

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
MEXANIKA-MATEMATIKA FAKUL’TETI

“Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kafedrası bitiruvchisi

NIYAZOV SALOHIDDIN ERNAZAR O‘G‘LINING

“TASODIFIY QATORLARNING YAQINLASHISHI” mavzusida

“5130100-matematika” ta’lim yo‘nalishi bo‘yicha bakalavr

darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Kafedra yig‘ilishining 2017-yil «23»-maydagi (10-bayyonnoma) yig‘ilishida muhokama qilindi va himoyaga tavsiya etildi.

Fakultet dekani: _____ prof. A.X. Begmatov

Kafedra mudiri: _____ prof. J.I. Abdullayev

Ilmiy rahbar: _____ ass. U.SH. Ubaydullayev

Bitiruv malakaviy ish ____-iyun 2017-yil YaDAK yig‘ilishida himoya qilindi va _____ ballga baholandi. (Bayonnoma № ____)

YaDAK raisi: _____

A’zolari: _____

Samarqand-2017

MUNDARIJA

Kirish	3
I. BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI	
1-§. Ehtimollar fazosi. Ehtimolning xossalari.....	5
2-§. Tasodifiy miqdorlar va uning taqsimot funksiyasi.....	10
II. BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASIDA YAQINLASHISHLAR	
3-§. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun yaqinlashish turlari.....	24
4-§. Nol yoki bir qonunlari.....	32
5-§. Qatorlar yaqinlashishi.....	38
Xulosa.....	45
Foydalanilgan adabiyotlar.....	46

Kirish

Masalaning dolzarbligi. Ushbu malakaviy bitiruv ishi hadlari tasodifiy miqdor bo'lgan tasodifiy qatorlarning yaqinlashishini o'rganishga bag'ishlanadi. Ehtimollar nazariyasining asosiy bo'limlaridan biri bu-limitik teoremlar nazariyasidir. Bu sohada hozirgi paytga kelib klassikaga aylangan chuqur va fundamental ahamiyatga ega bo'lgan natijalar olingan. Ehtimollar nazariyasini qurishda va rivojlantirishda katta hissa qo'shgan buyuk olimlardan Chebishev, Laplas, Bernshteyn, Kolmogorov, Xinchin, Dub, Gnyediyenkolarning limitik teoremlari nazariyasidagi ishlarini alohida takidlash zarur.

Masalaning qo'yilishi. Limitik teoremlar nazariyasida asosan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi va ulardan tuzilgan tasodifiy qatorlar o'rganiladi.

Ishning maqsad va vazifalari. Tasodifiy qatorlarning yaqinlashishi to'g'risidagi teoremlarni o'rganish. Tasodifiy qatorlar yaqinlashishi to'g'risidagi teoremlarning tadbig'iga doir yetarlilik shartlarini muhimligini ko'rsatadigan tasodifiy qatorlarga doir misollar keltirilgan.

Ilmiy tadqiqot usullari. Ushbu bitiruv malakaviy ishini bajarish jarayonida ehtimollar nazariyasi va analizning metodlaridan keng ma'noda foydalanildi.

Ishning ilmiy ahamiyati. Bu ishda olingan natijalar ehtimollar nazariyasining ba'zi klassik masalalarini o'rganishda foydalanish mumkin.

Ishning amaliy ahamiyati. Bu ishda jamlangan materiallardan, ehtimollar nazariyasidagi katta sonlar qonuni qo'llaniladigan amaliy masalalarda foydalanish mumkin.

Ishning tuzilishi. Bitiruv ishi kirish, ikki bob, beshta paragraf iborat. Ishning oxirida xulasa va foydanilgan adabiyotlar keltirilgan. Birinchi paragrafda ehtimollar nazariyasining aksiomalari va ehtimolning xossalari

keltirilgan. Ikkinchi paragrafda tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari, taqsimot turlari keltirilgan. Deskret va absalyut uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun alohida sonli xarakteristikalari kirilgan va xossalari isbotsiz keltirilgan. Uchunchi paragrafda tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun yaqinlashish turlari ta'riflari keltirilgan. Ehtimollik bo'yicha yaqinlashish, bir ehtimol bo'yicha yaqinlashish, L_p , $p \geq 1$ yaqinlashish, tasimot bo'yicha yaqinlashishlarni solishtirish haqidagi teoremlar keltirilgan. Fundamental ketma-ketlikning ta'riflari va Koshi kriteriyasi to'liq yoritilgan. Limitik teoremlar nazariyasida muhim ro'l o'ynaydigan Borel-Kantelli lemmasi isbotlangan. To'rtinchi paragrafda "qoldiqli" tasodifiy hodisalar uchun Kolmogorovning "0 yoki 1" qonuni keltirilgan. Shuningdek "qoldiqli" hodisalar σ – algebrasi elementlari va "qoldiqli" hodisa bo'lmaydigan tasodifiy hodisalarga misollar keltirilgan. Beshinchi paragrafda tasodifiy qatorning yaqinlashishi to'g'risidagi asosiy teoremlar keltirilgan. Bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan tasodifiy qatorlarning yaqinlashishi to'g'risidagi Kolmogorov- Xinchin, "ikki qator", "uch qator" yaqinlashishi haqidagi teoremlar keltirilgan. Bu paragrafda tasodifiy qatorlar yaqinlashishi to'g'risidagi teoremlarning tadbig'iga doir yetarlilik shartlarning muhimligini ko'rsatadigan tasodifiy qatorlarga misollar keltirilgan.

Olingan natijalarning qisqacha mazmuni:

1. Kirish
2. I-bob. Asosiy tushunchalar 2 ta paragraf.
3. II-bob. Asosiy qism 3 ta paragraf.

I. BOB.EHTIMOLLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

1-§ Ehtimollar fazosi. Ehtimolning xossalari

Ω - biror to'plam F —uning qism to'plamlarining biror sistemasi bo'lsin. Agar

1. $\Omega \in F$

2. $A_i \in F ; i = 1, 2, \dots, n$ dan $\bigcup_{i=1}^n A_i \in F$ kelib chiqsa,

3. $A \in F$ dan $\bar{A} \in F$ kelib chiqsa, F sistema **algebra tashkil etadi** deyiladi.

Agar ikkinchi shart o'rniga $A_i \in F, i = 1, 2, \dots, n, \dots$ dan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ kelib chiqsin degan shartning bajarilishi talab qilinsa, u holda F sistema σ — **algebra tashkil etadi** deyiladi.

Odatda, Ω —*elementar hodisalar fazosi*, $\Omega = \{e\}$ — fazoning elementlari, nuqtalari **elementar hodisalar**, F ning elementlari esa **tasodifiy hodisalar** deyiladi. F ning o'zi esa *hodisalarning* σ - **algebrasi** deyiladi.

1.1-ta'rif. Agar Ω to'plam va bu to'plamning qism to'plamlaridan iborat F, σ - algebra berilgan bo'lsa, u holda *o'lchovli fazo berilgan* deyiladi va uni $\langle \Omega, F \rangle$ kabi belgilanadi. σ - algebraning ta'rifidan $\bar{\Omega} = \emptyset \in F$ ekani kelib chiqadi. Ω -muqarrar hodisa, $\emptyset$ esa **mumkin bo'lmagan hodisa** deyiladi.

Endi A. N. Kolmogorov aksiomalarini keltiramiz.

1-aksioma. Ixtiyoriy $A \in F$ hodisaga uning ehtimoli deb ataluvchi $P(A) \geq 0$ son mos qo'yilsin.

2-aksioma. $P(\Omega) = 1$.

3-aksioma. Qo'shish aksiomasi. Agar $\{A_n\}$ hodisalar chekli ketma-ketligi juft-jufti bilan birgalikda bo'lmasa, u holda

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

Ehtimollar nazariyasining ko'pgina masalalarini hal qilishda 3- aksioma o'rniga undan kuchliroq bo'lgan aksiomaga zarurat tug'iladi.

3^I-aksioma. Qo'shishning kengaytirilgan aksiomasi. Agar $\{A_n\}$ hodisalar ketma-ketligi juft-jufti bilan birgalikda bo'lmasa, u holda

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Ehtimolning bu aksioma bilan berilgan xossasi uning **sanoqli additivligi** deyiladi. 3^I-aksiomani unga ekvivalent quyidagi uzluksizlik aksiomasi bilan almashtirish mumkin.

3^{II}- aksioma. Uzluksizlik aksiomasi. Agar F, σ - algebraga tegishli bo'lgan $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ tasodifiy hodisalar uchun $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset \dots B_n \supset$

bajarilsa va $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset$ va o'rinli bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right) = 0$ bo'ladi.

3^I- aksioma va 3^{II}-aksiomaning teng kuchli ekanligini ko'rsatamiz.

3^I- aksiomadan 3^{II}- aksiomaning kelib chiqishini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ hodisalar uchun $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$ bo'lsin va $\bigcap_{k \geq n} B_k = V$

bajarilgan bo'lsin, u holda B_n hodisa uchun

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \bar{B}_{k+1} + \bigcap_{k \geq n} B_k$$

bajariladi. Bu qo'shiluvchilar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagani uchun 3^I-

aksioma va $P\left(\bigcap_{k \geq n} B_k\right) = 0$ ga ko'ra

$$P(B_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(B_k \bar{B}_{k+1}) + P\left(\bigcap_{k \geq n} B_k\right) = \sum_{k=n}^{\infty} P(B_k \bar{B}_{k+1})$$

ya'ni, $P(B_n)$ yaqinlashuvchi $\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k \overline{B}_{k+1}) = P(B_1)$ qatorning qoldiq hadidir, demak, $n \rightarrow \infty$ da $P(B_n) \rightarrow 0$ 3^{II} - aksiomadan chekli additivlik bajarilganda 3^{I} - aksiomaning kelib chiqishini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lib, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, bo'lsin, u holda $B_{n+1} \subset B_n$. Agar B_n hodisa ro'y bersa $A_i (i \geq n)$ lardan birortasi ro'y beradi. A_k lar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagani uchun $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots$ ro'y bermaydi. Demak, $B_{i+1}, B_{i+2}, \dots$ lar ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisalar bo'ladi, bu esa $\bigcap_{k=n}^{\infty} B_k$ ning mumkin bo'lmagan hodisa ekanini ko'rsatadi, u holda 3^{II} - aksiomaga ko'ra $n \rightarrow \infty$ da $P(B_n) \rightarrow 0$ ammo $A = \bigcup_{i=1}^n A_i + B_{n+1}$ ekanligidan

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(B_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$\langle \Omega, F, P \rangle$ uchlik **ehtimollik fazosi** deyiladi. Shunday qilib, ehtimollik fazosi $\langle \Omega, F, \rangle$ o'lchovli fazo va F da berilgan manfiy bo'lmagan, normalashtirilgan, sanoqli additiv P o'lchovdan iborat bo'lar ekan, P o'lchov **ehtimollik o'lchovi** deyiladi. Odatda, aksiomalar sistemasiga quyidagi talablarni qo'yishadi:

1. Aksiomalar sistemasining o'zaro zid emasligi.
2. Aksiomalar sistemasining o'zaro bog'lik emasligi
3. Aksiomalar sistemasining to'laligi.
4. Ehtimollar nazariyasining aksiomalar sistemasi o'zaro zid emas, chunki berilgan aksiomalarni qanoatlantiradigan real obyektlar mavjud.

