,u))^2+(diff(y,u))^2+diff(z,u)^2, trig);
```

$$E := R^2$$

```
>F:=diff(x,u)*diff(x,v)+diff(y,u)*diff(y,v)+diff(z,u)*diff(z,v);
```

$$F := 0$$

```
>G:=simplify(diff(x,v)^2+diff(y,v)^2+diff(z,v)^2, trig);
```

$$G := R^2 \cos(u)^2$$

```
>I=(E*du^2+2*F*dudv+G*dv^2);
```

$$I = R^2 du^2 + R^2 \cos(u)^2 dv^2$$

```
> "Yuqoridagi birinchi kvadratik forma";
```

"Yuqoridagi birinchi kvadratik forma"

```
> "SIRT YUZASINI TOPISH (birinchi kvadratik formalar bilan berilgan bulsa);"
```

"SIRT YUZASINI TOPISH (birinchi kvadratik formalar bilan berilgan bulsa)"

```
> restart;
```

```
> a>0;
```

$$0 < a$$

```
> E:=R^2;
```

$$E := R^2$$

```
> F:=0;
```

$$F := 0$$

```
> G:=R^2*cos(u)^2;
```

$$G := R^2 \cos(u)^2$$

```
> S:=simplify(int(int(sqrt(E*G-F*F),u=0..Pi/2),v=0..2*Pi), trig);
```

$$S := 2 \frac{R^4 \pi}{\sqrt{R^4}}$$

```

> "Eslatma : oraliqni o`zingiz qo`ying" "yechim bir xil
chiqmasa, u holda soddalashtiring";
"Eslatma : oraliqni o`zingiz qo`ying" "yechim bir xil chiqmasa, u holda soddalashtiring"
> restart;
> "GRAFIK KO`RINISHI";
"GRAFIK KO`RINISHI"
> plot3d([5*cos(v)*cos(u), 5*sin(v)*cos(u), 5*sin(u)], u=-
Pi..Pi, v=-Pi..Pi);

```



Misol 3. $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u^2$ tenglama bilan berilgan sirt ustida $u + v = 0$ va $u - v = 0$ chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechilishi.

```

> restart;
> "BIRINCHI KVADRATIK FORMA";
"BIRINCHI KVADRATIK FORMA"
> x:=u*cos(v);

$$x := u \cos(v)$$

> y:=u*sin(v);

$$y := u \sin(v)$$

> z:=u*u;

$$z := u^2$$

> E:=simplify((diff(x,u))^2+(diff(y,u))^2+diff(z,u)^2, trig);

$$E := 1 + 4u^2$$


```

```
>F:=diff(x,u)*diff(x,v)+diff(y,u)*diff(y,v)+diff(z,u)*diff(z,v);
```

$$F := 0$$

```
>G:=simplify(diff(x,v)^2+diff(y,v)^2+diff(z,v)^2,trig);
```

$$G := u^2$$

```
> I=(E*du^2+2*F*dudv+G*dv^2);
```

$$I = (1 + 4u^2) du^2 + u^2 dv^2$$

```
> "Yuqoridagi birinchi kvadratik forma";
```

"Yuqoridagi birinchi kvadratik forma"

```
> "SIRDAGI CHIZIQLAR ORASIDAGI BURCHAK (birinchi kvadratik formalar bilan berilgan bo`lsa)";
```

"SIRTDAGI CHIZIQLAR ORASIDAGI BURCHAK (birinchi kvadratik formalar bilan berilgan bo`lsa)"

```
> solve({v+u=0,u-v=0},{u,v});
```

$$\{u = 0, v = 0\}$$

```
> E:=1;
```

$$E := 1$$

```
> F:=0;
```

$$F := 0$$

```
> G:=u^2+a^2;
```

$$G := u^2 + a^2$$

```
> u:=t;du:=1;hu:=1;
```

$$u := t$$

$$du := 1$$

$$hu := 1$$

```
> "tenglamalarni v ga nisbatan yechib yozing";
```

"tenglamalarni v ga nisbatan yechib yozing"

