

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA‘LIM VAZIRLIGI**

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA fakulteti

“Amaliy matematika” kafedrası



**ANALITIK GEOMETRIYA
fanidan ma‘ruzalar matni**

I-QISM

5130100-Matematika ta‘lim yo‘nalishi uchun

Urganch 2017

So'z boshi

Analitik geometriya kursi bakalavriyatning birinchi kursida o'qitilib, mutaxassislik fanlarining asosiylaridan biri hisoblanadi. Bu kursda birinchi, ikkinchi darajali algebraik tenglamalar bilan aniqlanuvchi chiziqlar va sirtlar o'rganiladi. Fazoda va tekislikda koordinatalari birinchi darajali tenglamalarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami mos ravishda tekisliklar yoki to'g'ri chiziqlarni aniqlaydi. Tekislik va to'g'ri chiziqlar maktab kursida aksiomatik aniqlanadi. Analitik geometriya kursida tekislik va to'g'ri chiziqlar algebraik tenglama yordamida aniqlanadi. Fazoda va tekislikda koordinatalari ikkinchi darajali tenglamalarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami mos ravishda ikkinchi tartibli sirt yoki ikkinchi tartibli chiziqlarni aniqlaydi. Ikkinchi tartibli sirt va ikkinchi tartibli chiziqlarning ba'zi birlari maktab kursida ham o'rganiladi. Shuning uchun ham analitik geometriya kursi maktab geometriya kursi bilan chambarchas bog'langandir. Analitik geometriya kursining asosiy maqsadi talabalarda geometriyada algebraik metodlarni tadbiq qilish ko'nikmalarini shakllantirishdan iboratdir. Analitik geometriya kursida algebraik metodlar asosiy rolni o'ynaydi. Analitik geometriya kursi matematikaning algebra, matematik analiz kabi bo'limlari bilan uzviy bog'liq ravishda olib boriladi.

Bu kursning matematika yo'nalishidagi mutaxassislarni tayyorlashdagi o'rni analitik geometriya fani matematikaning asosiy fundamental bo'limlaridan biri ekanligi bilan aniqlanadi.

Fanni o'qitishning maqsadi-talabalarda geometriyada algebraik metodlarni tadbiq qilish ko'nikmalarini shakllantirishdan iboratdir.

Fanni o'qitishning vazifalari-geometrik obektlar matematikada algebraik tenglamalar yordamida aniqlanadi yoki differentsiallanuvchi funktsiyalar yordamida parametrlanadi. Bu kursning asosiy vazifasi algebraik tenglamalar yordamida aniqlanadigan geometrik obektlarni o'rganish uchun zaruriy metodlar bilan tanishtirishdan iboratdir.

Mamlakatimizda amalga oshirilayotgan ta'lim islohotlarining hozirgi bosqichidagi muhim vazifalar qatorida quyidagilarni alohida ko'rsatish lozim:

- ta'lim sifatini oshirish,
- o'quv jarayoniga zamonaviy pedagogik va axborot texnologiyalarni kengroq joriy qilish,
- o'quv va uslubiy adabiyotlarning yangi avlodini yaratish.

Oliy ta'lim tizimidagi o'quv jarayoni sifatini ta'minlovchi asosiy omillardan biri – bu o'quv va uslubiy adabiyotlar bilan ta'minlanganlik darajasi, ularning sifati va pedagogik hamda metodik talablarga muvofiqligidir.

20-mavzu: Ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamasi.

Reja

1. Ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamasi.
2. Ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasi.

Tekislikda biror affin (yoki Dekart) sistemasida koordinatalari

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikkinchi tartibli chiziq deb atalishi ma'lum. Bunda $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{10}, a_{20}, a_{00}$ koeffitsiyentlar haqiqiy sonlar bo'lib, a_{11}, a_{12}, a_{22} lardan kamida bittasi noldan farqlidir (bu shartni bundan buyon $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ ko'rinishida yozamiz).

Biz oldingi mavzularda uchta chiziq: ellips, giperbola va parabolani o'rgandik, bu chiziqlar ham ikkinchi tartibli chiziqlardir, chunki (1) tenglamada $a_{11} = \frac{1}{a^2}, a_{22} = \frac{1}{b^2}, a_{00} = -1$ bo'lib, qolgan barcha koeffitsiyentlar nol bo'lsa, u

ellipsning kanonik tenglamasi, shu shartlarda yana $a_{22} = -\frac{1}{b^2}$ bo'lsa, (1) tenglama giperbolaning kanonik tenglamasi, $a_{10} = p; a_{22} = 1$ bo'lib, qolgan koeffitsiyentlar nol bo'lsa, (1) tenglama parabolaning kanonik tenglamasidir.

Quyidagi tabiiy savol tug'iladi: tekislikda ko'rilgan bu chiziqlardan boshqa yana ikkinchi tartibli chiziqlar bormi? Bu savolga quyida javob berishga harakat qilamiz. Avvalo shuni ta'kidlaymiz: «Algebraik chiziq va uning tartibi» mavzusidan bizga ma'lumki, chiziqning tartibi koordinatalar sistemasining olinishiga bog'liq emas. Bundan foydalanib, koordinatalar sistemasini tegishli tanlash hisobiga barcha ikkinchi tartibli chiziqlarni to'la geometrik tavsiflab chiqamiz. Ikkinchi tartibli γ chiziq $\beta = (O, \vec{i}, \vec{j})$ dekart reperida (1) umumiy tenglamasi bilan ifodalangan bo'lsin. Shunday reporni tanlaymizki, unga nisbatan γ chiziqning (1) tenglamasi mumkin qadar sodda – «kanonik» ko'rinishga ega bo'lsin, ya'ni

- 1) o'zgaruvchi koordinatalar ko'paytmasi qatnashgan had bo'lmasin;
- 2) birinchi darajali hadlar soni eng oz bo'lsin (iloji bo'lsa, ular butunlay qatnashmasin);
- 3) mumkin bo'lsa, ozod had qatnashmasin.

Agar (1) tenglamada $a_{12} \neq 0$ bo'lsa, soddalashtirishni quyidagicha bajaramiz. β sistemaning o'qlarini O nuqta atrofida ixtiyoriy α burchakka burib, yangi $\beta' = (O, \vec{i}', \vec{j}')$ dekart sistemasini hosil qilamiz. β sistemadan β' sistemaga o'tish formulalari

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad (2)$$

dan x, y ni (1) ga qo'ysak va o'xshash hadlarini ixchamlasak, γ chiziqning (1) tenglamasiga β' sistemada ushbu ko'rinishni oladi:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0, \quad (3)$$

bunda:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} \cos^2 \alpha + 2a_{12} \cos \alpha \sin \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha, \\ a'_{12} &= -a_{11} \sin \alpha \cos \alpha + a_{12} \cos^2 \alpha - a_{12} \sin^2 \alpha + a_{22} \sin \alpha \cos \alpha, \\ a'_{22} &= a_{11} \sin^2 \alpha - 2a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha, \\ a'_{10} &= a_{10} \cos \alpha + a_{20} \sin \alpha, \quad a'_{20} = -a_{10} \sin \alpha + a_{20} \cos \alpha, \quad a'_{00} = a_{00}. \end{aligned} \quad (4)$$

(4) belgilashlardan ko'rinadiki, (3) tenglamadagi a'_{11} , a'_{12} , a'_{22} koeffitsiyentlar (1) tenglamadagi a_{11} , a_{12} , a_{22} koeffitsiyentlarga va α burchakka bog'liq, shu bilan birga a'_{11} , a'_{12} , a'_{22} ning kamida biri noldan farqli, chunki

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & 2 \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha & \sin^2 \alpha \\ -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & -\sin 2\alpha & \cos^2 \alpha \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha & \sin^2 \alpha \\ -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha & 1 \\ -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cos^2 \alpha \cos 2\alpha - \cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha = \cos 2\alpha (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \sin^2 2\alpha = \\ &= \cos 2\alpha \cdot \cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

α burchakning ixtiyoriyligidan foydalanib, uni shunday tanlab olamizki, almashtirilgan (3) tenglamadagi a'_{12} koeffitsiyent nolga teng bo'lsin, ya'ni

$$\begin{aligned} a'_{12} &= -a_{11} \sin \alpha \cos \alpha + a_{12} \cos^2 \alpha - a_{12} \sin^2 \alpha + a_{22} \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= -(a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha) \sin \alpha + (a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha) \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

yoki

$$\frac{a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha}{\sin \alpha}. \quad (5)$$

(5) munosabatni biror λ ga tenglab, uni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha = 0, \\ a_{21} \cos \alpha + (a_{22} - \lambda) \sin \alpha = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Bu sistema bir jinsli, shuning uchun uning determinanti nolga teng, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ yoki } \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0 \quad (7)$$

bo'lgandagina sistema noldan farqli yechimga ega bo'ladi.

(7) tenglama γ chiziqning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi.

(7) tenglamaning ildizlari:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}{2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{D}}{2}.$$

$a_{12} \neq 0$ bo'lgani uchun uning diskriminanti:

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0.$$

Demak, (6) tenglamaning λ_1, λ_2 ildizlari turli va haqiqiydir. (5) dan

$$\begin{cases} a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha = \lambda \cos \alpha, \\ a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha = \lambda \sin \alpha \end{cases} \quad (8)$$

tengliklarni yoza olamiz. Ularning har birini $\cos \alpha \neq 0$ ga bo'lib, $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ va $a'_{12} = -(a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha) \sin \alpha + (a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha) \cos \alpha = 0 \Rightarrow a_{12} = 0$, (ya'ni a_{12} azaldan 0 ga teng ekan) ushbuni hosil qilamiz:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda - a_{22}}. \quad (9)$$

(9) munosabatga navbat bilan (7) xarakteristik tenglamaning λ_1, λ_2 ildizlarini qo'yamiz:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}. \quad (10)$$

Viyet teoremasiga ko'ra (7) dan

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2. \quad (11)$$

(11) va (10) formulalardan ushbuga ega bo'lamiz:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 - a_{11}(\lambda_1 + \lambda_2) + a_{11}^2}{a_{12}^2} = -1 \Rightarrow |\alpha_2 - \alpha_1| = \frac{\pi}{2}.$$

Shunga ko'ra $\operatorname{tg} \alpha$ Ox' o'qning β dagi burchak koeffitsiyenti bo'lganda $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right)$ Oy' o'qning shu reperdagi burchak koeffitsiyenti bo'ladi. U holda Ox' o'qning $\vec{i}'$ birlik vektorining koordinatalari bo'lmish $\cos \alpha_1, \sin \alpha_1$,

$$\sin \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}}$$

formulalardan, Oy' o'qning $\vec{j}'$ birlik vektorining koordinatalari $\cos \alpha_2, \sin \alpha_2$

$$\sin \alpha_2 = \sin \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \alpha_1, \quad \cos \alpha_2 = \cos \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \alpha_1$$

tengliklardan aniqlanadi. $\lambda = \lambda_1$ bo'lganda (8) dan

$$\begin{aligned} a_{11} \cos \alpha_1 + a_{12} \sin \alpha_1 &= \lambda_1 \cos \alpha_1, \\ a_{21} \cos \alpha_1 + a_{22} \sin \alpha_1 &= \lambda_1 \sin \alpha_1, \end{aligned}$$

u holda

$$\begin{aligned} a'_{11} &= (a_{11} \cos \alpha_1 + a_{12} \sin \alpha_1) \cos \alpha_1 + (a_{21} \cos \alpha_1 + a_{22} \sin \alpha_1) \sin \alpha_1 = \\ &= \lambda_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_1 + \lambda_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_1 = \lambda_1. \end{aligned}$$

(4) munosabatda 1- va 3–tengliklarni hadlab qo'shsak, $a'_{11} + a'_{22} = a_{11}(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + a_{22}(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$ yoki $a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$. (11) dan $a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$ va $a'_{11} = \lambda_1$ ekanini hisobga olsak, $a'_{22} = \lambda_2$ kelib chiqadi. Shunday qilib, koordinatalar sistemasini (10) formuladan aniqlanuvchi $\alpha = \alpha_1$ burchakka (bu erda α_1 yangi Ox' o'qning eski Ox o'qqa og'ish burchagi) burish bilan $\beta = (O, \vec{i}, \vec{j})$ reperdan shunday $\beta' = (O, \vec{i}', \vec{j}')$ sistemaga o'tish mumkinki, unga nisbatan (1) tenglama soddalashib, ushbu ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0. \quad (12)$$

Agar Ox' o'qning burchak koeffitsiyenti uchun $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}$ ni qabul qilinsa, u holda $a'_{11} = \lambda_2$, $a'_{22} = \lambda_1$ ekanini aynan yuqoridagi kabi ko'rsatish mumkin. Shuni aytish lozimki, agar (1) tenglamada $a_{12} = 0$ bo'lsa, koordinatalar sistemasini burish bilan almashtirishga hojat qolmaydi.

Endi $\beta' = (O, \vec{i}', \vec{j}')$ sistemadan shunday sistemaga o'tamizki, unga nisbatan γ chiziqning (12) tenglamasida birinchi darajali hadlar qatnashmasin. Bu ishni koordinatalar boshini ko'chirish bilan bajarish mumkin.

(12) tenglamada λ_1, λ_2 koeffitsiyentlarning kamida biri noldan farqli, chunki agar $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ bo'lsa, (12) tenglama birinchi darajali tenglamaga aylanar edi. Demak, bu yerda quyidagi uch hol bo'lishi mumkin:

1. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ ($\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$)

Bu holda $\lambda_1 \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \Rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$. (12) tenglamaning chap tomonidagi hadlarni x', y' ga nisbatan to'liq kvadratga keltiramiz:

$$\lambda_1 \left(x'^2 + 2 \cdot \frac{a'_{10}}{\lambda_1} x' + \frac{a'^2_{10}}{\lambda_1^2} \right) + \lambda_2 \left(y'^2 + 2 \cdot \frac{a'_{20}}{\lambda_2} y' + \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2^2} \right) - \frac{a'^2_{10}}{\lambda_1} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2} + a_{00} = 0,$$

bundan

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)^2 + a''_{00} = 0, \quad (13)$$

bu erda $a''_{00} = a_{00} - \frac{a'^2_{10}}{\lambda_1} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}$.

Endi $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ ni u quyidagi formula bilan aniqlanadigan parallel ko'chirishni bajaraylik:

$$\begin{cases} X = x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}, \\ Y = y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}. \end{cases} \quad (*)$$

U holda yangi $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ sistema hosil bo'lib, chiziqning tenglamasi soddalashadi:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a''_{00} = 0. \quad (14)$$

$$2. \lambda_1 = 0 (\lambda_2 \neq 0), \quad a'_{10} \neq 0 \quad \text{yoki} \quad \lambda_2 = 0 (\lambda_1 \neq 0), \quad a'_{20} \neq 0.$$

Bu hollardan birini ko'rsatish yetarli; chunki

$$\begin{cases} x = y', \\ y = x' \end{cases}$$

almashtirish yordamida ularning birini ikkinchisiga keltirish mumkin.

Birinchi holni qaraymiz:

$\lambda_1 = 0 (\lambda_2 \neq 0)$ ni hisobga olib, (12) tenglamaning chap tomonidagi hadlarni y' ga nisbatan to'liq kvadratga keltiramiz:

$$\lambda_2 \left(y'^2 + 2 \cdot \frac{a'_{20}}{\lambda_2} y' + \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2^2} \right) + 2a'_{10} \left(x' + \frac{a_{00}}{2a'_{10}} - \frac{a'^2_{20}}{2a'_{10}\lambda_2} \right) = 0,$$

yoki

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)^2 + 2a'_{10} (x' + a') = 0,$$

bunda $a' = \frac{a_{00}}{2a'_{10}} - \frac{a'^2_{20}}{2a'_{10}\lambda_2}$ belgilashni kiritdik.

Ushbu

$$\begin{cases} X = x' + a', \\ Y = y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \end{cases}$$

formulalar bo'yicha koordinatalar sistemasini almashtiramiz, ya'ni koordinatalar boshi

O ni $O' \left(a', \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)$ nuqtaga ko'chiramiz. U holda hosil bo'lgan $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ sistemaga

nisbatan chiziqning tenglamasi ushbu sodda ko'rinishni qabul qiladi:

$$\lambda_2 Y^2 + 2a'_{10} X = 0. \quad (15)$$

$$3. \lambda_1 = 0, \quad a'_{10} = 0 \quad \text{yoki} \quad \lambda_2 = 0, \quad a'_{20} = 0.$$

Bu hollar ham bir-biriga o'xshash bo'lib, shuning uchun ularning birini qarash etarli.

Birinchi holni qaraymiz. $\lambda_1 = 0, \quad a'_{10} = 0$ da (12) tenglama ushbu ko'rinishni oladi:

$$\lambda_2 y'^2 + 2a'_{20} y' + a_{00} = 0, \quad (16)$$

bu yerda $\lambda_2 \neq 0$ bo'lgani uchun (16) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\lambda_2 \left(y'^2 + 2 \cdot \frac{a'_{20}}{\lambda_2} y' + \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2^2} \right) - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2} + a_{00} = 0$$

yoki

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)^2 + a''_{00} = 0,$$

bunda
$$a''_{00} = a_{00} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}.$$

Ushbu
$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \end{cases}$$
 formulalar bo'yicha $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ sistemadan $O' \left(0, \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)$

nuqtaga ko'chiramiz. Yangi sistemada γ chiziqning sodda tenglamasi hosil bo'ladi:

$$\lambda_2 Y^2 + a''_{00} = 0. \quad (17)$$

X u l o s a. Agar ikkinchi tartibli γ chiziq biror dekart sistemada (1) tenglama bilan berilgan bo'lsa, yangi dekart sistemasini tegishlicha tanlash bilan γ ning tenglamasini (14), (15), (17) tenglamalarning biriga keltirish mumkin.

Nazorat uchun savollar.

1. Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini yozing?
2. Ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasini yozing?
3. Ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasi deb nimaga aytiladi?
4. Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi deb nimaga aytiladi?
5. Kanonik so'zining ma'nosi nima?

21-mavzu: Ikkinchi tartibli chiziqlarning tasnifi (klassifikatsiyasi). Ikkinchi tartibli chiziq markazi. Markaziy va nomarkaziy chiziqlar.

Reja:

1. Ikkinchi tartibli chiziqlarning tasnifi.
2. Ikkinchi tartibli chiziq markazi.

1. Ikkinchi tartibli chiziqlarning tasnifi (klassifikatsiyasi).

Oldingi mavzuda qaralgan (14), (15), (17) ko'rinishidagi tenglamalarni mufassalroq tekshiramiz.

$$I. \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + a''_{00} = 0. \quad (I)$$

I tenglamada $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, lekin a''_{00} – ixtiyoriy. Quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin:

a) $a''_{00} \neq 0$. I dan:

$$-\frac{\lambda_1}{a''_{00}}x^2 - \frac{\lambda_2}{a''_{00}}y^2 = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{\frac{a''_{00}}{-\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{a''_{00}}{-\lambda_2}} = 1. \quad (1)$$

Agar λ_1 , λ_2 bir xil ishorali, a''_{00} esa ular bilan qarama-qarshi ishorali bo'lsa, u holda $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} > 0$, $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} > 0$.

Endi $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} = a^2$, $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} = b^2$ belgilashni kiritamiz, (1) dan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ni, ya'ni ellipsning kanonik tenglamasi hosil qilinadi.

Agar λ_1 , λ_2 , a''_{00} ning uchasi ham bir xil ishorali bo'lsa, u holda $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} < 0$, $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} < 0$, bu yerda $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} = -a^2$, $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} = -b^2$ belgilashni kiritsak,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamani qanoatlantiruvchi bitta ham haqiqiy nuqta mavjud emas, lekin bu tenglama ellips tenglamasiga o'xshashligi sababli, u **mavhum ellipsni** aniqlaydi, deb aytiladi. Agar λ_1 , λ_2 qarama-qarshi ishorali va $a''_{00} \neq 0$ bo'lsa, u holda $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1}$ va $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2}$ lar qarama-qarshi ishorali bo'ladi.

$-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} > 0$, lekin $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} < 0$ bo'lib, ularni mos ravishda a^2 va $-b^2$ deb belgilasak, (1)

tenglama $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ko'rinishda bo'lib, bu giperbolaning kanonik tenglamasidir;

xuddi shunga o'xshash, $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} < 0$, $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} > 0$ bo'lsa, ularni ham mos ravishda $-a^2$ va

b^2 deb belgilasak, (1) tenglama ushbu ko'rinishni oladi: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; bu ham giperbolaning kanonik tenglamasidir.

b) $a''_{00} = 0$ bo'lsin. U holda

$$I \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{1}{\lambda_2}} = 0. \quad (2)$$

λ_1, λ_2 qarama-qarshi ishorali bo'lsa, tegishli belgilashni kiritish bilan (2) ni ushbu ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ yoki } \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0. \quad (3)$$

(3) $\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, bu tenglamalar koordinatalar boshida kesishuvchi ikkita haqiqiy to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Agar λ_1, λ_2 bir xil ishorali, masalan, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ bo'lsa, u holda $\frac{1}{\lambda_1} = -a^2, \frac{1}{\lambda_2} = -b^2$ belgilashni kiritish bilan (2) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ yoki } \left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} + i\frac{y}{b} = 0, \frac{x}{a} - i\frac{y}{b} = 0,$$

bu tenglamalarning har biri birinchi darajali bo'lgani uchun ular to'g'ri chiziqni aniqlaydi, lekin bu ikki to'g'ri chiziq faqat bitta haqiqiy nuqtaga egadir (koordinatalar boshi). Shuning uchun ularni bitta haqiqiy nuqtada kesishuvchi ikkita mavhum to'g'ri chiziq tenglamasi deb aytish mumkin. Shunday qilib, ikkinchi tartibli γ chiziqning oldingi mavzudagi (7) harakteristik tenglamasining ildizlari $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ bo'lsa, quyidagi besh tur chiziq hosil bo'ladi: ellips, mavhum ellips, giperbola, kesishuvchi mavhum ikki to'g'ri chiziq, kesishuvchi haqiqiy ikki to'g'ri chiziq.

$$2) \lambda_2 y^2 + 2a'_{10}x = 0 \quad (II)$$

tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqlarga o'tamiz. II tenglamada $\lambda_2 \neq 0, a'_{10} \neq 0$ bo'lgani uchun uni quyidagicha yozib olamiz:

$y^2 = -2\frac{a'_{10}}{\lambda_2}x; p = -\frac{a'_{10}}{\lambda_2}$ belgilashni kiritsak, $y^2 = 2px$, bu parabolaning kanonik tenglamasidir.

$$3) \lambda_2 y^2 + a''_{00} = 0 \quad (III)$$

tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqlarni tasniflashga o'tamiz. Bu tenglamada $\lambda_2 \neq 0, a''_{00}$ – har qanday son. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

a) $a''_{00} \neq 0 \cdot \lambda_2$ bilan a''_{00} har xil ishorali bo'lsa, $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} > 0$ bo'ladi. Tenglamani

$$\frac{a''_{00}}{\lambda_2} = -a^2 \text{ faraz qilib,}$$

$$y^2 = a^2 \text{ yoki } (y-a)(y+a) = 0$$

Ga keltiramiz. Bu tenglama esa o'zaro parallel ikki to'g'ri chiziqni aniqlaydi. λ_2 bilan a''_{00} bir xil ishorali, ya'ni $\lambda_2 > 0$, $a'_{00} > 0$ ($\lambda_2 < 0$, $a'_{00} < 0$) bo'lgan holda

$$\text{III} \Rightarrow y^2 = -a^2 \text{ yoki } (y-ia)(y+ia) = 0,$$

bu tenglama ikkita mavhum parallel to'g'ri chiziqni aniqlaydi, deb yuritiladi.

b) $a''_{00} = 0$. U holda $\text{III} \Rightarrow \lambda_2 y^2 = 0$ va $\lambda_2 \neq 0$ bo'lgani uchun $y^2 = 0$ yoki $y = 0$, $y = 0 \Rightarrow$ ikki karra olingan to'g'ri chiziq hosil qilinadi. Shunday qilib, III tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziq quyidagi uch turga bo'linadi: haqiqiy parallel ikki to'g'ri chiziq, mavhum parallel ikki to'g'ri chiziq, ustma–ust tushuvchi ikki to'g'ri chiziq.

