УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН В КОМПОЗИЦИОННОМ МАТЕРИАЛЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Каримов А.М., *к.ф.-м.н., доцент (ТашИИТ)*

В работе исследуется плоская задача дифракции упругих волн относительно жесткозаделанной щели в слоистом композиционном материале периодической структуры [1-3].

Пусть, в пространстве, занятом упругом слоистом композиционном материалом распространяется волна. Пространство имеет границу Σ (поверхность препятствию), причем такую, что существует область геометрической тени. Явление дифракции состоит в том, что возмущения все же попадают в область геометрической тени. Время прихода возмущения в точку тени в однородной среде может быть вычислено по методу “натянутой нити”, следующему из принципа Ферма. С другой стороны, возможен случай, когда область тени отсутствует. Тогда существует только отраженные волны, которые могут быть найденные лучевым методом.

Идея лучевого метода состоит в том, что падающая волна представляется в виде лучевого ряда

$$u_{пад}\left(\overline{x},t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(x\right)f_n\left(ct-p\left(x\right)\right) \tag{1}$$

где $ct-p\left(x\right)=0$ уравнение фронта падащей волны, а $f_n\left(\tau\right)$ -любая система функций, обладающая следующими двумя свойствами:

1) $f_n^{/}\left(\tau\right)=f_{n-1}\left(\tau\right)$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n f_n\left(\tau\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n f_n\left(\tau\right)$, то $a_n=b_n$

Обобщая эти и другие идеи, решение волнового уравнения ищется в виде асимптотического ряда

$$u_i\left(\overline{x},t\right)=v_i\left(\overline{x},t\right)+\sum_{q=1}^{\infty}\alpha^q\sum_{\beta}N^{(q)(\beta)}_{i,j,k_1,\dots,k_{q-2\beta}}\left(\xi\right)\frac{\partial^2}{\partial t^{2\beta}}v_{j,k_1,\dots,k_{q-2\beta}} \tag{2}$$

где $N^{(q)(\beta)}$ – так называемые локальные функции координат по переменным $\xi=\dfrac{x_3}{\alpha}$. Суммирование по происходит $\beta=0$ так, чтобы выполнялось условие $q-2\beta\geq 0$, причем все локальные функции, имеющие отрицательные индексы равны нулю, α – малый параметр, равный отношению длину ячейки периодичности к характерному размеру рассматриваемой задачи, например к длину волну.

Компоненты вектора “средних” перемещений $v_i\left(\bar{x},t\right)$ удовлетворяют уравнениям движениям

$$h_{ijkl}v_{k,lj}=\rho_0\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \tag{3}$$

условиям излучениям

$$v_i\left(\bar{x},t\right)\to 0 \qquad \text{при } \left|x\right|\to\infty \tag{4}$$

условиям на ребре

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Sigma_\varepsilon} h_{ijke}v_{k,e}v_i n_j d\Sigma=0 \tag{5}$$

а также начальным условиям

$$v_i=u_i^0 \qquad \text{при } t=0 \tag{6}$$

здесь $h_{ijke}=<C_{ijke}+C_{ijpq}N_{kepq}>$, $\rho=<\rho\left(\xi\right)>$, <•> – оператор осреднения,

C_{ijkl}-тензор модулей упругости рассматриваемой среды, $\sum_\varepsilon$– цилиндрическая поверхность малого радиуса ε. $\bar{n}$ – единичный вектор нормали к поверхность $\sum_\varepsilon$.