1.1-misol. Elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bo'lsin. Har bir $e_k (k = \overline{1, n})$ elementar hodisaga $\frac{1}{n}$ sonni mos qo'yamiz, $P(e_k) =$

$\frac{1}{n}$. U holda e_k lar teng ehtimolli hodisalar bo'ladi. Ω yordamida $F = \{\emptyset, V, e_1, \dots, e_n, \dots\}$ algebrani tuzamiz, bu sistema 2^n ta elementdan iborat bo'ladi. F tegishli har bir A hodisa ushbu ko'rinishda yoziladi: $A = \bigcup_{k \in I} e_k, I \subseteq N = \{1, 2, \dots, n\}$ A hodisaning ehtimoli deb quyidagi sonni olamiz: $P(A) = \sum_{k \in I} \frac{1}{n}$. Agar I to'plamning quvvati k bo'lsa, $P(A) = \frac{k}{n}$ bo'ladi. σ algebrada aniqlangan bu $P(A)$ funksiya barcha aksiomalarni qanoatlantirishini tekshiramiz:

1) $P(A) \geq 0$. Darhaqiqat, misolimizda $k = \overline{0, n}$ bo'lgani uchun

$$P(A) = \frac{k}{n} \geq 0;$$

2) $P(\Omega) = 1$. Haqiqatan ham $\Omega = \bigcup_{k=1}^n e_k$ ekanligidan

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n e_k\right) = \sum_{k \in N} \frac{1}{n} = 1 \text{ kelib chiqadi.}$$

3) $A \cap B = \emptyset$ bo'lsa, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Agar

$A = \bigcup_{k \in I_1} e_k, B = \bigcup_{k \in I_2} e_k, I_1 \subseteq N, I_2 \subseteq N, I_1 \cap I_2 = \emptyset$ shartlar bajarilsa, $A \cap B = \emptyset$ Faraz

qilaylik, I_1 ning quvvati k_1, I_2 ning quvvati k_2 bo'lsin, u holda $P(A) = \frac{k_1}{n}$,

$$P(B) = \frac{k_2}{n} \text{ va } P(A \cup B) = P\left(\bigcup_{k \in I_1 \cup I_2} e_k\right) = \frac{k_1 + k_2}{n} = \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n} = P(A) + P(B) \text{ bo'ladi.}$$

Demak, Kolmogorov aksiomalari sistemasi zid emas ekan.

Ehtimollar nazariyasining aksiomalari sistemasi to'la emas, ya'ni tayin bir Ω uchun σ -algebra F da ehtimollik o'lchovi P ni turlicha usulda aniqlash mumkin. Agar tajribamiz shashqoltosh tashlashdan iborat bo'lsa, u holda $\{e_i\}, i = \overline{1, 6}$ hodisalarning ehtimolini shashqoltoshning qandayligiga

qarab, $P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_6) = \frac{1}{6}$ (simmetrik hol) (a) yoki, masalan,

$P(e_1) = P(e_2) = P(e_3) = \frac{1}{4}$; $P(e_4) = P(e_5) = P(e_6) = \frac{1}{12}$ (b) deb qabul qilish mumkin.

Bu aksiomalar sistemasini to'la emasligi uning kamchiligi emas.

2-§. Tasodifiy miqdorlar va uning taqsimot funksiyasi

Tasodifiy miqdor ta'rifini berishdan avval o'lchovli funksiya tushunchasini kiritamiz. Bizga $\langle \Omega, F \rangle$, $\langle R, G \rangle$ o'lchovli fazolar va $\xi: \Omega \rightarrow R$ funksiya berilgan bo'lib, bu funksiya uchun $A \in G$ ekanidan $\xi^{-1}(A) = \{\omega: \xi(\omega) \in A\} \in F$ ekanligi kelib chiqsa, bunday funksiya **o'lchovli funksiya** deyiladi. Agar $\langle \Omega, F, P \rangle$ ixtiyoriy ehtimollik fazosi bo'lsa, har qanday $\xi: \langle \Omega, F \rangle \rightarrow \langle R, G \rangle$ o'lchovli funksiya **tasodifiy miqdor** deyiladi.

2.1-misol. Bitta tanga tashlaganimizda Ω ikkita elementar hodisa: gerb va raqamdan iborat bo'ladi. Agar tanganing gerbli tomoni tushsa 0 ni, raqamli tomoni tushsa 1ni yozsak, u holda 0 yoki 1 ni qabul qiluvchi tasodifiy miqdorni hosil qilamiz.

2.2-misol. Agar ikkita tanga tashlasak, ω elementar hodisalar GG; GR; RG;RR dan iborat bo'lib, „gerb" tushishlar sonini $\xi = \xi(\omega)$ deb belgilasak, bu tasodifiy miqdorni quyidagi jadval bilan berish mumkin:

ω	RR	GR	RG	GG
$\xi(\omega)$	0	1	1	2

2.3- misol. $\{(x,y): x \in [0,1], y \in [0,1]\}$ kvadratga tashlangan nuqtadan koordinatalar boshigacha bo'lgan masofa tasodifiy miqdordir, chunki $\{(x,y): x^2 + y^2 < t\}$ to'plam o'lchovli. Tasodifiy miqdorning ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $x \in R$ uchun

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \{\omega: \xi^{-1}((-\infty; x)) \in F$$

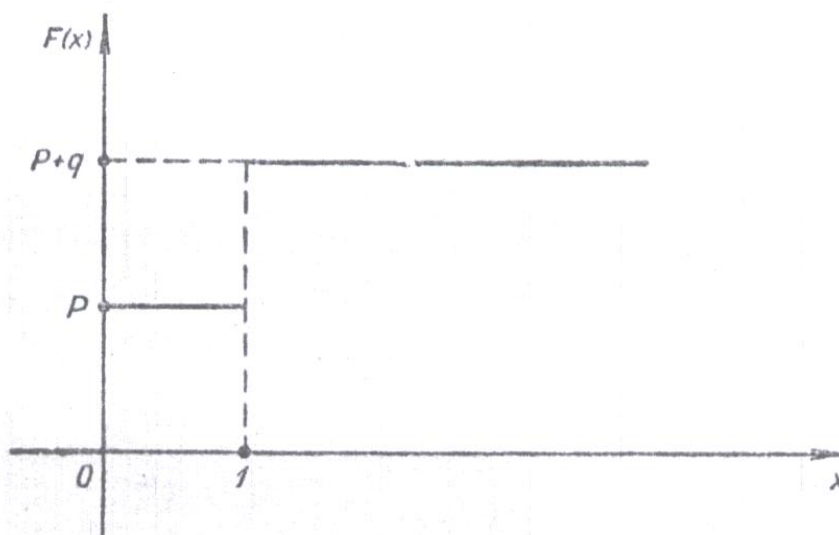
chunki $(-\infty, x) \in G$. Bundan $F_\xi(x) = P\{\omega: \xi < x\}$ funksiyaning R da aniqlanganligi kelib chiqadi. Bu funksiya ξ **tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi** deyiladi.

2.4- misol. ξ tasodifiy miqdor 1 va 0 qiymatlarni mos ravishda p va $q(p+q=1)$ ehtimol bilan qabul qilinsin, ya'ni

$$\xi: \quad 0 \quad 1$$

$$p: \quad 1-p \quad p$$

Bu holda $P\{\xi < x\} = F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar, } x \leq 0 \\ p, & \text{agar, } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{agar, } 1 < x. \end{cases}$



2.1-shakl

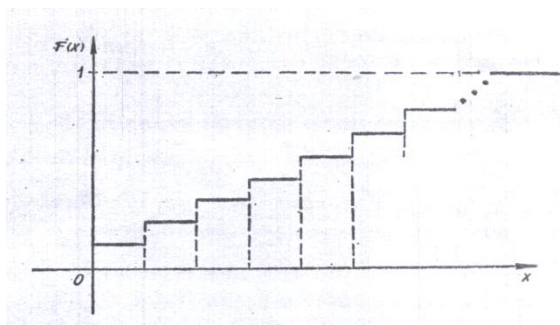
Agar ξ tasodifiy miqdor $0, 1, 2, \dots, n$ qiymatlarni

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}$$

ehtimol bilan qabul qilsa, bu tasodifiy miqdor binomial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar, } x < 0, \text{ bo'lsa} \\ \sum_{k < x} C_n^k p^k q^{n-k}, & \text{agar, } 0 \leq x \leq n, \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar, } n < x, \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

grafigi quyidagicha bo'ladi (2.2-shakl).



2.2 – shakl.

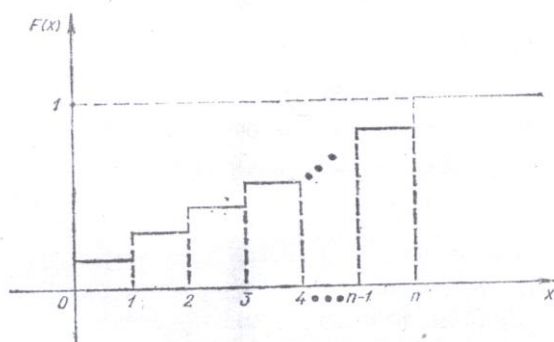
2.5- misol. Agar ξ tasodifiy miqdor $0, 1, 2, \dots$ qiymatlarni

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0$$

ehtimollar bilan qabul qilsa, uni Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar, } k < 0, \text{ bo'lsa} \\ \sum_{k < x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & \text{agar, } 0 \leq k \leq x, \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

grafigi quyidagicha bo'ladi (2.3- shakl).