I, II, III tenglamalar bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziq quyidagi to'qqizta turga bo'linadi:

Kanonik tenglamalar	Chiziqlarning nomlari
1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Ellips
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	Mavhum ellips
3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$	Giperbola
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Nuqta (koordinata boshida kesishuvchi mavhum ikki to'g'ri chiziq)
6. $y^2 = 2px$	Parabola
7. $y^2 - a^2 = 0$	Turli parallel ikki to'g'ri chiziq
8. $y^2 + a^2 = 0$	Mavhum parallel ikki to'g'ri chiziq
9. $y^2 = 0$	Ustma – ust tushgan ikki to'g'ri chiziq

2. Ikkinchi tartibli chiziq markazi. Biz «Ellips» mavzusini o'tganimizda chiziqning simmetriya markazi tushunchasi bilan tanishgan edik. Endi shu tushunchaga asoslanib ikkinchi tartibli chiziqning markazi tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. Ikkinchi tartibli chiziqning simmetriya markazi shu chiziqning *markazi* deb ataladi.

Ta'rifga ko'ra M_0 chiziqning markazi bo'lsa, $\forall M \in \gamma$ nuqtaga M_0 ga nisbatan simmetrik M' nuqta ham γ ga tegishli bo'ladi. Ikkinchi tartibli chiziq

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (4)$$

umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsin. Avvalo qanday shart bajarilganda koordinatalar boshi markaz bo'lishini aniqlaymiz.

Faraz qilaylik, $O(0,0)$ nuqta chiziqning markazi bo'lsin, u holda markaz ta'rifiga ko'ra $M(x, y) \in \gamma \Rightarrow M'(-x, -y) \in \gamma$ (chunki bu nuqtalar O ga nisbatan simmetrikdir), ya'ni

$$a_{11}(-x)^2 + 2a_{12}(-x)(-y) + a_{22}(-y)^2 + 2a_{10}(-x) + 2a_{20}(-y) + a_{00} = 0$$

yoki

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 2a_{10}x - 2a_{20}y + a_{00} = 0. \quad (5)$$

(4) va (5) dan:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{00} = 0.$$

Demak, koordinatalar boshi chiziqning markazi bo'lsa, uning tenglamasida 1-darajali hadlar ishtirok etmaydi:

$$a_{10} = 0, \quad a_{20} = 0.$$

Aksincha chiziqning (1) tenglamasida birinchi darajali hadlar ishtirok etmasa ($a_{10} = a_{20} = 0$). x, y ni $-x, -y$ ga almashtirganda tenglama o'zgarmaydi, demak, $M(x, y) \in \gamma \Rightarrow M'(-x, -y) \in \gamma$.

M, M' nuqtalar $O(0,0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik. Bundan koordinatalar boshi chiziqning markazidir.

Shunday qilib, koordinatalar boshi ikkinchi tartibli chiziqning markazi bo'lishi uchun bu chiziqning tenglamasida x, y larga nisbatan birinchi darajali hadlar ishtirok qilmasligi zarur va etarli.

Endi chiziqning markazini qanday qilib topish yo'lini ko'rsatamiz. $M_0(x_0, y_0)$ nuqta chiziqning markazi bo'lsin. Koordinatalar boshi $O(0,0)$ ni M_0 ga ko'chiramiz:

$$\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0. \end{cases} \quad (6)$$

Buning uchun (6) dan x, y ni (4) ga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} & a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})X + \\ & + 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})Y + F(x_0, y_0) = 0, \end{aligned}$$

bu yerda

$$F(x_0, y_0) = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00} = 0. \quad (7)$$

Yuqorida keltirilgan zaruriy va etarli shartga ko'ra M_0 nuqta chiziqning markazi bo'lishi uchun quyidagi shart bajaralishi kerak:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Demak, chiziq markazining mavjudligi masalasi (8) sistemaning yechimini topish masalasiga keltirildi. Bu sistema koeffitsiyentlaridan ushbu determinantlarni tuzamiz:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \delta_1 = \begin{vmatrix} -a_{10} & a_{12} \\ -a_{20} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{10} \\ a_{21} & -a_{20} \end{vmatrix}.$$

Bu yerda quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

$$1. \delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0.$$

(8) sistema birgina (x_0, y_0) yechimga ega va shunga mos holda birgina markaz mavjud. Bunday chiziqni **markazli chiziq** deb ataymiz. Chiziq markazining koordinatalari

$$x_0 = \frac{\delta_1}{\delta}, \quad y_0 = \frac{\delta_2}{\delta}$$

formuladan topiladi.

$$2. \delta = 0 \text{ va } \delta_1, \delta_2 \text{ ning kamida biri noldan farqli.}$$

(5) sistema bitta ham yechimga ega emas, chiziq – markazsiz.

$$3. \delta = \delta_1 = \delta_2 = 0 \Rightarrow \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{10}}{a_{20}} \Rightarrow (5) \text{ sistema birinchi darajali bitta}$$

tenglamaga keladi. Uning yechimlari cheksiz ko'p $\Rightarrow$ chiziq cheksiz ko'p markazlarga, aniqrog'i, markazlar to'g'ri chizig'iga egadir.

Eslatma. (8) sistemani chiziq tenglamasidan x, y ga nisbatan xususiy hosila olish yo'li bilan tuzish mumkin. Haqiqatan, (4) tenglamadan x ga nisbatan hosila olsak,

$$2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{10}$$

va y ga nisbatan hosila olsak,

$$2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_{20}.$$

Dekart koordinatalar sistemasini tegishli tanlash yo'li bilan ikkinchi tartibli chiziqning (4) tenglamasini quyidagi ko'rinishlarning biriga keltirgan edik.

$$\text{I. } \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a''_{00} = 0, \quad (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0),$$

$$\text{II. } \lambda_2 Y^2 + 2a'_{10}X = 0, \quad (\lambda_2 \neq 0, \lambda a'_{10} \neq 0),$$

$$\text{III. } \lambda_2 Y^2 + a''_{00} = 0, \quad (\lambda_2 \neq 0).$$

$$\text{I tenglama uchun } \delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0. \text{ Demak, faqat ellips, mavhum ellips,}$$

giperbola kesishadigan haqiqiy ikkita to'g'ri chiziq, kesishadigan mavhum ikkita to'g'ri chiziq markazli chiziqlardir.

II tenglama uchun $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$, $\delta_1 = \begin{vmatrix} -a'_{10} & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = -a'_{10} \lambda_2 \neq 0$,
 $\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -a'_{10} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ parabola markazsiz chiziq ekan.

III tenglama uchun $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$, $\delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Bundan ko'rinadiki, ikkinchi tartibli chiziq ikkita parallel to'g'ri chiziqlarga ajralganda markazlar chizig'iga egadir, xolos.

Misol. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ chiziqning markazini toping.

Yechish. Bu yerda $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{10} = 1$, $a_{20} = 1$, $a_{00} = 4$. Berilgan egri chiziq markazining koordinatalari ushbu

$$x + y + 1 = 0, \quad x + y + 1 = 0.$$

tenglamalar sistemasining yechimlari bo'ladi. Bu sistemaning ikkala tenglamasi bir xil, demak, sistema bitta tenglamaga keladi, uning yechimlari cheksiz ko'p $\Rightarrow$ berilgan chiziq markazlar to'g'ri chizig'iga ega bo'lib, uning tenglamasi $x + y + 1 = 0$.

Nazorat uchun savollar.

1. Ikkinchi tartibli chiziqning turlarini sanab bering?
2. Ikkinchi tartibli chiziq markazi deb nimaga aytiladi?
3. Markazga ega bo'lgan chiziqlarning markazi qanday topiladi?
4. Markaziy chiziqqa misol keltiring?
5. Nomarkaziy chiziqqa misol keltiring?

22-mavzu: Ikkinchi tartibli chiziqning to'g'ri chiziq bilan kesishishi. Asimptotik yo'nalishlar. Urinma va asimptotalar.

Reja:

1. Ikkinchi tartibli chiziqning to'g'ri chiziq bilan kesishishi.
2. Asimptotik yo'nalishlar.
3. Ikkinchi tartibli chiziqqa urinma.
4. Asimptota.

1. Ikkinchi tartibli chiziqning to'g'ri chiziq bilan kesishishi.

Dekart reperida

$$\gamma: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (1)$$

ikkinchi tartibli chiziq va

$$u: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \end{cases} \quad (2)$$

to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Bu egri chiziqning shu to'g'ri chiziq bilan kesishish masalasiga o'tamiz. (1) va (2) dan:

$$a_{11}(x_0 + a_1t)^2 + 2a_{12}(x_0 + a_1t)(y_0 + a_2t) + a_{22}(y_0 + a_2t)^2 + 2a_{10}(x_0 + a_1t) + 2a_{20}(y_0 + a_2t) + a_{00} = 0$$

yoki

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0. \quad (3)$$

Bu yerda quyidagi belgilashlar kiritilgan:

$$\begin{aligned} P &= a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2, \\ Q &= a_{11}a_1x_0 + a_{12}a_1y_0 + a_{21}a_2x_0 + a_{22}a_2y_0 + a_{10}a_1 + a_{20}a_2 = \\ &= a_1(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) + a_2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}); \\ R &= a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00}. \end{aligned} \quad (4)$$

(3) tenglamani yechib, t ning topilgan qiymatlarini (2) ga qo'ysak, chiziq bilan to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtalari topiladi. Quyidagi hollarni tekshiraylik.

1. $P \neq 0$. Bu holda (3) tenglama ikkinta ildizga ega.

$$t_{1,2} = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - RP}}{P}.$$

Bu yerning o'zida uchta hol bo'lishi mumkin:

a) $D = Q^2 - RP > 0$; (3) tenglama ikkita haqiqiy turli ildizga ega – chiziq bilan to'g'ri chiziq ikkita haqiqiy turli nuqtalarda kesishadi.

b) $D = Q^2 - RP < 0$; (3) tenglama ikkita qo'shma kompleks ildizga ega, shuning uchun (1) chiziq bilan (2) to'g'ri chiziq ikkita qo'shma kompleks nuqtalarda kesishadi, demak, to'g'ri chiziq bilan (1) chiziq umumiy haqiqiy nuqtalarga ega bo'lmaydi.

c) $D = Q^2 - RP = 0$; (3) tenglama ustma–ust tushgan ikkita ildizga ega – chiziq bilan to'g'ri chiziq ustma–ust tushgan ikkita nuqtada kesishadi. Bu vaqtda u to'g'ri chiziq γ chiziqqa **urinma** deb ataladi.

2. $P = 0$. Bu holda (3) tenglama

$$2Qt + R = 0 \quad (5)$$

ko'rinishni oladi.

O'z navbatida quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $Q \neq 0$, R - ixtiyoriy son. (5) tenglama yagona ildizga ega:

$$t = -\frac{R}{2Q}$$

chiziq bilan to'g'ri chiziq bitta nuqtada kesishadi.

b) $Q = 0$, $R \neq 0$. (5) tenglama yechimga ega emas. Chiziq to'g'ri chiziq bilan bitta ham umumiy haqiqiy yoki mavhum nuqtaga ega emas.

c) $Q = 0$, $R = 0$, bu holda t ning har qanday qiymati (5) tenglamani qanoatlantiradi $\Rightarrow$ chiziq va to'g'ri chiziq cheksiz ko'p umumiy nuqtalarga ega, ya'ni (2) to'g'ri chiziq barcha nuqtalari bilan (1) chiziqqa tegishli: $u \subset \gamma$. Shunday qilib, (3) tenglamada $P = 0$ bo'lsa, γ chiziq u to'g'ri chiziq bilan faqat bitta umumiy nuqtaga ega yoki bitta ham umumiy nuqtaga ega emas, yoki $u \subset \gamma$.

Misol-1. $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ chiziqning $u: \begin{cases} x = t \\ y = 5t - 5 \end{cases}$ to'g'ri

chiziq bilan kesishish nuqtalarini toping.

Yechish. Bu yerda $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = -3$, $a_{10} = -2$, $a_{20} = -3$, $a_{00} = 3$, $M_0(0, -5)$, $\bar{u}(1, 5) \Rightarrow a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $Pt^2 + 2Qt + R = 0$ ning koeffitsiyentlari: $P = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 - 3 \cdot 25 = -84$, $Q = 1 \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot (-5) - 2) + 5 \cdot (-1 \cdot 0 - 3 \cdot (-5) - 3) = 3 + 60 = 63$, $R = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 5 - 3 \cdot (-5)^2 - 4 \cdot 0 - 6 \cdot (-5) + 3 = -75 + 27 = -42$.

Tenglamaning diskreminanti:

$D = Q^2 - RP = (63)^2 - (-84) \cdot (-42) = 3969 - 3528 = 441 > 0 \Rightarrow$ to'g'ri chiziq γ ni ikkita haqiqiy nuqtada kesadi: shu nuqtalarni topaylik:

$$t_{1,2} = \frac{-63 \pm \sqrt{441}}{-84} = \frac{-63 \pm 21}{-84};$$

$$t_1 = \frac{-63 + 21}{-84} = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}; t_2 = \frac{-63 - 21}{-84} = \frac{84}{84} = 1.$$

t ning qiymatlarini to'g'ri chiziq tenglamalariga qo'yib, $M_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, $M_2(1, 0)$ nuqtalarni hosil qilamiz.

2. Asimptotik yo'nalishlar. Urinma va asimptotalar.

Nol bo'lmagan har bir $\vec{u}(a_1, a_2)$ vektor biror yo'nalishini aniqlaydi. $\vec{u}$ vektorga parallel bo'lgan barcha to'g'ri chiziqlarni qaraylik.

Ta'rif. Agar $\vec{u}$ vektorga parallel har bir u to'g'ri chiziq γ ikkinchi tartibli chiziqni bittadan ortiq bo'lmagan nuqtada kessa yoki $u \in \gamma$ bo'lsa, u holda $\vec{u}$ vektor aniqlaydigan yo'nalish ikkinchi tartibli chiziqqa nisbatan **asimptotik yo'nalish**, $\vec{u}$ vektor esa **asimptotik yo'nalishning vektori** deyiladi.

Bu ta'rif va oldingi punktdagi 2-holga asosan $\vec{u}(a_1, a_2)$ vektor aniqlagan yo'nalishning γ chiziqqa nisbatan asimptotik yo'nalish bo'lishi uchun $P = 0$ bo'lishi, buni ochib yozsak,

$$a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2 = 0 \quad (6)$$

tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli. (5) (21-mavzudagi) tenglikni quyidagi ko'rinishda yozamiz ($a_1 \neq 0$):

$$a_{22}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + a_{11} = 0. \quad (7)$$

(7) tenglamada $\frac{a_2}{a_1}$ nisbat $\vec{u}$ vektorning yo'nalishini, demak, asimptotik yo'nalishni aniqlaydi. (7) dan

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)_{1;2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}.$$

Bu yerda quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1) $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$; (7) tenglama ikkita turli haqiqiy ildizga ega. δ chiziq ikkita asimptotik yo'nalishga ega.

2) $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$; (7) tenglamaning ikkala ildizi teng. γ chiziq bitta asimptotik yo'nalishga ega.

3) $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$; (7) tenglama haqiqiy ildizga ega emas, γ chiziq asimptotik yo'nalishga ega emas.

Yuqorida olib borilgan muhokamalarga tayanib, quyidagi xulosaga kelamiz; giperbola va haqiqiy kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq ikkita asimptotik yo'nalishga ega (1-a chizma). Ikkita haqiqiy yoki ikkita mavhum parallel to'g'ri chiziq, ustma-ust tushgan ikkita to'g'ri chiziq, parabola bitta asimptotik yo'nalishga ega (1-b chizma).

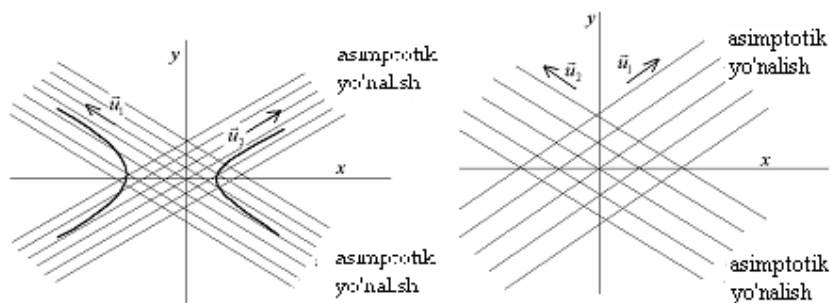
Misol-2. $4x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 7 = 0$ chiziq berilgan. Asimptotik yo'nalishlarning vektorlarini toping.

Yechish. Bu yerda $a_{11} = 4$, $a_{12} = -\frac{5}{2}$, $a_{22} = 1$, $a_{10} = -\frac{3}{2}$, $a_{20} = 0$, $a_{00} = 7$;

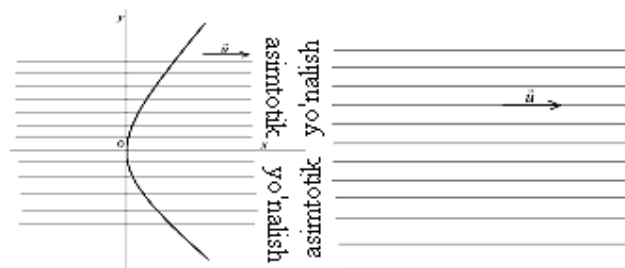
asimptotik yo'nalish (a_1, a_2) vektorning burchak koeffitsiyenti $\frac{a_2}{a_1}$:

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)_{1;2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{1} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

Bundan:



1-a – chizma



1 – b chizma

$$k_1 = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)_1 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4; \quad k_2 = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1.$$

Demak, berilgan chiziq ikkita asimptotik yo'nalishga ega.

3. Ikkinchi tartibli chiziqqa urinma. Biz oldingi punktning 1–bandida chiziqning urinmasi tushunchasini kiritgan edik. Shunga asosanib, urinma tenglamasini chiqaraylik.

Agar dekart reperida γ chiziq (1)(21-mavzudagi) tenglamasi bilan u to'g'ri chiziq esa (2) parametrik tenglamalari bilan berilgan bo'lsa, qo'yilgan masala mazmuniga asosan u to'g'ri chiziq γ ning M_0 nuqtasida¹ urinma bo'lishligi uchun $t_1 = t_2 \Rightarrow M_0 = M$ bo'lishi kerak, bu esa (3) da $Q = 0, R = 0$ bo'lganda yuz beradi. Q ning ifodasidan:

$$Q = a_1(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) + a_2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = -\frac{a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}}{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}}. \quad (*)$$

(3) dan

$$x - x_0 = a_1 t, \quad y - y_0 = a_2 t \quad (**)$$

(*) va (**) dan ushbu tenglamani yoza olamiz:

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = -\frac{a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}}{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}}.$$

¹ M_0 nuqta γ uchun markaz emas deb faraz qilinadi.

² M_0 nuqta γ uchun markaz emas deb faraz qilingan, demak, kasrning surat va maxraji bir vaqtda nolga teng emas.

$$(y - y_0)(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}) + (x - x_0)(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) = 0.$$

Buni

$$R = a_{11}x_0^2 + a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00} = 0$$

ekanini e'tiborga olib, quyidagicha yozish mumkin:

$$x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) + y(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}) + (a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}) = 0. \quad (8)$$

(8) γ chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasidagi urinmasining **tenglamasidir**, chunki x, y oldidagi koeffitsiyentlar noldan farqli (M_0 - chiziq markazi emas!).

Ellips, giperbola va parabolaga urinma. Ellips, giperbola va parabolaning har biri M_0 nuqtasida tayin bitta urinma mavjud.

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsga $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasida urinma. Bu yerda: $a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = \frac{1}{b^2}$, $a_{10} = 0$, $a_{20} = 0$, $a_{00} = -1$. U holda (8) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\left(\frac{1}{a^2} \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 + 0\right)x + \left(0 \cdot x_0 + \frac{1}{b^2} \cdot y_0 + 0\right)y + (0 \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 - 1) = 0$$

yoki

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Bu tenglama ellipsning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasidagi urinmasining tenglamasidir.

b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaga $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada urinma. Ayni ellipsdagiga

o'xshash, giperbolaning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasidagi urinmasi $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ tenglama bilan ifodalanadi (buni mustaqil ko'ring).

c) $y^2 = 2px$ parabolaga $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada urinma. $y^2 = 2px$ parabola uchun $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$, $a_{10} = -p$, $a_{20} = a_{00} = 0$. U holda (8) tenglama $(0 \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 - p)x + (0 \cdot x_0 + 1 \cdot y_0 + 0)y + (-p \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 + 0) = 0$ yoki $yy_0 = p(x + x_0)$ ko'rinishga kelib, u parabolaning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasidagi urinmasining tenglamasi bo'ladi.

Misol-3. $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziqning a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsga, b)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaga, c) $y^2 = 2px$ parabolaga urinma bo'lishligi uchun tegishli shartlarni aniqlang.

Yechish. a) to'g'ri chiziq tenglamasi bilan ellips tenglamasini birgalikda yechamiz. To'g'ri chiziq tenglamasidan $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ ni ellips tenglamasiga qo'ysak,

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2\left(\frac{A^2}{B^2}x^2 + 2\frac{AC}{B^2}x + \frac{C^2}{B^2}\right) - a^2b^2 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(b^2 + a^2 \cdot \frac{A^2}{B^2}\right)x^2 + 2a^2 \frac{AC}{B^2}x + a^2 \frac{C^2}{B^2} - a^2b^2 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-a^2 \frac{AC}{B^2} \pm \sqrt{a^4 \frac{A^2C^2}{B^2} - \left(b^2 + a^2 \frac{A^2}{B^2}\right)\left(a^2 \frac{C^2}{B^2} - a^2b^2\right)}}{b^2 + a^2 \frac{A^2}{B^2}}. \end{aligned}$$

Agar

$$a^4 \frac{A^2C^2}{B^2} - \left(b^2 + a^2 \frac{A^2}{B^2}\right)\left(a^2 \frac{C^2}{B^2} - a^2b^2\right) = 0 \quad (9)$$

bo'lsa, u holda $x_1 = x_2$ bo'lib, berilgan to'g'ri chiziq ellipsiga urinadi. (9) dan

$$-b^2 \frac{C^2}{B^2} + b^4 + a^2b^2 \frac{A^2}{B^2} = 0,$$

buning ikkala tomonini b^2 ga bo'lsak, $\Rightarrow b^2 + a^2 \frac{A^2}{B^2} - \frac{C^2}{B^2} = 0$ yoki $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$, bu berilgan to'g'ri chiziqning ellipsiga urinish shartidir.

b) aynan yuqoridagi kabi ishni bajarish bilan berilgan to'g'ri chiziqning $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbola urinish sharti

$$A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$$

ekaniga ishonch hosil qilish mumkin.

c) berilgan to'g'ri chiziq tenglamasidan topilgan $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ ni $y^2 = 2px$ parabola tenglamasiga qo'ysak, $\frac{A^2}{B^2}x^2 + 2\left(\frac{AC}{B^2} - p\right)x + \frac{C^2}{B^2} = 0$ kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz. Uning ildizlari:

$$x_{1,2} = \frac{\left(p + \frac{AC}{B^2}\right) \pm \sqrt{\left(p - \frac{AC}{B^2}\right)^2 - \frac{A^2}{B^2} \cdot \frac{C^2}{B^2}}}{\frac{A^2}{B^2}}.$$

Bu yerda ham, agar

$$\left(p - \frac{AC}{B^2}\right)^2 - \frac{A^2}{B^2} \cdot \frac{C^2}{B^2} = 0 \quad (10)$$

bo'lsa, $x_1 = x_2$ bo'lib, berilgan to'g'ri chiziq parabola ga urinadi. (10) dan $p\left(p - 2\frac{AC}{B^2}\right) = 0$, $p \neq 0$ bo'lgani uchun $p - 2\frac{AC}{B^2} = 0$, bundan ushbu tenglikka ega bo'lamiz:

$$p = 2\frac{AC}{B^2} \text{ yoki } pB^2 = 2AC,$$

bu berilgan to'g'ri chiziqning parabola ga urinish shartidir.