```
> v:=-u;
```

$$v := -t$$

```
> dv:=diff(v,t);
```

$$dv := -1$$

```
> v:=u;
```

$$v := t$$

```
> hv:=diff(v,t);
```

$$hv := 1$$

```
> " t yuqoridagi sistemada topilgan u ga  
tenglashtiramiz";
```

```
" t yuqoridagi sistemada topilgan u ga tenglashtiramiz"
```

```
> t:=0;
```

$$t := 0$$

```
>cosA:=simplify((E*du*hu+F*(du*hv+hu*dv)+G*dv*hv)/((E*  
du*du+2*F*du*dv+G*dv*dv)*(E*hu*hu+2*F*hu*hv+G*hv*hv))^(  
1/2)), trig);
```

$$\cos A := \frac{1 - a^2}{\sqrt{(1 + a^2)^2}}$$

Misol 4. $x = R \cos v \cos u, y = R \sin v \cos u, z = R \sin u$ tenglama bilan berilgan sirtning to'la egriligini hisoblang.

Yechilishi.

```
> restart;
```

```
> x:=R*cos(v)*cos(u);
```

$$x := R \cos(v) \cos(u)$$

```
> y:=R*sin(v)*cos(u);
```

$$y := R \sin(v) \cos(u)$$

```
> z:=R*sin(u);
```

$$z := R \sin(u)$$

```
>a:=diff(x,u);a1:=diff(a,u);a2:=diff(x,v);a3:=diff(a2,v)  
);a4:=diff(a,v);
```

$$a := -R \cos(v) \sin(u)$$

$$a1 := -R \cos(v) \cos(u)$$

$$a2 := -R \sin(v) \cos(u)$$

$$a3 := -R \cos(v) \cos(u)$$

$$a4 := R \sin(v) \sin(u)$$

```
>b:=diff(y,u);b1:=diff(b,u);b2:=diff(y,v);b3:=diff(b2,v)  
);b4:=diff(b,v);
```

$$b := -R \sin(v) \sin(u)$$

$$b1 := -R \sin(v) \cos(u)$$

$$b2 := R \cos(v) \cos(u)$$

$$b3 := -R \sin(v) \cos(u)$$

$$b4 := -R \cos(v) \sin(u)$$

>c:=diff(z,u);c1:=diff(c,u);c2:=diff(z,v);c3:=diff(c2,v);c4:=diff(c,v);

$$c := R \cos(u)$$

$$c1 := -R \sin(u)$$

$$c2 := 0$$

$$c3 := 0$$

$$c4 := 0$$

>E:=simplify((diff(x,u))^2+(diff(y,u))^2+diff(z,u)^2,trig);

$$E := R^2$$

F:=diff(x,u)*diff(x,v)+diff(y,u)*diff(y,v)+diff(z,u)*diff(z,v);

$$F := 0$$

>G:=simplify(diff(x,v)^2+diff(y,v)^2+diff(z,v)^2,trig);

$$G := R^2 \cos(u)^2$$

> B:=(E*du^2+2*F*dudv+G*dv^2);

$$B := R^2 du^2 + R^2 \cos(u)^2 dv^2$$

> L:=simplify((a1*(b*c2-b2*c)-b1*(a*c2-a2*c)+c1*(a*b2-b*a2))/sqrt(E*G-F*F),trig);

$$L := \frac{R^3 \cos(u)}{\sqrt{R^4 \cos(u)^2}}$$

> M:=simplify((a4*(b*c2-b2*c)-b4*(a*c2-a2*c)+c4*(a*b2-b*a2))/sqrt(E*G-F*F),trig);

$$M := 0$$

> N:=simplify((a3*(b*c2-b2*c)-b3*(a*c2-a2*c)+c3*(a*b2-b*a2))/sqrt(E*G-F*F),trig);

$$N := \frac{R^3 \cos(u)^3}{\sqrt{R^4 \cos(u)^2}}$$

> II:=L*du^2+2*M*du*dv+N*dv^2;

$$II := \frac{R^3 \cos(u) du^2}{\sqrt{R^4 \cos(u)^2}} + \frac{R^3 \cos(u)^3 dv^2}{\sqrt{R^4 \cos(u)^2}}$$


```
> "To'la egrilik";
```

"To'la egrilik"

```
> k:=(L*N-M^2)/(E*G-F^2);
```

$$k := \frac{1}{R^2}$$

Misol 5 [5]. $x = R \cos v \cos u, y = R \sin v \cos u, z = R \sin u$ tenglama bilan berilgan sirtning o'rta egriligini hisoblang.

Yechilishi.