2.3- shakl

2.6- misol. ξ tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlarni

$$P\{\xi = x_k\} = \frac{1}{N}, \quad k = \overline{1, N}$$

ehtimollar bilan qabul qilinsin. Bu tasodifiy miqdor **tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor** deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar, } x \leq x_1, & \text{bo'lsa} \\ \frac{k}{N}, & \text{agar, } x_k < x \leq x_{k+1}, & \text{bo'lsa} \\ 1, & \text{agar, } x_n < x, & \text{bo'lsa.} \end{cases}$$

2.7- misol. Agar tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$\Phi_{a, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du$$

ko'rinishda bo'lsa, bunday tasodifiy miqdor **normal taqsimlangan tasodifiy miqdor** deyiladi. Bu yerda $\sigma > 0$, $-\infty < a < \infty$ — o'zgarmas sonlar,

Taqsimot funksiya quyidagi xossalarga ega.

1. Barcha haqiqiy x lar uchun

$$0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1$$

2. $F_{\xi}(x)$ kamaymaydigan funksiya. Haqiqatan ham, $x_1 < x_2$ bo'lsin. Ushbu

$$A_1 = \{\xi < x_1\}, \quad A_2 = \{\xi < x_2\}, \quad B = \{x_1 < \xi < x_2\}$$

hodisalarni kiritsak;

$$A_2 = A_1 \cup B, \quad A_1 \cap B = \emptyset$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Natijada ehtimolning additivlik aksiomasiga

$$\text{ko‘ra } P(A_2) = P(A_1) + P(B) \text{ yoki}$$

$$0 \leq P(x_1 < \xi < x_2) = P(\xi < x_2) - P(\xi < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

Bundan esa $x_1 \leq x_2$ da $F(x_1) \leq F(x_2)$ bo‘lib, xossaning isboti kelib chiqadi.

3. Taqsimot funksiya chapdan uzluksiz, ya’ni

$$F_{\xi}(x) = F_{\xi}(x-0) = \lim_{x_m \uparrow x} F(x_m)$$

Isbot. Faraz qilaylik, $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n \dots$ va $n \rightarrow \infty$ da $a_n \rightarrow b$ bo‘lsin, u holda

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega: \xi(\omega) \in [a_n, b)\} = \emptyset$$

natijada uzluksizlik aksiomasiga ko‘ra

$$F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a_n) = P\{\omega: \xi(\omega) \in [a_n, b)\}$$

ifoda $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi. Bu esa $F_{\xi}(x)$ ning chapdan uzluksizligini ko‘rsatadi.

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Isbot. Biz xossani isbotlash uchun ikkita $\{A_n\}$ va $\{B_n\}$ ketma-ketliklarni qaraymizki, bunda $\{A_n\}$ ketma-ketlik $-\infty$ ga monoton kamayib intiladi, $\{B_n\}$ esa $+\infty$ ga monoton o‘sib intiladi. $A_n = \{\xi < x_n\}$, $B_n = \{\xi < y_n\}$ belgilashlarni kiritamiz, $x_n \rightarrow -\infty$ ligidan A_n to‘plamlar ketma-ketligi ichma-ich qo‘yilgan bo‘ladi va $\bigcap A_n = \emptyset$. Ehtimolning uzluksizlik aksiomasiga binoan, $n \rightarrow \infty$ da $P(A_n) \rightarrow 0$. U holda $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0$ kelib chiqadi. Bundan va $F(x)$ funksiyaning monotonligidan $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. $\{B_n\}$ ketma-ketlik $n \rightarrow \infty$ da $+\infty$ ga monoton yaqinlashganligi uchun B_n to‘plamlar ketma-ketligi ham „o‘tuvchi“ bo‘ladi va $\bigcup B_n = \Omega$, binobarin, ehtimolning xossasiga asosan

$P(B_n) \rightarrow 1$. Bundan, xuddi avvalgidagidek, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = 1$ munosabatlar kelib chiqadi.

Agar $x = x_0$ nuqtada $F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0) = C_0 > 0$ bo'lsa, funksiya $x = x_0$ nuqtada sakrashga ega bo'lib, uning kattaligi C_0 ga teng bo'ladi.

5. Taqsimot funksiyaning sakrashga ega bo'lgan nuqtalari to'plami ko'pi bilan sanoqli bo'lishi mumkin.

Isbot. $F(x)$ taqsimot funksiyaning sakrashi $\frac{1}{2}$ dan katta bo'lgan nuqtalarning soni faqat 1 ta (chunki 2 ta bo'lsa, ularning yig'indisi 1 dan katta bo'ladi, buning esa bo'lishi mumkin emas).

$F(x)$ ning $C_0 > \frac{1}{2}$ bo'lgan sakrashlar soni 1 ta,

$F(x)$ ning $\frac{1}{2} < C_0 \leq \frac{1}{2}$ bo'lgan sakrashlar soni 3 ta,

$F(x)$ ning $\frac{1}{8} < C_0 \leq \frac{1}{4}$ bo'lgan sakrashlar soni 7 ta

$F(x)$ ning $\frac{1}{2^n} < C_0 \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

bo'lgan sakrashlar soni 2^{n-1} ta. Bu nuqtalarni ketma-ket nomerlab chiqish mumkin, chunki sanoqli sondagi chekli to'plamlarning yig'indisi yana sanoqli bo'ladi.

2.1-ta'rif. Agar ξ tasodifiy miqdor chekli yoki sanoqli sondagi x_k qiymatlarni $\{p_k\}$ ($\sum_k p_k = 1$) ehtimollar bilan qabul qilsa, uni **diskret tasodifiy miqdor** deyiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \sum_{\{k: x_k \leq x\}} p_k$$

formula bilan aniqlanadi. Yuqorida keltirilgan 4 - 6- misollar diskret tasodifiy miqdorga misol bo'ladi.

2.2- ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, bu tasodifiy miqdorni **absolyut uzluksiz taqsimlangan tasodifiy miqdor** deyiladi. Bu yerdagi $p(u)$ funksiya ξ tasodifiy miqdorning **zichlik funksiyasi** deyiladi. 2- ta'rifga ko'ra $F'(x) = p(x)$ bo'ladi.

Zichlik funksiya quyidagi xossalarga ega.

1. Zichlik -funksiya manfiy emas: $p(x) \geq 0$.

Haqiqatan ham, $F(x)$ taqsimot funksiyaning kamaymasligidan uning hosilasi deyarli hamma nuqtalarda doim musbat bo'ladi.

2. Agar $p(x)$ zichlik funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $P(x_0 \leq \xi < x_0 + dx)$ ehtimol zichlik funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor aniqligida ekvivalent bo'ladi:

$$P(x_0 \leq \xi < x_0 + dx) \approx p(x_0) dx.$$

3. Zichlik funksiyadan $(-\infty, +\infty)$ oraliq bo'yicha olingan integral birga teng:

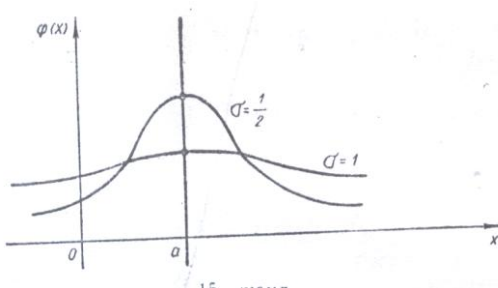
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

Bu bevosita taqsimot funksiya xossasidan kelib chiqadi.

Yuqoridagi 7-misolda keltirilgan tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdordir. Normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ga teng. $\varphi(x)$ zichlik funktsiya $x=a$ nuqtada eng katta qiymatga erishadi va uning grafigi $x = a$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik joylashgan, bu funktsiya uchun Ox , o'q gorizontal asimptota, $x = a \pm \sigma$ nuqtalar bu funktsiyaning bukilish nuqtalari bo'ladi. Bularni e'tiborga olsak, $\varphi(x)$ funktsiyaning grafigi quyida gicha bo'lishini ko'rish qiyin emas.

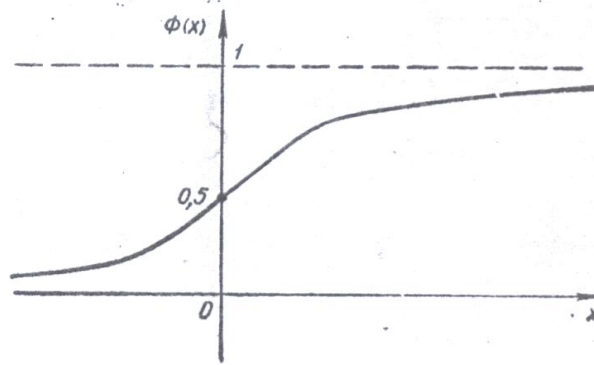


2.4- shakl.

Xususan $a = 0$, $\sigma = 1$ bo'lganda taqsimot funktsiya

$$\Phi_{(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Uning grafigi 5- shaklda keltirilgan. $\Phi_{(0,1)}(x)$ taqsimot funktsiya (0,1) - **parametrl, standart normal qonun** deyiladi.



2.5 – shakl.

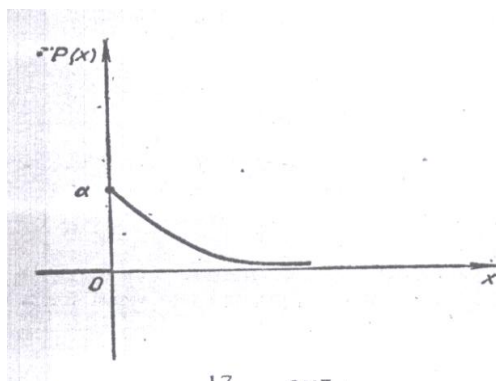
Quyida uzluksiz tasodifiy miqdorlarga bir nechta misol keltiramiz.

2.9- m i s o l. α parametrli eksponentsial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

ko'rinishga, taqsimot funksiyasi esa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

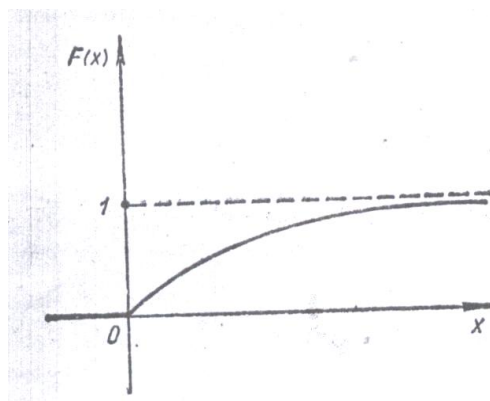


2.6 – shakl

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu funksiyalarning grafiklari 6- 7- shakllarda ko'rsatilgan.