4. Asimptota. (Egri) chiziqning asimptotasiga yuqorida ta'rif berilgan edi.

Bu ta'rif bo'yicha asimptotani γ chiziqning cheksiz uzoqlashgan nuqtasidagi (ya'ni $M_1 = M_{2\infty}$ nuqtadagi) urinmasi deb qarash mumkin. Buni e'tiborga olsak:

1) (3) tenglamaning t_1, t_2 ildizlari bir-biriga teng ($t_1 = t_2$) va $t_1 = t_2 = \infty$ bo'lgan holda kvadrat tenglama $Pt^2 + 2Qt + R = 0$ ning oldingi ikkita P, Q koeffitsiyenti nolga teng bo'lishi kerak; haqiqatan, (3) da $t = \frac{1}{\gamma}$ desak, $\Rightarrow P + 2Q\lambda + R\lambda^2 = 0$; bu yerda $P = 0 \Rightarrow t_1 \rightarrow \infty$ va $Q = 0 \Rightarrow t_2 \rightarrow \infty$. Yo'nalishning ikkinchi tartibli γ chiziqqa nisbatan asimptotik bo'lish sharti $P = 0$ edi. Bundan $\Rightarrow$ har qanday asimptota asimptotik yo'nalishga ega.

Bu muhokamalarni giperbolaga tadbiq qilsak, giperbolaning yuqorida qaralgan ikkita asimptotasi $y = \pm \frac{b}{a}x$ ni hosil qilamiz, parabola uchun esa asimptotalarning yo'qligini ko'ramiz.

Nazorat uchun savollar.

1. Ikkinchi tartibli chiziq bilan to'g'ri chiziq kesishganda qanday hollar yuz beradi?
2. Asimptotir yo'nalish deb nimaga aytiladi?
3. Asimptotir yo'nalish vektori deb nimaga aytiladi?
4. Ellips ga $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma to'g'ri chiziq tenglamasini yozing?
5. Giperbolaga $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma to'g'ri chiziq tenglamasini yozing?
6. Parabola ga $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma to'g'ri chiziq tenglamasini yozing?

23-mavzu: Ikkinchi tartibli chiziqning diametrlari. Qo'shma yo'nalishlar va qo'shma diametrlar.

Reja:

1. Ikkinchi tartibli chiziqning diametrlari va qo'shma yo'nalishlar.
2. Qo'shma diametrlar.

1. Ikkinchi tartibli chiziqning diametrlari va qo'shma yo'nalishlar. $\vec{u}(u_1, u_2)$ vektor

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (*)$$

chiziqqa nisbatan asimptotik bo'lmagan yo'nalishning vektori bo'lsin. $\vec{u}(u_1, u_2)$ vektorga parallel bo'lgan barcha to'g'ri chiziqlarni qaraymiz. Bu to'g'ri chiziqlarning har biri (*) chiziq bilan ikkita (turli haqiqiy, ustma-ust tushgan yoki qo'shma kompleks) nuqtada kesishib, $\vec{u}$ vektorga parallel vatarni hosil qiladi. Hosil qilingan har bir vatarning o'rtasi haqiqiy nuqta¹ bo'ladi.

$\vec{u}$ vektorga parallel bo'lgan barcha vatarlar o'rtalarining to'plamini $D_{\vec{u}} \rightarrow$ bilan belgilaymiz va uning tenglamasini tuzamiz. Shu maqsadda $D_{\vec{u}} \rightarrow$ to'plamning ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtasini olamiz. M nuqtadan $\vec{u}(u_1, u_2)$ vektorga parallel bitta u to'g'ri chiziq o'tadi. M nuqtani bu to'g'ri chiziqning boshlang'ich nuqtasi desak, uning parametrik tenglamalari

$$\begin{cases} X = x + u_1t, \\ Y = y + u_2t \end{cases} \quad (1)$$

ko'rinishda bo'ladi.

$M_1(X_1, Y_1), M_2(X_2, Y_2)$ orqali (1) to'g'ri chiziqning γ chiziq bilan kesishgan nuqtalarini belgilaymiz:

$$\begin{cases} X_1 = x + u_1t_1, & X_2 = x + u_1t_2, \\ Y_1 = y + u_2t_1, & Y_2 = y + u_2t_2, \end{cases} \quad (2)$$

bu yerda t_1, t_2 (1) bilan (*) tenglamalarni birgalikda yechishdan hosil bo'lgan

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \quad (3)$$

kvadrat tenglamaning ildizlaridir. t_1, t_2 nuqta M_1M_2 kesmaning o'rtasi bo'lgani uchun

$$x = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad y = \frac{Y_1 + Y_2}{2}.$$

(2) ga asosan:

$$x = x + \frac{t_1 + t_2}{2}u_1, \quad y = y + \frac{t_1 + t_2}{2}u_2$$

yoki

¹ Agar M_1 va M_2 nuqtalar qo'shma kompleks, y'ani $M_1(a + bi, c + di), M_2(a - bi, c - di)$ bo'lsa, u holda ularning o'rtasi haqiqiy $M(a, c)$ nuqta bo'ladi.

$$\frac{t_1+t_2}{2}u_1=0, \quad \frac{t_1+t_2}{2}u_2=0.$$

Bu muosabatlarda u_1, u_2 ning kamida biri noldan farqli, chunki $\vec{u} \neq \vec{0}$, u holda $t_1+t_2=0$ bo'ladi.

Ikkinchi tomondan t_1, t_2 (3) kvadrat tenglamaning ildizlari, bu holda Viyet teoremasiga ko'ra

$$t_1+t_2=Q \Rightarrow Q=0,$$

ya'ni

$$u_1(a_{11}x+a_{12}y+a_{10})+u_2(a_{21}x+a_{22}y+a_{20})=0. \quad (4)$$

Shunday qilib, $D_u^{\rightarrow}$ to'plamning ixtiyoriy nuqtasi $M(x, y)$ ning koordinatalari (4) ni qanoatlantiradi. Shunday qilib, (4) $D_u^{\rightarrow}$ to'plamning tenglamasi ekan. Endi (4) tenglamasiga ko'ra $D_u^{\rightarrow}$ to'plamning to'g'ri chiziq ekanini ko'ramiz. (4) ni quyidagicha shakl o'zgartirib yozamiz.

$$(a_{11}u_1+a_{12}u_2)x+(a_{21}u_1+a_{22}u_2)y+(a_{10}u_1+a_{20}u_2)=0. \quad (5)$$

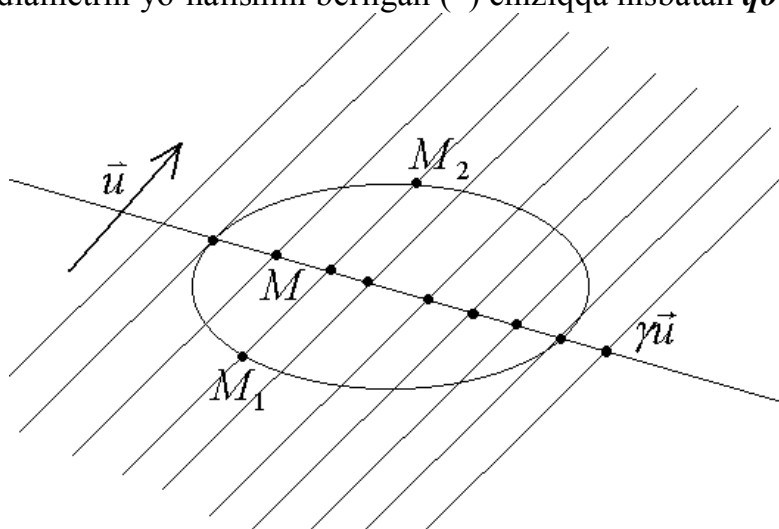
(5) da o'zgaruvchi koordinatalar oldidagi koeffitsiyentlardan kamida biri noldan farqli, aks holda

$$a_{11}u_1+a_{12}u_2=0, \quad a_{21}u_1+a_{22}u_2=0$$

dan

$$P=a_{11}u_1^2+2a_{12}u_1u_2+a_{22}u_2^2=(a_{11}u_1+a_{12}u_2)u_1+(a_{21}u_1+a_{22}u_2)u_2=0$$

bo'lib, bu zidlikdir (chunki, $\vec{u}$ – asimptotik yo'nalishning vektori). Bundan $\vec{u}$ vektorga parallel barcha vatarlarning o'rtalari to'plami to'g'ri chiziq ekan degan hulosaga kelib chiqadi (1-chizma). Bu to'g'ri chiziqni berilgan (u_1, u_2) yo'nalishning vatarlariga (yoki $\vec{u}$ yo'nalishga) **qo'shma diametr** deyiladi. (4) yoki (5) tenglama bu diametrning tenglamasidir. Parallel vatarlar ning yo'nalishi bilan bu vatarlarga qo'shma bo'lgan diametrni yo'nalishini berilgan (*) chiziqqa nisbatan **qo'shma yo'nalishlar** deyiladi.



1-chizma

Ma'lumki, ikkinchi tartibli γ chiziqning markazi

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{10}=0, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{20}=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan aniqlanar edi. Bu sistema bilan (4) diametr tenglamasidan γ chiziqning markazi diametrga tegishli degan xususaga kelimiz. Demak, markazli chiziqning barcha diametrlari uning markazidan o'tadi.

Agar γ chiziqli markazlar to'g'ri chizig'iga ega bo'lsa, u γ ning *diametri* ham bo'ladi, bu γ chiziqli yagona diametrga ega bo'ladi. Markazsiz chiziqli birgina bo'lib, u ham paraboladir.

Parabolaning diametrlarini tekshiramiz. Parabola $y^2 = 2px$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. (4) tenglama bu parabola uchun ushbu ko'rinishni oladi:

$$u_1(0 \cdot x + 0 \cdot y - 2p) + u_2(0 \cdot x + 1 \cdot y + 0) = 0$$

yoki

$$-2pu_1 + u_2y = 0, \quad (6)$$

bu yerda $u_2 \neq 0$; agar $u_2 = 0$ bo'lsa, (6) dan $2pu_1 = 0$, $p \neq 0$ bo'lganidan $u_1 = 0$ bo'ladi, bu mumkin emas, chunki

$$\vec{u}(u_1, u_2) \neq \vec{0}$$

tenglamaning ikkala qismini u_2 ga bo'lib, ushbuga ega bo'lamiz:

$$y + b = 0 \quad (7)$$

bu erda $b = -2p \frac{u_1}{u_2}$ belgilashni kiritdik. (7) tenglama $\vec{i}$ vektorga parallel to'g'ri

chiziqlar dastasini aniqlaydi. $\vec{i}$ vektor oldingi mavzuga ko'ra asimptotik yo'nalishning vektori hamdir. Demak, parabola bitta asimptotik yo'nalishga ega bo'lib, bu yo'nalishdagi har bir to'g'ri chiziqli parabolaning diametri bo'ladi. Demak, parabolaning barcha diametrlari o'zaro paralleldir.

Misol-1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ ellipsni $3x + 2y - 6 = 0$ to'g'ri chiziqli ikki M_1, M_2

nuqtada kesib o'tadi. M_1M_2 vatarning o'rtasidan o'tuvchi diametrni toping.

Yechish. Berilgan ellipsning markazi koordinatalar boshida. Demak, izlanayotgan diametr koordinatalar boshidan o'tadi. Vatarning o'rtasini topish uchun ellips bilan to'g'ri chiziqli kesishgan nuqtalarini topamiz: $3x + 2y - 6 = 0$,

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \text{ dan}$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{\left(-\frac{3}{2}x + 3\right)^2}{12} = 1 \Rightarrow 3x^2 + 4\left(\frac{9}{4}x^2 - 9x + 9\right) = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 36x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2};$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}; \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2};$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3 \quad \text{dan} \quad y_1 = -\frac{3}{2}\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + 3,$$

$$y_2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) + 3.$$

M_1M_2 vatarining o'rtasini M_0 desak, uning x_0, y_0 koordinatalari qo'yidagicha hisoblanadi:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + \sqrt{13} + 3 - \sqrt{13}}{4} = \frac{3}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-\frac{9}{2} + 6}{2} = \frac{3}{4}.$$

Izlangan diametr O va M_0 nuqtalardan o'tgani uchun uning tenglamasi:

$$\frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{y}{\frac{3}{4}} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x.$$

2. Qo'shma diametrlar. γ ikkinchi tartibli markazli chiziq, uning asimptotik bo'lmagan $\vec{u}(u_1, u_2)$ yo'nalishga qo'shma diametri $D_u^{\rightarrow}$ bo'lsin. U holda $D_u^{\rightarrow}$ (5) tenglama bilan ifodalanadi, γ chiziqning $D_u^{\rightarrow}$ diametrga parallel vatarlarini o'tkazamiz. Barcha bunday vatarlar o'rtalarining to'plami biror $\vec{v}(v_1, v_2)$ yo'nalishga qo'shma ikkinchi bir $D_v^{\rightarrow}$ dimetrni beradi, u $D_v^{\rightarrow}$ **diametrga qo'shma** deb ataladi. $D_v^{\rightarrow}$ $\vec{v}$ yo'nalishga qo'shma va $D_u^{\rightarrow}$ ga parallel barcha vatarlarning o'rtasi bo'lganidan $D_u^{\rightarrow}$ to'g'ri chiziqning $\vec{a}(-(u_1a_{12} + u_2a_{22}), (u_1a_{11} + u_2a_{12}))$ yo'naltiruvchi vektori $\vec{v}$ vektorga kollinear bo'ladi. Bundan ushbuni yoza olamiz:

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ -(u_1a_{12} + u_2a_{22}) & u_1a_{11} + u_2a_{12} \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$v_1(v_1a_{11} + u_2a_{12}) + v_2(u_1a_{12} + u_2a_{22}) = 0. \quad (8)$$

(8) tenglik $D_v^{\rightarrow}$ diametrning $D_u^{\rightarrow}$ diametrga qo'shma bo'lishlik shartidir. Endi $D_v^{\rightarrow}$ diametrga qo'shma bo'lgan diametrni izlaymiz. U $D_w^{\rightarrow}$ bo'lsin. $D_w^{\rightarrow}$ biror asimptotik bo'lmagan $\vec{w}(w_1, w_2)$ yo'nalishga qo'shma. U holda $D_v^{\rightarrow}$ to'g'ri chiziq (5) ga asosan $\vec{b}(-(v_1a_{12} + v_2a_{22}), (v_1a_{12} + v_2a_{12}))$ yo'naltiruvchi vektorga ega va $\vec{w} \parallel \vec{b}$ bo'ladi
 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow w_1(v_1a_{11} + v_2a_{12}) + w_2(v_1a_{12} + v_2a_{22}) = 0. \quad (9)$$

(8) dan $\frac{v_2}{v_1} = -\frac{u_1a_{11} + u_2a_{12}}{u_1a_{12} + u_2a_{22}}$ ni topib, uni (9) ga qo'ysak,

$$w_1\left(a_{11} - a_{12} \frac{u_1a_{11} + u_2a_{12}}{u_1a_{12} + u_2a_{22}}\right) + w_2\left(a_{12} - a_{22} \frac{u_1a_{11} + u_2a_{12}}{u_1a_{12} + u_2a_{22}}\right) = 0.$$

Bundan

$$w_1(a_{11}u_1a_{12} + a_{11}u_2a_{22} - a_{12}u_1a_{11} - a_{12}u_2a_{12}) + \\ + w_2(a_{12}u_1a_{12} + a_{11}u_2a_{22} - a_{22}u_1a_{11} - a_{22}u_2a_{12}) = 0$$

yoki

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(w_1u_2 - w_2u_1) = 0. \quad (10)$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$ (chunki γ chiziq markazli) bo'lganidan (10) dan,

$$w_1u_2 - w_2u_1 = 0 \Rightarrow \frac{w_2}{w_1} = \frac{u_2}{u_1} \Rightarrow D_u^{\rightarrow} = D_w^{\rightarrow}.$$

Demak, markazli γ chiziqning ikki diametridan biri ikkinchisiga qo'shma bo'lsa, ikkinchisi ham birinchisiga qo'shma bo'ladi. Shu sababli bunday diametrlar ***o'zaro qo'shma diametrlar*** deb ataladi. Shunday qilib, ikkinchi tartibli γ chiziqning o'zaro qo'shma diametrlari uning shunday ikki diametri bo'ladiki, ularning har biri ikkinchisiga parallel vatarlarning o'rtasidan o'tadi.

(8) munosabat ikki diametrning o'zaro qo'shma bo'lishlik shartidir. (8) munosabatni boshqacha

$$a_{11}u_1v_1 + a_{12}u_1v_1 + a_{21}u_1v_2 + a_{22}u_2v_2 = 0$$

ko'rinishda yozish ham mumkin.

Agar γ markazsiz yoki markazlar to'g'ri chizig'iga ega chiziq bo'lsa, unga nisbatan barcha asimptotik bo'lmagan yo'nalishlarning har biriga qo'shmasi birgina asimptotik yo'nalish bo'ladi.

Parabolaning barcha diametrlari o'zaro parallel, parallel ikki to'g'ri chiziqqa ajralgan γ chiziq esa birgina diametrga ega bo'lgani uchun parabola ham, parallel ikki to'g'ri chiziq ham o'zaro qo'shma diametrlarga ega emas.

Misol-2. Ushbu $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$ chiziqning shunday ikkita qo'shma diametrni topish kerakki, ularning biri ordinatalar o'qiga parallel bo'lsin.

Yechish. Bu yerda $a_{11} = 5$, $a_{12} = 2$, $a_{22} = 8$, $a_{10} = -16$, $a_{20} = -28$, $a_{00} = 80$. Mos ravishda $\vec{u}(u_1, u_2)$, $\vec{v}(v_1, v_2)$ yo'nalishlarga qo'shma bo'lgan $D_u^{\rightarrow}$ va $D_v^{\rightarrow}$ diametrlarni qaraymiz. (5) tenglamaga ko'ra bu diametrlar ushbu tenglamalarga ega bo'ladi:

$$D_u^{\rightarrow} : (5u_1 + 2u_2)x + (2u_1 + 8u_2)y - (16u_1 + 28u_2) = 0,$$

$$D_v^{\rightarrow} : (5v_1 + 2v_2)x + (2v_1 + 8v_2)y - (16v_1 + 28v_2) = 0.$$

$D_u^{\rightarrow}$, $D_v^{\rightarrow}$ diametrlarning biri, masalan, $D_v^{\rightarrow}$ diametr Oy o'qqa parallel bo'lsin va $D_u^{\rightarrow}$, $D_v^{\rightarrow}$ o'zaro qo'shma bo'lsin. Bu shartlar quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$2v_1 + 8v_2 = 0. \quad (**)$$

chunki $D_v^{\rightarrow} \parallel Oy$ bo'lgani uchun uning yo'naltiruvchi vektori $(-(2v_1 + 8v_2), 5v_1 + 2v_2)$ ning birinchi koordinatasi nolga teng bo'ladi.

$$5u_1v_1 + 2v_1u_2 + 2u_1v_2 + 8v_2u_2 = 0 \quad (***)$$

(bu $D_u^{\rightarrow}$ va $D_v^{\rightarrow}$ diametrlarning qo'shmalik sharti). (**) dan $v_1 = -4v_2$ buni (***) ga qo'ysak,

$$-20u_1v_2 - 8v_2u_2 + 2u_1v_2 + 8v_2u_2 = 0 \Rightarrow 18v_2u_1 = 0 \Rightarrow v_2 \neq 0,$$

ask holda $v_1 = 0$ bo'lib, $\vec{v} = \vec{0}$, bu esa mumkin emas. U holda $u_1 = 0$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ bo'lgani uchun $u_1 = 0 \Rightarrow u_2 \neq 0$. Topilgan bu qiymatlarni $D_u^{\rightarrow}$, $D_v^{\rightarrow}$ ning tenglamalariga qo'ysak,

$$D_u^{\rightarrow} : (5 \cdot 0 + 2u_2)x + (2 \cdot 0 + 8u_2)y - (16 \cdot 0 + 28u_2) = 0 \Rightarrow x + 4y - 14 = 0,$$

$$D_v^{\rightarrow} : (-20v_2 + 2v_2)x + (-8v_2 + 8v_2)y - (-64v_2 + 28v_2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0.$$

Nazorat uchun savollar.

1. Ikkinchi tartibli chiziqning diametri deb nimaga aytiladi?
2. Ikkinchi tartibli chiziqning qo'shma diametri deb nimaga aytiladi?
3. Ikkinchi tartibli chiziqning qo'shma yo'nalishlari deb nimaga aytiladi?
4. Ikkinchi tartibli chiziqning o'zaro qo'shma diametrlari deb nimaga aytiladi?

24-mavzu: Ikkinchi tartibli chiziqning bosh yo'nalishlari va

simmetriya o'qlari.

Reja:

1. Ikkinchi tartibli chiziqning bosh yo'nalishlari.
2. Ikkinchi tartibli chiziqning simmetriya o'qlari.

1. Ikkinchi tartibli chiziqning bosh yo'nalishlari.

Ta'rif-1. $\vec{u}(u_1, u_2)$, $\vec{v}(v_1, v_2)$ vektorlar bilan aniqlangan ikki yo'nalish va ikkinchi tartibli γ chiziq uchun ushbu

$$u_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2) + u_2(a_{21}v_1 + a_{22}v_2) = 0$$

shart bajarilsa, $\vec{u}, \vec{v}$ yo'nalishlar γ ga nisbatan ***o'zaro qo'shma yo'nalishlar*** deb ataladi.

Ta'rif-2. Bir vaqtda qo'shma va o'zaro perpendikulyar bo'lgan yo'nalishlar ikkinchi tartibli chiziqning ***bosh yo'nalishlari*** deyiladi.

Teorema*. Ikkinchi tartibli har qanday chiziq bir juft haqiqiy bosh yo'nalishga ega.

Isbot. $\vec{u}(u_1, u_2)$, $\vec{v}(v_1, v_2)$ ikkinchi tartibli chiziqning bosh yo'nalishlari bo'lsa, ushbu shartlar bajariladi:

$$1) u_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2) + u_2(a_{21}v_1 + a_{22}v_2) = 0.$$

Buni quyidagicha yozish mumkin:

$$a_{11} + a_{12} \frac{v_2}{v_1} + \frac{u_2}{u_1} \left(a_{21} + a_{22} \frac{v_2}{v_1} \right) = 0$$

yoki

$$a_{11} + a_{12} \left(\frac{v_2}{v_1} + \frac{u_2}{u_1} \right) + a_{22} \frac{u_2}{u_1} \frac{v_2}{v_1} = 0 \quad (11)$$

(bu $\vec{u}, \vec{v}$ yo'nalishlarning o'zaro qo'shmalik sharti).

