

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**SAMARQAND DAVLAT UNIVESITETI
MEXANIKA –MATEMATIKA FAKULTETI**

**"Matematika-fizika va funksional analiz" kafedrası
Usmonov Lochinbek Sadreddin o'g'li
"Funksional analizning asosiy prinsiplari" haqida
"5130100-matematika" ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr
darajasini olish uchun**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar: _____ A. M. Xalxo'jayev

**Bitiruv malakaviy ish "Matematik fizika va funksional analiz"
kafedrasida bajarildi.**

**Kafedraning 2017- yil 30-maydagi majlisida muhokama qilindi va
himoyaga tavsiya etildi**

Fakultet dekani: prof. A. X. Begmatov

Kafedra mudiri: prof. S. N. Laqaev

YaDAK raisi: UrDU professori A.Hasanov

SAMARQAND 2017

**Samarqand Davlat Universiteti mexanika-matematika
fakulteti 401-guruh talabasi Usmonov Lochinbekning
“Funksional analizning asosiy prinsiplari”
mavzusidagi bitiruv malakaviy ishiga**

BAHO

Mazkur bitiruv malakaviy ishida funksional analizning asosiy prinsiplari bo'lgan siquvchi akslantirishlar prinsipi, tekis chegaralanganlik prinsipi, chiziqli funksionalning davom etuvchanlik prinsipi va akslantirishning ochiqlik prinsiplari keltirilgan va bu prinsiplarda kelib chiqadigan natija va teoremlar isbotlangan, bu prinsiplarning tadbiqlariga oid misollar keltirilgan. Ishda o'rganilgan prinsiplar, misol va masalalar katta ham amaliy ham nazariy ahamiyatga ega.

Bitiruv malakaviy ishi kirish qismi, ikki bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat bo'lib, birinchi bobda asosiy prinsiplarni yoritib berish uchun kerak bo'ladigan ta'rif va teoremlar keltirilgan. Ikkinchi bobda yuqoridagi to'rtta funksional analizning asosiy prinsiplari ko'rsatilgan va ularning natijalari bo'lgan teoremlar isboti bilan keltirilgan.

Bitiruv malakaviy ishini bajarishda talaba Usmonov Lochinbek yil davomida doimiy ravishda o'z ustida ishladi va mehnatsevarligini ko'rsatdi.

Bu ish bitiruv malakaviy ishiga qo'yilgan barcha talablarga to'liq javob beradi va muvaffaqiyatli himoya qilganda, mazkur bitiruv malakaviy ishini ____ ball bilan baholash mumkin.

Ilmiy rahbar:

f.m.f.d. A.M.Xalxo'jayev

KIRISH

Masalaning qo'yilishi . Bu bitiruv malakaviy ishida funksional analizning asosiy 4 ta prinsipi ya'ni siquvchi akslantirishlar prinsipi, tekis chegaralanganlik prinsipi, chiziqli funksionalning davom etuvchanlik prinsipi va akslantirishning ochiqlik prinsiplari isboti bilan keltirilgan. Ushbu prinsiplarning tadbirlariga oid misollar ishlangan.

Mavzuning dolzarbligi. Bu prinsiplar funksional analizning yuqori matematik darajaga ega bo'lgan zamonaviy fan sifatida rivojlanishida muhim rol tutadi

Ishning maqsad va vazifalari. Ishning asosiy maqsadi 4 ta funksional analizning asosiy prinsiplarini batafsil o'rganish, ularga doir misollar yechish.

Ilmiy-tadqiqot metodlari. Bu ishda matematik analiz, kompleks analiz va funksional analiz fanlarining asosiy tushunchalaridan foydalanildi.

Ishning ilmiy va amaliy ahamiyati. Ishda urganilgan prinsiplar, misol va masalalar katta ham amaliy ham nazariy ahamiyatga ega. Bu misollardan umumiy kursda amaliy mashg'ulotlarda keng foydalanish mumkin.

Ishning tuzilishi. Bitiruv malakaviy ishi kirish qismi, ikki bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat bo'lib, birinchi bobda asosiy prinsiplarni yoritib berish uchun kerak bo'ladigan ta'rif va teoremlar keltirilgan. Ikkinchi bobda yuqoridagi to'rtta funksional analizning asosiy prinsiplari ko'rsatilgan va ularning natijalari bo'lgan teoremlar keltirilib isbotlab berilgan.

Olingan natijalarning qisqacha mazmuni. Bitiruv malakaviy ishi funksional analizning rivojlanishida muhim o'rin tutadigan asosiy prinsiplarini yoritishga bag'ishlangan.

Bitiruv ishi kirish, ikkita bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. 1- bobda asosiy natijalarning bayon etish uchun zarur bo'lgan ta'rif, teorema va tasdiqlar keltirilgan. Ikkinchi bobda esa funksional analizning asosiy prinsiplari sifatida siquvchi akslantirishlar prinsipi, tekis chegaralanganlik prinsipi, chiziqli funksionalning davom etuvchanlik prinsipi va akslantirishning ochiqlik prinsiplari isboti bilan yoritilgan. Ushbu prinsiplarga doir misollar keltirilgan.

MUNDARIJA:

Kirish.....	4
Asosiy qism.	
1-bob. Qo'shimcha ma'lumotlar.	
1.1 Akslantirishlar.....	4
1.2 Metrik fazolar.....	5
1.3 Chiziqli, normalangan, Evklid fazolari.....	7
1.4 Chiziqli uzluksiz operatorlar	12
2-bob. Asosiy prinsiplar.	
2.2 Siquvchi akslantirishlar oprinsipi.....	18
2.2 Tekis chegaralanganlik prinsipi.....	25
2.3 Chiziqli funksionalning davom etuvchanlik prinsipi.....	27
2.4 Akslantirishning ochiqlik prinsipi.....	31
Xulosa.....	36
Foydalanilgan adabiyotlar.....	37

1-bob. Qo'shimcha malumotlar.

Akslantirishlar

Funksiya tushunchasini umumlashtirish. ([3] ga q.) Ma'lumki, matematik analizda funksiya tushunchasi quyidagicha ta'riflanadi: X sonlar o'qidagi biror to'plam bo'lsin. Agar har bir $x \in OX$ songa f qoida bo'yicha aniq bir y son mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamda f funksiya aniqlangan deyiladi va $y = f(x)$ shaklda yoziladi. Bunda X to'plam f funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi, bu funksiya qabul qiladigan barcha qiymatlardan tashkil bo'lgan $E(f)$ to'plam f funksiyaning qiymatlar sohasi deyiladi, ya'ni $E(f) = \{y : y = f(x), x \in OX\}$.

Agar sonli to'plamlar o'rnida ixtiyoriy to'plamlar qaralsa, u holda funksiya tushunchasining umumlashmasi, ya'ni akslantirish ta'rifiga kelamiz. Bizga ixtiyoriy X va Y to'plamlar berilgan bo'lsin. Agar har bir $x \in OX$ elementga biror f qoida bo'yicha Y to'plamdan yagona y element mos qo'yilsa, u holda X to'plamda aniqlangan Y to'plamdan qiymatlar qabul qiluvchi f akslantirish berilgan deyiladi. Bundan keyin biz ixtiyoriy tabiatli to'plamlar bilan ish ko'ramiz (shu jumladan sonli to'plamlar bilan ham), shuning uchun ko'pgina hollarda *funksiya* termini o'rniga *akslantirish* atamasini ishlatamiz.

Endi $f: X \rightarrow Y$ akslantirish uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz. Har bir $a \in OX$ uchun unga mos qo'yilgan $b = f(a) \in OY$ element a elementning f akslantirishdagi *tasviri yoki aksi* deyiladi. Umuman, X to'plamning biror A qismi berilgan bo'lsa, A to'plam barcha elementlarining Y dagi tasvirlaridan iborat to'plam A to'plamning f akslantirishdagi *tasviri yoki aksi* deyiladi va $f(A)$ simvol bilan belgilanadi. Endi $b \in OY$ ixtiyoriy element bo'lsin. X to'plamning b ga akslanuvchi barcha elementlaridan iborat qismi b elementning f akslantirishdagi *asli* deyiladi va $f^{-1}(b)$ simvol bilan belgilanadi. $f^{-1}(b)$ to'plam $f(x) = b$ tenglama ildizlaridan iborat. O'z navbatida har bir $B \subset OY$ to'plam uchun X ning B ga o'tuvchi (akslanuvchi) qismi B to'plamning f akslantirishdagi asli deyiladi va $f^{-1}(B) = \{x \in OX : f(x) \in OB\}$ shaklda belgilanadi. Umuman olganda, Y to'plam sifatida f akslantirishning qiymatlar sohasini o'zida saqlovchi to'plam qaraladi. Agar barcha $b \in OB$ elementlar uchun ularning $f^{-1}(b)$ asllari bo'sh bo'lsa, u holda B to'plamning asli ham bo'sh to'plam bo'ladi.

Quyidagi tushunchalarni kiritamiz. Aniqlanish sohasi X bo'lgan $f: X \rightarrow Y$ akslantirishda $f(X) = Y$ tenglik bajarilsa, f akslantirish X to'plamni Y to'plamning ustiga yoki suryektiv akslantirish deyiladi. Umumiy holda, ya'ni $f(x)$ MY bo'lsa, u holda f akslantirish X to'plamni Y to'plamning ichiga akslantiradi deyiladi.