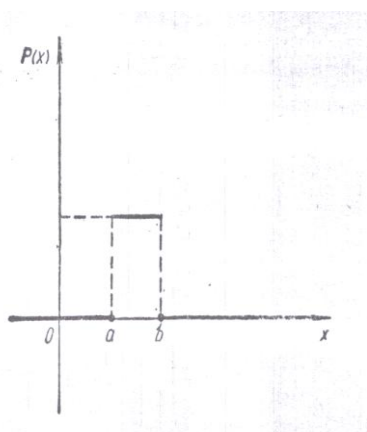
2.10- misol. Agar ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \notin (a,b) \text{ bo'lsa,} \\ \frac{1}{b-a}, & \text{agar } x \in (a,b) \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

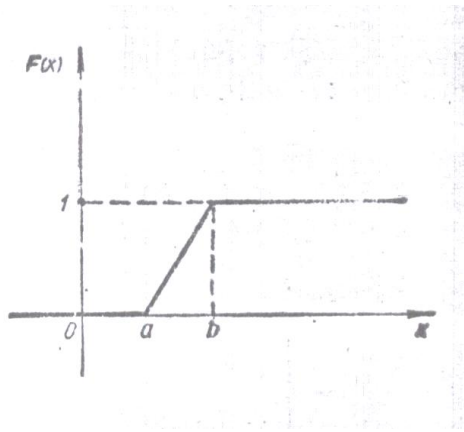


2.7-shakl

ko'rinishda berilgan bo'lsa, ξ tasodifiy miqdor $[a,b]$ da tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega. Bu funksiyalarning grafiklari 8 - 9 - shakllarda ko'rsatilgan.



2.8 – shakl.



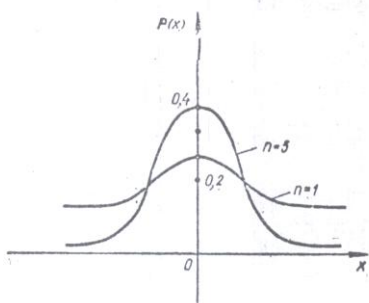
2.9 – shakl.

2.11- m i s o l. Zichlik funksiyasi

$$p(x) = \frac{G(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} G(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

dan iborat bo'lgan tasodifiy miqdorni **erklilik darajasi n bo'lgan St'yudent qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor** deyiladi, bu yerda $\Gamma(x)$ - gamma funksiyadir (2.10- shakl). Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

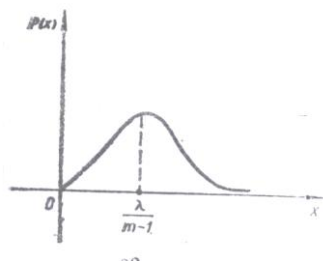
$$F(x) = \frac{G(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} G(\frac{n}{2})} \int_{-\infty}^x \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} du.$$



2.10 – shakl.

2.12 – misol. Zichlik funksiyasi
$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^m x^{m-1} e^{-\lambda x}}{(m-1)!}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

ko'rinishda (2.11- shakl) bo'lgan tasodifiy miqdor (m, λ) parametrli Erlang qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi:



2.11 – shakl.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=1}^m \frac{\lambda^{k-1} x^{k-1}}{(k-1)!} & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

2.13 – misol. Zichlik funksiyasi

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{G(\alpha)} \int_0^x v^{\alpha-1} e^{-\beta v} dv, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

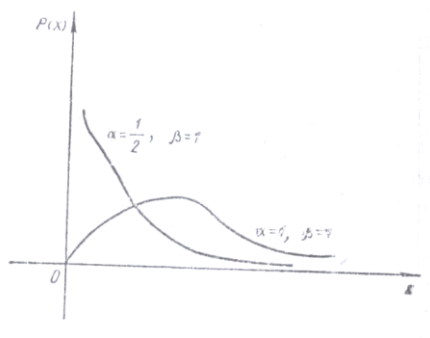
dan iborat (2.12 - shakl) bo'lgan tasodifiy miqdor (α, β) **parametrli Gamma qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi**. Uning taqsimot funksiyasi esa quyidagicha bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{G(\alpha + \beta + 2)}{G(\alpha + 1) G(\beta + 1)} x^\alpha (1-x)^\beta, & x \in [0, 1] \\ 0 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

2.14-misol.

Zichlik funksiyasi
$$p(x) = \begin{cases} \frac{G(\alpha + \beta + 2)}{G(\alpha + 1) G(\beta + 1)} x^\alpha (1-x)^\beta, & x \in [0, 1] \\ 0 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

dan iborat (12- shakl) bo'lgan tasodifiy miqdor (α, β) parametrli Beta qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:



2.12 - shakl

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{G(\alpha + \beta + 2)}{G(\alpha + 1) G(\beta + 1)} \int_0^x u^\alpha (1-u)^\beta du, & x \in [0, 1] \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

2.15 - m i s o l. Zichlik funksiyasi $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

ko'rinishda bo'lgan tasodifiy miqdor Koshi qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorlar deyiladi.

Agar g funksiya differentsiallanuvchi bo'lib, $\xi - f(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lsa, u holda $g(\xi)$ ning zichlik funksiyasi mavjud bo'lib, u quyidagiga teng:

$$f_{g(\xi)}(x) = f(g^{-1}(x)) (g^{-1}(x))' = \frac{f(g^{-1}(x))}{g'(x)}$$

bundan foydalanib, zichlik funksiyasi mavjud bo'lgan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan funksiyalarning zichlik funksiyalarini topish mumkin.

2.16 – m i s o l. Agar $g(\xi) = a + b\xi$, $b > 0$ bo'lsa,

$$f_{g(\xi)}(x) = \frac{1}{b} f\left(\frac{x-a}{b}\right), \quad F_{g(\xi)}(x) = F_{\xi}\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

2.17 – m i s o l. Aytaylik, $\eta = \xi^2$ bo'lsin, u holda $y < 0$ lar uchun $F_{\eta}(y) = 0$; $y \geq 0$ lar uchun esa $F_{\eta}(y) = P(\xi^2 < y) P(-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}) = F_{\xi}(\sqrt{y}) - F_{\xi}(-\sqrt{y}) - P(\xi = -\sqrt{y})$, chunki

$$P(\xi > \sqrt{y}) = 1 - F_{\xi}(\sqrt{y}) - P(\xi = -\sqrt{y}).$$

Agar $F_{\xi}(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lsa, u holda zichlik funksiyaning ikkinchi xossasiga ko'ra $P(\xi = -\sqrt{y}) = 0$. Natijada $F_{\eta}(y) = F_{\xi}(\sqrt{y}) - F_{\xi}(-\sqrt{y})$. Bundan $y \geq 0$ lar uchun

$$f_{\eta}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_{\xi}(y) + f_{\xi}(-\sqrt{y})].$$

Agar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlarning har birining taqsimot funksiyasi $F(x)$ dan iborat bo'lsa, u holda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi ***bir xil taqsimlangan*** deyiladi.

II. BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASIDA YAQINLASHISHLAR

3-§. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun yaqinlashish turlari

Biz tasodifiy miqdorlarni bitta $\langle \Omega, F, P \rangle$ ehtimollik fazosida berilgan deb faraz qilamiz. O'lchovli funksiyalar nazariyasidan ma'lumki, o'lchovli funksiyalar ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish va (maxrajdagi funksiya noldan farqli bo'lsa) bo'lish amali bajarish natijasida hosil bo'ladigan funksiya yana o'lchovli, shu bilan birga o'lchovli funksiyalar ketma-ketligining limiti (agar mavjud bo'lsa) yana o'lchovli bo'ladi. Shunga o'xshash natijalar tasodifiy miqdorlar uchun ham o'rinli. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining yaqinlashishi, masala talabiga qarab, turlicha bo'lishi mumkin.

3.1-ta'rif. Agar ixtiyoriy musbat $\varepsilon > 0$ son uchun $n \rightarrow \infty$ da $P\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$ bo'lsa, u holda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ***P ehtimol bo'yicha ξ tasodifiy miqdorga yaqinlashadi*** deymiz va $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ kabi belgilaymiz. Aytaylik, g ixtiyoriy uzluksiz, chegaralangan funksiya bo'lsin. Agar $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ bo'lsa, u holda

$$Mg(\xi_n) \rightarrow Mg(\xi) \quad (3.1)$$

Agar ξ_n va ξ larning taqsimot funksiyalarini mos ravishda $F_n(x)$ va $F(x)$ deb belgilasak, u holda (3.1) ni quyidagicha yozamiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_n(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x). \quad (3.2)$$

3.2- ta'rif. Agar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun

$$P\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\} = 1$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

ξ **tasodifiy miqdorga 1 ehtimol bilan yaqinlashadi** deymiz, ya'ni bunday yaqinlashish uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$ munosabatni qanoatlantirmaydigan ω nuqtalarning o'lchovi nolga teng bo'ladi.

Biz bir ehtimol bilan yaqinlashishni $\xi_n \xrightarrow{P(1)} \xi$ kabi belgilaymiz. 1 ehtimol bo'yicha yaqinlashish $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega : \sup(\xi_n - \xi) > \omega\} = 0$ ga teng kuchlidir.

3.3- t a ' r i f . Agar $n \rightarrow \infty$ da $M|\xi_n - \xi|^r \rightarrow 0$ shart bajarilsa, $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ **ga o'rtacha r - tartibda yaqinlashadi** deymiz. Bu yaqinlashishni $\xi_n \xrightarrow{r} \xi$ kabi belgilaymiz. Xususan $r = 2$ da bu yaqinlashish **o'rta kvadratik yaqinlashish** deyiladi $\text{l.i.m.} \xi = \xi$ va kabi belgilanadi. Yuqoridagi ta'riflardan 1 ehtimol bo'yicha yaqinlashishdan ehtimol bo'yicha yaqinlashish kelib chiqadi lekin aksinchasi, umuman olganda, o'rinli emasligini quyidagi misoldan ko'rish mumkin.