$\frac{u_2}{u_1}, \frac{v_2}{v_1}$ sonlar $\vec{u}, \vec{v}$ yo'nalishlarning burchak koeffitsiyentlari bo'lib, ularni quyidagicha belgilaymiz:

$$k = \frac{u_2}{u_1}, \quad k^* = \frac{v_2}{v_1},$$

u holda (11) shart

$$a_{11} + a_{12}(k + k^*) + a_{22}kk^* = 0 \quad (12)$$

ko'rinishni oladi.

$$2) \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{v_2}{v_1} = -1 \text{ yoki } kk^* = -1 \quad (13)$$

(bu $\vec{u}$, $\vec{v}$ yo'nalishlarning o'zaro perpendikulyarlik sharti).

$$(13), (12) \text{ dan } k + k^* = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} \text{ munosabatga ega bo'lamiz, bundan}$$

$$k^* = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} - k. \quad (14)$$

(14) tenglikni hisobga olganda (12) dan

$$\begin{aligned} a_{22} + a_{22}k \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} - k \right) &= 0 \Rightarrow a_{22} \left[1 + \frac{k(a_{22} - a_{11} - a_{12})}{a_{12}} \right] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

yoki

$$k^2 + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}}k - 1 = 0. \quad (16)$$

(15) yoki (16) tenglamalardan γ chiziqning bosh yo'nalishlari aniqlanadi. (15) dan

$$k_{1,2} = \frac{(a_{22} - a_{11}) \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}. \quad (17)$$

Ravshanki, (17) da diskriminant $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$. Bundan (15) tenglamaning k_1 , k_2 ildizlari haqiqiy, shu bilan birga Viet teoremasiga ko'ra (16) dan $k_1k_2 = -1 \Rightarrow$ (diskriminant noldan katta bo'lganda) k_1 , k_2 burchak koeffitsiyentli bosh yo'nalishda o'zaro perpendikulyar.

Shunday qilib, ikkinchi tartibli har qanday γ chiziq bir juft haqiqiy bosh yo'nalishlarga ega. Agar $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 = 0$ bo'lsa, $k_1 = k_2$, lekin diskriminant

$$a_{12} = 0, a_{22} - a_{11} = 0 \quad (18)$$

bo'lgandagina nolga teng bo'ladi. Bu holda (15) tenglamani k burchak koeffitsiyentining har qanday qiymati qanoatlantiradi. Demak, bu holda k burchak koeffitsiyent ixtiyoriy bo'ladi. (18) shartga e'tibor bersak, $a_{11} = 0$ bo'lgan holda $\Rightarrow a_{22} = 0$, bu esa mumkin emas, chunki, a_{11}, a_{12}, a_{22} koeffitsiyentlarning kamida biri noldan farqli edi.

Demak, $a_{11} \neq 0$ da (18) munosabatdan $a_{11} = a_{22}$. γ chiziqning tenglamasini $a_{11} = a_{22}$ ga bo'lib, ushbu

$$x^2 + y^2 + 2b_{10}x + 2b_{20}y + b_{00} = 0 \quad (19)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu yerda

$$b_{10} = \frac{a_{10}}{a_{11}}, \quad b_{20} = \frac{a_{20}}{a_{11}}, \quad b_{00} = \frac{a_{00}}{a_{11}}.$$

(19) tenglamadan

$$(x + b_{10})^2 + (y + b_{20})^2 = b_{10}^2 + b_{20}^2 - b_{00}$$

yoki

$$(x + b_{10})^2 + (y + b_{20})^2 = \left(\sqrt{b_{10}^2 + b_{20}^2 - b_{00}} \right)^2. \quad (20)$$

Bu yerda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1) $b_{10}^2 + b_{20}^2 - b_{00} > 0$. Bu holda (20) tenglama markazi $(-b_{10}, -b_{20})$ nuqtada va radiusi $r = \sqrt{b_{10}^2 + b_{20}^2 - b_{00}}$ bo'lgan aylanani aniqlaydi.

2) $b_{10}^2 + b_{20}^2 - b_{00} = 0$. Bu holda (20) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (x + b_{10})^2 + (y + b_{20})^2 = 0, \quad (21)$$

bu tenglamani birgina $(-b_{10}, -b_{20})$ nuqta qanoatlantiradi. (21) tenglamani haqiqiy $(-b_{10}, -b_{20})$ nuqtada kesishuvchi mavhum ikki to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

3) $b_{10}^2 + b_{20}^2 - b_{00} < 0$. Bu holda (20) tenglamani tekislikdagi birorta haqiqiy nuqtaning koordinatalari qanoatlantirmaydi – tenglama bu holda mavhum aylanani ifodalaydi deymiz.

Demak, bosh yo'nalish aniq bo'lmasa, ya'ni k ixtiyoriy bo'lsa, ikkinchi tartibli chiziq haqiqiy aylana yoki mavhum aylana, yoki kesishuvchi mavhum ikki to'g'ri chiziqdan iborat.

Shunday qilib, aylana (haqiqiy, mavhum, kesishuvchi mavhum ikki to'g'ri chiziq) dan farqli har qanday ikkinchi tartibli chiziq bir juft bosh yo'nalishga ega, aylana uchun esa o'zaro perpendikulyar bo'lgan barcha yo'nalishlar jufti bosh yo'nalishlardir.

Bosh yo'nalishlarga oid ma'lumotni xarakteristik tenglama yordamida ham hosil qilish mumkin. (2) va (3) tenglamalardan k^* ni aniqlaymiz. (2) dan

$$k^* = -\frac{a_{11} + a_{12}k}{a_{12} + a_{22}k}.$$

(3) dan $k^* = -\frac{1}{k}$, bu ikki tenglikdan,

$$\frac{a_{11} + a_{12}k}{a_{12} + a_{22}k} = \frac{1}{k}$$

yoki

$$a_{11} + a_{12}k = \frac{a_{12} + a_{22}k}{k} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{12}k = \lambda \\ a_{12} + a_{22}k = \lambda k \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) + a_{12}k = 0, \\ a_{12} + (a_{22} - \lambda)k = 0. \end{cases} \quad (22)$$

(22) sistemaning birinchi tenglamasidan $k = -\frac{a_{11} - \lambda}{a_{12}}$, ikkinchi tenglamasidan

$k = -\frac{a_{12}}{a_{22} - \lambda}$. Bu ikki tenglikdan

$$\frac{a_{11} - \lambda}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22} - \lambda} \text{ yoki } \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Bu λ chiziqning xarakteristik tenglamasi bo'lib, uning diskriminanti $D = (a_{11} - a_{22})^2 + a_{12}^2 \geq 0$. Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin.

1) $D = 0 \Leftrightarrow a_{11} - a_{22} = 0, a_{12} = 0$, bundan $a_{11} = a_{22}, a_{12} = 0$, bu holda $\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11} = a_{22}$ bo'lib, (22) sistemada k har qanday qiymatni qabul qila oladi. Ma'lumki, bu holda λ chiziq aylana bo'ladi va o'zaro perpendikulyar bo'lgan har ikki yo'nalish bu aylanaga nisbatan bosh yo'nalishlardir.

2) $D > 0 \Rightarrow$ xarakteristik tenglamaga turli haqiqiy λ_1, λ_2 ildizlarga ega. Bu holda bir juft bosh yo'nalish mavjud bo'lib, ular (22) sistemadagi ikki tenglamaning biridagi λ ning o'rniga λ_1, λ_2 ni qo'yish bilan hosil qilinadi. Shunday qilib, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ya'ni chiziq markazli bo'lsa, unga nisbatan bir juft bosh yo'nalish mavjud. γ parabolik tipli chiziq bo'lganda $D = 0$ bilan birga xarakteristik tenglama ildizlarining biri nolga tengdir. Lekin tenglamaning ikkinchi ildizi nolga teng bo'la olmaydi, aks holda $\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11} = a_{22} = 0$ va $a_{12} = 0$ bo'lib, chiziq tenglamasida o'zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali hadlar qatnashmay qoladi. (22) da $\lambda = 0$ desak, parabolik tipli chiziq uchun:

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

k ning bu qiymati γ chiziqqa nisbatan asimptotik yo'nalishni aniqlar edi. Shunday qilib, parabolik tipli chiziqlar uchun asimptotik yo'nalish bosh yo'nalishning biridir. Ikkinchi bosh yo'nalish esa asimptotik yo'nalishga perpendikulyar bo'ladi va u $kk^* = -1$ shartdan aniqlanadi, ya'ni

$$k^* = -\frac{1}{k} = \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

2. Ikkinchi tartibli chiziqning simmetriya o'qlari. Ikkinchi tartibli chiziqning bosh yo'nalishga ega bo'lgan diametri uning **o'qi** deyiladi. Demak, ikkinchi tartibli chiziqning o'qi uning simmetriya o'qidir. Xullas, aylanadan boshqa har qanday markazli chiziq bir juft o'qqa ega, aylana esa cheksiz ko'p juft o'qlarga ega. Ikkinchi tartibli chiziqning o'qi uning bosh yo'nalishga ega bo'lgan diametri bo'lgani uchun oldingi mavzudagi (4) tengamaga ko'ra markazli chiziqning o'qi ushbu

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + k(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0 \quad (23)$$

tenglama bilan aniqlanadi (bu yerda $k = \frac{u_2}{u_1}$). (23) tenglamadagi k

$$k^2 + \frac{a_{11} + a_{12}}{a_{12}}k - 1 = 0$$

tenglamadan topiladi ((6) formulaga qarang).

Parabolaning barcha diametrlari o'zaro parallel, shuning uchun ularning hammasi bosh yo'nalishga ega. Lekin bu diametrlarning bittasigina o'ziga perpendikulyar bo'lgan yo'nalishga qo'shma, binobarin, parabola birgina o'qqa ega, u ham bo'lsa, uning simmetriya o'qidir. Parabolik chiziqlar uchun ham ularning o'qi (23)

tenglamadan aniqlanadi, faqat k bu yerda $k = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}}$ tenglikdan topiladi.

Misol. $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$ chiziqning o'qlarini toping.

Yechish. Avvalo berilgan chiziq markazli yoki markazsiz ekanini tekshiramiz. Buning uchun

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ni tuzamiz. Berilgan chiziq tenglamasidan $a_{12} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{22} = 3$,

$$a_{10} = 3, a_{20} = -1, a_{00} = -5 \text{ bo'lib, } \delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 \neq 0.$$

Demak, chiziq markazli, u holda uning o'qi (23) ga ko'ra

$$(3x + y + 3) + k(x + 3y - 1) = 0$$

tenglamadan aniqlanadi. Tenglamadagi k ushbu $k^2 - 1 = 0$ ning ildizlaridir. Bundan $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. k ning o'rniga $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ ni qo'yish bilan berilgan chiziq o'qlarining $2x + 2y + 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$ tenglamalari hosil bo'ladi.

Nazorat uchun savollar.

1. Ikkinchi tartibli chiziqning o'zaro qo'shma yo'nalishlar deb nimaga aytiladi?
2. Ikkinchi tartibli chiziqning bosh yo'nalishlari deb nimaga aytiladi?
3. Ikkinchi tartibli chiziqning o'qi deb nimaga aytiladi?
4. Ikkinchi tartibli chiziqning simmetriya o'qi deb nimaga aytiladi?

25-mavzu: Ikkinchi tartibli sirtlarning to'g'ri chiziq va tekislik bilan kesishishi.

Reja:

1. Ikkinchi tartibli sirt va uning to'g'ri chiziq bilan kesishishi.
2. Ikkinchi tartibli sirtning tekislik bilan kesishishi.

1. Ikkinchi tartibli sirt va uning to'g'ri chiziq bilan kesishishi.

Ta'rif: Biror affin reperda ikkinchi tartibli algebraik tenglama bilan aniqlanadigan nuqtalar to'plami *ikkinchi tartibli sirt* deb ataladi:

$$S: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (1)$$

bunda

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

Avvalo, bu sirtning biror u to'g'ri chiziq bilan kesishishi masalasini ko'rib chiqaylik. Faraz qilaylik, u to'g'ri chiziq S sirt qaralayotgan affin reperda quyidagi parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsin:

$$u: \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (3)$$

S bilan u ning kesishmasini topish uchun ularning tenglamalarini birgalikda echish kerak. Shuning uchun (3) da x, y, z ning qiymatlarini (1) ga qo'yamiz:

$$a_{11}(x_0 + lt)^2 + a_{22}(y_0 + mt)^2 + a_{33}(z_0 + nt)^2 + 2a_{12}(x_0 + lt)(y_0 + mt) + 2a_{13}(x_0 + lt)(z_0 + nt) + 2a_{24}(y_0 + mt) + 2a_{34}(z_0 + nt) + a_{44} = 0.$$

Qavslarni ochib, o'xshash hadlarni ixchamlasak, t ga nisbatan ushbu kvadrat tenglama hosil bo'ladi:

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \quad (4)$$

bunda:

$$\begin{aligned} P &= a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{23}mn + 2a_{13}nl, \\ Q &= l(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}) + m(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}) + \\ &\quad + n(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}), \\ R &= a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + a_{33}z_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_{23}y_0z_0 + \\ &\quad + 2a_{14}x_0 + 2a_{24}y_0 + 2a_{34}z_0 + a_{44}. \end{aligned} \quad (5)$$

(5) dan ko'rinib turibdiki, P koeffitsiet u to'g'ri chiziqning (x_0, y_0, z_0) nuqtasiga bog'liq bo'lmasdan, u ning faqat yo'naltiruvchi vektorigagina bog'liqdir.

Ta'rif. Yo'naltiruvchi vektorlari $P=0$ shartni qanoatlantiradigan barcha to'g'ri chiziqlar berilgan sirtga nisbatan **asimptotik yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziqlar** deyiladi, yo'naltiruvchi vektorlarni esa **asimptotik yo'nalishli vektorlar** deyiladi.

Agar u to'g'ri chiziq S sirtga nisbatan asimptotik yo'nalishga ega bo'lmasa (ya'ni $P \neq 0$ bo'lsa), u holda (4) kvadrat tenglama ikkita t_1, t_2 ildizga ega bo'ladi, bunda t_1, t_2 ikkita turli haqiqiy son bo'lsa, to'g'ri chiziq sirt bilan ikkita umumiy nuqtaga egadir.

t_1, t_2 qo'shma kompleks sonlar bo'lsa, u holda to'g'ri chiziq sirt bilan ikkita mavhum umumiy nuqtaga ega, $t_1 = t_2$ da to'g'ri chiziq sirt bilan ustma-ust tushadigan ikkita umumiy nuqtaga ega bo'lib, bu vaqtda to'g'ri chiziq sirtga **urinadi** deyiladi.

Agar u to'g'ri chiziq S sirtga nisbatan asimptotik yo'nalishga ega bo'lsa (ya'ni $P=0$ bo'lsa), u holda (4) dan

$$2Qt + R = 0 \quad (6)$$

bo'lib, bu yerda turli hollar yuz berishi mumkin.

a) $Q \neq 0$, (6) $\Rightarrow t = -\frac{R}{2Q}$ bo'lib, u to'g'ri chiziq S sirt bilan bitta nuqtada kesishadi.

b) $Q=0$, lekin $R \neq 0$ bo'lsa, (6) tenglama ma'noga ega emas, bu hol S sirt u to'g'ri chiziqning kesishmasligini bildiradi.

c) $Q=0$, $R=0$ bo'lsa, (6) tenglama t ning har qanday qiymatida o'rinli, bu esa u to'g'ri chiziqning hamma nuqtalari S ga tegishli, ya'ni to'g'ri chiziq S sirtning tarkibida ekanligini bildiradi (bunday to'g'ri chiziq S sirtning **yasovchisi** deb ataladi). Endi $P \neq 0$ bo'lib, $t_1 = t_2$ holga qaytaylik, bu holda u to'g'ri chiziq S sirtga urinma deb atalgan edi. Bu vaqtda u to'g'ri chiziqning (x_0, y_0, z_0) nuqtasi sifatida shu urinish nuqtasini olsak, bu nuqta S ga ham tegishli bo'lgani uchun (5) dan $R=0$. U holda (4) dan

$$Pt^2 + 2Qt = 0 \text{ yoki } t(Pt + 2Q) = 0.$$

Bu tenglamaning bitta ildizi $t_1 = 0$, ikkinchisi esa $t_2 = -\frac{2Q}{P}$ dir.

Ravshanki, $t_1 = t_2 = 0$ bo'lishi uchun $Q=0$ bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})l + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})m + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})n = 0. \quad (7)$$

Bu tenglik u to'g'ri chiziq S sirtga nisbatan asimptotik yo'nalishga ega bo'lmaganda uning S sirtga (x_0, y_0, z_0) nuqtada urinishi uchun yo'naltiruvchi

$\bar{u}$ vektor koordinatalarini qanoatlantirishi kerak bo'lgan shartdir. Ravshanki, (7)

tenglikni qanoatlantiruvchi l, m, n lar cheksiz ko'pdir (chunki uch noma'lumli bitta tenglamadir), demak, M_0 nuqtada sirtga urinuvchi cheksiz ko'p to'g'ri chiziqlar mavjud. Bu urinmalardan biriga tegishli ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtani olsak, $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ vektor shu urinmaning yo'naltiruvchi vektori bo'ladi, u holda uning koordinatalari (7) shartni qanoatlantirishi kerak:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})(x-x_0) + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})(y-y_0) + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})(z-z_0) = 0. \quad (8)$$

Shunday qilib, sirtning M_0 nuqtaga o'tkazilgan har bir urinma to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy nuqtaning koordinatalari (8) ni qanoatlantirishi kerak. (8) tenglama x, y, z ga nisbatan chiziqli tenglama bo'lgani uchun u M_0 nuqtadan o'tuvchi biror tekislikni aniqlaydi, xuddi shu tekislik S sirtning M_0 nuqtaga o'tkazilgan **urinma tekisligi** deb ataladi. Demak, ikkinchi tartibli sirtning biror nuqtasiga o'tkazilgan barcha urinma to'g'ri chiziqlar to'plami bir tekislikka tegishli bo'lib, bu tekislik sirtning shu nuqtasiga o'tkazilgan urinma tekislikdan iborat. Shunday qilib, (8) tenglama ikkinchi tartibli sirtning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tekislik tenglamasidir.

Agar (8) dagi $(x-x_0), (y-y_0), (z-z_0)$ ning koeffitsientlari bir vaqtda nolga teng, ya'ni

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

bo'lsa, urinma tekislik noaniqdir.

Bu (9) shartlarni qanoatlantiruvchi (x_0, y_0, z_0) nuqta sirtning **maxsus nuqtasi** deb ataladi. Demak, sirtning maxsus nuqtasida uning urinma tekisligi aniqlanmagan bo'ladi.

2. Ikkinchi tartibli sirtning tekislik bilan kesishishi. S ikkinchi tartibli sirt va

Π tekislik berilgan bo'lsin. Affin reporni shunday tanlab olamizki, $\Pi = xOy$ bo'lsin, u holda shu reperda Π tekislik

$$z = 0 \quad (10)$$

tenglama bilan aniqlanadi. S sirtning tenglamasi esa shu reperda umumiy holda, ya'ni (1) ko'rinishda bo'lsin. (1) va (10) tenglamalarni birgalikda echsak,

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0. \quad (11)$$

S sirtga va Π tekislikka tegishli bo'lgan barcha nuqtalar (11) tenglamani qanoatlantiradi.

Quyidagi hollar yuz berishi mumkin. 1) $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, bu vaqtda umuman olganda (11) tenglama $z = 0$ tekislikda ikkinchi tartibli chiziqni aniqlaydi.

2) $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, bu yerda: a) a_{14} yoki a_{24} dan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, (11) tenglama $2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0$ ko'rinishda bo'lib, $z = 0$ tekislikda to'g'ri chiziqni aniqlaydi, demak, bu holda S sirt bilan Π tekislik to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi;

b) $a_{14} = a_{24} = a_{44} = 0 \Rightarrow$ (1) tenglama $z(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + 2a_{34}) = 0$ ko'rinishda bo'lib, u $z = 0$, $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0$ tekisliklarga ajralib ketadi (ravshanki, bu vaqtda berilgan Π tekislik shu sirt tarkibida bo'ladi);

c) $a_{14} = a_{24} = 0$, $a_{44} \neq 0 \Rightarrow$ (11) tenglamadan $a_{44} = 0$ kelib chiqib, ziddik ro'y beradi, bu esa S sirt bilan Π tekislik birorta ham umumiy nuqtaga ega emasligini bildiradi.

Shunday qilib, ikkinchi tartibli sirtning tekislik bilan kesimi:

a) ikkinchi tartibli chiziqdan;

b) bitta to'g'ri chiziqdan;

c) tekislikdan (bu vaqtda sirt ikkita tekislikka ajralib, berilgan tekislik shu tekisliklardan biri bo'ladi);

d) bo'sh to'plamdan (ya'ni sirt bilan tekislik bitta ham umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi) iborat ekan.

1-misol. $x^2 - xy + zy - 5z = 0$ sirt bilan $\frac{x-10}{7} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{-1}$ to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtalarini toping.

Yechish. Berilgan to'g'ri chiziq tenglamasini parametrik ko'rinishda yozamiz: $x = 10 + 7t$, $y = 5 + 3t$, $z = -t$, bularni berilgan sirt tenglamasiga quysak, $(10 + 7t)^2 - (10 + 7t)(5 + 3t) - t(5 + 3t) + 5t = 0$. Bu tenglamani soddalashtirsak,

$$t^2 + 3t + 2 = 0,$$

bu kvadrat tenglamaning ildizlari: $t_1 = -1$, $t_2 = -2$. Bu qiymatlarni to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalaridagi t ning o'rniga qo'ysak,

$$t_1 = -1 \text{ da } x = 10 + 7(-1) = 3, y = 5 + 3(-1) = 2, z = -(-1) = 1;$$

$$t_2 = -2 \text{ da } x = 10 + 7(-2) = -4, y = 5 + 3(-2) = -1, z = -(-2) = 2.$$

Demak, izlangan nuqtalar $(3, 2, 1)$ va $(-4, -1, 2)$.

2-misol. $x^2 - y^2 - 2x + z - 3 = 0$ sirtning $(1, 1, 5)$ nuqtasidagi urinma tekislik tenglamasini yozing.

Yechish. Bu yerda: $a_{11} = 1$, $a_{22} = -1$, $a_{33} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{14} = -1$, $a_{24} = 0$, $a_{34} = \frac{1}{2}$, $a_{44} = -3$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 5$.

Bularni (8) ga quysak,

$$-(y-1) + \frac{1}{2}(z-5) = 0 \text{ yoki } 2y - z + 3 = 0,$$

bu izlangan urinma tekislik tenglamasidir.

3-misol. $x^2 + 3y^2 - 4xz - 2yz + z - 6 = 0$ sirtning $z = 0$ tekislik bilan kesimini toping.

Yechish. $z = 0$ ni berilgan sirt tenglamasiga qo'ysak,

$$x^2 + 3y^2 - 6 = 0.$$

Buni soddaroq holga keltiramiz:

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1,$$

demak, kesimda yarim o'qlari $\sqrt{6}$ va $\sqrt{2}$ bo'lgan ellips hosil qilinadi.