```
> restart;
```

```
> x:=R*cos(v)*cos(u);
```

$$x := R \cos(v) \cos(u)$$

```
> y:=R*sin(v)*cos(u);3
```

$$y := R \sin(v) \cos(u)$$

```
> z:=R*sin(u);
```

$$z := R \sin(u)$$

```
>a:=diff(x,u);a1:=diff(a,u);a2:=diff(x,v);a3:=diff(a2,v);a4:=diff(a,v);
```

$$a := -R \cos(v) \sin(u)$$

$$a1 := -R \cos(v) \cos(u)$$

$$a2 := -R \sin(v) \cos(u)$$

$$a3 := -R \cos(v) \cos(u)$$

$$a4 := R \sin(v) \sin(u)$$

```
>b:=diff(y,u);b1:=diff(b,u);b2:=diff(y,v);b3:=diff(b2,v);b4:=diff(b,v);
```

$$b := -R \sin(v) \sin(u)$$

$$b1 := -R \sin(v) \cos(u)$$

$$b2 := R \cos(v) \cos(u)$$

$$b3 := -R \sin(v) \cos(u)$$

$$b4 := -R \cos(v) \sin(u)$$

```
>c:=diff(z,u);c1:=diff(c,u);c2:=diff(z,v);c3:=diff(c2,v);c4:=diff(c,v);
```

$$c := R \cos(u)$$

$$c1 := -R \sin(u)$$

$$c2 := 0$$

$$c3 := 0$$

$$c4 := 0$$

>E:=simplify((diff(x,u))^2+(diff(y,u))^2+diff(z,u)^2,trig);

$$E := R^2$$

>F:=diff(x,u)*diff(x,v)+diff(y,u)*diff(y,v)+diff(z,u)*diff(z,v);

$$F := 0$$

>G:=simplify(diff(x,v)^2+diff(y,v)^2+diff(z,v)^2,trig);

$$G := R^2 \cos(u)^2$$

> B:=(E*du^2+2*F*dudv+G*dv^2);

$$B := R^2 du^2 + R^2 \cos(u)^2 dv^2$$

> L:=simplify((a1*(b*c2-b2*c)-b1*(a*c2-a2*c)+c1*(a*b2-b*a2))/sqrt(E*G-F*F),trig);

$$L := \frac{R^3 \cos(u)}{\sqrt{R^4 \cos(u)^2}}$$

> M:=simplify((a4*(b*c2-b2*c)-b4*(a*c2-a2*c)+c4*(a*b2-b*a2))/sqrt(E*G-F*F),trig);

$$M := 0$$

> N:=simplify((a3*(b*c2-b2*c)-b3*(a*c2-a2*c)+c3*(a*b2-b*a2))/sqrt(E*G-F*F),trig);

$$N := \frac{R^3 \cos(u)^3}{\sqrt{R^4 \cos(u)^2}}$$

> II:=L*du^2+2*M*du*dv+N*dv^2;

$$II := \frac{R^3 \cos(u) du^2}{\sqrt{R^4 \cos(u)^2}} + \frac{R^3 \cos(u)^3 dv^2}{\sqrt{R^4 \cos(u)^2}}$$

> "O'rta egrilik";

"O'rta egrilik"

> H:=simplify((E*N+G*L-2*F*M)/(2*(E*G-F^2)),trig);

$$H := \frac{R \cos(u)}{\sqrt{R^4 \cos(u)^2}}$$

Misol-6. Sfera sirtining geodezik chiziqlari tenglamasini topamiz va uni yechib, sferadagi geodezik chiziqlarini aniqlaymiz.

Sfera sirtining parametrik shaklidagi tenglamasi quyidagicha:

$$\begin{cases} x = R \cos u \cos v \\ y = R \cos u \sin v \\ z = R \sin u \end{cases}$$

„MAPLE” dasturi yordamida aniqlaymiz va uning grafik shaklini chizamiz:

```
> restart;
> x:=R*cos(u)*cos(v);
      x := R cos(u) cos(v)

> y:=R*cos(u)*sin(v);
      y := R cos(u) sin(v)

> z:=R*sin(u);
      z := R sin(u)