3.1-m i s o l . Faraz qilaylik, $\Omega = [0,1]$, F esa Borel to'plamlarining σ - algebrasi, P — Lebeg o'lchovi bo'lsin va $A_n^k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$,

$$X_n^k = I_{A_n^k}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{agar } \omega \in A_n^k \\ 0 & \text{agar } \omega \notin A_n^k \end{cases} \begin{matrix} \text{bo'lsa,} \\ \text{bo'lsa} \end{matrix}$$

(bu yerdagi $I_{A_n^k}(\omega)$ ni A_n^k to'plamning indikatoriy deymiz). U holda

$$\{X_2^1, X_2^2, X_3^1, X_3^2, X_3^3, \dots\}$$

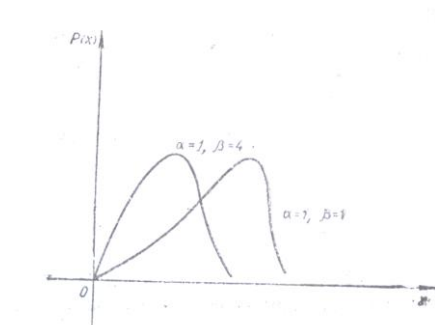
tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ehtimol bo'yicha nolga intiladi, biroq hech bir $\omega \in [0, 1]$ nuqtada limitga ega emas.

Endi o'rtacha r - tartibda yaqinlashishga to'xtalib o'tamiz. Chebishev tengsizligiga asosan $P\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M|\xi_n - \xi|^r}{\varepsilon^2}$

3.4-tarif. Agar $\{F_n(x)\}$ taqsimot funksiyalar ketma-ketligi $n \rightarrow \infty$ da $F(x) = P\{\xi < x\}$ ga $F(x)$ taqsimot funksiyaning har bir uzluksizlik nuqtasida

yaqinlashsa, u holda $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ ga taqsimot bo'yicha yaqinlashadi deyiladi va $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ kabi belgilanadi (bu yerda D inglizcha „distribution" — taqsimot so'zining bosh harfidan olingan).

Avvalo taqsimot bo'yicha yaqinlashishda nima uchun yaqinlashish nuqtalari sifatida hamma nuqtalar emas, balki faqatgina $P(\xi=x)=0$ shartni qanoatlantiruvchi har bir x nuqta olinishini oydinlashtirib o'taylik. Agar $\xi_n = \frac{1}{n}, \xi=0$ deb olsak, u holda $F_n(x)$ va $F(x)$ funksiyalarning grafiklari quyidagicha bo'ladi.



3.1 – shakl

Bundan ko'rinadiki, $x = 0$ nuqtadan tashqari barcha x nuqtalarda $F_n(x) \rightarrow F(x)$ Shuning bilan birga, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $n \rightarrow \infty$ da $P\{|\xi_n| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$ bu esa ξ_n tasodifiy miqdorning taqsimot limiti tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi atrofida jamlanishini ko'rsatadi. Bu misol ξ_n tasodifiy miqdorlarning qiymatlarini ξ_n limit qiymatlari atrofida „quyuqlashuvini" $F(x)$ funksiyaning uziladigan nuqtalarida anglab bo'lmasligini ko'rsatadi. Shuning uchun ham, hamma nuqtalarni emas, balki, faqatgina $P\{\xi=x\}=0$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarni olamiz.

Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining taqsimot bo'yicha yaqinlashishidan ularning ehtimol bo'yicha yaqinlashishi, umuman olganda, kelib chiqmaydi, ya'ni $\xi_n(\omega) \xrightarrow{D} \xi \neq \xi_n \xrightarrow{P} \xi$. $\{\xi_n(\omega)\}$ tasodifiy miqdorlarning

$$\{F_{\xi_n(\omega)}(x)\}$$

taqsimot funksiyalar ketma-ketligini ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasiga yaqinlashishini tekshirish oson ish emas, bunga nisbatan, masalan, bu taqsimotlar momentlarining yaqinlashishini tekshirish osonroq:

$$m_k(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_{\xi_n}(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_{\xi}(x) = m_k, n \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

Shu sababli taqsimot bo'yicha yaqinlashishga ekvivalent bo'lgan taqsimot xarakteristikalarini sinfini ajratish tabiiy. Shunday xarakteristika sifatida Lebeg - Stilt'es integralini olish qulay hisoblanadi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_{\xi}(x). \quad (3.4)$$

Avvalo, qanday $f(x)$ funksiyalar uchun $F_{\xi_n} \xrightarrow{D} F_{\xi}$ yaqinlashishdan quyidagi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_{\xi_n}(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_{\xi}(x) \quad (3.5)$$

yaqinlashish kelib chiqishini tushunib olaylik. Bu integrallar bir vaqtda mavjud bo'lishligi uchun (o'lchovli) chegaralangan $f(x)$ funktsiyani olamiz. Biroq bunday funksiyalar uchun $F_{\xi_n} \xrightarrow{D} F_{\xi}$ yaqinlashishdan, umuman olganda, (3.5) yaqinlashish kelib chiqmaydi.

3.2-m i s o l. Aytaylik, $\xi_n(x) \equiv \frac{1}{n}$, $\xi(\omega) \equiv 0$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

bo'lsin, u holda $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_{\xi_n}(x) = Mf(\xi_n) = f(\frac{1}{2}) = 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_{\xi}(x) = Mf(\xi) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

demak, $F_{\xi_n} \xrightarrow{D} F_{\xi}$ ammo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_{\xi_n}(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_{\xi}(x)$.

Biroq $f(x)$ uzluksiz va chegaralangan funksiya bo'lsa, u holda taqsimot bo'yicha yaqinlashishdan (3.5) kelib chiqadi va, aksincha.

Aytaylik, $H = \{H\}$ to'plam $H=H(x)$ funksiyalardan iborat sinf bo'lib, bu to'plamdagi funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

- a) $H(x)$ — kamaymaydigan funksiya;
- b) $H(-\infty)=0, H(+\infty) \leq 1$;
- v) $H(x)$ chapdan uzluksiz funksiya.

Biz $F=\{F\}$ deb H sinfnig shunday qism to'plamini olamizki, bunda $F(+\infty)=1$ ya'ni $R(x)$ ξ tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining xuddi o'zi.

3.5- ta'rif. Agar ixtiyoriy uzluksiz va chegaralangan $h(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dH_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dH(x) \quad (3.6)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $H \ni H_n$ funksiyalar ketma-ketligi $H \ni H$ funksiya **sust yaqinlashadi** deyiladi va qisqa $H_n \xrightarrow{W} H^*$ kabi belgilanadi, bu yerda W harfi inglizcha „Weak“ - „sust“, so'zining bosh harfidan olingan.

3.1 - teorema. Faraz qilaylik, $F_n F \in F$, u holda

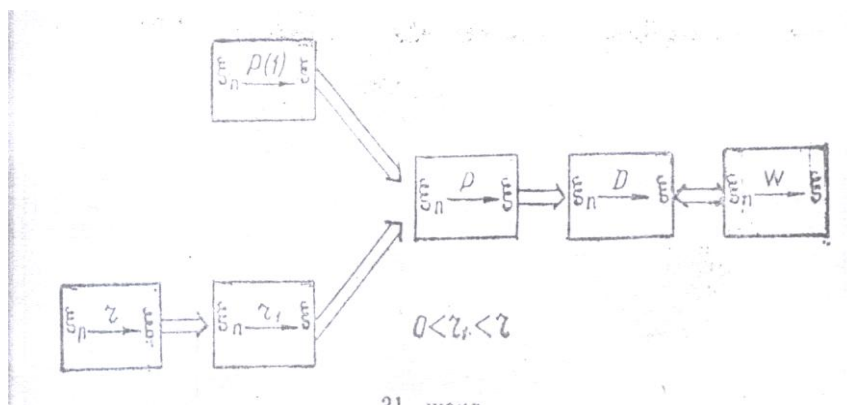
$(F_n \xrightarrow{W} F) \Leftrightarrow (F_n \xrightarrow{D} F)$ Bu teoremani H sinfdagi funksiyalar uchun quyidagicha bayon etish mumkin.

3.2 – teorema. Faraz qilaylik, $H_n H \in H$, u holda

$$1) (H_n \xrightarrow{W} H) \Rightarrow (H_n \xrightarrow{D} H) \quad (3.7)$$

$$2) H_n \xrightarrow{D} H, H_n(+\infty) \Rightarrow H_n \xrightarrow{W} H. \quad (3.8)$$

Yuqorida aytilganlarga ko'ra turli yaqinlashishlar orasidagi bog'lanishni ifodalovchi sxema keltirishimiz mumkin. (3.2- shakl)



3.2 -shakl

$\{\xi_n\}, n \geq 1$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ehtimol bo'yicha, bir ehtimol bo'yicha va P $0 < p < \infty$ o'rtacha tartibda fundamental deyiladi, agar mos ravishda quydagishartlar bajarilsa:

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $P\{|\xi_n - \xi_m| < \varepsilon\} \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$, deyiladi barcha $\omega \in \Omega$ lar uchun $\{\xi_n(\omega)\}, n \geq 1$ ketma-ketlik fundamental $\{\xi_n(\omega)\}$ funksiyalar ketma-ketligi L^p manosiida fundamental ya'ni $M|\xi_n - \xi_m|^p \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$.

3.3-teorema. a) $\xi_n \rightarrow \xi$ (deyarli hamma joyda P ehtimol bo'yicha) bo'lishi uchun $\forall \varepsilon > 0$ son uchun

$$P\{\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad (3.9)$$

ning bajarilishi zarur va yetarli.

b) $\{\xi_n\}, n \geq 1$ ketma-ketlik bir ehtimol bilan fundamental bo'ladi faqat va faqat $\forall \varepsilon > 0$ son uchun

$$P\{\sup_{\substack{k \geq n \\ l \geq n}} |\xi_k - \xi_l| \leq \varepsilon\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

bajarilsa yoki bu

$$P\{\sup_{k \geq 0} |\xi_{n+k} - \xi_n| \leq \varepsilon\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

gat eng kuchli. $A_1, A_2, \dots$ F dan olingan hodisalarning biror ketma-ketligi bo'lsin eslatib o'tamiz $\{A_n \text{ cheksiz son}\}$ deb $A_1, A_2, \dots$ hodisalardan cheksiz ko'pi ro'y beradigan $\overline{\lim} A_n$ hodisa belgilangan.

Lemma. (Borel-Kontelli)

a) Agar $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ bo'lsa u holda $P\{A_n \text{ cheksiz son}\}$ shu hodisaning ehtimoli nolga teng.

b) Agar $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ va $A_1, A_2, \dots$ hodisalarga bog'liq bo'lmagan bo'lsa, u holda $P\{A_n \text{ cheksiz son}\} = 1$.