Tayanch iboralar.

Sirt, ikkinchi tartibli sirt, asimptotik yo'nalishli vektorlar, yasovchi, urinma tekislik, maxsus nuqta.

Nazorat uchun savollar.

1. Sirt deb nimaga aytiladi?
2. Ikkinchi tartibli sirt deb nimaga aytiladi?
3. Qanday vektorlarga asimptotik yo'nalishli vektorlar deyiladi?
4. Yasovchi deb nimaga aytiladi?
5. Urinma tekislik nima?
6. Qanday nuqtaga maxsus nuqta deyiladi?

26-mavzu: Sferik sirt.

Reja:

1. Sferik sirt.

2. Sferik sirtning markazini, radiusini va urinma tekislik tenglamalarini topishga doir misollar.

Biz sfera tenglamasini quyidagicha ekanligini bilamiz:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \quad (1)$$

bunda a, b, c – sfera markazi, R – sfera radiusi.

(1) ni quyidagicha yozamiz:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0. \quad (1')$$

Bundan: 1) sferaning ikkinchi tartibli sirt ekanligini ko'ramiz,

2) (1') da xy, xz, yz ko'paytmalar qatnashgan hadlar yo'qligini,

3) x^2, y^2, z^2 oldidagi koeffitsiyentlarning 1 ga tengligini ko'rib turibmiz.

Endi (1) da $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ va $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ deb faraz qilinsa,

$$a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + a_{11}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (2)$$

tenglama sferani ifoda qiladimi degan savolga javob izlaylik. $a_{11} \neq 0$ ga bo'lib yuborib,

$$\frac{2a_{14}}{a_{11}} = A, \quad \frac{2a_{24}}{a_{11}} = B, \quad \frac{2a_{34}}{a_{11}} = C, \quad \frac{a_{44}}{a_{11}} = D$$

belgilashlarni kiritsak,

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3)$$

Bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 + y^2 + By + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2 + z^2 + Cz + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\frac{C}{2}\right)^2 + D = 0, \\ \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 + D - \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4} - \frac{C^2}{4} = 0 \end{aligned}$$

yoki

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(A^2 + B^2 + C^2 - 4D). \quad (4)$$

Quyidagi hollarni qarab chiqaylik:

a) $A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$; bu holda

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}\right)^2,$$

bu tenglama esa markazi $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$ nuqtada va radiusi

$R = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}$ ga teng sfera tenglamasidir.

b) $A^2 + B^2 + C^2 - 4D = 0$; bu holda (4) tenglama

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = 0$$

ko'rinishda bo'lib, uni qanoatlantiruvchi faqat bitta $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$ nuqta mavjuddir.

c) $A^2 + B^2 + C^2 - 4D < 0$. Bundan ko'rinadiki, fazoda (4) ni qanoatlantiruvchi bitta ham nuqta mavjud emas. Umumiylikni buzmaslik uchun bu vaqtda (4) tenglama **mavhum sferani aniqlaydi** deymiz.

Demak, (3) tenglama faqatgina $A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$ shartda sferani aniqlaydi.

1-misol. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 4y + 2z - 5 = 0$ sferaning markazi va radiusini toping.

Yechish. Tenglamadan

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + z - \frac{5}{2} &= 0, \\ x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 - 1 + z^2 + z + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{5}{2} &= 0, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Demak, sferaning markazi $\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$ nuqtada, radiusi esa 2 ga teng.

2-misol. $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$ sferaning $M(3, \sqrt{2}, 1)$ nuqtasida unga o'tkazilgan urinma tekislik tenglamasini yozing.

Yechish. Oldingi mavzudagi (8) tenglamaga a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) ning qiymatlarini qo'yib, urinma tekislik tenglamasini yozish ham mumkin edi, lekin biz bu yerda boshqacha yo'l tutamiz. Bu yerda, sfera markazi $O'(2, 0, 0)$ nuqtada, radiusi esa 2 ga teng. Sferaning M nuqtada o'tkazilgan urinma tekisligi sfera radiusiga perpendikulyarligi sababli $\overline{MO'}$ vektor urinma tekislikning normal vektori bo'ladi. Ammo $\overline{MO'}(-1, -\sqrt{2}, -1)$, demak, izlangan tekislik tenglamasi:

$$-1(x - 3) - \sqrt{2}(y - \sqrt{2}) - 1(z - 1) = 0$$

yoki

$$x + \sqrt{2}y + z - 6 = 0.$$

Tayanch iboralar.

Sfera, mavhum sfera, markaz, radius.

Nazorat uchun savollar.

1. Sfera deb nimaga aytiladi?

2. Sferaning markazi deb nimaga aytiladi?
3. Sferaning radiusi deb nimaga aytiladi?
4. Mavhum sfera deb nimaga aytiladi?

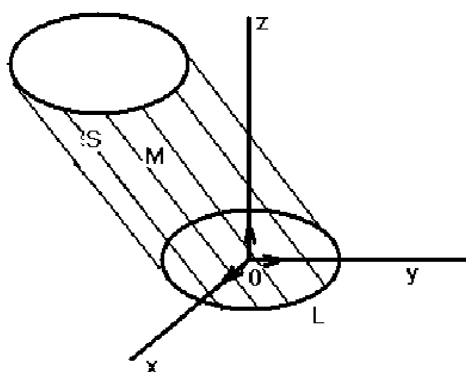
27-mavzu: Ikkinchi tartibli silindrik sirtlar.

Reja

1. Ikkinchi tartibli silindrik sirt va uning yasovchilari.
2. Ikkinchi tartibli silindrik sirtning turlari.

Biror Π tekislikda L ikkinchi tartibli chiziq hamda shu tekislikka parallel bo'lmagan u to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.

Ta'rif. u to'g'ri chiziqqa parallel hamda L chiziq bilan kesishuvchi fazodagi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami **ikkinchi tartibli silindrik sirt** deb ataladi.



1 – chizma

Ta'rifda qatnashayotgan L chiziq shu silindrik sirtning **yo'naltiruvchisi**, to'g'ri chiziqlar esa uning **yasovchilari** deyiladi.

Ta'rifdan foydalanib, affin reperda S silindrik sirt tenglamasini keltirib chiqaraylik. Soddalik uchun, yo'naltiruvchi chiziqni xOy tekislikda olamiz:

$$L: F(x, y) = 0. \quad (1)$$

u to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{u}(l, m, n)$ (1-chizma).

Ixtiyoriy $M(x, y, z) \in S$ nuqtani olamiz. Shu M nuqtadan o'tgan yasovchining xOy tekislik bilan kesishgan nuqtasi $N(x_1, y_1, 0)$ bo'lsin. U holda $\overline{MN} = (x_1 - x, y_1 - y, -z)$ va $\overline{MN} \parallel \vec{u}$, ya'ni $\overline{MN} = \lambda \vec{u}$. Bundan: $x_1 - x = \lambda l$, $y_1 - y = \lambda m$, $-z = \lambda n$, ($n \neq 0$, chunki $\vec{u} \parallel xOy$). $-z = \lambda n$ dan λ ni topib, oldingi ikki tenglikka qo'yamiz:

$$x_1 = x - \frac{l}{n}z, \quad y_1 = y - \frac{m}{n}z. \quad (2)$$

Ammo $N \in L \Rightarrow F(x_1, y_1) = 0$, demak,

$$F\left(x - \frac{l}{n}z, y - \frac{m}{n}z\right) = 0. \quad (3)$$

Shunday qilib, (3) tenglama silindrik sirtning tenglamasidir.

Demak, yo'naltiruvchisi $F(x, y) = 0$ ko'rinishdagi tenglama bilan berilgan, yasovchilari esa (l, m, n) vektorga parallel silindrik sirt tenglamasini hosil qilish uchun

(1) dagi x, y o'rniga mos ravishda $x - \frac{l}{n}z, y - \frac{m}{n}z$ ifodalarni qo'yish kerak ekan.

$u \parallel Oz$ dan iborat xususiy holda $\bar{u} \parallel \bar{e}_3 \Rightarrow \bar{u}(0, 0, n)$ va (3) tenglama ushbu ko'rinishni oladi:

$$F(x, y) = 0. \quad (4)$$

Ajoyib xulosaga keldik: yasovchilari Oz o'qqa parallel silindrik sirt tenglamasi yo'naltiruvchi tenglamasining o'zginasidir.

Masalan, xOy tekislikda ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, bu tenglama fazoda yasovchilari Oz o'qqa parallel tsilindrik sirtidan iborat.

Ikkinchi tartibli silindrik sirt $\beta = (O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ affin reperda berilgan bo'lsin: ravshanki, bu tenglama ikkinchi darajalidir, sirtning yasovchilariga parallel bo'lmagan Π tekislik bilan kesimini tekshiraylik.

Yangi $\beta' = (O', \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$ affin reporni shunday tanlab olamizki, O nuqta bilan $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2$ bizis vektorlar Π da joylashsin, $\bar{e}'_3$ esa u ga parallel bo'lsin. U holda β dan β' ga o'tishda tenglamaning darajasi saqlangani uchun S sirt β' da ham ikkinchi tartibli silindrik sirtni aniqlaydi, lekin bu tenglamada uchinchi o'zgaruvchi z' qatnashmaydi ($O'z' \parallel \bar{u}$ bo'lgani uchun).

Uning β' reperdagi tenglamasini umumiy holda quyidagicha yozish mumkin:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0. \quad (5)$$

Demak, S bilan Π ning kesishmasidan hosil bo'lgan geometrik obraz umumiy holda (5) tenglama bilan aniqlanadi. Bu (5) tenglama esa Π tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasidir, shu ikkinchi tartibli chiziqning turiga qarab ikkinchi tartibli silindrni sinflarga ajratish mumkin. Bundan tashqari, (5) bilan aniqlanadigan chiziqni S ning yo'naltiruvchisi sifatida ham qabul qilsak ham bo'ladi. Demak, ikkinchi tartibli silindrning yo'naltiruvchilari: ellips, giperbola, parabola, ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq, ikkita o'zaro parallel (ustma-ust tushmagan) to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lishi mumkin. Yo'naltiruvchilari shu chiziqlardan iborat ikkinchi tartibli silindrik sirtlarni mos ravishda **elliptik tsilindr**, **giperbolik silindr**, **parabolik silindr**, **ikkita kesishuvchi tekislik** (ustma-ust tushmagan) deb yuritiladi (oxirgi ikkitasi ba'zan **aynigan silindr** deb ham yuritiladi). Bu silindrlarning tenglamasini dekart reperida (kanonik holga keltirib) yozamiz:

$$\text{Elliptik silindr } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (2-a chizma).}$$

Giperbolik silindr $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (2- δ chizma).

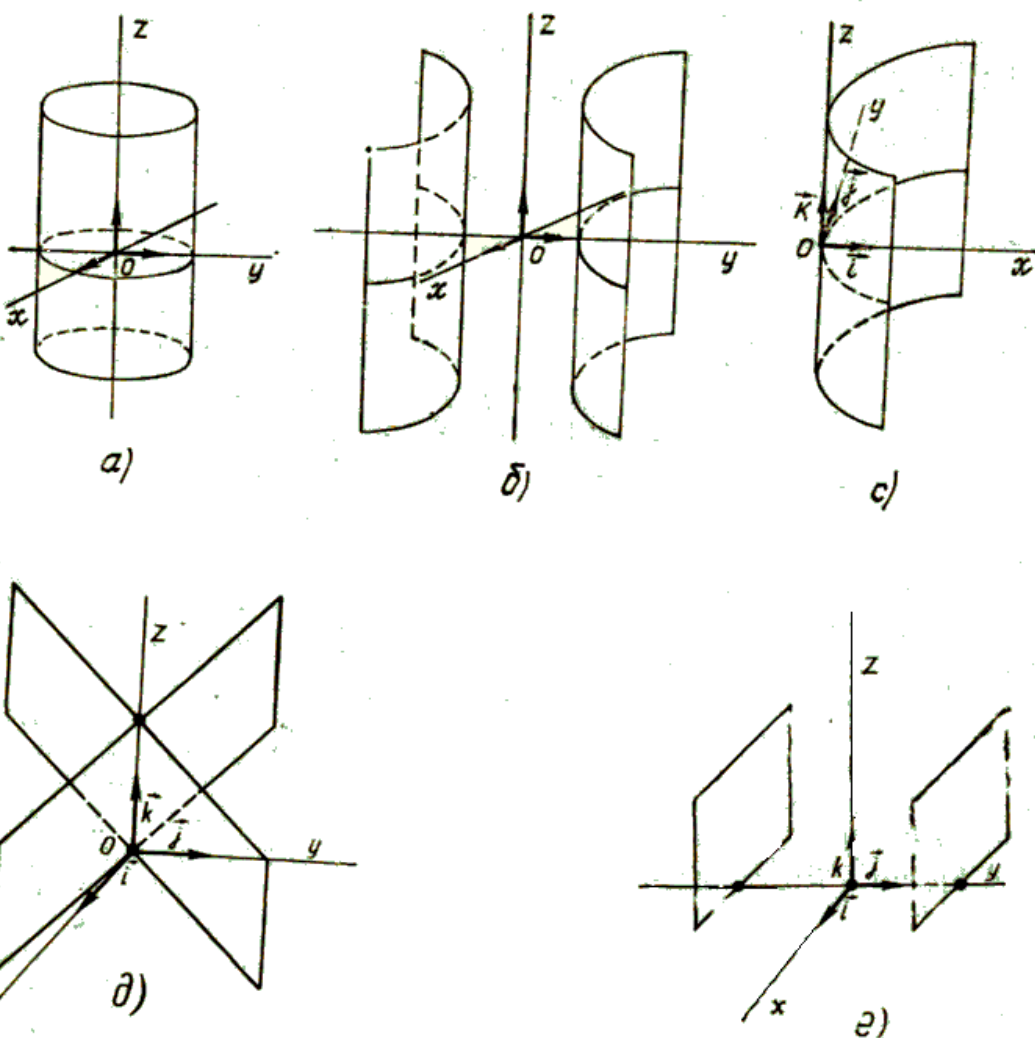
Parabolik silindr $y^2 = -2px$ (2- c chizma).

Ikki kesishuvchi tekislik $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (2- ∂ chizma).

Ikki parallel tekislik $x^2 - a^2 = 0$ ($a \neq 0$) (2- e chizma).

Misol. Yo'naltiruvchisi xOy tekislikda $x^2 + 2xy - 3y^2 - x = 0$ tenglama bilan aniqlanuvchi, yasovchilari $(1, 0, 1)$ vektorga parallel silindrik sirt tenglamasini yozing.

Yechish. Berilganlarga asosan: $F(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2 - x = 0$, $\bar{u} = (1, 0, 1)$, $l = 1$, $m = 0$, $n = 1$. U holda bu sirt tenglamasi:



2 – chizma

$$F(x - z, y) = (x - z)^2 + 2(x - z)y - 3y^2 - (x - z) = 0.$$

Endi ikkinchi tartibli sirt

$$S: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (6)$$

umumiy tenglama bilan berilgan bo'lsa, qanday shart bajarilganda bu tenglama yasovchilari $\bar{u}(l, m, n)$ vektorga parallel ikkinchi tartibli silindrik sirtni aniqlash masalasiga to'xtaylik.

(6) sirtning yasovchilari $\bar{u}(l, m, n)$ vektorga parallel bo'lsin. $M(x_1, y_1, z_1)$ fazodagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin, M nuqtadan o'tib $\bar{u}$ ga parallel to'g'ri chiziq yo (6) sirt tarkibida bo'ladi, yoki u bilan bitta ham umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi. U holda 25-mavzudagi b) yoki c) holga asosan $Q = 0$ yoki

$$x_1(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n) + y_1(a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n) + z_1(a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n) + (a_{41}l + a_{42}m + a_{43}n) = 0$$

bo'ladi. M nuqta har qanday bo'lganda ham shu shart doimo bajarilishi uchun

$$\begin{aligned} a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n &= 0, & a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n &= 0, \\ a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n &= 0, & a_{41}l + a_{42}m + a_{43}n &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

bo'lishi lozim. Aksincha l, m, n lar (7) ni qanoatlantirsin, u holda $\bar{u}(l, m, n)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq (6) ning yasovchisi ekanligini isbotlaymiz.

Haqiqatdan ham, (6) sirtning ixtiyoriy $M(x_1, y_1, z_1)$ nuqtasini olaylik, u nuqtada $\bar{u}$ ga parallel qilib o'tkazilgan u' to'g'ri chiziq $2Qt + R = 0$ ning yasovchisi ekanini ko'rsataylik, u' ning parametrik tenglamalari quyidagicha bo'lsin:

$$x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt, \quad z = z_1 + nt.$$

Bu qiymatlarini (6) ga qo'ysak hamda (7) ni va (5) (25-mavzudagi) ni e'tiborga olsak, $P = Q = 0$ bo'ladi, M nuqta $2Qt + R = 0$ ga tegishli bo'lgani uchun (9) (25-mavzudagi) dan $R = 0$ ekanligi kelib chiqadi, demak, 25-mavzudagi c) holga asosan u to'g'ri chiziq (6) ning yasovchisi ekan.

Quyidagi muhim xulosaga keldik: (6) tenglama bilan aniqlanuvchi sirt yasovchilari $\bar{u}(l, m, n)$ vektorga parallel bo'lgan tsilindrik sirt bo'lishi uchun (7) shartlarning barchasi bajarilishi zarur va etarli ekan.

Misol: $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 4z = 0$ tenglama bilan aniqlangan sirtni silindrik sirt ekanligini isbotlang.

Yechish: $2Qt + R = 0$ bilan solishtirsak: $a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{33} = 2, a_{42} = 1, a_{34} = 2, a_{13} = a_{23} = a_{24} = a_{44} = 0$. (7) sistemani tuzamiz:

$$l + m = 0,$$

$$l + m = 0, \Rightarrow n = 0, \quad l = -m, \quad l = 1, \quad \text{desak, } m = -1,$$

$$n = 0,$$

$$2n = 0,$$

demak, $\bar{u}(1, -1, 0)$ vektor berilgan sirt yasovchilari uchun yo'naltiruvchi vektor bo'lar ekan.

Tayanch iboralar.

Ikkinchi tartibli silindrik sirt, yasovchi, elliptik silindr, giperbolik silindr, parabolik silindr, ikkita kesishuvchi tekislik, aynigan silindr.

Nazorat uchun savollar.

1. Ikkinchi tartibli silindrik sirt deb nimaga aytiladi?
2. Yasovchi nima?
3. Elliptik silindr deb nimaga aytiladi?
4. Giperbolik silindr deb nimaga aytiladi?
5. Parabolik silindr deb nimaga aytiladi?
6. Ikkita kesishuvchi tekislik deb nimaga aytiladi?
7. Aynigan silindr deb nimaga aytiladi?

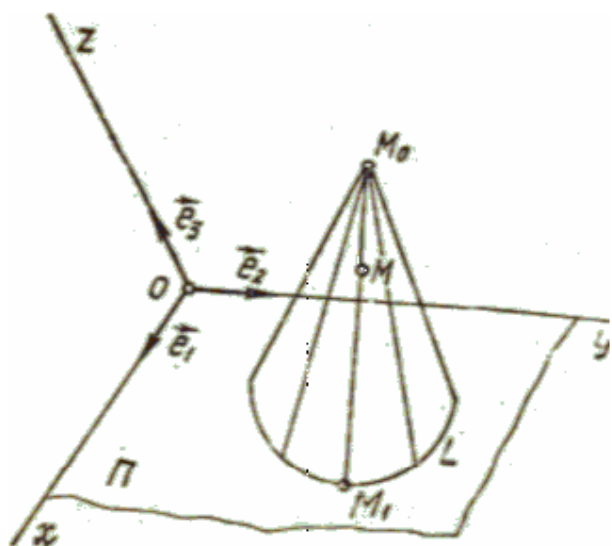
28-mavzu: Ikkinchi tartibli konus sirtlari. Konus kesimlari.

Reja

1. Ikkinchi tartibli konus sirtlar va uning yasovchilari.
2. Ikkinchi tartibli konus kesimlari.

1. Ikkinchi tartibli konus sirtlar va uning yasovchilari. Biror Π tekislikda L ikkinchi tartibli chiziq va bu tekislikka tegishli bo'lmagan M_0 nuqta berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Fazodagi M_0 nuqtadan o'tib, L ni kesib o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami **ikkinchi tartibli konus sirt** (yoki **konus**) deb ataladi. M_0 konus **uchi**, L chiziq esa konus **yo'naltiruvchisi**, konusni hosil qiluvchi to'g'ri chiziqlar uning **yasovchilari** deb ataladi.



1-chizma

Konus yasovchilari markazi konus uchida bo'lgan to'g'ri chiziqlar bog'lamiga tegishlidir.

Endi konus tenglamasini keltirib chiqaraylik. Affin reporni shunday tanlab olamizki, konusning yo'naltiruvchisi yotgan tekislik $\Pi = xOy$ tekislikdan iborat bo'lib, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada esa fazoning xOy da yotmagan ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin (1 – chizma).

$$L: F(x, y) = 0. \quad (1)$$

Konusning ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtasini olaylik, u holda M_0M to'g'ri chiziq konusning yasovchisi bo'lib, L bilan (ya'ni xOy tekislik bilan) kesishgan nuqtasi

$M_1(x_1, y_1, 0)$ bo'lsin. M_0, M, M_1 nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotgani uchun $\overline{M_0M_1} \parallel \overline{M_0M}$ yoki $\overline{M_0M_1} = \lambda \overline{M_0M} \Rightarrow$

$$x_1 - x_0 = \lambda(x - x_0), \quad y_1 - y_0 = \lambda(y - y_0), \quad 0 - z_0 = \lambda(z - z_0)$$

yoki

$$x_1 = x_0 + \lambda(x - x_0), \quad y_1 = y_0 + \lambda(y - y_0), \quad z_0 + \lambda(z - z_0) = 0.$$

So'ngi tenglikdan λ ni topib, avvalgi ikki tenglikka qo'yamiz:

$$x_1 = x_0 + \frac{x - x_0}{z_0 - z} z_0, \quad y_1 = y_0 + \frac{y - y_0}{z_0 - z} z_0. \quad (2)$$

$$M_1 \in L \Rightarrow F(x_1, y_1) = 0$$

yoki

$$F\left(x_0 + \frac{x - x_0}{z_0 - z} z_0, y_0 + \frac{y - y_0}{z_0 - z} z_0\right) = 0. \quad (3)$$

Ravshanki, konusga tegishli barcha nuqtalarning koordinatalari (3) ni qanoatlantiradi, konusga tegishli bo'lmagan hech qanday nuqtaning koordinatalari (3) ni qanoatlantirmaydi, demak, (3) ifoda konus tenglamasidir.

Konusning uchi koordinatalar boshidan iborat bo'lgan holni tekshiraylik. Buning uchun avvalo algebradan funktsiyaning bir jinsliliigi tushunchasini eslaylik: agar istalgan t uchun $F(xt, yt, zt) = t^k F(x, y, z)$ shart bajarilsa, $F(x, y, z)$ funktsiya k -darajali bir jinsli funktsiya deb atalar edi, masalan, $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ funktsiya ikkinchi darajali bir jinsli funktsiyadir:

$$F(xt, yt, zt) = (tx)^2 - (ty)^2 + (tz)^2 = t^2(x^2 - y^2 + z^2) = t^2 F(x, y, z). \quad (4)$$

$$F(x, y, z) = 0$$

Bir jinsli tenglama bo'lib, biror S sirtini aniqlasin hamda $M_1(x_1, y_1, z_1) \in S$ bo'lsin, OM_1 to'g'ri chiziqni o'tkazamiz, uning parametrik tenglamalari:

$$x = tx_1, \quad y = ty_1, \quad z = tz_1. \quad (5)$$

OM_1 ning ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtasini olaylik, (5) ga asosan $M(tx_1, ty_1, tz_1)$.