Agar $f: X \rightarrow Y$ akslantirishda X dan olingan har xil x_1 va x_2 elementlarga har xil $y_1 = f(x_1)$ va $y_2 = f(x_2)$ tasvirlar mos kelsa, u holda f inyektiv akslantirish yoki inyeksiya deyiladi. Bir vaqtda ham suryektiv ham inyektiv bo'lgan $f: X \rightarrow Y$ akslantirish biyeksiya yoki biyektiv akslantirish deyiladi.

Metrik fazolar

1-ta'rif. Bo'shmas X to'plamning ixtiyoriy x va y elementlar juftiga aniq bir manfiy masofa $\rho(x, y)$ son mos qo'yilgan bo'lib, bu moslik

- 1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simmetriklik aksiomasi),
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (uchburchak aksiomasi)

shartlarni qanoatlantirsa, ρ ga X dagi masofa yoki metrika deb ataladi. (X, ρ) juftlik metrik fazo deyiladi ([1] ga q.).

Odatda metrik fazo, ya'ni (X, ρ) juftlik bitta X harfi bilan belgilanadi. Agar X to'plamda $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ metrikalar aniqlangan bo'lsa, u holda $(X, \rho_1), (X, \rho_2), \dots, (X, \rho_n)$ metrik fazolar mos ravishda $X_1, X_2, \dots, X_n$ harflari bilan belgilanadi.

Metrik fazolarni uzluksiz akslantirishlar. Izometriya. $X = (X, \rho)$ va $Y = (Y, d)$ – metrik fazolar, f esa X ni Y ga akslantirish bo'lsin. Shunday qilib, har bir $x \in X$ elementga yagona $y = f(x) \in Y$ element mos qo'yilgan bo'lsin.

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lib, $\rho(x, x_0) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ nuqtalar uchun $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda f akslantirish $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz deyiladi. Agar f akslantirish X ning hamma nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, u holda f ni X da uzluksiz deb ataymiz.

Agar X va Y lar sonli to'plamlar bo'lsa, ya'ni x - son, f - sonli funksiya bo'lsa, u holda akslantirishning uzluksizlik ta'rifi matematik analizdan ma'lum bo'lgan funksiyaning uzluksizligi ta'rifiga aylanadi.

3-ta'rif. X metrik fazoda $x_0 \in X$ nuqta va $r > 0$ son berilgan bo'lsin. $\rho(x, x_0) < r$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ elementlar to'plami markazi x_0 nuqtada, radiusi r bo'lgan ochiq shar deb ataladi va u $B(x_0, r)$ orqali belgilanadi. Berilgan $x_0 \in X$ va $r > 0$ da $\rho(x, x_0) \leq r$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ elementlar to'plami $B[x_0, r]$ orqali belgilanadi va u markazi x_0 nuqtada, radiusi r bo'lgan yopiq shar deb ataladi.

Metrik fazolar nazariyasida markazi x_0 nuqtada va radiusi $\varepsilon > 0$ bo'lgan $B(x_0, \varepsilon)$ ochiq shar x_0 nuqtaning ε - atrofi deyiladi va u $O_\varepsilon(x_0)$ ko'rinishda belgilanadi.

4-ta'rif. Agar X metrik fazoning M qism to'plami uchun uni o'zida saqlovchi shar mavjud bo'lsa, M chegaralangan to'plam deb ataladi.

5-ta'rif. X metrik fazo, M uning qism to'plami va $x \in X$ bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$ munosabat bajarilsa, x nuqta M ning urinish nuqtasi deyiladi. M to'plamning barcha urinish nuqtalaridan iborat $[M]$ to'plam M ning yopig'i deyiladi.

6-ta'rif. X - metrik fazo va M - uning bo'shmas qism to'plami bo'lsin. Agar $x \in X$ ning ixtiyoriy $O_\varepsilon(x)$ atrofi M ning cheksiz ko'p elementlarini saqlasa, u holda $x \in X$ nuqta M to'plamning limitik nuqtasi deyiladi.

7-ta'rif. Agar X metrik fazodagi M to'plam uchun $M = [M]$ tenglik bajarilsa, M yopiq to'plam deb ataladi. Boshqacha aytganda, agar to'plam o'zining barcha limitik nuqtalarini saqlasa, u yopiq to'plam deb ataladi.

8-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε natural son mavjud bo'lib, barcha $n > N_\varepsilon$ va $m > N_\varepsilon$ nomerlar uchun $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik deyiladi.

9-ta'rif. Agar X metrik fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda X to'la metrik fazo deyiladi.

Chiziqli, normalangan, Evklid fazolari.

10-ta'rif. Agar elementlari $x, y, z, \dots$ bo'lgan L to'plamda quyidagi ikki amal aniqlangan bo'lsa:

I. Ixtiyoriy ikkita $x, y \in L$ elementlarga ularning yig'indisi deb ataluvchi aniq bir $x + y \in L$ element mos qo'yilgan bo'lib, ixtiyoriy $x, y, z \in L$ elementlar uchun

$$1) \quad x + y = y + x \text{ (kommutativlik),}$$

$$2) \quad x + (y + z) = (x + y) + z \text{ (assotsiativlik),}$$

$$3) \quad L \text{ da shunday } \theta \text{ element mavjud bo'lib, } x + \theta = x \text{ (nolning mavjudligi),}$$

4) shunday $-x \in L$ element mavjud bo'lib, $x + (-x) = \theta$ (qarama-qarshi elementning mavjudligi) aksiomalar bajarilsa;

II. ixtiyoriy $x \in L$ element va ixtiyoriy α son ($\alpha \in R$ yoki $\alpha \in C$) uchun x elementning α songa ko'paytmasi deb ataluvchi aniq bir $\alpha x \in L$ element mos qo'yilgan bo'lib, ixtiyoriy $x, y \in L$ va ixtiyoriy α, β sonlar uchun

$$5) \quad \alpha(\beta x) = (\alpha \beta)x,$$

$$6) \quad 1 \cdot x = x,$$

$$7) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$8) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

aksiomalar bajarilsa, u holda L to'plam chiziqli fazo deb ataladi.

Qism fazo

Agar L' ning o'zi L da kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazoni tashkil qilsa, u holda L' to'plam L ning qism fazosi deyiladi ([4] ga q.).

1-misol Ixtiyoriy n ta $x_1, x_2, \dots, x_n$ haqiqiy sonlarning tartiblangan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ guruhlaridan tashkil bo'lgan to'plamda har bir x va y lar jufti (x, y) ga

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} \quad (1)$$

manfiy masofa sonni mos qo'yuvchi ρ akslantirish masofani aniqlaydi. Hosil bo'lgan metrik fazo n - o'lchamli arifmetik Evklid fazo deb ataladi. Endi (1) formula bilan aniqlangan ρ moslik metrika aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz:

$$(1) \quad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} = 0 \Leftrightarrow x = y$$

dan 1-aksiomaning bajarilishi bevosita ko‘rinib turibdi.

$$2) \quad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2} = \rho(y, x).$$

Endi 3-aksiomaning bajarilishini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy uchta $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ nuqtalar uchun uchburchak aksiomasi

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - z_k)^2} \quad (2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar $a_k = x_k - y_k$, $b_k = y_k - z_k$ belgilashlarni kiritdik, $x_k - z_k = a_k + b_k$ bo‘ladi

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \quad (3)$$

ko‘rinishni oladi. Ushbu

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

ayniyatni e‘tiborga olsak,

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \quad (4)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. (4) *Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi* deb ataladi. U holda biz

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + \\ &+ 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} + \sum_{k=1}^n b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)^2 \end{aligned}$$

munosabatga ega bo‘lamiz. Bu munosabatdan (3) tengsizlik bevosita kelib chiqadi. Demak, uchburchak aksiomasi o‘rinli ekan. Hosil bo‘lgan metrik fazo R^n simvol bilan belgilanadi.

2-misol n - ta haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlaridan iborat R^n to'plamda har bir $p \geq 1$ son uchun

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (5)$$

formula bilan aniqlangan ρ_p moslik masofa aniqlaydi va hosil bo'lgan metrik fazo R_p^n simvol bilan belgilanadi.

11-ta'rif. L chiziqli fazoda aniqlangan f sonli funksiya funksional deb ataladi. Agar barcha $x, y \in L$ lar uchun

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

bo'lsa, f additiv funksional deyiladi.

12-ta'rif. Agar barcha $x \in L$ va barcha $\alpha \in C$ lar uchun

$$f(\alpha x) = \alpha f(x),$$

bo'lsa, f bir jinsli funksional deyiladi. Agar barcha $x \in L$ va barcha $\alpha \in C$ sonlar uchun

$$f(\alpha x) = \bar{\alpha} f(x)$$

bo'lsa, u holda kompleks chiziqli fazoda aniqlangan f funksional qo'shma bir jinsli deyiladi, bu yerda $\bar{\alpha}$ soni α ga qo'shma kompleks son.

13-ta'rif. Additiv va bir jinsli funksional chiziqli funksional deyiladi. Additiv va qo'shma bir jinsli funksional qo'shma chiziqli (yoki antichiziqli) funksional deyiladi.