3.4-teorema. Quyidagi implikatsiyalar o'rinli.

$$\xi_n \xrightarrow{\text{deyarli}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi, \quad (3.12)$$

$$\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi, p > 0 \quad (3.13)$$

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi \xrightarrow{d} \xi, \quad (3.14)$$

3.5-teorema. $\{\xi_n\}, n \geq 1$ shunday nomanfiy tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$$\xi_n \xrightarrow{\text{deyarli}} \xi \text{ va } M\xi_n \longrightarrow M\xi < \infty \text{ u holda}$$

$$M|\xi_n - \xi| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad (3.15)$$

o'rinli bo'ladi.

3.6-teorema. (Deyarli hamma joyda yaqinlashishning Koshi alomati)

$\{\xi_n\}, n \geq 1$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bir ehtimol bilan yaqinlashuvchi bo'lishi uchun (biror ξ tasodifiy miqdorga) u bir ehtimol bilan fundamental bo'lishi zarur va yetarli.

3.7-teorema. Agar ketma-ketlik ehtimol bo'yicha fundamental (yaqinlashuvchi) bo'lsa, u holda undan bir ehtimol bo'yicha fundamental $\{\xi_{n_k}\}$ qismaniy fundamental ketma-ketlikni ajratib olish mumkin.

3.8-teorema.(Ehtimol bo'yicha yaqinlashishning Koshi alomati)
 $\{\xi_n\}, n \geq 1$ tasodiy miqdorlar ketma-ketligi ehtimol bo'yicha yaqinlashuvchi bo'lishi uchun u ehtimol bo'yicha fundamental bo'lishi zarur va yetarli.

4-§. Nol yoki bir qonunlari.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ qator uzoqlashadi, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{1}{n}$ yaqinlashadi. Quyidagi savolga qo'llaymiz. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n}$ qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishini nima deyish mumkin, bu yerda $\xi_1, \xi_2, \dots - P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$ ehtimolga ega. Bog'liq bo'lmagan bir xil taqsimlangan Bernulli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga boshqacha aytganda umumiy hadi $\pm \frac{1}{n}$ bo'lgan qator yaqinlashishi haqida nima deyish mumkin, bu yerda "+" va "-" ishoralar qaralayotgan $\xi_1, \xi_2, \dots$ ketma-ketlikka, tasodifiy mos tartibda "Tarqalgan" $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n}$ qator yaqinlashadigan chekli qiymatlarga elementar natijalar to'plamini $A_1 = \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n}$ yaqinlashadi deb belgilaymiz va bu to'plamning $P(A_1)$ ehtimolini qaraymiz.

Oldindan bu ehtimol qanday qiymatlar qabul qilishi mumkinligi ma'lum emas. Yana ajoyib holat shuki oxirida bu ehtimol faqat ikkita 0 va 1 qiymatlarini qabul qilishi mumkin. Bu natija Kolmogorovning 0 va 1 qonuni natijasi hisoblanadi.

2. (Ω, F, P) - ehtimollik fazasi $\xi_1, \xi_2, \dots$ biror tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bilan $F_n^\infty = \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots)$ orqali $\xi_n, \xi_{n+1}, \dots$ tasodifiy miqdorlar bilan

hosil bo'lgan σ - algebrani belgilaymiz va $\mathcal{X} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^{\infty}$ bo'lsin. σ - algebralar kesishmasi yana σ - algebra bo'lganligi uchun u holda $\mathcal{X}$ - σ - algebra. Bu σ - algebra “dumli” yoki “qoldiq” σ - algebra deb ataladi, grupp chunki har qanday $A \in \mathcal{X}$ hodisa ixtiyoriy chekli n sonidan $\xi_1 \dots \xi_n$ tasodifiy miqdorlar qiymatlariga bog'liq bo'lmaydi, faqat “ $\xi_1, \xi_2 \dots$ ” ketma-ketliklarning cheksiz uzoq qiymatlari o'zgarishi bilan aniqlanadi.

Ixtiyoriy $k > 1$ uchun $A_1 \equiv \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n} \text{ yaqinlashuvchi} \right\}$ yaqinlashuvchi

$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n} \text{ yaqinlashuvchi} \right\} \in F_k^{\infty}$ bo'lgani uchun u holda $A_1 \in \bigcap_k F_k^{\infty} \equiv \mathcal{X}$ shunga

o'xshagan, agar $\xi_1, \xi_2 \dots$ ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsa

$A_2 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \text{ yaqinlashadi} \right\} \in \mathcal{X}$ bo'ladi. Quyidagi hodisalar ham “qoldiq”

hodisalar bo'ladi. Bu yerda $I_n \in B(R), n \geq 1$

$$A_4 = \left\{ \lim_n \xi_n < \infty \right\}; \quad A_5 = \left\{ \overline{\lim}_n \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} < \infty \right\};$$

$$A_6 = \left\{ \overline{\lim}_n \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} < c \right\}, \quad A_7 = \left\{ \frac{\xi_n}{n} \text{ yaqinlashadi} \right\},$$

$$A_8 = \left\{ \overline{\lim}_n \frac{\xi_n}{\sqrt{2n \log n}} = 1 \right\}.$$

Ikkinchi tomondan, $B_1 = \left\{ \xi_n = o \text{ barcha } n \geq 1 \right\}$, $B_2 = \left\{ \lim_n (\xi_1 + \dots + \xi_n) \right\}$.

mavjud va c dan kichik $\mathcal{X}$ ga tegishli bo'lmagan misollar bo'ladi. Endi qarayotgan tasodifiy miqdorlar bog'liq bo'lmagan deb faraz qilamiz. Borel- Kontelli lemmasidagi farazlar kelib chiqadi.

$$P(A_3) = 0 \Rightarrow \sum P(\xi_n \in I_n) < \infty$$

$$P(A_3) = 1 \Leftrightarrow \sum P(\xi_n \in I_n) = \infty.$$

Shunday qilib, A_3 hodisaning ehtimoli $\sum P(\xi_n \in I_n)$ shu qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi bog'liq ravishda faqat ikkita 0 va 1 qiymatlarini qabul qilishi mumkin. Bu tasdiq Bernullining “0 yoki 1” qonuni deb ataladi.

4.1- teorema. (Kolmogorovning “0 yoki 1” qonuni) $\xi_1, \xi_2 \dots$ bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi va $A \in \mathcal{X}$ bo'lsin, u holda $P(A)$ ehtimol faqat ikkita 0 va 1 ni qabul qilishi mumkin.

Isbot. Isbotlash yo'li shundan iboratki har bir “dum” A hodisa o'ziga bog'liq emas va demak

$$P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A) \text{ yani } P(A) = P^2(A)$$

bunda $P(A)=0$ yoki 1 ekanligini ko'rsatishdir.

Agar $A \in \mathcal{X}$, bo'lsa, u holda $A \in F_1^\infty = \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots) = \sigma(\bigcup_n F_i^n)$, va bu yerda $A_n \in F_i^n$, $n \geq 1$ to'plamlarning $n \rightarrow \infty$ da $P(A \Delta A_n) \rightarrow 0$ bundan,

$$P(A_n) \rightarrow P(A), P(A_n \cap A) \rightarrow P(A) \quad (4.1)$$

kelib chiqadi.

Lemma. Agar $A \in \mathcal{X}$ bo'lsa, u holda har bir $n \geq 1$ uchun A_n va A hodisalar bog'liq bo'lmagan $P(A \cap A_n) = P(A)P(A_n)$ bundan (4.1) ga ko'ra $P(A) = P^2(A)$, kelib chiqadi va demak $P(A) = 0$ yoki 1 teorema isbotlandi.

Natija – η - “dumli” $\mathcal{X}, \sigma$ algebraga nisbatan o'lchovli tasodifiy miqdorlar ya'ni $\eta \in B \subseteq \mathcal{X}, B \in B(R)$ bo'lsin, u holda, η aynigan tasodifiy miqdor bo'ladi., ya'ni shunday c konstanta mavjudki $P(\eta = c) = 1$.

3. Quyida keltirilgan 4.2- teorema Kolmogorovning “0 yoki 1” qonunining trivial bo'lmagan qo'llanilishiga misol bo'lib xizmat qiladi. $\xi_1, \xi_2 \dots$ $P(\xi_n = 1) = p$ $P(\xi_n = -1) = q$, $p+q=1$ $n \geq 1$, ehtimollarga esa bog'liq

bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi va $S = \xi_1 + \dots + \xi_n$ bo'lsin. Intensiv tushunarlik $p = \frac{1}{2}$. Simmetrik holda $S_n, n \geq 1$ tasodifiy deb olishning "tekis" trayektoriyalari cheksiz ko'p marta 0 dan o'tadi $p \neq \frac{1}{2}$ holda esa tengizlikka "ketadi" endi aniq natijani bayon etamiz.

4.2-teorema.

a) Agar $p=1/2$ bo'lsa u holda $P(S_n = 0 \text{ cheksiz son marta}) = 1$

b) Agar $p \neq \frac{1}{2}$ u holda $P(S_n = 0 \text{ cheksiz son marta}) = 0$

Isbot. Avvalo $B = (S_n = 0 \text{ cheksiz son marta})$ "dumli" bo'lmashligini ta'kidlaymiz, ya'ni $B \notin \mathcal{F}_n^\infty$ $\mathcal{F}_n^\infty = \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots)$ shuning uchun, prinsip jihatdan B hodisa ehtimoli faqat 0 yoki 1 qiymatlarini qabul qilishi ravshan.

b) tasdiq Borel Kantelle lemmasi bir qismini qo'llash bilan oson isbotlanadi, haqiqatdan agar,

$B_{2n} = \{S_{2n} = 0\}$ bo'lsa u holda Sterling formulasiga ko'ra

$$P(B_{2n}) = C_{2n}^n p^n \cdot q^n \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

va demak, $\sum P(B_{2n}) \leq \infty$ shuning uchun $P(S_n = 0 \text{ cheksiz son marta}) = 0$

a) tasdiqni isbotlash uchun $A = \left\{ \overline{\lim} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty \text{ } \underline{\lim} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty \right\}$ hodisa bir ehtimollikka ega bo'lishini isbotlash yetarli chunki, $A \in B$

$$A_c = \left\{ \lim \left| \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right| > C \right\} \quad \lim P\left(\left| \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right| > C \right) > 0$$

Bu yerda oxirgi tengsizlikning Muavr-Laplas teoremasidan kelib chiqadi.

Demak, barcha $c > 0$ lar uchun $P(A_c) = 1$ va demak, $P(A) = \lim_{c \rightarrow \infty} P(A_c) = 1$ teorema isbotlandi.