Endi M nuqtaning koordinatalarini (4) ga qo'yib, $F(x, y, z)$ ning bir jinsli ekanini e'tiborga olaylik:

$$F(xt, yt, zt) = t^k F(x, y, z); \text{ demak, } OM_1 \subset S.$$

Xulosa. (4) ko'rinishidagi bir jinsli tenglama uchi koordinatalar boshida bo'lgan konusning tenglamasidan iborat.

Agar

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

bo'lsa, konusning uchi sifatida, soddalik uchun, $M_0(0, 0, 1)$ ni olsak, (3) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x(1 - z) + 2a_{23}y(1 - z) + a_{33}(1 - z)^2 = 0. \quad (6)$$

Endi ushbu

$$S: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (*)$$

ko'rinishdagi tenglama qaysi shartlarda konusni aniqlashi mumkin degan savolga o'taylik.

S konusning uchi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada deylik. Ixtiyoriy $\bar{u}(l, m, n)$ vektorni olib (bu vektor asimptotik yo'nalishga ega bo'lmasin), M nuqtadan $\bar{u}$ ga parallel u to'g'ri chiziq o'tkazaylik, uning parametrik tenglamalari:

$$X = x_0 + lt, \quad Y = y_0 + mt, \quad Z = z_0 + nt, \quad (7)$$

(7) bilan (*) ning kesishish nuqtasini izlasak, $Pt^2 + 2Qt + R = 0$ tenglama hosil bo'ladi. $M_0 \in S$ bo'lsa, (5)(25-mavzudagi) $\Rightarrow R = 0$. U holda

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \Rightarrow Pt^2 + 2Qt = 0. \quad (8)$$

Konusning ta'rifiga asosan u to'g'ri chiziq S ga to'liq tegishli yoki faqat bitta M umumiy nuqtaga ega, bu degan so'z (8) tenglama cheksiz ko'p yechimga ega yoki faqat bitta $t = 0$ ga egadir, (8) dan ko'rinib turibdiki, bu shartlar bajarilishi uchun $Q = 0$ bo'lishi kerak, buni yoyib yozsak,

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})l + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})m + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})n = 0. \quad (9)$$

Bu shart asimptotik yo'nalishga ega bo'lmagan har qanday $\bar{u}$ vektor uchun bajarilganligidan:

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$M_0 \in S$ ni hamda (10) ni e'tiborga olsak,

$$(*) \Rightarrow a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44} = 0. \quad (11)$$

Demak, (*) tenglama konusni ifodalaganda konus uchining koordinatalari (10), (11) shartlarni qanoatlantirishi kerak.

Aksincha, (*) tenglama berilgan bo'lsa hamda biror M_0 nuqta uchun (10), (11) shartlar bajarilsa, berilgan tenglama uchi M_0 nuqtadagi konusni ifodalaydi. Haqiqatan ham, M_0 ning koordinatalarini (*) ga qo'yib hisoblasak hamda (10), (11) ni e'tiborga olsak, $M_0 \in S$ ekaniga ishonch hosil qilamiz.

Endi M_0 nuqtadan ixtiyoriy (7) to'g'ri chiziqni o'tkazib, u bilan S ning kesishgan nuqtasini topishga harakat qilsak, $Pt^2 + 2Qt + R = 0$ tenglamada $Q = R = 0$ bo'lib, $Pt^2 = 0$. Bundan u to'g'ri chiziqning S bilan faqat bitta M_0 nuqtada kesishadi yoki bu to'g'ri chiziq S ga to'liq tegishli degan xulosa chiqadi, demak, S konusdir.

Xullas, S sirt uchi M_0 nuqtada bo'lgan konusdan iborat bo'lishligi uchun M_0 ning koordinatalari (10), (11) shartlarni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

(10), (11) dan quyidagi matritsalarini tuzamiz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Ma'lumki, (10), (11) dagi tenglamani birgalikda bo'lishi uchun bu matritsalar ranglarining teng bo'lishi etarli va zarurdir.

Shuning uchun (*) tenglama konusni ifodalashi uchun (12) matritsalar ranglarining eng kattasi 3 ga teng, demak, konus uchun

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

shart bajarilishi kerak.

2. Ikkinchi tartibli konus kesimlari. Endi dekart reperida berilgan konusning ba'zi tekisliklar bilan kesimini tekshiraylik. Bu reperda ikkinchi tartibli konusning eng sodda tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \left(\text{yoki } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \right) \quad (14)$$

ko'rinishida bo'ladi, haqiqatdan ham, bu tenglama ikkinchi darajali bir jinsli tenglama bo'lgani uchun u yuqorida chiqarilgan xulosaga asosan uchi koordinatalar boshida bo'lgan konusni aniqlaydi. Shunisi diqqatga sazovorki, (14) konusni tanlab olingan ba'zi tekisliklar bilan kessak, kesimda ikkinchi tartibli chiziqlarning hamma turini hosil qilish mumkin.

$$1. \quad z = h \quad (h > 0) \text{ tekislik bilan kessak, kesimda } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} \text{ yoki } \frac{x^2}{\left(a\frac{h}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\frac{h}{c}\right)^2} = 1$$

ellips hosil bo'ladi.

$$2. \quad y = h \quad (h > 0) \text{ tekislik bilan kessak, kesimda } \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2} \text{ yoki}$$

$$-\frac{x^2}{\left(a\frac{h}{b}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\frac{h}{b}\right)^2} = 1 \text{ giperbola hosil bo'ladi.}$$

$$3. \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = h \quad (h > 0) \text{ tekislik bilan kesimini tekshiraylik, buning uchun}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = h \end{cases}$$

sistemani yechamiz. Birinchi tenglamani quyidagicha yozib, $\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \times$
 $\times \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) + \frac{y^2}{b^2} = 0$ ikkinchi tenglamani hisobga olsak, $\frac{y^2}{b^2} = -h\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)$. Endi bunga
 ikkinchi tenglamadan z ni topib qo'ysak, $y^2 = -b^2 h \left(2\frac{x}{a} - h\right)$ tenglama hosil bo'lib, u
 parabolani aniqlaydi.

4. $y=0$ tekislik bilan kessak, kesimda $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ tenglama bilan aniqlanuvchi
 kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziq hosil bo'ladi.

5. $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$ tekislik bilan kessak, kesimda $\frac{y^2}{b^2} = 0$ yoki $y^2 = 0$ tenglama bilan
 aniqlanuvchi ustma-ust tushgan ikkita to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. Bu xulosalar ikkinchi
 tartibli chiziqlarning konus kesimlari deb atalishi boisidir.

1-misol. Dekart sistemasida yo'naltiruvchi xOy tekislikdagi $x^2 - 2y^2 = 1$
 giperboladan iborat, uchi $(-1, 2, 1)$ nuqtadagi konus tenglamasini tuzing.

Yechish. $F(x, y) = x^2 - 2y^2 - 1 = 0$, $x_0 = -1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 1$. $x^2 + y^2 + z^2 + Ax +$
 $+ By + Cz + D = 0$ ga asosan x ni $\frac{x+1}{1-z} - 1 = \frac{x+z}{1-z}$ bilan, y ni $\frac{y-2}{1-z} + 2 = \frac{y-2z}{1-z}$
 bilan almashtirsak, $\left(\frac{x+z}{1-z}\right)^2 - 2\left(\frac{y-2z}{1-z}\right)^2 - 1 = 0$ bo'lib, uni soddalashtirsak konus
 tenglamasi hosil qilinadi:

$$x^2 - 2y^2 - 8z^2 + 8yz + 2xz + 2z - 1 = 0$$

2-misol. Affin sistemasida berilgan

$$x^2 - 5z^2 + 3xy + 2yz - zx - 6y - 2z + 10 = 0$$

sirtning konus ekanligini isbotlang va uning koordinatarini toping.

Yechish. Bu yerda $a_{11} = 1$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = -5$, $a_{12} = \frac{3}{2}$, $a_{13} = 0$, $a_{23} = 1$, $a_{14} = -\frac{7}{2}$,
 $a_{24} = -3$, $a_{34} = -1$, $a_{44} = 10$. Bu qiymatlarni (10) va (11) ga qo'yamiz:

$$\left. \begin{aligned} x_0 + \frac{3}{2}y_0 - \frac{7}{2} &= 0, \\ \frac{3}{2}x_0 + z_0 - 3 &= 0, \\ y_0 - 5z_0 - 1 &= 0, \\ -\frac{7}{2}x_0 - 3y_0 - z_0 + 10 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

bu sistemadan (12) matritsalarini tuzib, ranglarini hisoblasak, ikkalasiniki ham 3 ga teng, demak, sirt konusdir, (**) tenglamalar sistemasi birgalikda, shu sistemani echsak, $x_0 = 2, y_0 = 1, z_0 = 0$ bo'lib, $(2, 1, 0)$ nuqta konus uchidir.

Tayanch iboralar.

Ikkinchi tartibli konus sirt (yoki konus), konus uchi, konus yo'naltiruvchisi, konus yasovchilari.

Nazorat uchun savollar.

1. Ikkinchi tartibli konus sirt deb nimaga aytiladi?
2. Konus yo'naltiruvchisi nima?
3. Konus yasovchilari deb nimaga aytiladi?

29-mavzu: Aylanma sirtlar.

Reja

1. Aylanma sirtlar.
2. Aylanma sirtlar turlari.

1. Aylanma sirtlar. Π tekislik biror L chiziq va u to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.

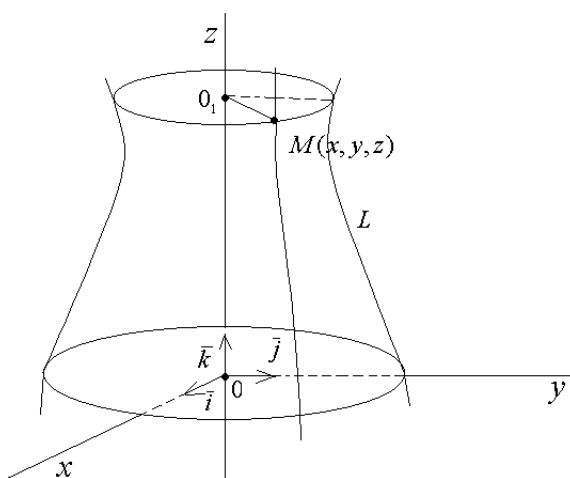
Ta'rif. L chiziq u to'g'ri chiziq atrofida aylanishidan hosil bo'lgan Φ figura **aylanma sirt** deb ataladi (ya'ni L chiziqni u atrofida 2π burchakka burishdan hosil bo'lgan figura). Bunda L aylanma sirtning **meridiani**, u **aylanish o'qi** deb ataladi.

Ravshanki, L ning har bir nuqtasi u atrofida aylanishida biror aylanani hosil qilib, bu aylananing markazi u to'g'ri chiziqda bo'ladi.

Endi aylanma sirtning tenglamasini keltirib chiqarish bilan shug'ullanaylik. Bu ishlarni dekart reperida ko'rib, Π ni biror koordinatalar tekisligi deb, u to'g'ri chiziqni esa koordinata o'qlaridan biri (ya'ni Π da yotgan ikki koordinata o'qidan biri) deb olamiz.

Masalan, $\Pi = yOz$ va $u = Oz$ hamda

$$L: F(y, z) = 0 \quad (1)$$



1-chizma

bo'lsin. L chiziqning Oz o'q atrofida aylanishidan 1-chizmadagidek Φ sirt hosil qilingan deylik. $M(x, y, z)$ shu sirtga tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsin. M nuqtadan Oz ga perpendikulyar tekislik o'tkazsak, kesimda markazi $O_1 \in Oz$ nuqtada bo'lgan biror aylana hosil qilinadi, u aylana L chiziq bilan $M_1(0, y_1, z)$ nuqtada kesishsin. U holda O_1 ning koordinatalari $(0, 0, z)$. Kesim aylanadan iborat bo'lgani uchun

$$\rho(O_1, M) = \rho(O_1, M_1). \quad (2)$$

Bu masofalarni hisoblaylik:

$$\rho(O_1, M) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\rho(O_1, M_1) = \sqrt{(0-0)^2 + (y_1-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{y_1^2} = |y_1|,$$

bularni (2) ga qo'ysak, $|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$ yoki $y_1 = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$.

Endi $M_1 \in L \Rightarrow F(y_1, z) = 0$ yoki

$$F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (3)$$

Demak, Φ ga tegishli har bir nuqtaning koordinatalari (3) ni qanoatlantiradi. Lekin $M \notin \Phi$ bo'lsa, (2) shart bajarilmaydi, demak, (3) ham o'rinli emas. Shuning uchun (3)

ni Φ ning tenglamasi deya olamiz. Shu (3) tenglamaga asoslanib, L ning boshqa koordinata o'qlari atrofida aylanishidan hosil qilingan aylanma sirt tenglamasini osongina yozish mumkin: masalan, L ning Oy o'q atrofida aylanishidan hosil etilgan sirt tenglamasi:

$$F(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

L chiziq xOy da olinsa, uning tenglamasini $F(x, y) = 0$ ko'rinishda olsak, L ning Ox o'q atrofida aylanishidan $F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ sirt, Oy o'q atrofida aylanishidan esa $F(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$ sirt hosil bo'ladi.

2. Aylanma sirtlar turlari. Misol tariqasida yOz tekislikda joylashgan quyidagi chiziqlarning Oz o'q atrofida aylanishidan hosil qilingan aylanma sirtlarning tenglamalarini yozaylik: 1) $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellips; 2) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ giperbola; 3) $y^2 = 2pz$ parabola.

Oldingi mavzudagi (12) ga asosan: 1) ellipsni Oz o'q atrofida aylantirsak:

$$\frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sirt hosil bo'lib, u **aylanma ellipsoid** deb ataladi;

2) giperbolani Oz o'q atrofida aylantirish natijasida

$$\frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sirt hosil qilinib, u **aylanma giperboloid** deb ataladi;

3) parabolani Oz o'q atrofida aylantirsak,

$$(\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 2pz \quad \text{yoki} \quad x^2 + y^2 = 2pz$$

sirt hosil qilinib, u **aylanma paraboloid** deb ataladi.

Shuni ta'kidlaymizki, tsilindrik va konus sirtlarning yo'naltiruvchilari ikkinchi tartibli chiziq bo'lsa, shu sirtlarning uzlari ham ikkinchi tartibli sirt bular edi, lekin ikkinchi tartibli har qanday chiziqning biror o'q atrofida aylanishidan doimo ikkinchi tartibli aylanma sirt hosil bo'lavermaydi. Masalan, yuqoridagi $y^2 = 2pz$ parabolani Oz o'q atrofida aylantirishdan hosil qilingan sirt tenglamasi $y^2 = 2p(\pm\sqrt{x^2 + y^2})$, yoki $p > 0$ bo'lgan holda $y^2 = 2p\sqrt{x^2 + y^2}$ va $p < 0$ bo'lgan holda esa $y^2 = -2p\sqrt{x^2 + y^2}$, bu esa ikkinchi tartibli sirt emas.

Yuqorida biz sirtning ta'rifiga asoslanib, uning tenglamalarini chiqarish bilan shug'ullandik, endi tanlab olingan reperda tenglamalari bilan berilgan ikkinchi tartibli sirtning shaklini va ba'zi geometrik xossalarini tekshirish bilan shug'ullanamiz.

Tayanch iboralar.

Aylanma sirt, aylanma sirtning meridiani, aylanma ellipsoid, aylanma giperboloid, aylanma paraboloid.

Nazorat uchun savollar.

1. Aylanma sirt deb nimaga aytiladi?
2. Aylanma sirtning meridiani nima?
3. Aylanma ellipsoid deb nimaga aytiladi?
4. Aylanma ellipsoid deb nimaga aytiladi?
5. Aylanma giperboloid deb nimaga aytiladi?
6. Aylanma paraboloid deb nimaga aytiladi?

30-mavzu: Ellipsoid.

Reja

1. Ellipsoid va uning shakli, ba'zi geometrik xossalari.
2. Ellipsoidning koordinata tekisliklariga parallel tekisliklari bilan kesimlari.

Ta'rif. Tanlab olingan dekart reperida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalar to'plami **ellipsoid** deyiladi.

(1) tenglama bo'yicha ellipsoidning shaklini va ba'zi geometrik xossalarini aniqlaylik.

1. (1) tenglama ikkinchi tartibli algebraik tenglama bo'lgani uchun ellipsoid ikkinchi tartibli sirtidir.

2. (1) tenglamaning chap tomoniga nazar tashlasak, uchta musbat sonning yig'indisi 1 ga tengdir, demak,

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (2)$$

yoki

$$x^2 \leq a^2, \quad y^2 \leq b^2, \quad z^2 \leq c^2,$$

bulardan:

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad -c \leq z \leq c. \quad (3)$$

Ellipsoid chegaralangan sirt bo'lib, qirralari $2a, 2b, 2c$ hamda simmetriya markazi koordinatalar boshidagi to'g'ri burchakli parallelepiped ichiga joylashgan figuradir (1 – chizma).

3. (2) va (1) dan ko'rinadiki, qo'shiluvchilardan bittasi 1 ga teng bo'lsa, qolgan ikkitasi nol bo'lishi kerak:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad \text{bundan}$$

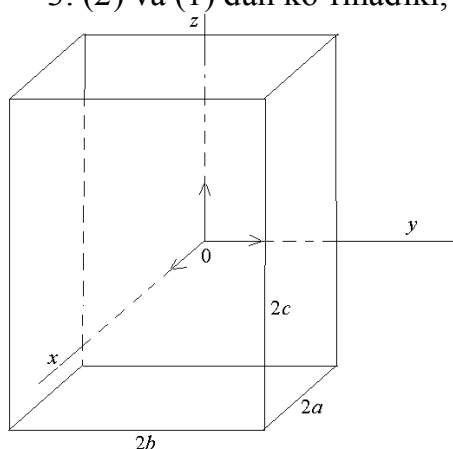
$x = \pm a, y = 0, z = 0$ va ellipsoid Ox ni $A_1(a, 0, 0), A_2(-a, 0, 0)$ nuqtalarda kesib o'tadi.

Xuddi shunga o'xshash, bu ellipsoid Oy ni $B_1(0, b, 0), B_2(0, -b, 0)$ nuqtalarda, Oz ni esa $C_1(0, 0, c), C_2(0, 0, -c)$ nuqtalarda kesib o'tadi. Bu $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ nuqtalar

ellipsoidning uchlari deb ataladi.

4. Endi ellipsoidning koordinata tekisliklari bilan kesimini tekshiraylik.

a) xOy tekislik bilan kesishmasi:



1-chizma

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

xOy dagi ellipsdir.

b) xOz tekislik bilan kesishmasi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

xOz dagi ellipsdir.

c) yOz tekislik bilan kesishmasi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

yOz dagi yana ellipsdir.

Xulosa. (1) ellipsoidning koordinata tekisliklari bilan kesishmasi ellipslardan iborat.

5. Endi ellipsoidning koordinata tekisliklariga parallel tekisliklari bilan kesimini tekshiraylik.

xOy tekislikka parallel bo'lgan $z = h$ ($h \in R$) tekislik bilan kesimini qaraylik:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ z &= h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}; \quad (*)$$

bu yerda uch hol bo'lishi mumkin.

a) $-c < h < c \Rightarrow 1 - \frac{h^2}{c^2} > 0$ bo'lib,

$$(*) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1,$$

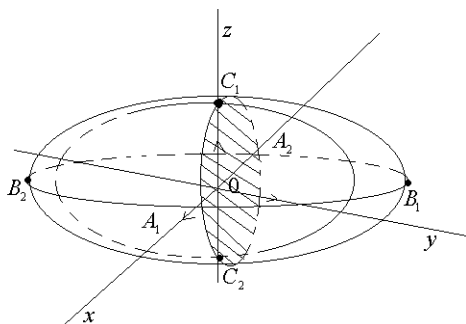
maxrajdagi musbat sonlarni a'^2, b'^2 deb belgilasak, $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$, bu esa markazi $(0, 0, h)$ nuqtada va o'zi $z = h$ tekislikda yotgan ellipsdir.

b) $h = c$ yoki $h = -c$ bo'lsa, $(*) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ bo'lib, bu shartni faqatgina $x = 0, y = 0$ qanoatlantiradi, demak, $z = c$ tekislik bu holda sirt bilan $(0, 0, c)$ nuqtada kesishadi.

c) $h > c$ yoki $h < -c \Rightarrow 1 - \frac{h^2}{c^2} < 0$ bo'lib, (*) ning o'ng tomonida manfiy son hosil bo'ladi, chap tomoni esa doimo musbat, demak, $z = h$ tekislik ellipsoid bilan bu holda kesishmaydi.

Xuddi shunga o'xshash, $x = h$ yoki $y = h$ tekisliklar bilan (1) sirtning kesimini aniqlashni o'quvchiga havola qilamiz.

6. Ellipsoidga tegishli (x_1, y_1, z_1) nuqta bilan bir vaktida $(-x_1, -y_1, -z_1)$ nuqta ham unga tegishli: bundan ko'rinadiki, ellipsoid koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashgan (koordinata tekisliklariga nisbatan ham simmetrik joylashganligini ko'rsating).



2–chizma

Bu ma'lumotlar ellipsoidning (2–chizma) tuzilishidan darak beradi.

Xususiyligi $a = b \neq c$ holda

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

aylanma ellipsoid hosil bo'ladi.

$$a = b = c \text{ da } x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

bo'lib, markazi koordinatalar boshidagi va radiusi a ga teng sferani aniqlanadi.

$a \neq b \neq c$ shartda ellipsoid **uch o'qli** deyiladi.

Misol. Dekart reperida o'qlari koordinata o'qlarida joylashgan hamda $M(2, 0, 1)$ nuqtadan o'tib, xOy tekislik bilan $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$ ellips bo'yicha kesishuvchi ellipsoid tenglamasini tuzing.

Yechish. Izlanayotgan tenglama

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (**)$$

ko'rinishda bo'lib, a, b, c ni topish kifoya. (**) ni $z = 0$ tekislik bilan kessak, kesimda

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips hosil bo'ladi, uni berilgan $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$ ellips bilan solishtirsak,

$$a^2 = 8, b^2 = 1. \quad (***)$$

$$M(2, 0, 1) \in (**); \quad \frac{4}{a^2} + \frac{0}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{8} + \frac{1}{c^2} = 1 \Rightarrow c^2 = 2,$$

izlangan tenglama: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{2} = 1.$

Tayanch iboralar.

Ellipsoid, ellipsoidning uchlari, uch o'qli.

Nazorat uchun savollar.

1. Ellipsoid deb nimaga aytiladi?
2. Ellipsoidning uchlari deb nimaga aytiladi?
3. Uch o'qli deb nimaga aytiladi?

31- mavzu: Giperboloidlar.

Reja

1. Bir pallali giperboloid.
2. Ikki pallali giperboloid.

Giperboloidlar ikki xil bo'ladi. Biror Π tekislikda giperbolani olib, uni mavhum o'qi atrofida aylantirsak, hosil qilingan sirt ***bir pallali aylanma giperboloid*** deb ataladi, lekin shu giperbolani haqiqiy o'q atrofida aylantirsak, hosil qilingan sirt ***ikki pallali aylanma giperboloid*** deb ataladi. Bu sirtlar giperboloidlarning xususiy holidir, biz quyida shu sirtlar bilan ayrim – ayrim tanishamiz.