Qavariq to'plamlar va qavariq funksionallar. L - haqiqiy chiziqli fazo, x va y uning ikki nuqtasi bo'lsin. U holda

$$\alpha x + \beta y, \quad \alpha, \beta \in [0, 1], \quad \alpha + \beta = 1$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha elementlar to'plami x va y nuqtalarni tutashtiruvchi kesma deyiladi va u $[x, y]$ bilan belgilanadi, ya'ni

$$[x, y] = \{ \alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in [0, 1], \alpha + \beta = 1 \}.$$

14-ta’rif. Agar $M \subset L$ to‘plam o‘zining ixtiyoriy $x, y \in M$ nuqtalarini tutashtiruvchi $[x, y]$ kesmani ham o‘zida saqlasa, M ga qavariq to‘plam deyiladi.

15-ta’rif. Agar L haqiqiy chiziqli fazoda aniqlangan manfiymas p funksional

$$1) p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in L,$$

$$2) p(ax) = a p(x), \quad \forall a \geq 0 \text{ va } \forall x \in L$$

shartlarni qanoatlantirsa, p ga qavariq funksional deyiladi.

16-ta’rif. L - kompleks chiziqli fazo va unda aniqlangan manfiymas p funksional berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $x, y \in L$ va ixtiyoriy $\alpha \in C$ uchun

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{va} \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$$

shartlar bajarilsa, u holda p - qavariq funksional deyiladi.

17-ta’rif. Bizga L chiziqli fazo va unda aniqlangan p funksional berilgan bo‘lsin. Agar p quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa, unga norma deyiladi:

$$1) p(x) \geq 0, \quad \forall x \in L; \quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$$

$$2) p(ax) = |a| p(x), \quad \forall a \in C, \quad \forall x \in L;$$

$$3) p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in L.$$

18-ta’rif. Norma kiritilgan L chiziqli fazo chiziqli normalangan fazo deyiladi va $x \in L$ elementning normasi $\|x\|$ orqali belgilanadi.

19-ta’rif. Biror $x \in X$ va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ mavjud bo‘lib, barcha $n > n_0$ larda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $x \in X$ elementga yaqinlashadi deyiladi.

20-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ mavjud bo‘lib, barcha $n > n_0$ va $p \in N$ larda $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ - fundamental ketma-ketlik deyiladi.

21-ta’rif. Agar X chiziqli normalangan fazodagi ixtiyoriy $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda X to‘la normalangan fazo yoki Banach fazosi deyiladi.

22-ta'rif. Bizga L haqiqiy chiziqli fazo berilgan bo'lsin. Agar $L \times L$ dekart ko'paytmada aniqlangan p funksional quyidagi to'rtta shartni qanoatlantirsa, unga skalyar ko'paytma deyiladi:

- 1) $p(x, x) \geq 0, \forall x \in L; p(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$
- 2) $p(x, y) = p(y, x), \forall x, y \in L;$
- 3) $p(\alpha x, y) = \alpha p(x, y), \forall \alpha \in R, \forall x, y \in L;$
- 4) $p(x_1 + x_2, y) = p(x_1, y) + p(x_2, y), \forall x_1, x_2, y \in L,$

22-ta'rif. Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo Evklid fazosi deyiladi va x, y elementlarning skalyar ko'paytmasi (x, y) orqali belgilanadi ([6] ga q.).

Evklid fazosida x elementning normasi

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

formula orqali aniqlanadi. Bu funksional norma aksiomalarini qanoatlantiradi. Skalyar ko'paytmaning 1-4 shartlaridan normaning 1-2 shartlari bevosita kelib chiqadi. Uchburchak aksiomasining bajarilishi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataluvchi quyidagi

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

24-tarif. E Evklid fazosi $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ normaga nisbatan to'la bo'lsa, u to'la Evklid fazosi deyiladi

25-ta'rif. Cheksiz o'lchamli to'la Evklid fazosi Hilbert fazosi deyiladi.

26-ta'rif. Agar R va R^* Evklid fazolari o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lib,

$$x \leftrightarrow x^*, \quad y \leftrightarrow y^*, \quad x, y \in R, \quad x^*, y^* \in R^*$$

ekanligidan

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*, \quad \lambda x \leftrightarrow \lambda x^* \quad \text{va} \quad (x, y) = (x^*, y^*)$$

munosabatlar kelib chiqsa, R va R^* lar izomorf fazolar deyiladi

Misol. $C_2[a, b]$ Evklid fazosi to'la emas, shuning uchun $C_2[a, b]$ Hilbert fazosi bo'la olmaydi.

Misol. ℓ_2 va $L_2[a, b]$ lar cheksiz o'lchamli to'la separabel Evklid fazolaridir. Shuning uchun ular Hilbert fazolari bo'ladi.

Boshqacha aytganda, Evklid fazolarining izomorfligi shundan iboratki, bu fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lib, bu moslik shu fazolardagi chiziqli amallarni va ulardagi skalyar ko'paytmani saqlaydi.

Ma'lumki, n - o'lchamli ixtiyoriy ikkita Evklid fazosi o'zaro izomorfdir. Cheksiz o'lchamli Evklid fazolari o'zaro izomorf bo'lishi shart emas. Masalan ℓ_2 va $C_2[a, b]$ fazolar izomorf emas, chunki ℓ_2 to'la, $C_2[a, b]$ esa to'la emas.

Chiziqli uzluksiz operatorlar

Biz asosan chiziqli operatorlarni qaraymiz. Chiziqli operatorlarning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami chiziqli normalangan fazolarning qism fazolari bo'ladi. Shunday qilib, bizga X va Y chiziqli normalangan fazolar berilgan bo'lsin.

22-ta'rif. X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning yagona y elementini mos qo'yuvchi

$$Ax = y \quad (x \in X, y \in Y)$$

akslantirish operator deyiladi. ([4] ga q.)

Umuman A operator X ning hamma yerida aniqlangan bo'lishi shart emas. Bu holda Ax mavjud va $Ax \in Y$ bo'lgan barcha $x \in X$ lar to'plami A operatorning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(A)$ bilan belgilanadi, ya'ni:

$$D(A) = \{x \in X : Ax \text{ mavjud va } Ax \in Y\}.$$

Agar chiziqli A operator qaralayotgan bo'lsa, $D(A)$ ning chiziqli ko'pxillilik bo'lishi talab qilinadi, ya'ni agar $x, y \in D(A)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ lar uchun $\alpha x + \beta y \in D(A)$.

23-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x, y \in D(A) \subset X$ elementlar va ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ sonlar uchun

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A ga chiziqli operator deyiladi.

24-ta'rif. Bizga $A: X \rightarrow Y$ operator va $x_0 \in D(A)$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar $y_0 = Ax_0 \in Y$ ning ixtiyoriy V atrofi uchun, x_0 nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in U \cap D(A)$ lar uchun $Ax \in V$ bo'lsa, A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

25-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mavjud bo‘lib,

$\|x - x_0\| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in D(A)$ lar uchun $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

26-ta’rif. Agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlik uchun $\|Ax_n - Ax_0\| \rightarrow 0$ bo‘lsa, u holda A operator x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

27-ta’rif. $A: X \rightarrow Y$ chiziqli operator bo‘lsin. Agar shunday $C > 0$ son mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun

$$\|Ax\| \leq C \cdot \|x\| \quad (11)$$

tengsizlik bajarilsa, A chegaralangan operator deyiladi.

28-ta’rif. (11) tengsizlikni qanoatlantiruvchi C sonlar to‘plamining aniq quyi chegarasi A operatorning normasi deyiladi, va u $\|A\|$ bilan belgilanadi, ya’ni

$$\|A\| = \inf C.$$

Bu ta’rifdan ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ tengsizlik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

3-natija. Ixtiyoriy $A \in L(X, Y)$ va $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$ uchun

$$\|Ax\| \leq \|A\| \quad (12) \quad \text{tengsizlik o‘rinli.}$$

29-ta’rif. $A: X \rightarrow Y$ va $B: X \rightarrow Y$ chiziqli operatorlarning yig‘indisi deb, $x \in D(A) \cap D(B)$ elementga $y = Ax + Bx \in Y$ elementni mos qo‘yuvchi $C = A + B$ operatorga aytiladi.

Ravshanki, C chiziqli operator bo‘ladi. Agar $A, B \in L(X, Y)$ bo‘lsa, u holda C ham chegaralangan operator bo‘ladi va

$$\|C\| = \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (13)$$

tengsizlik o‘rinli. Haqiqatan ham,

$$\|Cx\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| \leq (\|A\| + \|B\|) \|x\|.$$

Bu yerdan (13) tengsizlik kelib chiqadi.

30-ta’rif. A chiziqli operatorning α songa ko‘paytmasi X elementga αAx elementni mos qo‘yuvchi operator sifatida aniqlanadi, ya’ni

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax.$$

31-ta'rif. $A : X \rightarrow Y$ va $B : Y \rightarrow Z$ chiziqli operatorlar berilgan bo'lib $R(A) \subset D(B)$ bo'lsin. B va A operatorlarning ko'paytmasi deganda, har bir $x \in D(A)$ ga Z fazoning $z = B(Ax)$ elementini mos qo'yuvchi $C = BA : X \rightarrow Z$ operator tushuniladi.

Agar A va B lar chiziqli chegaralangan operatorlar bo'lsa, u holda C ham chiziqli chegaralangan operator bo'ladi va

$$\|C\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \quad (14)$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham,

$$\|Cx\|_Z = \|B(Ax)\|_Z \leq \|B\| \cdot \|Ax\|_Y \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_X.$$

Bu yerdan (14) tengsizlik kelib chiqadi.