В частности, рассмотрим упругое слоистое пространство, образованное периодическим повторением элементарных ячеек в направлении оси x_3 (ортогональной к слоистости). Элементарные ячейки состоят из двух упругих слоев различной толщины l_m с разными механическими свойствами λ_m,μ_m и плотностью ρ_m (m=1,2). В такой среде имеется плоскость с разрезом x_1=0; x_3>0. При t<0 в части плоскости, где x_3<0 движется плоская волна $U_m^0\left(x_1,x_3,t\right)$, достигающая в момент t=0 острия щели $\left(m=1;3\right)$. Тогда решение задачи (3)-(6) имеет вид

$$v_1\left(x_1,x_3,t\right)=\sum_{m=1}^{2}\mathrm{Re}\int_0^{\theta_m}K\left(\zeta\right)\eta_m\left(\zeta\right)\omega_m\left(\zeta\right)d\zeta$$

$$v_3\left(x_1,x_3,t\right)=\sum_{m=1}^{2}\mathrm{Re}\int_0^{\theta_m}L_m\left(\zeta\right)\omega_m\left(\zeta\right)d\zeta$$

где $K\left(\zeta\right)=c^{-2}\zeta$, $\zeta=\zeta_1$,

$L_m\left(\zeta\right)=a^{-2}\zeta^2+b\eta_m^2\left(\zeta\right)-1$,

θ_m определяются из соотношения

$$1-\theta_m\zeta_1+\eta_m\left(\theta_m\right)\zeta_3=0,$$

$$\zeta_1 = \frac{x_1}{t} \quad , \quad \zeta_3 = \frac{x_3}{t}$$

η_m корни уравнения

$$\eta^4 - \frac{a+b-B\theta^2}{ab}\eta^2 + \left(\frac{1}{a}-\theta^2\right)\left(\frac{1}{b}-\theta^2\right) = \theta$$

$$\mathrm{B} = \frac{1}{\rho_0}h_{1122} + \frac{1}{\rho_0}h_{3322} + \frac{1}{\rho_0}h_{3311}\,,\; a = \frac{1}{\rho_0}h_{1111}\,,\; b = \frac{1}{\rho_0}h_{1133}\,,\; c = \frac{1}{\rho_0}h_{3333}$$

Подставляя полученные решения для "средних" перемещения в (2) находим приближенно-аналитическое решение рассматриваемой задачи в виде

$$u_m(x_1, x_3, t) = v_m(x_1, x_3, t) + \alpha\left(N_{mkl}(\xi) - < N_{mkl}(\xi) >\right)v_{k,l}(x_1, x_3, t)$$

где $N_{ijk} = \int_0^{\xi}(C_{k3l3}^{-1} < C_{l3m3}^{-1} >< C_{m3n3}^{-1}C_{n3ij} > -C_{n3l3}^{-1}C_{l3ij})d\xi$, причем отличными от нуля компонентами являются следующими: $N_{131} = N_{232} = N_{311} = N_{322}, N_{113} = N_{223} = N_{333}$.

Полученное приближенно-аналитическое решение удовлетворяет волновым уравнениям, начальным условиям, условию излучению, а также условию на кончике щели. Приближения состоит в том, что коротковолновые составляющие импульса рассеиваются по мере продвижения волны, и отклик определяется главным образом, волнами большой длины.

Пользуясь полученной асимптотической решения можно оценить вклад вносимой в перемещения вторичными дифракционными волнами. Известно, что вклад в перемещения вторичных дифракционных волн может доходить до 85%, следовательно, ими нельзя пренебрегать.

Литература

1. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984.
2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1991.
3. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Лекции по теории упругости. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
4. Исроилов М.Ш. Динамическая теория упругости и дифракции волн. М.: Изд-во МГУ, 1992.
5. Каримов А.М. Дифракция упругих волн в слоистой среде периодической структуры // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 2001.
6. Свекло В.А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела. Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961.
7. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1989.
8. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. М.: Физматгиз, 2006.
9. Каримов А.М. Интегральная формула для задачи о распространении нестационарных волн в волокнистом композите под действием гладкого штампа. Вестник ТашИИТ, 2015, №1.

Аннотация

Мақолада даврий тузилишли эластик аралаш муҳитда тўлқин тарқалаётгандаги дифракция масаласининг аналитик ечими узун тўлқинли яқинлашиш усили билан топилган.