1. Bir pallali giperboloid. Dekart sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalar to'plami ***bir pallali giperboloid*** deb ataladi.

Bir pallali giperboloidning shaklini va ba'zi geometrik xossalarini aniqlaylik.

1. Ellipsoid singari bir pallali giperboloid ham ikkinchi tartibli sirtidir.

2. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ bilan bir vaqtda $M'_1(\pm x_1, \pm y_1, \pm z_1)$ ham giperboloidga tegishli, demak, bir pallali giperboloid nuqtalari koordinatalar boshiga, koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan.

a) Ox o'q ($y = 0, z = 0$) bilan kesimini tekshiraylik:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a \Rightarrow A_1(a, 0, 0), A_2(-a, 0, 0);$$

b) Shuning singari Oy o'q ($x = 0, z = 0$) bilan $B_1(0, b, 0), B_2(0, -b, 0)$ nuqtalarda kesishadi, chunki:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm b \Rightarrow B_1(0, b, 0), B_2(0, -b, 0);$$

c) Oz o'q bilan ($x = 0, y = 0$) kesishmaydi, haqiqatan,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Haqiqiy sohada bu tenglikning bo'lishi mumkin emas.

Shuning uchun Oz o'q bir pallali giperboloidning **mavhum o'qi** deb ataladi. Yuqorida hosil qilingan A_1, A_2, B_1, B_2 nuqtalar bir pallali giperboloidning **uchlari** deyiladi.

3. Endi koordinata tekisliklar bilan kesimini tekshiraylik.

$$a) \ xOy : \left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kesim – ellips.

$$b) \ xOz : \left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

kesim - giperbola.

$$c) \ yOz : \left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

kesim – giperbola.

4. xOy tekislikka parallel $z = h$ tekislik bilan kesimini aniqlaylik:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$$

yoki

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1;$$

bu tenglama $z = h$ tekislikda ellipsni aniqlaydi, $|h|$ son kattalashgan sari ellipsning yarim o'qlari ham kattalashib, faqat $h = 0$ uchun ellips eng kichik o'qli bo'ladi.

5. xOz tekislikka parallel $y = h$ tekislik bilan kesimini tekshiraylik:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}. \quad (2)$$

Bu yerda quyidagi hollar yuz berishi mumkin:

$$a) \ h = b \text{ bo'lsa, } (2) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

yoki

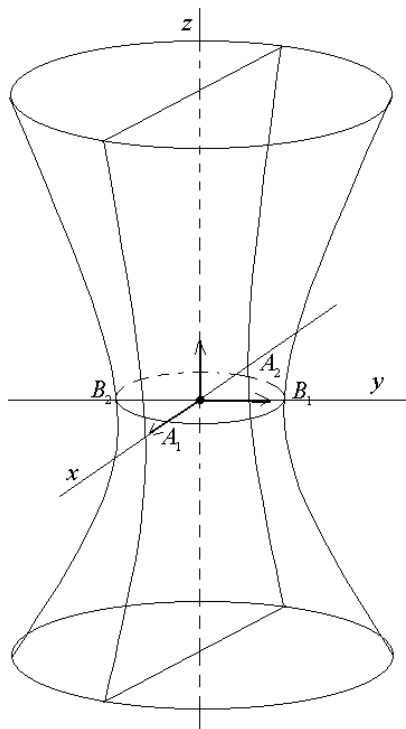
$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0$$

bo'lib, kesim ikkita kesuvchi to'g'ri chiziqdan iborat.

b) $-b < h < b$ bo'lsa, $1 - \frac{h^2}{b^2} > 0$ bo'lib, (2) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)} = 1,$$

bu esa $y = h$ tekislikda mavhum o'qi Oz ga parallel giperbolani aniqlaydi.



c) $|h| > b$ bo'lsa, $1 - \frac{h^2}{b^2} < 0$ bo'lib, (2) tenglama

quyidagi ko'rinishni oladi: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right)$

(bunda $\frac{h^2}{b^2} - 1 > 0$), bundan

$$-\frac{x^2}{a^2 \left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right)} = 1,$$

bu tenglama $y = h$ tekislikda giperbola tenglamasi bo'lib, mavhum o'qi Ox o'qqa paralleldir.

Xuddi shu hollar giperboloidni $x = h$ tekislik bilan kesganda ham sodir bo'ladi (buni o'zingiz tekshirib ko'ring).

Shu ma'lumotlarga asosan, bir pallali giperboloidning shakli namoyon bo'ladi (1-chizma).

1-chizma

$a = b$ da (1) tenglama $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ga keltiriladi, bu esa bir pallali aylanma giperboloidni aniqlaydi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3)$$

yoki

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4)$$

tenglamalar ham bir pallali giperboloid bo'lib, ular mavhum o'qlari bilangina farq qiladi ((3) uchun mavhum o'q Oy , (4) uchun mavhum o'q Ox dir).

2. Ikki pallali giperboloid. Fazoning

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi barcha nuqtalari to'plami **ikki pallali giperboloid** deb ataladi.

(5) tenglama bo'yicha bu sirtning shaklini va ba'zi geometrik xossalarini aniqlaylik.

Yuqoridagi bir pallali giperboloid tenglamasini tekshirishdagi ba'zi hollarni bu yerda mufassal ko'rmaymiz, chunki ular bevosita takrorlanadi:

- 1) ikki pallali giperboloid ikkinchi tartibli sirtidir;
- 2) ikki pallali giperboloid koordinatalar boshiga va koordinatalar tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan;

3) faqatgina Ox o'q bilan $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$ nuqtalarda kesishib, boshqa koordinata o'qlari bilan kesishmaydi, demak, yOz tekislik bilan ham kesishmaydi, demak, Oy , Oz mavhum o'qlar hisoblanadi. Bundan ko'rinib turibdiki, ikki pallali giperboloid ikki qismdan iborat bo'lib, ular yOz tekislikka nisbatan simmetrik joylashgandır.

4) (5) ning yOz tekislikka parallel $x = h$ tekislik bilan kesimini tekshiraylik:

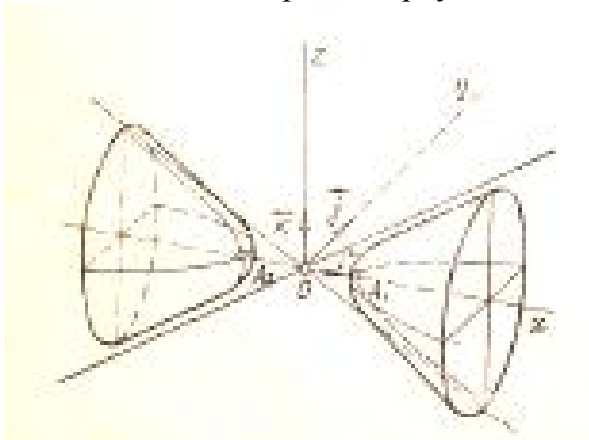
$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = h \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}$$

yoki

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2} - 1. \quad (6)$$

$$|h| > a \Rightarrow \frac{h^2}{a^2} - 1 > 0; \quad (6) \text{ tenglama } \frac{y^2}{b^2 \left(\frac{h^2}{a^2} - 1 \right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(\frac{h^2}{a^2} - 1 \right)} = 1 \text{ ko'rinishni olib,}$$

$x = h$ tekislikda ellipsni aniqlaydi.



2 – chizma

$h = a$ da kesim faqat bitta $A_1(a, 0, 0)$ yoki $A_2(-a, 0, 0)$ nuqtadan iborat.

Boshqa koordinata tekisliklari va bu tekisliklarga parallel tekisliklar bilan kesimlari ham giperboladan iborat.

Ikki pallali giperboloidning shakli 2-chizmada ko'rsatilgan. $b = c$ shartda (5)

tenglama $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$ ko'rinishni oladi

va u $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ giperbolaning ($y=0$ tekislikda) Ox o'q atrofida aylanishidan hosil

qilinadi, u aylanma ikki pallali giperboloiddir. (5) tenglama $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ yoki

$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ko'rinishli bo'lsa, bular ham ikki pallali giperboloid bo'lib, birinchisi

uchun Ox , Oy o'qlar, ikkinchisi uchun Ox , Oz o'qlar mavhum o'qlar bo'ladi.

Misol. Dekart reperida $M_1(0, 0, 3)$ va $M_2(0, 0, -3)$ nuqtalar berilgan. Fazodagi shunday nuqtalar to'plamini topingki, ularning har biridan M_1, M_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati 4 ga teng bo'lsin.

Yechish. Faraz qilaylik, $M(x, y, z)$ nuqta so'ralgan xossaga ega bo'lgan nuqta bo'lsin, ya'ni $|\rho(M_1, M) - \rho(M_2, M)| = 4$, masala shartini koordinatalarda yozamiz:

$$\left| \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + (z+3)^2} \right| = 4$$

yoki

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + (z+3)^2} = \pm 4,$$

bundan

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + y^2 + z^2 + 6z + 9 \pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + (z+3)^2} + 16$$

yoki

$$\mp 8\sqrt{x^2 + y^2 + (z+3)^2} = 16 + 12z.$$

Yana bir marta kvadratga ko'tarib soddalashtirsak,

$$-\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

bu tenglama ikki pallali giperboloidni aniqlaydi.

Tayanch iboralar.

Bir pallali aylanma giperboloid, ikki pallali aylanma giperboloid, mavhum o'q.

Nazorat uchun savollar.

1. Bir pallali aylanma giperboloid deb nimaga aytiladi?
2. Bir pallali aylanma giperboloidning uchlari deb nimaga aytiladi?
3. Bir pallali aylanma giperboloidning mavhum o'qi deb nimaga aytiladi?
4. Ikki pallali aylanma giperboloid deb nimaga aytiladi?

32-mavzu: Paraboloidlar.

Reja

1. Elliptik paraboloid.
2. Giperbolik paraboloid.

Endi ikkinchi tartibli sirtlarning yana bir sinfi – paraboloidlar bilan tanishamiz. Bu sirtlar ham ikki turdan iborat bo'lib, ularni ayrim – ayrim ko'rib chiqamiz.

1. Elliptik paraboloid. Dekart sistemasida

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (p > 0, q > 0) \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalar to'plamini **elliptik paraboloid** deb ataladi.

Bu paraboloidning ham shaklini va ba'zi geometrik xossalarini (1) tenglamani tekshirish yo'li bilan aniqlaymiz.

1. Elliptik paraboloid ham ikkinchi tartibli sirt, undan tashqari, bu sirt koordinatalar boshidan o'tadi.

2. Koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini topaylik:

$$a) \quad Ox : \quad \left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{p} = 0, \quad x = 0 \Rightarrow (0, 0, 0);$$

$$b) \quad Oy : \quad \left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{q} = 0, \quad y = 0 \Rightarrow (0, 0, 0);$$

$$c) \quad Oz : \quad \left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2z = 0, \quad z = 0 \Rightarrow (0, 0, 0).$$

Demak, elliptik paraboloid koordinata o'qlari bilan faqat koordinatalar boshidagina kesishadi.

3. Koordinata tekisliklari va ularga parallel tekisliklar bilan kesimini tekshiraylik:

a) xOy bilan kesishish chizig'i:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} &= 2z, \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0 \Rightarrow (0, 0, 0);$$

b) xOz bilan kesishish chizig'i:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} &= 2z, \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{p} = 2z \Rightarrow x^2 = 2pz,$$

bu tenglama xOz tekislikda simmetriya o'qi Oz dan iborat paraboladir;

c) yOz bilan kesishish chizig'i:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} &= 2z, \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{q} = 2z \Rightarrow y^2 = 2qz,$$

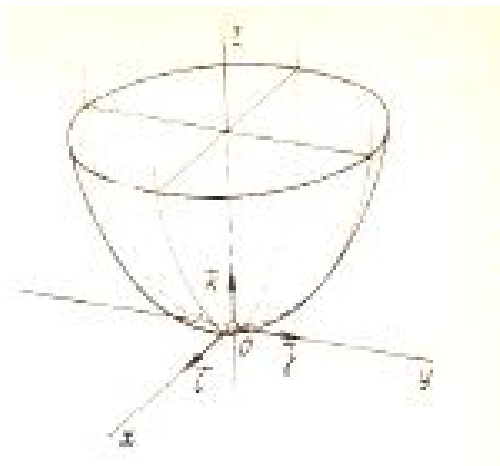
bu ham simmetriya o'qi Oz dan iborat yOz tekislikdagi paraboladir;

d) $z = h$ tekislik bilan kesishish chizig'i:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} &= 2z, \\ z &= h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h. \quad (2)$$

$h = 0 \Rightarrow z = 0$; a) holiga qaytdik. $h < 0$ bo'lsa, p va q shartga asosan musbat, shuning uchun, (2) tenglik o'rinli bo'lmaydi: $h > 0$ da $(2) \Rightarrow \frac{x^2}{p \cdot 2h} + \frac{y^2}{q \cdot 2h} = 1$ bo'lib, bu tenglama $z = h$ tekislikdagi ellipsni bildiradi.

Bundan tashqari, x, y o'zgaruvchilar (1) tenglamada juft darajada qatnashganligi uchun elliptik paraboloid xOz, yOz tekisliklarga nisbatan simmetrik joylashadi.



1-chizma

Bu tekisliklarning kesishmasidan hosil bo'lgan Oz to'g'ri chiziq **elliptik paraboloidning o'qi** deb ataladi.

Elliptik paraboloid 1-chizmada tasvirlangan. $p = q$ da tenglama $x^2 + y^2 = 2pz$ ko'rinishda bo'lib, aylanma paraboloid bo'ladi. O'qlari Ox yoki Oy dan iborat elliptik paraboloidning tenglamalari mos ravishda ushbu tenglamalar bilan ifodalanadi:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2y.$$

2. Giperbolik paraboloid. Dekart sistemasida

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0) \quad (3)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazo nuqtalari to'plami **giperbolik paraboloid** deb ataladi, tenglamasi bo'yicha giperbolik paraboloidning shaklini va ba'zi geometrik xossalarini aniqlash mumkin. Quyida biz ba'zi xulosalarnigina beramiz, ularning o'rinli ekanligini o'zingiz tekshirib ko'ring.

1. Giperbolik paraboloid ikkinchi tartibli sirt bo'lib, koordinatalar boshidan o'tadi.

2. Koordinata o'qlari bilan faqat koordinatalar boshida kesishadi.

3. a) xOy tekislik bilan kesilganda kesimda ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq hosil qilinadi;

b) xOz tekislik bilan kesilganda kesimda simmetriya o'qi Oz dan iborat $x^2 = 2pz$ parabola hosil bo'ladi;

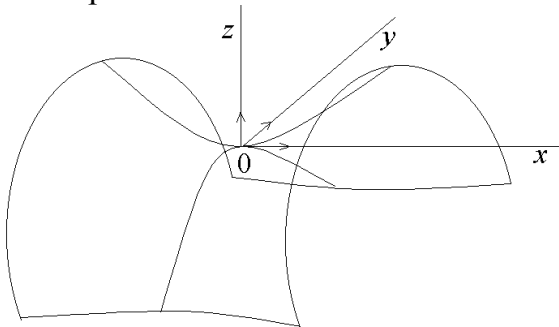
c) yOz tekislik bilan kesilganda kesimda simmetriya o'qi Oz dan iborat $y^2 = -2qz$ parabola hosil bo'ladi.

4. $z = h$ tekislik bilan kesilganda kesimda

a) $h > 0$ shartda $\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1$ giperbola.

b) $h < 0$ shartda $-\frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1$ giperbola hosil qilinadi.

5. Boshqa koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesilganda kesimda doimo parabola hosil bo'ladi.



2-chizma

Shu ma'lumotlarga asoslanib giperbolik paraboloidni 2-chizmadagidek sirt ko'rinishida tasavvur qilish mumkin, ba'zan bu sirtni «**egarsimon**» sirt deb ham yuritiladi.

Tayanch iboralar.

Elliptik paraboloid, giperbolik paraboloid, elliptik paraboloidning o'qi, egarsimon sirt.

Nazorat uchun savollar.

1. Elliptik paraboloid deb nimaga aytiladi?

2. Giperbolik paraboloid deb nimaga aytiladi?
3. Elliptik paraboloidning o'qi deb nimaga aytiladi?
4. Egarsimon sirt deb nimaga aytiladi?

33- mavzu: Ikkinchi tartibli sirtning to'g'ri chiziqli yasovchilari.

Reja

1. Ikkinchi tartibli sirtning to'g'ri chiziqli sirtlar.
2. Ikkinchi tartibli sirtning to'g'ri chiziqli yasovchilari.

Biz yuqorida ikkinchi tartibli sirtlarning turli sinflari bilan tanishdik. Unda sirtlar bir-biridan tenglamalari yoki ta'riflari bilan farq qilar edi. Endi bu sirtlarni biz boshqa nuqtai nazardan ikki sinfga ajratamiz: ulardan biriga ikkinchi tartibli shunday sirtlarni kiritamizki, ular o'z tarkibiga to'g'ri chiziqlarni to'liq olsun, bunday sirtlar **to'g'ri chiziqli sirtlar** deyiladi; ikkinchi tartibli tsilindr va konuslar bularga yaqqol misol bo'la oladi. Ikkinchi sinfga esa tarkibida bitta ham to'g'ri chiziq bo'lmagan ikkinchi tartibli sirtlarni kiritamiz, ravshanki, ellipsoid chegaralangan sirt bo'lgani uchun uning tarkibida to'g'ri chiziq yo'q, demak, ellipsoid ikkinchi sinfga kiradi. Sirtlar tarkibidagi to'g'ri chiziqlar shu sirtlarning **yasovchilari** deb ataladi. Tarkibida cheksiz to'g'ri chiziqlar mavjud bo'lgan sirtlar (konus va tsilindrdan boshqa) yana bormi degan savolga javob izlaymiz.

Buning uchun giperbolik paraboloidni tekshirib ko'raylik:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0. \quad (1)$$

Shu sirtga tegishli tayin $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtani olaylik. M_0 nuqtadan o'tib (1) giperboloid tarkibida bo'lgan to'g'ri chiziqlarni izlaylik, buning uchun M_0 nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalarini yozaylik:

$$u: \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \quad (2)$$

bunda l, m, n yo'naltiruvchi vektorning koordinatalari bo'lib, shularni va M_0 ni berish bilan u to'g'ri chiziqning vaziyati aniq bo'ladi; bu yo'naltiruvchi vektorning yo'nalishi hattoki, $l:m:n$ nisbatlar bilan ham to'liq aniqlanadi. Shu nisbatni izlaylik.

(1), (2) dan:

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{p} - \frac{(y_0 + mt)^2}{q} = 2(z_0 + nt)$$

yoki

$$\left(\frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q}\right)t^2 + 2\left(\frac{x_0 l}{p} - \frac{y_0 m}{q} - n\right)t + \left(\frac{x_0^2}{p} - \frac{y_0^2}{q} - 2z_0\right) = 0.$$

M_0 giperboloidga tegishli bo'lgani uchun uchinchi qavs ichidagi ifoda nolga tengdir, shuni e'tiborga olsak,

$$\left(\frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q}\right)t^2 + 2\left(\frac{x_0 l}{p} - \frac{y_0 m}{q} - n\right)t = 0. \quad (3)$$

Agar u to'g'ri chiziq giperbolik paraboloid tarkibida bo'lsa, u holda (3) tenglik t ning har qanday qiymatida o'rinli bo'lishi kerak, demak,

$$\frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{x_0 l}{p} - \frac{y_0 m}{q} - n = 0.$$

Aksincha, (4) bajarilsa, $u \in (1)$, demak, (4) shartlar to'g'ri chiziqning giperbolik paraboloidga to'liq tegishli bo'lishi uchun zaruriy va etarli shartlar ekan.

(4) ning birinchisidan: $m = \pm \sqrt{\frac{q}{p}} l$ yoki $m_1 = \sqrt{\frac{q}{p}} l_1$; $m_2 = -\sqrt{\frac{q}{p}} l_2$, bulardan:

$$l_1 : m_1 = \sqrt{p} : \sqrt{q}; \quad l_2 : m_2 = \sqrt{p} : (-\sqrt{q}). \quad (5)$$

(5) ning har birini (4) ning ikkinchisi bilan birgalikda yechilsa,

$$l_1 : m_1 : n_1 = \sqrt{p} : \sqrt{q} : \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right), \quad (6)$$

$$l_2 : m_2 : n_2 = \sqrt{p} : (-\sqrt{q}) : \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right).$$

Bundan ko'rinadiki, paraboloidning M_0 nuqtasidan yo'nalishi (7) tengliklar bilan aniqlanadigan ikkita to'g'ri chiziq o'tib, ular giperbolik paraboloidning yasovchilari rolini o'ynaydi.

Endi $\bar{u}_1(l_1, m_1, n_1)$ vektorga parallel bo'lgan yasovchi bilan

$$\Pi_1 : \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad (7)$$

tekislikning o'zaro vaziyatini tekshiraylik. Bu tekislikning normal vektori $\bar{n}_1 \left(\frac{1}{\sqrt{p}}, -\frac{1}{\sqrt{q}}, 0 \right)$, bo'lgani uchun (6) ning birinchisini e'tiborga olsak,

$\sqrt{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} + (-\sqrt{q}) \cdot \frac{1}{\sqrt{q}} + \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right) \cdot 0 = 0 \Rightarrow \bar{u}_1 \cdot \bar{n}_1 = 0 \Rightarrow u_1$ yasovchi (7) tekislikka paralleldir.

Xuddi shunga o'xshash, $\bar{u}_2(l_2, m_2, n_2)$ vektorga parallel bo'lgan u_2 yasovchi

$\Pi_2 : \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ tekislikka parallel bo'ladi.

Giperbolik paraboloidning barcha yasovchilarini ikki oilaga shunday ajratamizki, birinchi oilaga faqatgina Π_1 tekislikka parallel bo'lganlari kiradi, ikkinchi oilaga Π_2 tekislikka parallel bo'lganlari kiradi. (Shuni eslatamizki, bu ikki oilaga kirmagan yasovchi qolmaydi, chunki biz yuqorida giperboloidning har bir nuqtasidan faqatgina

ikkita yasovchi o'tishini va bu yasovchilardan biri Π_1 ga, ikkinchisi Π_2 ga parallel ekanligini isbotladik.) U holda

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= 0, \\ z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

to'g'ri chiziq birinchi oilaga,

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= 0, \\ z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

to'g'ri chiziq esa ikkinchi oilaga tegishli bo'ladi.

Shunisi ham diqqatga sazovorki, bir oilaning bitta to'g'ri chizig'ining har bir nuqtasidan ikkinchi oilaning bitta to'g'ri chizig'i o'tadi.

Endi giperbolik paraboloidning yasovchilaridan har xil oilaga tegishli ikki yasovchisining doimo kesishishligini ko'rsataylik.

Haqiqatan ham, (1) ning $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtasidan o'tib, $\bar{u}_1(l_1, m_1, n_1)$ vektorga parallel bo'lgan u_1 yasovchining tenglamasi ((6) ga asosan)

$$u_1 : \frac{x - x_1}{\sqrt{p}} = \frac{y - y_1}{\sqrt{q}} = \frac{z - z_1}{\frac{x_1}{\sqrt{p}} - \frac{y_1}{\sqrt{q}}}$$

(1) ning $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtasidan o'tib, $\bar{u}_2(l_2, m_2, n_2)$ vektorga parallel bo'lgan u_2 yasovchining tenglamasi

$$u_2 : \frac{x - x_2}{\sqrt{p}} = \frac{y - y_2}{-\sqrt{q}} = \frac{z - z_2}{\frac{x_2}{\sqrt{p}} + \frac{y_2}{\sqrt{q}}}$$

bo'lib, u_1 birinchi oilaga, u_2 ikkinchi oilaga tegishlidir.