Operatorlarni qo'shish va ko'paytirish assotsiativdir. Qo'shish amali kommutativ, lekin ko'paytirish amali kommutativ emas.

Agar X va Y lar chiziqli normalangan fazolar bo'lsa, $L(X, Y)$ ham chiziqli normalangan fazo bo'ladi, ya'ni $p : L(X, Y) \rightarrow R$,

$$p(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

funksional normaning 1-3 - shartlarini qanoatlantiradi.

1-teorema. X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi

$A : X \rightarrow Y$ chiziqli operator berilgan bo'lsin. U holda quyidagi tasdiqlar teng kuchli:

- 1) A operator biror x_0 nuqtada uzluksiz;
- 2) A operator uzluksiz;
- 3) A operator chegaralangan.

4-natija. A chiziqli operator chegaralangan bo'lishi uchun uning uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

2-teorema. X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan A operatorning normasi $\|A\|$ uchun

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (15)$$

tenglik o'rinli.

Bu mavzuda biz chiziqli uzluksiz (chegaralangan) operatorlar fazosi $L(X, Y)$ ning to'raligi haqidagi teoremani isbotlaymiz. Operatorlar ketma-ketligining kuchsiz, kuchli (nuqtali) va tekis (norma bo'yicha) yaqinlashish ta'riflarini beramiz. Ularni misollarda tahlil qilamiz.

32-ta'rif. Agar $\{A_n\} \subset L(X, Y)$ operatorlar ketma-ketligi uchun shunday $A \in L(X, Y)$ operator mavjud bo'lib, $\|A_n - A\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ bo'lsa, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga norma bo'yicha yoki tekis yaqinlashadi deyiladi va $A_n \xrightarrow{u} A$ shaklda belgilanadi.

33-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\|A_n x - Ax\| \rightarrow 0$ bo'lsa, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchli yoki nuqtali yaqinlashadi deyiladi va $A_n \xrightarrow{s} A$ shaklda belgilanadi.

34-ta'rif. Agar ixtiyoriy $f \in Y^*$ va ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(A_n x) \rightarrow f(Ax)$ bo'lsa, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchsiz yoki kuchsiz ma'noda ($A_n \xrightarrow{w} A$) yaqinlashuvchi deyiladi.

34-ta'rif Hilbert fazosida quyidagicha bo'ladi.

35-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x, y \in H$ uchun $(A_n x, y) \rightarrow (Ax, y)$ bo'lsa, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchsiz yaqinlashuvchi deyiladi.

3-teorema. Agar Y to'la fazo bo'lsa, u holda $L(X, Y)$ fazo ham to'la, ya'ni Banach fazosi bo'ladi.

Agar operatorning qiymatlari sonlardan iborat bo'lsa, bunday operator funksional deyiladi. Agar X chiziqli fazoda aniqlangan f funksional uchun quyidagi shartlar bajarilsa

$$1) f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X; \quad \text{additivlik}$$

$$2) f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbf{C} \text{ (yoki } \mathbf{R}), \quad \text{bir jinslilik}$$

f ga chiziqli funksional deyiladi.

33-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lib, $\|x - x_0\| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in D(f)$ lar uchun $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, f funksional $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Agar f funksional ixtiyoriy $x \in D(f)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, f uzluksiz funksional deyiladi.

33-ta'rifga teng kuchli bo'lgan quyidagi ta'rifni keltiramiz.

34-ta'rif. Agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlik uchun $|f(x_n) - f(x_0)| \rightarrow 0$ bo'lsa, u holda f funksional x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

35-ta'rif. Agar ixtiyoriy $y \in \text{Im} A$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo'lsa, u holda A teskarilanuvchan operator deyiladi.

Agar A teskarilanuvchan operator bo'lsa, u holda ixtiyoriy $y \in \text{Im} A$ ga $Ax = y$ tenglamaning yechimi bo'lgan yagona $x \in D(A)$ element mos keladi. Bu moslikni o'rnatuvchi operator A operatorga teskari operator deyiladi va A^{-1} bilan belgilanadi, hamda

$$A^{-1} : Y \rightarrow X, \quad D(A^{-1}) = \text{Im} A, \quad \text{Im} A^{-1} = D(A).$$

Bundan tashqari teskari operatorning aniqlanishidan

$$A^{-1}Ax = x, \quad x \in D(A), \quad AA^{-1}y = y, \quad y \in D(A^{-1}) \quad (17)$$

tengliklar kelib chiqadi.

Endi A akslantirish X ni o'zini-o'ziga akslantiruvchi chiziqli operator bo'lsin. Agar $B \in L(X, X) = L(X)$ operator uchun $BA = I$ bo'lsa, u holda B operator A operatorga chap teskari operator deyiladi. Xuddi shunday, $AC = I$ tenglik bajarilsa, C operator A ga o'ng teskari operator deyiladi.

1-tasdiq. Agar A operator uchun ham chap teskari, ham o'ng teskari operatorlar mavjud bo'lsa, u holda ular o'zaro teng.

2-tasdiq. Agar A uchun bir vaqtda ham o'ng teskari, ham chap teskari operatorlar mavjud bo'lsa, u holda A teskarilanuvchan operator bo'ladi va $A^{-1} = B = C$ tenglik o'rinli.

4-teorema. A chiziqli operatorga teskari bo'lgan A^{-1} operator ham chiziqlidir.

5-teorema. $A: X \rightarrow Y$ chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lishi uchun $Ax = \theta$ tenglama faqat $x = \theta$ yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli.

$A(x_1 - x_2) = \theta$ bo'ladi. Shartga ko'ra, $x_1 - x_2 = \theta$. Bundan $x_1 = x_2$. Δ

6-teorema. X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli A operator berilgan bo'lsin. $\text{Im}A$ da chegaralangan A^{-1} operator mavjud bo'lishi uchun, shunday $m > 0$ son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in D(A)$ lar uchun

$$\|Ax\| \geq m\|x\| \quad (18)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

2-bob. Funktsional analizning asosiy prinsiplari.

2.1 Siquvchi akslantirishlar prinsipi

Berilgan shartlarda tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi bilan bog'liq masalalarni mos metrik fazolardagi biror akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi mavjudligi va yagonaligi haqidagi masala ko'rinishida ifodalash mumkin. Qo'zg'almas nuqta mavjudligi va yagonaligi belgilari ichida eng sodda va shu bilan birga juda muhim belgi - bu «siquvchi akslantirishlar prinsipi» deb nomlanuvchi belgidir.

2.1-ta'rif. X metrik fazo va uni o'zini-o'ziga akslantiruvchi A akslantirish berilgan bo'lsin. Agar shunday $\alpha \in (0;1)$ son mavjud bo'lib, barcha $x, y \in X$ nuqtalar uchun

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y) \quad (2.1)$$

tengsizlik bajarilsa, A siquvchi akslantirish deb ataladi.

Har bir siquvchi akslantirish uzluksizdir. Haqiqatan ham, agar $x_n \rightarrow x$ ($\rho(x_n, x) \rightarrow 0$) bo'lsa, u holda

$$\rho(Ax_n, Ax) \leq \alpha \rho(x_n, x)$$

bo'lgani uchun $Ax_n \rightarrow Ax$.

Agar $A: X \rightarrow X$ akslantirish uchun shunday $x \in X$ nuqta mavjud bo'lib $Ax = x$ tenglik bajarilsa, x nuqta A akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi.

1-teorema. (Siquvchi akslantirishlar prinsipi). To'la metrik fazoda aniqlangan har qanday siquvchi akslantirish yagona qo'zg'almas nuqtaga ega. ([1] ga q.)

Isbot. X metrik fazodan ixtiyoriy x_0 nuqtani olamiz. Keyin $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0$, $x_3 = Ax_2 = A^3x_0, \dots, x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \dots$ nuqtalar ketma-ketligini qaraymiz. Ixtiyoriy m, n ($n < m$) natural sonlar uchun

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_m) &= \rho(A^n x_0, A^m x_0) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \\
&\leq \alpha^n (\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})) \leq \\
&\leq \alpha^n (\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})) \leq \\
&\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

tengsizlik o'rinli. $\alpha \in (0;1)$ bo'lgani uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n \rho(x_0, x_1) = 0.$$

Shuning uchun $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlikdir. X to'la metrik fazo va $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lgani uchun u yaqinlashuvchi. Aytaylik,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

bo'lsin. U holda A akslantirishning uzluksizligiga ko'ra

$$Ax = A \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

Shunday qilib, A akslantirish uchun qo'zg'almas nuqta mavjud ekan. Uning yagonaligini isbotlaymiz. Agar

$$Ax = x, \quad Ay = y$$

desak, (2.1) tengsizlikka ko'ra

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y).$$

Bundan $\alpha \in (0;1)$ bo'lgani uchun

$$\rho(x, y)(1 - \alpha) \leq 0 \Rightarrow \rho(x, y) = 0$$

ya'ni

$$x = y$$

bo'lishi kelib chiqadi. Qo'zg'almas nuqta yagona ekan. Δ

Siquvchi akslantirishlar prinsipining tadbirlari

Siquvchi akslantirishlar prinsipini har xil turdagi tenglamalar yechimlari mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremlarni isbotlashda qo'llash mumkin. Siquvchi

mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremlarni isbotlashda qo'llash mumkin. Siquvchi akslantirishlar prinsipi $Ax = x$ tenglama yechimi mavjudligi va yagonaligini isbotlash uchungina qo'llanib qolmay, bu tenglama yechimini topish usulini ham beradi.