4. Yana bir marta ta'kidlaymizki, $B = \{S_n = 0 \text{ cheksiz son marta}\}$ hodisa “dumli” hodisalar holidagi faqat 0 yoki 1 qiymatlarni qabul qiladi. Bu holat tasodifiy emas va Xyuitta va Sevidja “0 yoki 1” qonunining katta jihati hisoblanadi. U bog'liq bo'lmagan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar holi uchun 4.1- teorema natijasini “O‘rin almashtiruvchi” hodisalar sinfiga umumlashtiradi (bu sinf o‘z ichiga “dumli” hodisalar sinfini ham oladi).

Zarur ta'rifni keltiramiz: $(1, 2, \dots)$ to'plam o'z-o'ziga o'zaro bir qiymatli $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ almashtirishni chekli o'rin almashtirish deb ataymiz, agar chekli sondan n -lardan tashqari barcha n -larda $\pi_n = n$ bo'lsa agar, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga bo'lsa u holda $\pi(\xi)$ orqali $(\xi_{\pi_1}, \xi_{\pi_2}, \dots)$ ketma –ketlikni belgilaymiz. Agar, $A = (\xi \in B), B \in \mathcal{B}(R^\infty)$ u holda, $\pi(A)$ orqali $A = \{\xi \in B, B \in \mathcal{B}(R^\infty)\}$ hodisani belgilaymiz. $A = (\xi \in B), B \in \mathcal{B}(R^\infty)$, hodisani o'rin almashtirishli deymiz. Agar ixtiyoriy chekli π o'rin almashtirish uchun $\pi(A)$ hodisa A bilan ustma- ust tushsa o'rin almashtirishli hodisaga misol bo'lib $A = (S_n = 0 \text{ cheksiz son marta})$ bu yerda $S_1 = (\xi_1 + \dots + \xi_n)$ hodisa xizmat qiladi. Bundan tashqari $S_1 = \xi_1, S_2 = \xi_1 + \xi_2$ miqdorlar bilan hosil bo'lgan χ

$$\chi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(S) = \sigma(S_1, S_2, \dots)$$

“dumli” σ - algebradagi har bir hodisa o'rin almashtirishli bo'ladi.

4.3-teorema. (Xyuitta va Sevidja **0 yoki 1 qonuni**) . $\xi_1, \xi_2, \dots$ bog'liq bo'lmagan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi va $A = \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \in B\}$ - o'rin almashtirishli hodisa bo'lsin. U holda $P(A) = 0$ yoki 1.

Isbot. $A = \{\xi \in B\}$ o'rin almashtirishli bo'lsin. $B_n \in B(R^n)$ to'plamlarni shunday tanlaymizki $A_n = \{\xi: (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in B_n\}$

$$P(A \Delta A_n) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \quad (4.2)$$

$\xi_1, \xi_2, \dots$, tasodifiy miqdorlar bog'liq bo'lmagan bir xil taqsimlangani uchun, u holda $P_\xi(B) \equiv P(\xi \in B)$ va $P_{\pi_n(\xi)}(B) \equiv P(\pi_n(\xi) \in B)$ ehtimollar taqsimoti ustma-ust tushadi. Demak, $P(A \Delta A_n) = P_\xi(B \Delta B_n) = P_{\pi_n(\xi)}(B \Delta B_n)$ A hodisa o'rin almashtirishli bo'lganligi uchun

$$A \equiv \{\xi \in B\} \Leftrightarrow \pi_n(A) \equiv \{\pi_n(\xi) \in B\} \quad (4.3)$$

Shuning uchun

$$\begin{aligned} P_{\pi_n(\xi)}(B \Delta B_n) &= P(\pi_n(\xi) \in B \Delta \pi_n(\xi) \in B_n) \\ &= P(\xi \in B \Delta \pi_n(\xi) \in B_n) \end{aligned} \quad (4.4) \quad (4.3) \text{ va } (4.4) \text{ dan}$$

$$P(A \Delta A_n) = P(A \Delta \pi_n(A_n)) \quad (4.5)$$

(4.2) ga ko'ra bundan,

$$P(A \Delta (A_n \cap \pi_n(A_n))) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \quad (4.6)$$

Kelib chiqadi. Shuning uchun (4.2), (4.5) va (4.6)

$$\begin{aligned} P(A_n) &\rightarrow P(A), \quad P(\pi_n(A_n)) \rightarrow P(A), \\ P(A_n \cap \pi_n(A_n)) &\rightarrow P(A), \end{aligned} \quad (4.7)$$

degan xulosa kelib chiqaramiz. $\xi_1, \xi_2, \dots$ tasodifiy miqdorlarni bog'liq bo'lmashligidan

$$\begin{aligned} P(A_n \Delta \pi_n(A_n)) &= P\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in B_n, \\ &(\xi_{n+1}, \dots, \xi_{2n}) \in B_n\} = P(A_n)P(\pi_n(A_n)), \end{aligned}$$

Bundan (4.7) ga ko'ra $P(A) = P^2(A)$ va $P(A) = 0$ yoki 1

teorema isbotlandi.

5-§.Qatorlar yaqinlashishi.

1. $\xi_1, \xi_2 \dots$ bog'liq bo'lmagan miqdorlar ketma-ketligi $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ va $A = \sum_{n=1}^{\infty} \xi(\omega)$ chekli limiti yaqinlashadigan ω elementar natijalar to'plami deb faraz qilamiz. Kolmogorovning “0 yoki 1” qonunidan $P(A) = 0$ yoki 1 kelib chiqadi, yani bir ehtimol bilan $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ qator yaqinlashadi yoki uzoqlashadi. Bu paragrafning maqsadi bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlardan faqat qator yaqinlashishini yoki uzoqlashishini aniqlashga imkon beruvchi alomatni berishdan iborat.

5.1-teorema. (Kolmogorov va Xinchin)

$$a) \text{ Agar } M\xi_n = 0, \quad n \geq 1 \quad \text{va} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^2 < \infty \quad (5.1)$$

bo'lsa u holda $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ qator birlik ehtimol bilan yaqinlashadi.

b) Agar shu bilan birga ξ_n tasodifiy miqdorlar tekis chegaralangan $P(|\xi_n| \leq c) = 1, c < \infty$, bo'lsa u holda, teskari ham o'rinli, ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^2 < \infty$ kelib chiqadi.

Bu teorema isboti quyidagi tengsizlikka asoslanadi.

Kolmogorov tengsizliklari.

a) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ $M\xi_i = 0$ $M\xi_i^2 < \infty, \quad i \leq n$ shartlarni qanoatlantiruvchi bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsin, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{SM_n^2}{\varepsilon^2} \quad (5.2)$$

b) Agar shu bilan birga $P(|\xi_i| \leq c) = 1 \quad i \leq n$ bo'lsa u holda

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right\} \leq 1 - \frac{(c + \varepsilon)^2}{MS_n^2} \quad (5.3)$$

Isbot. a) $A = \{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon \}$, $A_k = \{ |S_i| < \varepsilon, \dots, k=1 |S_i| \geq \varepsilon \}$, $1 \leq k \leq n$ deb belgilaymiz. U holda $A = \sum A_k$ va $MS^2 \geq MS^2 I_A = \sum MS^2 I_{A_k}$ lekin $MS_k^2 I_{A_k} + 2MS_k(\xi_{k+1} + \dots + \xi_n)I_{A_k} + M(\xi_{k+1} + \dots + \xi_n)^2 I_{A_k} \geq MS_k^2 I_{A_k}$, chunki $MS_k(\xi_{k+1} + \dots + \xi_n)I_{A_k} = MS_k I_{A_k} + \dots + \xi_n = 0$ va faraz qilingan bog'liq bo'lmaslik va $M\xi_i = 0$ $i \leq n$ shartlarga ko'ra. Shuning uchun $MS_n^2 \geq \sum MS_k^2 I_{A_k} \geq \varepsilon^2 \sum P(A_k) = \varepsilon^2 P(A)$ (5.3) va bu birinchi tengsizlikni isbotlaydi. (5.3) tenglikdan

$$MS_n^2 I_A = MS_n^2 - MS_n^2 I_{A^c} \geq MS_n^2 - \varepsilon^2 P(A) = MS_n^2 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 P(A) \quad (5.4)$$

Ikkinchi tomondan A to'plamda $|S_{k-1}| \leq \varepsilon, |S_k| \leq |S_{k-1}| + |\xi_k| \leq \varepsilon + c$ va demak,

$$\begin{aligned} MS_n^2 I_A &= \sum_k MS_k^2 I_{A_k} + \sum_k M(I_{A_k} (S_n - S_k)^2) \leq (\varepsilon + c)^2 \sum_k P(A_k) + \\ &+ \sum_{j=k+1}^n M\xi_j^2 \leq P(A) \left[(\varepsilon + c)^2 + \sum_{j=1}^n M\xi_j^2 \right] = P(A) \left[(\varepsilon + c)^2 + M\xi_n^2 \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

(5.4) va (5.5) dan

$$P(A) \geq \frac{MS_n^2 - \varepsilon^2}{(\varepsilon + c)^2 + M\xi_n^2 - \varepsilon^2} = 1 - \frac{(\varepsilon + c)^2}{(\varepsilon + c)^2 + M\xi_n^2 - \varepsilon^2} \geq 1 - \frac{(\varepsilon + c)^2}{M\xi_n^2}$$

(5.3) tenglik isbotlandi.

5.1- teorema isboti. a) 3 paragraf 3.6-teoremaga ko'ra $(S_n), n \geq 1$ ketma-ketlik bir ehtimol bilan yaqinlashadi faqat va faqat shundaki bu ketma-ketlik bir ehtimol bilan fundamental bo'lsa 3 paragraf 3.3-teoremaga ko'ra $(S_n), n \geq 1$ ketma-ketlik fundamental bo'ladi faqat va faqat shundaki

$$P\left\{\sup_{k \geq 1} |S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon\right\} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \quad (5.6)$$

o‘rinli bo‘lganda (5.2) ga ko‘ra

$$P\left\{\sup_{k \geq 1} |S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\max_{1 \leq k \leq N} |S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon\right\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=n}^{\infty} M \xi_n^2}{\varepsilon^2}$$

Shuning uchun agar $\sum_{k=n}^{\infty} M \xi_n^2 < \infty$ bo‘lsa, u holda (5.6) chi shart bajariladi

va demak $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ qator birlik ehtimol bilan yaqinlashadi.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ qator yaqinlashsin, u holda (5.6) ga ko‘ra yetarlicha katta n-lar uchun

$$P\left\{\sup_{k \geq 1} |S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon\right\} < \frac{1}{2} \quad (5.7)$$

(5.3) ga ko‘ra

$$P\left\{\sup_{k \geq 1} |S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{(c + \varepsilon)^2}{\sum_{k=n}^{\infty} M \xi_k^2}$$

Shuning uchun agar $\sum_{k=n}^{\infty} M \xi_k^2 = \infty$ deb faraz qilsak u holda

$$P\left\{\sup_{k \geq 1} |S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon\right\} = 1$$

bu esa (5.7) tenglikka ziddir. Teorema isbotlandi.