> E:=simplify((diff(x,u))^2+(diff(y,u))^2+diff(z,u)^2, trig);
      E := R^2

> F:=diff(x,u)*diff(x,v)+diff(y,u)*diff(y,v)+diff(z,u)*diff(z,v);
      F := 0

> G:=simplify(diff(x,v)^2+diff(y,v)^2+diff(z,v)^2, trig);
      G := R^2 cos(u)^2

> I=(E*du^2+2*F*dudv+G*dv^2);
      I = R^2 du^2 + R^2 cos(u)^2 dv^2

> Gamma[1,11] := 0; Gamma[1,12] := 0; Gamma[1,21] := 0;
Gamma[1,22] := sin(2*u)/2;
      Γ1,11 := 0
      Γ1,12 := 0
      Γ1,21 := 0
      Γ1,22 := 1/2 sin(2 u)

> Gamma[2,11] := 0; Gamma[2,12] := -tan(u); Gamma[2,21] := -tan(u);
Gamma[2,22] := 0;
```

$$\Gamma_{2,11} := 0$$

$$\Gamma_{2,12} := -\tan(u)$$

$$\Gamma_{2,21} := -\tan(u)$$

$$\Gamma_{2,22} := 0$$

> **W:=(d^2*v/du^2) ;**

$$W := \frac{d^2 v}{du^2}$$

> **W:=-Gamma[2,11]+(Gamma[1,11]-2*Gamma[2,12])*(dv/du)+(2*Gamma[1,12]-Gamma[2,22])*(dv/du)^2+Gamma[1,22]*(dv/du)^3;**

$$W := 2 \frac{\tan(u) dv}{du} + \frac{\frac{1}{2} \sin(2u) dv^3}{du^3}$$

> **v:=const;**

$$v := \text{const}$$

Endi sferadagi geodezik chiziqlarni grafikasini chizamiz:

> **restart;**

> **Sph[u]:=plot3d(r(phi,theta),phi=-Pi/2..Pi/2,theta=0..2*Pi,style=PATCH,color=blue):**

> **r_T0:=[seq([x(phi_T0(i/20),theta_T0(i/20)),y(phi_T0(i/20),theta_T0(i/20)),z(phi_T0(i/20),theta_T0(i/20))],i=0..600)]:**

r_T1:=[seq([x(phi_T1(i/20),theta_T1(i/20)),y(phi_T1(i/20),theta_T1(i/20)),z(phi_T1(i/20),theta_T1(i/20))],i=0..600)]:

r_T2:=[seq([x(phi_T2(i/20),theta_T2(i/20)),y(phi_T2(i/20),theta_T2(i/20)),z(phi_T2(i/20),theta_T2(i/20))],i=0..600)]:

r_T3:=[seq([x(phi_T3(i/20),theta_T3(i/20)),y(phi_T3(i/20),theta_T3(i/20)),z(phi_T3(i/20),theta_T3(i/20))],i=0..600)]:

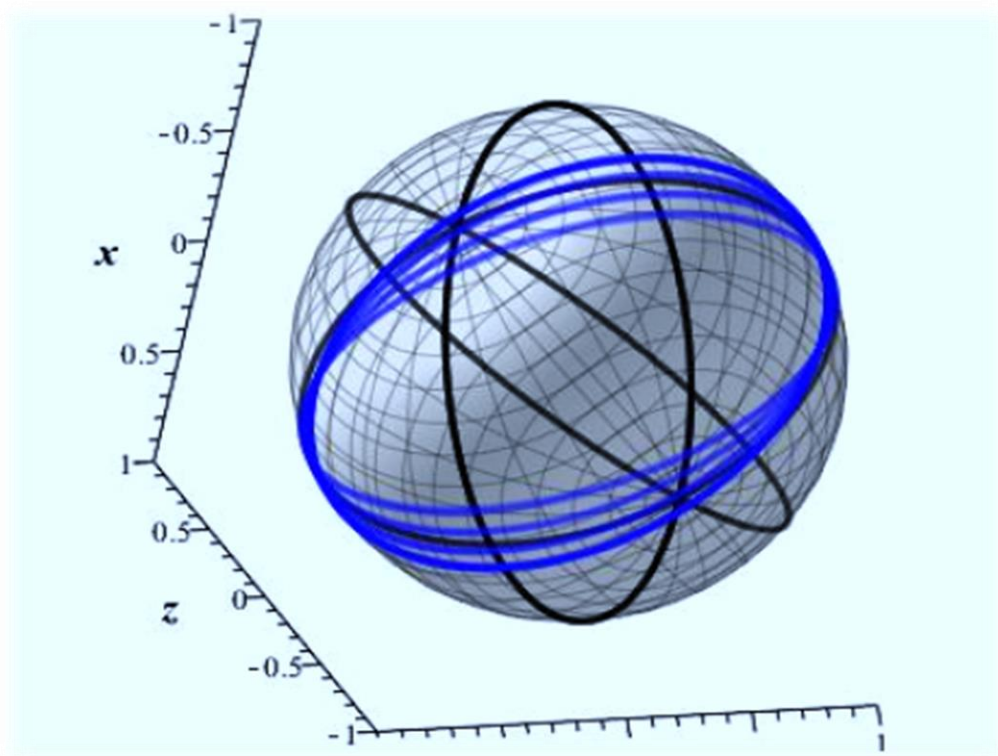
r_T_0:=[seq([x(phi_T_0(i/10),theta_T_0(i/10)),y(phi_T_0(i/10),theta_T_0(i/10)),z(phi_T_0(i/10),theta_T_0(i/10))],i=0..700)]:

```

r_T_1:= [seq([x(phi_T_1(i/20),theta_T_1(i/20)),y(phi_T_1
(i/20), theta_T_1(i/20)),
z(phi_T_1(i/20),theta_T_1(i/20))], i=0..700)]:
r_T_2:= [seq([x(phi_T_2(i/20),theta_T_2(i/20)),y(phi_T_2
(i/20), theta_T_2(i/20)),
z(phi_T_2(i/20),theta_T_2(i/20))], i=0..600)]:
r_T_3:= [seq([x(phi_T_3(i/20),theta_T_3(i/20)),y(phi_T_3
(i/20), theta_T_3(i/20)),
z(phi_T_3(i/20),theta_T_3(i/20))], i=0..600)]:
T0:=plots[spacecurve](r_T0,color=black,thickness=3):
T1:=plots[spacecurve](r_T1,color=black,thickness=3):
T2:=plots[spacecurve](r_T2,color=black,thickness=3):
T3:=plots[spacecurve](r_T3,color=black,thickness=3):
T_0:=plots[spacecurve](r_T_0,color=blue,thickness=3):
T_1:=plots[spacecurve](r_T_1,color=blue,thickness=3):
T_2:=plots[spacecurve](r_T_2,color=blue,thickness=3):
T_3:=plots[spacecurve](r_T_3,color=blue,thickness=3):

plots[display](T0,T1,T2,T3,T_0,T_1,T_2,T_3,Sph[u],
axes=FRAME, labels=[x,y,z],labelfont=
[TIMES,BOLD,14],titlefont=[TIMES,BOLD,14],
orientation=[20,60]);

```



XULOSA

Shunday qilib, bitiruv malakaviy ishida quyidagi ishlar bajarilgan:

1. Oshkor sirt uchun ikkinchi kvadratik forma koeffitsiyentlari hisoblangan;
2. Oshkor sirt uchun to'liq va o'rta egriliklar formulalari hosil qilingan;
3. Tenzor formada geodezik egrilik uchun formula hosil qilingan;
4. Geodezik koordinatalar sistemasida sirtning birinchi kvadratik formasi soddalashtirilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. В. Бляшке. Дифференциальная геометрия. ОНТИ, М., 1935.
2. Д.Гильберт и С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия, Гостениздат, 2-е изд. М., 1951
3. В.Ф.Каган. Основы теории поверхностей, Гостениздат, ч. I, М., 1947, ч. II, 1948.
4. А. Я. Норманов. Дифференциал геометрия, «Университет» нашриёти, Тошкент, 2003.
5. М. А. Собиров ва А. Е. Юсупов. Дифференциал геометрия курси, Ўзю ССР давлат ўқувғпедагогика нашриёти, Тошкент, 1989.
6. С. П. Фиников. Теория поверхностей, Москва, 1934.
7. John Oprea differential geometry and its applications, PRENTICE HALL, Upper Saddle River, NJ 07458,1997.

Internet resurslar:

1. <http://lib.mexmat.ru>;
2. <http://lib.mexmat.ru>
3. www.ziynet.uz
4. www.exponenta.ru