Siquvchi akslantirishlar prinsipining tadbiriga doir misollar qaraymiz.

1. R^n fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi va

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

formulalar orqali aniqlangan A akslantirishning siquvchilik shartlarini toping.

Yechish. Qanday shartlarda A siquvchi akslantirish bo'ladi? Bu savolga javob fazoda qanday metrika berilishiga bog'liq. Biz quyida uch xil variantni qaraymiz:

a) R_∞^n fazo, ya'ni

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

bo'lsin.

$$\begin{aligned} \rho(y', y'') &= \max_{1 \leq i \leq n} |y'_i - y''_i| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x'_j - x''_j| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |x'_j - x''_j| = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \rho(x', x''). \end{aligned}$$

Bu yerdan kelib chiqadiki, A siquvchi akslantirish bo'lishi uchun

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \alpha < 1 \quad (2.2)$$

shartning bajarilishi yetarli. Shuning uchun R_∞^n fazoda (2.2) shartni A akslantirishning siquvchilik sharti sifatida qabul qilamiz.

b) R_1^n fazo, ya'ni

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

bo'lsin. U holda

$$\rho(y', y'') = \sum_{i=1}^n |y'_i - y''_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x'_j - x''_j| =$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot |x'_j - x''_j| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \sum_{j=1}^n |x'_j - x''_j| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \rho(x', x'').$$

Bu yerdan ko'rinadiki, A akslantirish uchun siquvchilik sharti R_1^n fazoda

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \alpha < 1 \quad (2.3)$$

ko'rinishga ega.

c) R^n fazo, ya'ni

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} \rho^2(y', y'') &= \sum_{i=1}^n (y'_i - y''_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \cdot \sum_{j=1}^n (x'_j - x''_j)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \cdot \rho^2(x', x''). \end{aligned}$$

Yuqorida keltirilgan tenglik va tengsizliklarga ko'ra R^n fazoda A akslantirishning siquvchilik sharti

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \leq \alpha < 1 \quad (2.4)$$

ko'rinishga ega.

Shunday qilib, agar (2.2)-(2.4) shartlardan birortasi bajarilsa, u holda yagona $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqta mavjud bo'lib,

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

bo'ladi. Bundan tashqari bu nuqtada ketma-ket yaqinlashishlar quyidagi ko'rinishga ega

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i, \quad x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Bu yerda $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ sifatida R^n dagi ixtiyoriy nuqtani qabul qilish mumkin.

Qaralayotgan $y = Ax$ akslantirish siquvchi bo'lishi uchun (2.2)-(2.4) shartlarning ixtiyoriy birining bajarilishi yetarli. Isbotlash mumkinki, (2.2)-(2.4) shartlar mos ravishda R_∞^n va R_1^n fazolarda $y = Ax$ akslantirish siquvchi bo'lishi uchun zarur ham bo'ladi.

Ta'kidlash lozimki, (2.2)-(2.4) shartlarning birortasi ham ketma-ket yaqinlashishlar usulining tadbig'i uchun zarur emas.

Agar $|a_{ij}| < n^{-1}$ bo'lsa, u holda (2.2)-(2.4) shartlarning hammasi bajariladi va ketma-ket yaqinlashishlar usulini qo'llash mumkin.

Agar $|a_{ij}| \geq n^{-1}$ bo'lsa, u holda (2.2)-(2.4) shartlarning birortasi ham bajarilmaydi.

Siquvchi akslantirishlar prinsipining integral tenglamalarga tadbiqu

Fredgolm tenglamasi. Siquvchi akslantirishlar prinsipini ushbu

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \varphi(x) \quad (2.5)$$

ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasi yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlash uchun qo'llaymiz. Bu yerda K integral tenglama yadrosi va φ - berilgan funksiyalar, f - izlanayotgan (noma'lum) funksiya, λ esa - haqiqiy parametr.

Ko'rsatamizki, qisuvchi akslantirishlar prinsipini λ parametrning yetarlicha kichik qiymatlarida qo'llash mumkin.

Faraz qilamiz, $K(x, y)$ - $[a, b] \times [a, b]$ kvadratda, $\varphi(x)$ - $[a, b]$ kesmada uzluksiz funksiyalar bo'lsin. Shunday ekan, musbat M son mavjud bo'lib, barcha $x, y \in [a, b]$ uchun $|K(x, y)| \leq M$ tengsizlik bajariladi. To'la $C[a, b]$ fazoni o'zini-o'ziga

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \varphi(x) \quad (2.6)$$

formula vositasida akslantiruvchi $g = Af$ akslantirish berilgan bo'lsin. U holda

$$\rho(g_1, g_2) = \max_{a \leq x \leq b} |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda| M (b - a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|$$

yoki

$$\rho(Af_1, Af_2) \leq |\lambda| M(b-a) \cdot \rho(f_1, f_2).$$

Shunday ekan,

$$|\lambda| < \frac{1}{M \cdot (b-a)} \quad (2.7)$$

bo'lganda A siquvchi akslantirish bo'ladi. Siquvchi akslantirishlar prinsipiga asoslanib xulosa qilamizki, (2.7) shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy λ da (2.5) Fredgolm tenglamasi yagona uzluksiz yechimga ega.

Bu yechimga intiluvchi ketma-ket yaqinlashishlar $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f_{n-1}(y) dy + \varphi(x)$$

ko'rinishga ega, bu yerda f_0 sifatida ixtiyoriy uzluksiz funksiyani olish mumkin.

Chiziqlimas integral tenglamalar. Siquvchi akslantirishlar prinsipining

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y)) dy + \varphi(x)$$

ko'rinishdagi chiziqlimas integral tenglamalarga tadbqiqini qaraymiz. Bu yerda K va φ funksiyalar uzluksiz bo'lib, bundan tashqari K o'zining 3- chi funksional argumenti bo'yicha Lipshis shartini qanoatlantirsin, ya'ni shunday $L > 0$ mavjud bo'lib,

$$|K(x, y; z_1) - K(x, y; z_2)| \leq L |z_1 - z_2|$$

tengsizlik barcha $x, y \in [a, b]$ va z_1, z_2 lar uchun o'rinli bo'lsin. Bu holda $C[a, b]$ fazoni o'zini-o'ziga

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y)) dy + \varphi(x)$$

formula vositasida akslantiruvchi $g = Af$ akslantirish uchun

$$\max_{a \leq x \leq b} |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda| L(b-a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu yerda $g_1 = Af_1$, $g_2 = Af_2$. Shunday ekan,

$$|\lambda| < \frac{1}{L \cdot (b-a)}$$

shartda A akslantirish Siquvchi bo'ladi.

Volterra tenglamasi. Endi Volterra tipidagi

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \varphi(x) \quad (2.8)$$

tenglamani qaraymiz. Agar $y > x$ da $K(x, y) = 0$ desak, (2.8) Volterra tenglamasi (2.5) ko'rinishdagi ikkinchi tur Fredgolm tenglamasiga keladi.

Biroq Fredgolm integral tenglamasi holida biz λ parametrning kichik qiymatlari bilan chegaralanishga majburiy. Volterra tenglamasi holida siquvchi akslantirishlar prinsipi (va ketma-ket yaqinlashishlar usuli) ni λ ning barcha qiymatlarida qo'llash mumkin. Aniqrog'i, siquvchi akslantirishlar prinsipining quyidagi umumlashmasi o'rinli.

2-teorema. X metrik fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi A uzluksiz akslantirish uchun biror n da $B = A^n$ - siquvchi akslantirish bo'lsin. U holda $Ax = x$ tenglama yagona yechimga ega bo'ladi.

Isbot. $x \in X$ nuqta B akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi bo'lsin, ya'ni $Bx = x$. U holda B qisuvchi akslantirishga ketma-ket yaqinlashishlar usulini qo'llasak,

$$Ax = ABx = AB^k x = AA^{nk} x = A^{nk+1} x = A^{nk} Ax = B^k Ax = B^k x_0 \rightarrow x, k \rightarrow \infty.$$

Chunki ixtiyoriy $x_0 \in X$, xususiyl holda $x_0 = Ax$ uchun, $Bx_0, B^2x_0, \dots, B^kx_0, \dots$ ketma-ketlik X qo'zg'almas nuqtaga yaqinlashadi. Shunday ekan, $Ax = x$. Bu X nuqta yagona, chunki A uchun qo'zg'almas bo'lgan X nuqta $B = A^n$ uchun ham qo'zg'almas nuqtadir, B esa yagona qo'zg'almas nuqtaga ega. Δ

Misol. $C[a, b]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi va

$$(Af)(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \varphi(x) \quad (2.9)$$

formula bilan aniqlangan A akslantirishning biror darajasi siquvchi ekanligini ko'rsating.