5.1-misol: Agar

$$\xi_1, \xi_2, \dots - P(\xi_n = +1) = P(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Shartlarni qanoatlantiruvchi bog'liq bo'lmagan Bernilli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsa u holda $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n a_n$ qator bu yerda $|a_n| \leq c$ 1- ehtimol bilan faqat va faqat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ bo'lganda yaqinlashadi.

5.2-teorema. (“ikki qator haqidagi teorema”).

Bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlardan tuzulgan $\sum_{n=1}^{\infty} M_{\xi_n}$ qator bir ehtimol bilan yaqinlashishi uchun $\sum_{n=1}^{\infty} M_{\xi_n}$ va $\sum_{n=1}^{\infty} D_{\xi_n}$ qatorlar bir vaqtda yaqinlashishi yetarli, agar shu bilan birga $P(|\xi_n| \leq c) = 1, n \geq 1$ bo'lsa, u holda bu shart zarur shart ham bo'ladi.

Isbot. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} D_{\xi_n}$ bo'lsa u holda 5.1- teoremaga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} (\xi - M_{\xi_n})$ qator yaqinlashadi. Lekin farazga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} M_{\xi_n}$ yaqinlashadi. Shuning uchun $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ qator ham yaqinlashadi. Zarururiyligini isbotlash uchun

“Simmetrik yaqinlashishning” quyidagi usulida foydalanamiz. $\xi_1, \xi_2 \dots$ ketma-ketlik bilan birga unga bog'liq bo'lmagan $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2 \dots$ bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini qaraymiz $\tilde{\xi}_n$ ham $\xi_n, n \geq 1$ kabi taqsimotga ega. O'z navbatida bu faraz umumiylikni chegaralamaydi. U holda agar $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ yaqinlashsa u holda $\tilde{\xi}_n$, qator ham yaqinlashadi. Demak

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\xi - M_{\xi_n}) \text{ qator ham lekin } \sum_{n=1}^{\infty} (\xi - M_{\tilde{\xi}_n}) \quad \text{va} \quad P(|\xi_n - \tilde{\xi}_n| \leq 2c) = 1.$$

$$\text{Shuning uchun } \sum_{n=1}^{\infty} D(\xi_n - \tilde{\xi}_n) < \infty \text{ bundan } \sum_{n=1}^{\infty} D_{\xi_n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} D(\xi - \tilde{\xi}_n) < \infty.$$

Shuning uchun 5.1- teorema bilan $\sum_{n=1}^{\infty} (\xi - M \xi_n)$ qator yaqinlashadi. Demak $\sum_{n=1}^{\infty} M \xi_n$ qator ham yaqinlashadi. Demak $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ qator yaqinlashishidan $P(|\xi_n| \leq c) = 1, n \geq 1$ farazda ikkita $\sum_{n=1}^{\infty} M \xi_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} D \xi_n$ qatorlar yaqinlashadi. Teorema isbotlandi.

3. Quyidagi teorema $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ qator yaqinlashishining tasodifiy miqdorining chegaralanganligi farazlarsiz zarur va yetarli shartini beradi.

c - biror konstanta va

$$\xi_n^c = \begin{cases} \xi, & |\xi| \leq c \\ 0, & |\xi| > c \end{cases}$$

bo'lsin.

5.3-teorema. (“*uchta qator*” haqidagi Kolmogoriv teoremasi).

$\xi_1, \xi_2 \dots$ bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ qatorning bir- ehtimol bilan yaqinlashishi uchun ixtiyoriy $c > 0$ son uchun $\sum_{n=1}^{\infty} M \xi_n^c, \sum_{n=1}^{\infty} D \xi_n^c, \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| \geq c)$ qatorlarning yaqinlashishi zarur va biror $c > 0$ da bu qatorlar yaqinlashishi uchun yetarli.

Isbot. Yetarliligi “Ikki qator ” haqidagi teorema asosan $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^c$ qator bir ehtimol bilan yaqinlashadi, lekin agar $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| \geq c) < \infty$ bo'lsa u holda Borell Kontelli lemmasiga asosan bir ehtimol bilan demak, $\sum_{n=1}^{\infty} I(|\xi_n| > c) < \infty$ chekli sondagilardan tashqari barcha n -larda $\xi_n = \xi_n^c$ o'rinli. Shuning uchun $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ qator ham yaqinlashadi.

Zarurlig. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ qator yaqinlashsa $\xi_n \rightarrow 0$ va demak ixtiyoriy $c > 0$ chekli sondagi hodisalardan ko'p bo'lmaganlari uchun $|\xi_n| \geq c$ berilishi mumkin. Shuning uchun $\sum_{n=1}^{\infty} I(|\xi_n| > c) < \infty$ va Borell Kontelli lemmasi 2 - qismiga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| \geq c) < \infty$ qator $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ qatorning uzoqlashishidan $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^c$ qator yaqinlashishi kelib chiqadi. Shuning uchun "Ikki qator" haqidagi teorema asosan $\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n$ qatorlarning har biri yaqinlashadi. Teorema isbotlandi.

Natija. $\xi_1, \xi_2, \dots - M\xi_n = 0$ bo'lgan bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsin u holda agar $\sum_{n=1}^{\infty} M \frac{\xi_n^2}{1 + |\xi_n|} < \infty$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ qator bir ehtimol bilan yaqinlashadi.

Isbot. $\sum_{n=1}^{\infty} M \frac{\xi_n^2}{1 + |\xi_n|} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} M [I(|\xi_n| \leq 1) + |\xi_n| I(|\xi_n| > 1)] < \infty$ ekanligini hisobga olamiz. Shuning uchun agar $\xi_n = \xi_n I(|\xi_n| \leq 1)$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} M(\xi_n)^2 < \infty$ $M\xi_n = 0$ bo'lgani uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} |M \xi_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |M \xi_n I(|\xi_n| \leq 1)| = \sum_{n=1}^{\infty} |M \xi_n I(|\xi_n| > 1)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M |\xi_n| I(|\xi_n| > 1) < \infty.$$

Demak, $\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^1$ va $\sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n^1$ qatorlarning har biri yaqinlashadi. Chebishev tengsizligiga asosan

$$P(|\xi_n| > 1) \leq P(|\xi_n| I(|\xi_n| > 1) > 1) \leq M(|\xi_n| I(|\xi_n| > 1)).$$

Shuning uchun $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| > 1) < \infty$ shu bilan $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ qatorning yaqinlashishishi "Uch qator" haqidagi teoremadan kelib chiqadi.

Xulosa

Ushbu malakaviy bitiruv ishi tasodifiy miqdorlardan tuzilgan qatorning yaqinlashishini o'rganishga bag'ishlangan. Bitiruv malakaviy ishi kirish, ikkita bob, beshta paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

Birinchi paragrafda ehtimollar nazariyasi aksiomalari va ehtimolning xossalari keltirilgan.

Ikkinchi paragrafda tasodifiy miqdor va taqsimot funksiyalar, taqsimot turlari va tasodifiy miqdorlar sonli xarakteristikalar keltirilgan.

Uchinchi paragrafda tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun yaqinlashish turlari va ularga doir teorema va tasdiqlar keltirilgan.

To'rtinchi paragrafda "qoldiqli" hodisalar uchun Kolmogorovning "0 yoki 1" qonuni keltirilgan. Shuningdek "qoldiqli" hodisalar σ -algebrasi elementlari va "qoldiqli" hodisa bo'lmaydigan tasodifiy hodisalarga misollar keltirilgan.

Beshinchi paragrafda tasodifiy qatorlarning yaqinlashishi to'g'risidagi asosiy teoremlar keltirilgan. Bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan tasodifiy qatorning yaqinlashishi to'g'risidagi Kolmogorov- Xinchin, "ikki qator", "uch qator" yaqinlashishi haqidagi teoremlar keltirilgan. Bu paragrafda tasodifiy qatorlar yaqinlashishi to'g'risidagi teoremlarning tadbiriga doir yetarlilik shartlarining muhimligini ko'rsatadigan tasodifiy qatorlarga misollar keltirilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1.S.X Sirojiddinov, M.M.Mamatov "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika". "O'qituvchi" Toshkent 1980-yil. 23-29, 71-82, 104-112 b.

2. Б. В. Гнеденко “Курс теории вероятностей” “Наука” Москва 1987 г. 43-51 стр.
3. А. Боровков “Теория вероятностей”. “Наука” Москва 1986 г. 254-263 стр.
4. А. Н. Ширяев “Вероятность”. “Наука” Москва 1985 г. 147-158 стр.
5. L. Fejer and F. Riesz, Uber einige funktionaltheoretische Ungleichungen, Math. Z. 11 (1925) 305-314.
6. E. C. Francis and J. E. Littlewood, Examples in Infinite Series, Deighton Bell, Cambridge, 1928.
7. K. Grandjot, On some identities relating to Hardy's convergence theorem, J. London Math. Soc. 3 (1928) 114-117.
8. G. H. Hardy, Notes on some points in the integral calculus, XLI. On the convergence of certain integrals and series, Messenger of Math. 45 (1915) 163-166.
9. Notes on some points in the integral calculus, LI. On Hubert's double-series theorem, and some connected theorems concerning the convergence of infinite series and integrals, Messenger of Math. 48(1919) 107-112.
10. [www.academia.edu/3683699/Ehtimollar](http://www.academia.edu/3683699/Ehtimollar_nazariyasi) nazariyasi
11. Notes on some points in the integral calculus, LX. An inequality between integrals, Messenger of Math. 54 (1925) 150-156.
12. -, Note on a theorem of Hubert concerning series of positive terms, Proc. London Math. Soc. 23(1925)45-46.
13. -, Remarks on three recent notes in the journal, J. London Math. Soc. 3 (1928) 166-
14. -, Prolegomena to a chapter on inequalities, J. London Math. Soc. 4 (1929) 61-78.

15. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya, The maximum of a certain bilinear form, Proc. London Math. Soc. 25(1926) 265-282.