Yechish. $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan f_1 va f_2 funksiyalarni olamiz. U holda

$$\begin{aligned} |(Af_1)(x) - (Af_2)(x)| &= |\lambda| \cdot \left| \int_a^x K(x, y) (f_1(y) - f_2(y)) dy \right| \leq \\ &\leq |\lambda| \cdot M(x-a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|. \end{aligned}$$

Bu yerda

$$M = \max_{a \leq x, y \leq b} |K(x, y)|.$$

Olingan tengsizlikdan kelib chiqadiki,

$$|(A^2 f_1)(x) - (A^2 f_2)(x)| = |\lambda|^2 \cdot M^2 \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Umuman,

$$\begin{aligned} |(A^n f_1)(x) - (A^n f_2)(x)| &= |\lambda|^n \cdot M^n \cdot \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)| = \\ &= |\lambda|^n \cdot M^n \cdot \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot \rho(f_1, f_2). \end{aligned}$$

Ixtiyoriy λ uchun n nomerni shunday tanlash mumkinki,

$$|\lambda|^n \cdot M^n \cdot \frac{(b-a)^n}{n!} < 1$$

tengsizlik bajariladi. U holda $B = A^n$ akslantirish siquvchi bo'ladi. Δ

Shuning uchun, yuqoridagi tasdiqqa asosan (2.8) Volterra tenglamasi har qanday λ da yagona yechimga ega.

2.2 Tekis chegaralanganlik prinsipi

Teorema1. (Banax-Shteynxaus yoki tekis chegaralanganlik prinsipi). Agar chiziqli uzluksiz operatorlarning $\{A_n\}$ ketma-ketligi X Banax fazosining har bir nuqtasida chegaralangan (ya'ni har bir $x \in X$ uchun shunday $M_x > 0$ mavjud bo'lib, ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$\|A_n x\| \leq M_x \quad (2.10)$$

tengsizlik o'rinli) bo'lsa, u holda bu operatorlarning normalaridan tuzilgan $\{\|A_n\|\}$ sonli ketma-ketlik ham chegaralangan bo'ladi. ([1] ga q.)

Isbot. Avvalo (X) shart bajarilganda shunday

$$B[a_0, r_0] = \{x \in X : \|x - a_0\| \leq r_0\}$$

yopiq shar mavjud bo'lib, bu sharda $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lishini (ya'ni shunday $M_0 > 0$ son mavjud bo'lib, ixtiyotiy $x \in B[a_0, r_0]$ va barcha $n \in N$

larda $\|A_n x\| \leq M_0$ tengsizlik bajarilishini) ko'rsatamiz. Teskaridan faraz qilaylik, ya'ni $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik birorta ham yopiq sharda chegaralangan bo'lmasin. Ixtiyoriy $B[x_0, \varepsilon_0]$ shar olamiz. $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik $B[x_0, \varepsilon_0/2]$ sharda chegaralanmagan bo'lgani uchun shunday $x_1 \in B[x_0, \varepsilon_0/2]$ element va n_1 nomer mavjudki, $\|A_{n_1} x_1\| > 1$ bo'ladi. A_{n_1} operatorning uzluksizligidan bu tengsizlik $B[x_1, \varepsilon_1] \subset B[x_0, \varepsilon_0/2]$ sharda ham bajariladi. $B[x_1, \varepsilon_1/2]$ sharda $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralanmagan bo'lgani uchun shunday $x_2 \in B[x_1, \varepsilon_1/2]$ element va n_2 nomer mavjudki, $\|A_{n_2} x_2\| > 2$ shart bajariladi. A_{n_2} ning uzluksizligidan bu tengsizlik $B[x_2, \varepsilon_2] \subset B[x_1, \varepsilon_1/2]$ sharda ham bajariladi va hokazo k -chi qadamda $B[x_{k-1}, \varepsilon_{k-1}]$ sharning x_k nuqtasida $\|A_{n_k} x_k\| > k$ shart bajariladi. A_{n_k} ning uzluksizligidan bu tengsizlik $B[x_k, \varepsilon_k] \subset B[x_{k-1}, \varepsilon_{k-1}/2]$ sharda ham bajariladi. Demak, ichma-ich joylashgan va radiuslari nolga intiluvchi

$$B[x_0, \varepsilon_0] \supset B[x_1, \varepsilon_1] \supset \dots \supset B[x_k, \varepsilon_k] \supset \dots$$

yopiq sharlar ketma-ketligining barchasiga qarashli bo'lgan $\bar{x} \in B[x_k, \varepsilon_k]$ element mavjud va barcha $k \in N$ larda $\|A_{n_k} \bar{x}\| > k$ tengsizlik bajariladi. Bu esa zid. Shunday qilib, $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladigan $B[a_0, r_0]$ yopiq shar mavjud. Ixtiyoriy $x \in B[\theta, 1]$ uchun $x' = r_0 x + a_0$ nuqta $B[a_0, r_0]$ sharda yotadi. Shuning uchun, ixtiyoriy n da $\|A_n x'\| \leq M_0$. Endi $x = r_0^{-1}(x' - a_0)$ tenglikdan foydalansak,

$$\begin{aligned} \|A_n x\| &= \left\| A_n \left(\frac{1}{r_0} (x' - a_0) \right) \right\| = \frac{1}{r_0} \|A_n x' - A_n a_0\| \leq \\ &\leq \frac{1}{r_0} (\|A_n x'\| + \|A_n a_0\|) \leq \frac{1}{r_0} (M_0 + \|A_n a_0\|) \leq \frac{1}{r_0} (M_0 + M_{a_0}) = M. \end{aligned}$$

U holda

$$\|A_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_n x\| \leq M.$$

Misol. Quyida berilgan $P_n: l_2 \rightarrow l_2$, $P_n x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0, \dots)$ operatorlar ketma-ketligi Banax- Shteynxaus teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. $P_n: l_2 \rightarrow l_2$ operatorlar ketma-ketligi Banax-Shteynxaus teoremasi shartlarini qanoatlantiradi. Haqiqatdan ham, $X=l_2$ va $Y=l_2$ lar Banax fazolari. P_n ning chegaralangan ekanligi oson tekshiriladi. Har bir $x \in l_2$ nuqtada $\{P_n x\}$ chegaralangan ekanligi

$$\|P_n x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} = \|x\| = M_x$$

munosabatdan kelib chiqadi.

2.3 Chiziqli funksionalning davom etuvchanlik prinsipi.

1-teorema. (Xan-Banax). Aytaylik, p - L haqiqiy chiziqli fazoda aniqlangan qavariq funksional va L_0 - L ning qism fazosi bo'lsin. Agar L_0 da aniqlangan f_0 chiziqli funksional

$$f_0(x) \leq p(x), \quad x \in L_0 \quad (2.11)$$

shartni qanoatlantirsa, u holda f_0 ni L da aniqlangan va L da (2.11) shartni qanoatlantiruvchi f chiziqli funksionalgacha davom ettirish mumkin.

Isbot. $L_0 \neq L$ bo'lgan holda f_0 chiziqli funksionalni L_0 dan kengroq bo'lgan $L^{(1)}$ qism fazogacha (2.1) shartni saqlagan holda chiziqli davom ettirish mumkinligini ko'rsatamiz. L_0 ga qarashli bo'lmagan ixtiyoriy $z \in L$ elementni olamiz. $L^{(1)}$ bilan L_0 va z elementlardan tashkil topgan qism fazoni belgilaymiz. $L^{(1)}$ quyidagicha ko'rinishdagi elementlardan tashkil topgan

$$\{tz + x, \quad t \in R, \quad x \in L_0\} = L^{(1)}$$

Agar f_1 funksional f_0 ning $L^{(1)}$ qism fazogacha chiziqli davomi bo'lsa, u holda

$$f_1(tz + x) = f_1(tz) + f_1(x) = t f_1(z) + f_0(x),$$

yoki $f_1(z) = c$ deb olsak,

$$f_1(tz + x) = tc + f_0(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Endi c ni shunday tanlaymizki, f_1 funksional (2.11) shartni qanoatlantirsin, ya'ni

$$f_1(tz + x) = tc + f_0(x) \leq p(tz + x) \quad (2.12)$$

tengsizlik bajarilsin. Agar $t > 0$ bo'lsa, (2.2) shart quyidagi shartga teng kuchli:

$$c + f_0\left(\frac{x}{t}\right) \leq p\left(z + \frac{x}{t}\right) \quad \text{yoki} \quad c \leq p\left(z + \frac{x}{t}\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right),$$

$t < 0$ bo'lsa,

$$c + f_0\left(\frac{x}{t}\right) \geq -p\left(-z - \frac{x}{t}\right) \quad \text{yoki} \quad c \geq -p\left(-z - \frac{x}{t}\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right).$$

Bu ikkala shartni qanoatlantiruvchi c son har doim mavjudligini ko'rsatamiz. L_0

qism fazodan olingan ixtiyoriy y' va y'' elementlar uchun

$$-f_0(y'') + p(y''+z) \geq -f_0(y') - p(-y'-z) \quad (2.13)$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham, bu tengsizlik quyidagi tengsizlikdan bevosita kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} f_0(y'') - f_0(y') &= f_0(y'' - y') \leq p(y'' - y') = \\ &= p((y'' + z) + (-y' - z)) \leq p(y'' + z) + p(-y' - z). \end{aligned}$$

Endi

$$c'' = \inf_{y''} (-f_0(y'') + p(y''+z)), \quad c' = \sup_{y'} (-f_0(y') - p(-y'-z))$$

deb olamiz. (2.13) tengsizlik ixtiyoriy y' va y'' lar uchun o'rinli bo'lganidan $c'' \geq c'$ ekanligi kelib chiqadi. Agar c sonini $c'' \geq c \geq c'$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradigan qilib tanlasak, u holda

$$f_1(tz + x) = tc + f_0(x)$$

formula bilan aniqlangan f_1 funksional chiziqli va (2.1) shartni qanoatlantiradi.

Shunday qilib, biz f_0 funksionalni L_0 qism fazodan undan kengroq bo'lgan $L^{(1)}$ qism fazogacha (2.11) shartni saqlagan holda chiziqli davom ettirdik.

Agar L chiziqli fazoda sanoqlita $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ elementlar sistemasi mavjud bo'lib, bu sistemani saqlovchi $L(\{x_k\})$ minimal qism fazo L ning o'ziga teng bo'lsa, u holda f_0 funksionalni

$$L^{(1)} = \{L_0, x_1\}, \quad L^{(2)} = \{L^{(1)}, x_2\}, \dots$$

kengayib boruvchi qism fazolarda yuqoridagidek aniqlab, f_0 funksionalni L fazogacha (2.11) shartni saqlagan holda davom ettirish mumkin.

Agar chiziqli qobig'i L ga teng bo'ladigan sanoqli sistema mavjud bo'lmasa, u holda teoremaning isboti Sorn lemmasi yordamida nihoyasiga etkaziladi. Δ

2-teorema. (Xan-Banax). E kompleks chiziqli normalangan fazo, E_0 uning qism fazosi va $f_0 - E_0$ da aniqlangan chiziqli uzluksiz funksional bo'lsin. U holda f_0 ni normasini saqlagan holda E da aniqlangan f chiziqli funksionalgacha davom ettirish mumkin, ya'ni

$$f(x) = f_0(x), \quad x \in E_0 \quad \text{va} \quad \|f\|_E = \|f_0\|_{E_0} \quad (*)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $f: E \rightarrow C$ chiziqli funksional mavjud. ([1] ga q.)

Isbot. Aytaylik, $\|f_0\|_{E_0} = K$ bo'lsin. Norma aksiomalaridan bevosita kelib chiqadiki, barcha $x \in E$ larda $p(x) = K\|x\|$ tenglik bilan aniqlanuvchi akslantirish qavariq funksional bo'ladi. Bundan tashqari ixtiyoriy $x \in E_0$ uchun

$$|f_0(x)| \leq \|f_0\|_{E_0} \cdot \|x\| = K \|x\| = p(x)$$

tengsizlik o'rinli. Shunday ekan, f_0 1-teorema shartlarini qanoatlantiradi. U holda E da aniqlangan shunday f chiziqli funksional mavjudki, quyidagilar bajariladi:

$$f(x) = f_0(x), \quad \forall x \in E_0, \quad |f(x)| \leq p(x) = \|f_0\| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Bu yerdan f ning chegaralanganligi va $\|f\| \leq \|f_0\|$ tengsizlik kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan,

$$\|f\|_E = \sup_{x \in E, x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in E_0, x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f_0\|_{E_0}.$$

Demak, $\|f\|_E = \|f_0\|_{E_0} \cdot \Delta$

1-natija. X chiziqli normalangan fazo va $x_0 \neq \theta$ undagi ixtiyoriy belgilangan element bo'lsin. U holda butun X da aniqlangan shunday f chiziqli funksional mavjudki,*

$$\|f\| = 1, \quad f(x_0) = \|x_0\| \quad (2.14)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Isbot. f funksionalni bir o'lchamli $X_0 = \{\alpha x_0\}$ qism fazoda quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|.$$

Ko'rinib turibdiki,

$$f_0(x_0) = \|x_0\|, \quad |f_0(x)| = |\alpha| \|x_0\| = \|x\|, \quad x = \alpha x_0.$$

Bu yerdan $\|f_0\|_{E_0} = 1$. f_0 funksionalni butun X gacha chiziqli davom ettiramiz. Hosil bo'lgan funksional (XIV) shartlarni qanoatlantiruvchi funksional bo'ladi. Δ

Misol. $L = C[-1, 1]$ uzluksiz funksiyalar fazosi va uning $L_0 = \{x \in C[-1, 1]: x(t) \equiv 0, t \in [-1, 0]\}$ qism fazosini qaraymiz. L_0 qism fazoda f_0 chiziqli funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_0(x) = \int_{-1}^1 x(t) dt, \quad x \in L_0.$$

f_0 funksionalni normasini saqlagan holda davom ettiring.

Yechish. f_0 funksionalning normasini hisoblaymiz. Agar $x \in L_0$ bo'lsa, u holda

$$\int_{-1}^0 x(t) dt = 0$$

bo'ladi. Shuning uchun

$$|f_0(x)| = \left| \int_{-1}^1 x(t) dt \right| = \left| \int_0^1 x(t) dt \right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \int_0^1 dt = \|x\|_{L_0}.$$

Demak,

$$\|f_0\| \leq 1.$$

Endi $\|f_0\| \geq 1$ tengsizlikni ko'rsatamiz. Buning uchun $C[-1,1]$ fazoda uzluksiz funksiyalarning

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1, 0], \\ nt, & t \in (0, 1/n), \\ 1, & t \in [1/n, 1] \end{cases}$$

ketma-ketligini qaraymiz. Bu ketma-ketlik uchun quyidagilar o'rinli:

$$x_n \in L_0, \quad \|x_n\| = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

$$|f_0(x_n)| = \left| \int_0^1 x_n(t) dt \right| \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 dt = 1 - \frac{1}{n}. \quad (2.15)$$

(2.15) tengsizlikda n lar bo'yicha aniq yuqori chegara olsak,

$$\|f_0\| \geq \sup_{n \geq 1} |f_0(x_n)| = \sup_{n \geq 1} \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\} = 1$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu ikkala tengsizlikdan $\|f_0\| = 1$ tenglikni olamiz. Yo'qoridagi misoldagi kabi $C[-1,1]$ chiziqli fazoda $g_y, y \in V_0[-1,0]$ funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:

$$g_y(x) = \int_{-1}^0 x(t) y(t) dt + \int_0^1 x(t) dt, \quad x \in L. \quad (2.16)$$

Ma'lumki, istalgan $y \in V_0[-1,0]$ uchun g_y funksional f_0 funksionalning $C[-1,1]$ fazogacha davomi bo'ladi. g_y funksional uchun Xan-Banax teoremasining tasdig'i o'rinlimi? Boshqacha aytganda $\|f_0\| = \|g_y\|$ tenglik qanday $y \in V_0[-1,0]$ lar uchun o'rinli? $C[a,b]$ fazodagi chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko'rinishi haqidagi F. Riss - 2-teorema, hamda (2.16) tenglikdan foydalansak, (2.16) ko'rinishdagi davomlar ichida yagona g_0 funksional f_0 funksionalning normasini saqlagan holda $L = C[-1,1]$ fazogacha davomi bo'ladi. f_0 funksionalni (*) shartni saqlagan holda cheksiz ko'p (kontinuum) usul bilan L fazogacha davom ettirish mumkin edi.

2.4 Akslantirishning ochiqlik prinsipi

Teorema: *X-Banax fazosini Y-Banax fazosiga chiziqli uzluksiz akslantirishda har bir ochiq to'plamning obrazi yana ochiq tuplam bo'ladi, yani X,Y Banax fazolari*

berilgan bo'lsin. A chiziqli uzluksiz akslantirish va $A \in L(X, Y)$, $\cup cX$ ochiq to'plam bo'lsa, u holda $AU = \{y \in Y: y = Ax, x \in U\}$ to'plam ham ochiq bo'ladi. ([2] ga q.)

Ushbu prinsipning natijalari sifatida quyidagi teoremlarni keltirish mumkin:

Teorema. X chiziqli normalangan fazoda $\|x\|_1$ va $\|x\|_2$ normalar berilgan bo'lsin va $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$ shart bajarilsin. Agar X fazo ikkita norma bo'yicha ham to'la (Banach fazo) bo'lsa, u holda

$$\|x\|_2 \leq c' \|x\|_1$$

tengsizlik ham bajariladi va $\|x\|_1$ va $\|x\|_2$ normalar ekvivalent normalar bo'ladi, ya'ni $c^{-1}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c'\|x\|_1$, barcha $x \in X$

Teorema. (Teskari operator haqida Banach teoremasi). A operator X Banach fazosini Y Banach fazosiga biyektiv akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operator bo'lsin. U holda A^{-1} operator mavjud va chegaralangan.

Teoremani isbotlashdan oldin quyidagi lemmani isbotlaymiz.

Lemma. M to'plam X Banach fazosining hamma yerida zich bo'lsin. U holda ixtiyoriy nolmas $y \in X$ elementni

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots$$

qatorga yoyish mumkin. Bu yerda $y_k \in M$, $\|y_k\| \leq 3 \cdot 2^{-k} \cdot \|y\|$, $k \in \mathbf{N}$.

Isbot. $y_1, y_2, \dots$ elementlarni ketma-ket quramiz. M to'plam X Banach fazosining hamma yerida zich bo'lgani uchun, shunday $y_1 \in M$ mavjudki,

$$\|y - y_1\| \leq \frac{\|y\|}{2}$$

bo'ladi. $y_2 \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\|y - y_1 - y_2\| \leq \frac{\|y\|}{4}$$

bo'lsin. Endi $y_3 \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\|y - y_1 - y_2 - y_3\| \leq \frac{\|y\|}{8}$$

bajarilsin. Umuman $y_n \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\|y - y_1 - y_2 - y_3 - \dots - y_n\| \leq \frac{\|y\|}{2^n}$$

bo'lsin. Bunday tanlash mumkin, chunki M to'plam X ning hamma yerida zich. $y_n \in M$ elementlarning tanlanishiga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| y - \sum_{k=1}^n y_k \right\| = 0,$$

ya'ni

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

qator yaqinlashadi va uning yig'indisi y ga teng. Endi $y_n \in M$ elementlarning normalarni baholaymiz:

$$\|y_1\| = \|y_1 - y + y\| \leq \|y_1 - y\| + \|y\| \leq \frac{\|y\|}{2} + \|y\| \leq \frac{3\|y\|}{2},$$

$$\|y_2\| = \|y_2 + y_1 - y + y - y_1\| \leq \|y_2 + y_1 - y\| + \|y - y_1\| \leq \frac{\|y\|}{4} + \frac{\|y\|}{2} \leq \frac{3\|y\|}{2^2}$$

va nihoyat

$$\begin{aligned} \|y_n\| &= \|y_n + y_{n-1} + \dots + y_1 - y + y - y_1 - \dots - y_{n-1}\| \leq \\ &\leq \|y_n + y_{n-1} + \dots + y_1 - y\| + \|y - y_1 - \dots - y_{n-1}\| \leq \frac{\|y\|}{2^n} + \frac{\|y\|}{2^{n-1}} \leq \frac{3\|y\|}{2^n}. \Delta \end{aligned}$$

Teoremaning isboti. A biyektiv akslantirish bo'lganligi uchun A^{-1} operator mavjud va $D(A^{-1}) = Y$. Endi Y fazoda

$$M_k = \{y \in Y : \|A^{-1}y\| \leq k\|y\|\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

to'plamlarni qaraymiz. Y fazoning ixtiyoriy elementi M_k to'plamlarning birortasida yotadi. Shuning uchun

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

Ber teoremasiga ko'ra, M_k to'plamlarning birortasi qandaydir $B \subset Y$ sharda zich bo'ladi. Faraz qilaylik, M_n to'plam B sharda zich bo'lsin. B shar ichida sharsimon P qatlam olamiz, ya'ni

$$P = \{z \in B : \beta < \|z - y_0\| < \alpha, \quad 0 < \beta < \alpha, \quad y_0 \in M_n\}.$$

P qatlamni markazi nolda bo'ladigan qilib parallel ko'chiramiz va

$$P_0 = \{z \in Y : \beta < \|z\| < \alpha\}.$$

sharsimon qatlamga ega bo'lamiz. Birorta $n_0 \in \mathbf{N}$ uchun M_{n_0} to'plam P_0 da zich bo'lishini ko'rsatamiz. Agar $z \in P \cap M_n$ bo'lsa, u holda $z - y_0 \in P_0$ bo'ladi. Bundan tashqari

$$\begin{aligned} \|A^{-1}(z - y_0)\| &\leq \|A^{-1}z\| + \|(-1)A^{-1}y_0\| = \|A^{-1}z\| + \|A^{-1}y_0\| \leq n\|z\| + n\|y_0\| = \\ &= n(\|z - y_0 + y_0\| + \|y_0\|) \leq n(\|z - y_0\| + 2\|y_0\|) = n\|z - y_0\| \left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\|z - y_0\|}\right) \leq \\ &\leq n\|z - y_0\| \left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\beta}\right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ma'lumki, $n \left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\beta}\right)$ miqdor l ga bog'liq emas va biz

$$n_0 = 1 + \left\lceil n \left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\beta}\right) \right\rceil$$

deb olamiz. U holda (2.17) ga ko'ra, $z - y_0 \in M_{n_0}$ bo'ladi. M_n to'plamning P qatlamda zich ekanligidan M_{n_0} to'plamning P_0 qatlamda zich ekanligi kelib chiqadi. Endi Y dan ixtiyoriy nolmas y element olamiz. Shunday λ son mavjudki, $\beta < \|\lambda y\| < \alpha$ tengsizlik o'rinli, ya'ni $\lambda y \in P_0$ bo'ladi. M_{n_0} to'plam P_0 qatlamda zich bo'lgani uchun λy ga yaqinlashuvchi $y_k \in M_{n_0}$ ketma-ketlik qurish mumkin. U holda $y_k/\lambda \rightarrow y$. Ravshanki, $y_k \in M_{n_0}$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\lambda \neq 0$ uchun $\frac{y_k}{\lambda} \in M_{n_0}$ bo'ladi. Shunday qilib, M_{n_0} to'plam $Y \setminus \{0\}$ da zich va demak, Y ning o'zida ham zich.

Endi ixtiyoriy nolmas $y \in Y$ elementni olamiz va yuqoridagi lemmaga ko'ra M_{n_0} to'plamning elementlari orqali qatorga yoyamiz:

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots, \quad \|y_k\| \leq 3 \cdot 2^{-k} \|y\|, \quad k \in \mathbf{N}.$$

X fazoda $x_k = A^{-1}y_k$ elementlardan tuzilgan qatorni qaraymiz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} A^{-1} y_k. \quad (2.18)$$

Bu qator qandaydir $x \in X$ elementga yaqinlashadi, chunki

$$\|x_k\| = \|A^{-1} y_k\| \leq n_0 \|y_k\| \leq 3n_0 \frac{\|y\|}{2^k}$$

va

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leq 3n_0 \|y\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3n_0 \|y\|.$$

(2.18) qatorning yaqinlashuvchiligidan va A ning uzluksizligidan

$$Ax = A \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} A \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y.$$

Bu yerdan $x = A^{-1}y$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan tashqari

$$\|A^{-1}y\| = \|x\| \leq 3n_0 \|y\|.$$

Bu yerdan

$$\|A^{-1}\| \leq 3 \cdot n_0$$

tengsizlik kelib chiqadi. Shunday qilib, A^{-1} operatorning chegaralangan ekanligi isbotlandi. Δ

Misol. $A: R^3 \rightarrow R^3$ $Ax = (x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$ opereratorning chegaralangan teskarisi mavjudmi.

Yechish. Ma'lumki R^3 Banax fazosi bo'ladi. Ushbu operator R^3 ni R^3 ga biyektiv akslantiradi. Shuning uchun teskari operator mavjudligi haqidagi Banax teoremasiga ko'ra ushbu operatorning teskarisini topamiz:

$Ax = y \Leftrightarrow (x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ tenglamadan $x = (x_1, x_2, x_3)$ nitopamiz. Uning yechimi $x_1 = y_1, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_1 - y_2 - y_3$ dan iborat. Shunday qilib, teskari operator $A^{-1}y = (y_1, y_1 - y_2, y_1 - y_2 - y_3)$ tenglik bilan aniqlanar ekan.

Xulosa

Mazkur bitiruv malakaviy ishida funksional analizning asosiy prinsiplari bo'lgan siquvchi akslantirishlar prinsipi, tekis chegaralanganlik prinsipi, chiziqli funksionalning davom etuvchanlik prinsipi va akslantirishning ochiqlik prinsiplari keltirilgan va bu prinsiplarda kelib chiqadigan natija va teoremlar isbotlangan, bu prinsiplarning tadbiqlariga oid misollar keltirilgan. Ishda o'rganilgan prinsiplar, misol va masalalar katta ham amaliy ham nazariy ahamiyatga ega.

Bitiruv malakaviy ishi kirish qismi, ikki bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat bo'lib, birinchi bobda asosiy prinsiplarni yoritib berish uchun kerak bo'ladigan ta'rif va teoremlar keltirilgan. Ikkinchi bobda yuqoridagi to'rtta funksional analizning asosiy prinsiplari ko'rsatilgan va ularning natijalari bo'lgan teoremlar isboti bilan keltirilgan. Ishda keltirilgan misollar kompleks analiz va funksional analiz fanlarini o'rganishda qo'llanilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

1. J.I. Abdullayev, R.N. G'anixo'jayev, M.H. Shermatov, O.I. Egamberdiyev. «Funksional analiz». SamDU. 2013
2. N.D. Kopochevskiy "Funksional analiz". Uchibnoe posobie. Simferopol. 2008'
3. Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi. Toshkent: Fan. 1994.
4. Sh.A. Ayupov, M.A. Berdiqulov, R.M. Turg'unboyev. Funksional analiz. Toshkent. 2008.
5. J.I. Abdullayev, R.N. G'anixo'jayev, M.H. Shermatov, O.I. Egamberdiyev. «Funksional analiz». O'quv qo'llanma. Toshkent- Samarqand. SamVPKQTMi . 2009.
6. J.I. Abdullayev, R.N. G'anixo'jayev, I.A.Ikromov. «Funksional analizdan masalalar to'plami». O'quv qo'llanma. Samarqand. 2011.
7. Partasarati K.Vvedeniye v teoriyu veroyatnostey i teoriyu mery.M.Mir. 1983.
8. Trenogin V.A. Funksionalnyy analiz.1980.
9. Vulix B.Z. Kratkiy kurs teorii funktsii veshestvennoy peremennoy 1974
10. Kolmogorov A.N. Fomin S. V. Elementi teorii funktsiy I funktsionalnogo analiza. Moskva: Nauka. 1989.