Bulardan ko'rinadiki, $\bar{u}_1 \parallel \bar{u}_2$ (chunki mos koordinatalari proporsional emas). Endi bu ikki to'g'ri chiziqning bir tekislikda yotishlik shartini tekshiraylik:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \sqrt{p} & \sqrt{q} & \frac{x_1}{\sqrt{p}} - \frac{y_1}{\sqrt{q}} \\ \sqrt{q} & -\sqrt{p} & \frac{x_2}{\sqrt{p}} + \frac{y_2}{\sqrt{q}} \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) \left(x_2 \sqrt{\frac{q}{p}} + y_2 + x_1 \sqrt{\frac{q}{p}} - y_1 \right) - (y_2 - y_1) \cdot \\
\cdot \left(x_2 + \sqrt{\frac{p}{q}} y_2 - x_1 + \sqrt{\frac{p}{q}} y_1 \right) + (z_2 - z_1) (-2\sqrt{pq}) = (x_2^2 - x_1^2) \sqrt{\frac{q}{p}} - (y_2^2 - y_1^2) \sqrt{\frac{p}{q}} - \\
- 2\sqrt{pq}(z_2 - z_1) = \sqrt{pq} \left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{p} - \frac{y_2^2 - y_1^2}{q} - 2z_2 + 2z_1 \right) = \\
= \sqrt{pq} \left[\frac{x_2^2}{p} - \frac{y_2^2}{q} - 2z_2 - \left(\frac{x_1^2}{p} - \frac{y_1^2}{q} - 2z_1 \right) \right] = \sqrt{pq}(0 - 0) = 0.$$

Qavs ichidagi ifodalar nolga tengdir, chunki M_1, M_2 nuqtalar giperbolik paraboloidga tegishlidir. Demak, u_1, u_2 bir tekislikda yotadi va kesishadi.

Giperbolik paraboloidning bir oilaga tegishli ikki yasovchisi o'zaro ayqash joylashgandir.

Haqiqatan ham, bir oilaga, aniqrog'i, birinchi oilaga tegishli ikki u_1, u'_1 yasovchini olsak, ularning har biri Π_1 tekislikka paralleldir hamda $u_1 \cap u'_1 = \emptyset$ (agar ular kesishib qolsa, ikki oilaga tegishli bo'lib qoladi, bu esa u_1, u'_1 ning olinishiga ziddir), lekin ular $\bar{u}_1 \parallel \bar{u}'_1$, agar $\bar{u}_1 \parallel \bar{u}'_1$ bo'lib qolsa, ikkinchi oilaga tegishli barcha yasovchilar bu ikki chiziqni kesib, shu to'g'ri chiziqlardan o'tgan tekislikka joylashib qoladi, buning bo'lishi mumkin emas. Demak, u_1 va u'_1 lar o'zaro ayqash joylashgan.

Agar giperbolik paraboloid (1) ko'rinishdagi tenglama bilan aniqlansa, uning birinchi oilaga tegishli to'g'ri chiziqlarini $\lambda^2 + \nu^2 \neq 0$ shartda

$$\begin{aligned}
\lambda \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) &= 2\nu z, \\
\nu \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) &= \lambda
\end{aligned} \tag{8}$$

ko'rinishda izlash qulaydir, λ va ν ga har xil qiymatlar berish bilan shu oilaga tegishli yasovchilar topiladi. (8) tenglamaning to'g'ri chiziqni aniqlashi ravshan, agar ikkala tenglamaning chap tomonini chap tomoniga, o'ng tomonini o'ng tomoniga ko'paytirsak va $\lambda \cdot \nu$ ga bo'lib yuborsak, (1) hosil bo'ladi, demak, (8) ni qanoatlantiruvchi nuqtalar (1) ga ham tegishli ekan.

Ikkinchi oila yasovchilarini esa ushbu ko'rinishda izlash mumkin:

$$\lambda \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 2\nu z, \quad (9)$$

$$\nu \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = \lambda.$$

Endi bir pallali giperboloidni olaylik:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (10)$$

Bu sirtning to'g'ri chiziqli yasovchilarining mavjudligini isbotlash va ularni topish masalasini mufassal tekshirmasdan, biz bu ishda quyidagilarning o'rinli ekanini ta'kidlaymiz, xolos.

1. Bir pallali giperboloidning har bir nuqtasidan uning faqat ikkita yasovchisi o'tadi.

2. Bir pallali giperboloidning to'g'ri chiziqli yasovchilari ham ikki oilaga ajralib, birinchi oilaga tegishli to'g'ri chiziqlar

$$\lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \nu \left(1 + \frac{y}{b} \right),$$

$$\nu \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \lambda \left(1 - \frac{y}{b} \right) \quad (\lambda^2 + \nu^2 \neq 0) \quad (11)$$

tenglamalar bilan, ikkinchi oilaga tegishli to'g'ri chiziqlar esa

$$\lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \nu \left(1 - \frac{y}{b} \right),$$

$$\nu \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \lambda \left(1 + \frac{y}{b} \right) \quad (12)$$

tenglamalar bilan aniqlanadi va λ , ν ga turli qiymatlar berib, turli to'g'ri chiziqli yasovchilarni hosil qilish mumkin.

3. Bir pallali giperboloidning bir oilaga tegishli ikki yasovchisi o'zaro ayqashdir.

4. Bir pallali giperboloidning har xil oilaga tegishli ikki yasovchisi o'zaro kesishadi.

Biz yuqorida ellipsoidning to'g'ri chiziqli yasovchilarining yo'qligini ko'rsatgan edik, ikki pallali giperboloid ham chiziqli yasovchilarga ega bo'lmaydi. Haqiqatan ham, ikki pallali giperboloidni $x = h$ ($h^2 > a^2$) tekislik bilan kesilganda, ravshanki, kesimda aynimagan ikkinchi tartibli chiziq hosil bo'lib, buning tarkibida to'g'ri chiziq yo'qdir,

demak, ikki pallali giperboloidni yOz tekislikka parallel to'g'ri chiziqli yasovchisi yo'q, agar yOz ga parallel bo'lmagan to'g'ri chiziqli yasovchisi bor bo'lsa, u to'g'ri chiziq bu tekislik bilan kesishadi, kesimda hosil bo'lgan nuqta to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lib, ikki pallali giperboloidga tegishli emas. Demak, ikki pallali giperboloid to'g'ri chiziqli yasovchilarga ega emas.

Xuddi shu usul bilan elliptik paraboloid uchun ham yasovchilarning mavjud emasligini ko'rsatish mumkin.

Tayanch iboralar.

To'g'ri chiziqli sirtlar, sirtning yasovchisi, ayqash to'g'ri chiziq.

Nazorat uchun savollar.

1. To'g'ri chiziqli sirtlar deb nimaga aytiladi?
2. To'g'ri chiziqli sirtlarning yasovchilari deb nimaga aytiladi?

34- mavzu: Ikkinchi tartibli sirtning urinma tekisligi.

Reja

1. Ikkinchi tartibli sirtning urinma tekisligi.
2. Ellipsoid va giperbolik paraboloidlarning urinma tekisliklari.

1. Ikkinchi tartibli sirtning urinma tekisligi. Giperboloidlar ikki xil bo'ladi. Biror Π tekislikda giperbolani olib, uni Ikkinchi tartibli sirtning tenglamasi

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (1)$$

ko'rinishda berilganda uning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tekislikning tenglamasi

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})(x - x_0) + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})(y - y_0) + \\ + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})(z - z_0) = 0$$

ko'rinishda bo'lishini ko'rsatgan edik. Agar (1) ning chap tomonini $F(x, y, z)$ deb belgilab, (1) dan avval x bo'yicha (y va z ni o'zgarmas hisoblab), so'ngra y bo'yicha (bunda x va z ni o'zgarmas hisoblab), nihoyat z bo'yicha (x , y ni o'zgarmas deb olib) hosilalar olsak,

$$F'_x(x, y, z) = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{13}z + 2a_{14} = 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}), \quad (2)$$

$$F'_y(x, y, z) = 2a_{21}x + 2a_{22}y + 2a_{23}z + 2a_{24} = 2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}),$$

$$F'_z(x, y, z) = 2a_{31}x + 2a_{32}y + 2a_{33}z + 2a_{34} = 2(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}).$$

Bu funktsiyalarning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadagi qiymatlarini topsak,

$$F'_{x_0}(x_0, y_0, z_0) = 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}),$$

$$F'_{y_0}(x_0, y_0, z_0) = 2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}),$$

$$F'_{z_0}(x_0, y_0, z_0) = 2(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}),$$

bulardan

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = \frac{1}{2}F'_{x_0}(x_0, y_0, z_0),$$

$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = \frac{1}{2}F'_{y_0}(x_0, y_0, z_0),$$

$$a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = \frac{1}{2}F'_{z_0}(x_0, y_0, z_0).$$

Bularning qiymatini (2) ga qo'ysak,

$$\frac{1}{2}F'_{x_0}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}F'_{y_0}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}F'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

yoki qisqaroq yozsak,

$$F'_{x_0}(x - x_0) + F'_{y_0}(y - y_0) + F'_{z_0}(z - z_0) = 0. \quad (3)$$

Bu tenglama ikkinchi tartibli sirtga o'tkazilgan urinma tekislikning eng qulay ko'rinishdagi tenglamasidir.

Shuni ta'kidlaymizki, $F'_{x_0}, F'_{y_0}, F'_{z_0}$ ning uchalasi bir vaqtda nolga teng bo'lishi mumkin emas, aks holda M nuqta sirt uchun maxsus nuqta bo'lib qoladi.

2. Ellipsoid va giperbolik paraboloidlarning urinma tekisliklari. (3) dan foydalanib, kanonik tenglamalari bilan berilgan ikkinchi tartibli sirtga o'tkazilgan urinma tekislik tenglamasini yozaylik.

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoidning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tekisligi tenglamasini yozaylik.

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$F'_x = \frac{2}{a^2}x, \quad F'_y = \frac{2}{b^2}y, \quad F'_z = \frac{2}{c^2}z.$$

Demak,

$$F'_{x_0} = \frac{2}{a^2}x_0, \quad F'_{y_0} = \frac{2}{b^2}y_0, \quad F'_{z_0} = \frac{2}{c^2}z_0;$$

bularni (3) ga qo'ysak va M_0 nuqtaning ellipsoidga tegishli ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{2}{a^2}x_0(x - x_0) + \frac{2}{b^2}y_0(y - y_0) + \frac{2}{c^2}z_0(z - z_0) = 0,$$

bundan

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1. \quad (4)$$

b) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ giperbolik paraboloidning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tekislik tenglamasini yozaylik. Bu yerda

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0,$$

$F'_x = \frac{2}{p}x, \quad F'_y = -\frac{2}{q}y, \quad F'_z = -2$, bularning M_0 nuqtadagi qiymatlari

$$F'_{x_0} = \frac{2}{p}x_0, \quad F'_{y_0} = -\frac{2}{q}y_0, \quad F'_{z_0} = -2.$$

Bularni (3) ga qo'ysak,

$$\frac{2}{p}x_0(x - x_0) + \left(-\frac{2}{q}y_0\right)(y - y_0) + (-2)(z - z_0) = 0.$$

M_0 ning shu sirtga tegishliligini hisobga olsak, izlangan tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{xx_0}{p} - \frac{yy_0}{q} = z + z_0. \quad (5)$$

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tsilindrik sirtga uning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tekislik tenglamasini yozaylik.

$F'_x = \frac{2}{a^2}x$, $F'_y = \frac{2}{b^2}y$, $F'_z = 0$; bularning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadagi qiymatlari

$F'_{x_0} = \frac{2}{a^2}x_0$, $F'_{y_0} = \frac{2}{b^2}y_0$, $F'_{z_0} = 0$ bo'lib, buni (3) ga qo'ysak,

$$\frac{2}{a^2}x_0(x - x_0) + \frac{2}{b^2}y_0(y - y_0) + 0(z - z_0) = 0$$

yoki

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \quad (6)$$

Xuddi shunga o'xshash formulalarni boshqa sirtlar uchun mustaqil keltirib chiqarish mashq sifatida talabaga havola etiladi.

Tayanch iboralar.

Sirt, sirtning urinma tekisligi, maxsus nuqta.

Nazorat uchun savollar.

1. Ellipsoidning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tekisligi tenglamasini yozing?
2. Giperbolik paraboloidning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tekislik tenglamasini yozing?
3. Silindrik sirtning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tekislik tenglamasini yozing?

35- mavzu: Chiziqli fazo. Chiziqli fazoda bazis.

Reja

1. Chiziqli fazo va undagi bazis.
2. Vektorning koordinatalari.

1. Chiziqli fazo va undagi bazis. Talabaga «Algebra va sonlar nazariyasi» kursidan vektor (chiziqli) fazo tushunchasi ma'lum. Shu tushunchaning muhimligini e'tiborga olib, uni qisqacha takrorlab o'tamiz.

Elementlari vektor deb atalgan (bu erda vektor so'zi keng ma'nodadir, xususiyl holda geometriya kursining I bo'limida ko'rilgan vektor ham bo'lishi mumkin) bo'sh bo'lmagan V to'plam berilgan bo'lsin. Bu to'plamning elementlarini ustiga strelka qo'yilgan kichik lotin harflari $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{x}, \vec{y}, \dots$ bilan belgilaymiz. Bundan tashqari, haqiqiy sonlar to'plami R berilgan bo'lib, V va R elementlarini bog'lovchi ma'lum munosabatlar o'rnatilgan bo'lsin, jumladan:

I . V ning ixtiyoriy ikki $\vec{a}, \vec{b}$ vektori uchun ularning **yig'indisi** deb atalgan, shu to'plamning elementidan iborat uchinchi bir vektor mos keltirilgan bo'lsin, bu vektorni $\vec{a} + \vec{b}$ ko'rinishda yozaylik.

II . V ning ixtiyoriy ikki $\vec{a}$ vektori va ixtiyoriy k haqiqiy son uchun V ning shunday bir elementi mos keltirilgan bo'lsinki, bu element $\vec{a}$ vektorni k songa **ko'paytirishdan** hosil qilingan deyilib, uni $k\vec{a}$ ko'rinishda yozaylik. Kiritilgan bu ikki amal quyidagi 8 ta aksiomani qanoatlantirsin.

I_1 . Vektorlarni qo'shish o'rin almashtirish qonuniga bo'ysunadi, ya'ni $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ uchun $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

I_2 . Vektorlarni qo'shish guruhlanish qonuniga bo'ysunadi, ya'ni $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ uchun $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

I_3 . V da nol vektor degan $\vec{0}$ element mavjud bo'lib, $\forall \vec{a} \in V$ uchun $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

I_4 . V ning ixtiyoriy $\vec{a}$ vektori uchun V da $\vec{a}'$ vektor mavjud bo'lib, $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$. Bunday $\vec{a}'$ vektor odatda $\vec{a}$ vektorga **qarama-qarshi vektor** deb ataladi va u $-\vec{a}$ bilan belgilanadi. Bu to'rtta aksioma **vektorlarni qo'shish aksiomalari** deb ataladi.

II_1 . $\forall k \in R$ va $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ uchun $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

II_2 . $\forall k, t \in R$ va $\forall \vec{a} \in V$ uchun $(k + t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$.

II_3 . $\forall k, t \in R, \forall \vec{a} \in V$ uchun $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$.

II_4 . $\forall \vec{a} \in V$ uchun $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Bu to'rtta aksioma **vektorni songa ko'paytirish aksiomalari** deb ataladi.

Ta'rif. Elementlari shu sakkiz aksioma shartlarini qanoatlaniruvchi V to'plam **vektor** (yoki **chiziqli**) **fazo** deb ataladi.

Vektorlarni qo'shish va vektorni songa ko'paytirish amallari birgalikda **chiziqli amallar** deb ataladi.

Bu sakkiz aksioma geometriya kursining G. Veyl aksiomalari bo'yicha bayon qilishdagi birinchi va ikkinchi guruh aksiomalaridir (bu aksiomalar sistemasi bilan IV bo'limda batafsil tanishamiz).

Yuqorida keltirilgan aksiomalardan bevosita quyidagi ikki natija kelib chiqadi:

1-natija. I_3 aksioma shartini qanoatlantiruvchi $\vec{0}$ element V da yagonadir.

Isbot. V da $\vec{0}$ dan farqli va shu aksioma shartini qanoatlantiruvchi $\vec{0}'$ element mavjud deb faraz qilsak. $\forall \vec{a} \in V$ uchun $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, $\vec{a} + \vec{0}' = \vec{a}$, xususiylashtirish holda $\vec{0} + \vec{0}' = \vec{0}$, $\vec{0}' + \vec{0} = \vec{0}'$.

I_1 ga asosan, o'rin almashtirish qonunining o'rinaliligidan, $\vec{0} = \vec{0}'$. ▲

2-natija. I_4 aksiomadagi har bir $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi $\vec{a}'$ vektor V da yagonadir.

Isbot. $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi $\vec{a}'$ vektordan farqli yana bitta $\vec{a}''$ vektor mavjud deb qarasak, ya'ni

$$\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{a}'' = \vec{0}$$

desak, bu tengliklardan birinchisining ikkala tomoniga $\vec{a}''$ ni qo'shib, I_1, I_2 ni e'tiborga olsak, $(\vec{a}'' + \vec{a}) + \vec{a}' = \vec{0} + \vec{a}''$. Lekin $\vec{a} + \vec{a}'' = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{0}' = \vec{0} + \vec{a}''$ yoki $\vec{a}' = \vec{a}''$. ▲

Vektor fazoga misollar keltiramiz.

1. Birinchi bo'limda ko'rib o'tilgan geometrik vektorlar to'plami chiziqli fazo hosil qiladi, chunki bu vektorlar uchun yuqoridagi 8 ta aksiomaning hammasi bajariladi.

2. Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan n ta ustun va m ta satrdan hosil qilingan barcha matritsalar to'plami (qo'shish amali deb matritsalarini qo'shishni, vektorni songa ko'paytirish amali deb matritsani songa ko'paytirishni olsak) ham vektor fazo hosil qiladi, bunda vektor so'zi $m \cdot n$ ta elementli matritsani bildiradi. (Bu to'plamning vektor fazo ekani «Algebra va sonlar nazariyasi» kursida isbot qilinadi.)

Eslatma. Yuqorida biz vektorni songa ko'paytirishda faqat haqiqiy sonlar to'plami bilan chegaralandik, shuning uchun bu vektor fazo **haqiqiy sonlar maydoni ustidagi vektor fazo** deb ataladi. Biz bundan buyon faqat shunday chiziqli fazoni ko'zda tutamiz va uni qisqacha **vektor fazo** deb atayveramiz.

Agar II_{1-4} shartlar kompleks sonlar uchun ham bajarilishi talab qilinsa, u holda V **kompleks sonlar maydoni ustidagi vektor fazo** deb yuritiladi.

Ta'rif. $V' \subset V$ bo'lib, V da aniqlangan vektorlarni qo'shish va vektorni songa ko'paytirish amaliga nisbatan V' ham vektor fazo hosil qilsa, u holda V' ni V ning **qism fazosi** deb ataladi, masalan, faqat bitta nol vektorga ega bo'lgan to'plam har qanday vektor fazoning qism fazosidir.

Quyidagi sodda teoremani mustaqil isbotlang.

Teorema. V vektor fazoning ikkita qism fazoning kesishmasi ham vektor fazo bo'ladi.

Endi vektor fazodagi vektorlar uchun chiziqli erklilik tushunchasini kiritaylik. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar V ning elementlari bo'lsin.

Ta'rif. Kamida bittasi noldan farqli haqiqiy $k_1, k_2, \dots, k_n$ sonlar mavjud bo'lib,

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \dots + k_n\vec{a}_n = \vec{0} \quad (1)$$

tenglik bajarilsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar sistemasi **chiziqli bog'liq** deyiladi, agar (1) tenglik faqat $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ bo'lgandagina bajarilsa, berilgan vektorlar sistemasi **chiziqli erkli** deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, V vektor fazoda kamida bitta vektor bo'lsa, har qanday $k \neq 0$ son uchun ham $k\vec{a} \in V$.

Endi vektor fazoning o'lchovini aniqlovchi quyidagi aksiomalarni kiritaylik.

*III*₁. V vektor fazoda n ta chiziqli erkli vektor mavjud.

*III*₂. V vektor fazodagi har qanday $n + 1$ ta vektor sistemasi chiziqli bog'liqdir.

Keltirilgan 10 ta aksioma shartlarini qanoatlantiruvchi vektor fazo n **o'lchovli vektor fazo** deyiladi va u V_n bilan belgilanadi.

$n = 1$ ga mos xususiy holda bir o'lchovli V_1 vektor fazo hosil bo'ladi (bunga misol tariqasida bir to'g'ri chiziqqa parallel barcha geometrik vektorlar to'plamini olish mumkin), $n = 2$ da ikki o'lchovli V_2 vektor fazo hosil bo'ladi (misol tariqasida bir tekislikka parallel barcha geometrik vektorlar to'plamini ko'rsatish mumkin), $n = 3$ da uch o'lchovli V_3 vektor fazo hosil bo'ladi (bunga misol tariqasida fazodagi barcha geometrik vektorlar to'plamini olish mumkin).

Lekin *III*₁₋₂ aksiomalar shartlarini qanoatlantiruvchi n son mavjud bo'lmasa (albatta *I*₁₋₄, *II*₁₋₄ ning barcha shartlari qanoatlanganda), u holda bunday vektor fazo **cheksiz o'lchovli vektor fazo** deb yuritiladi; bu holda cheksiz o'lchovli vektor fazoda etarlicha ko'p vektorlardan tashkil topgan chiziqli erkli vektorlar sistemasini hosil qilish mumkin. Cheksiz o'lchovli vektor fazo tushunchasi ayniqsa funktsional analiz bo'limida keng o'rganiladi.

Biz bundan buyon chekli o'lchovli vektor fazo bilan ish ko'ramiz.

2. Vektorning koordinatalari.

Ta'rif. n o'lchovli vektor fazoning ixtiyoriy n ta chiziqli erkli vektorlari sistemasi shu fazoning **bazisi** deyiladi. Bundan buyon biz bazis vektorlarni $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ deb belgilab, uni $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ ko'rinishda yozamiz, shuni ta'kidlaymizki, bazis vektorlar orasida nol vektor yo'qdir, chunki $\vec{e}_i = \vec{0}$ bo'lib qolsa, xususiy holda $k_1 = k_2 = \dots = k_{i-1} = k_{i+1} = \dots = k_n = 0$, $k_i \neq 0$ sonlar uchun

$$k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \dots + k_i\vec{e}_i + \dots + k_n\vec{e}_n = \vec{0}$$

bo'lib, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ chiziqli bog'liq bo'lib qoladi.

Teorema. V_n ning ixtiyoriy $\vec{a}$ vektori shu fazoning bazis vektorlari orqali birgina ko'rinishda ifodalanadi.

Isbot. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ lar V_n ning bazisi bo'lsin, u holda $\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ vektorlar sistemasi III_2 aksiomaga asosan chiziqli bog'liq, demak, shunday $k, k_1, k_2, \dots, k_n$ ($k^2 + k_1^2 + \dots + k_n^2 \neq 0$) sonlar mavjudki, ular uchun

$$k\vec{a} + k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \dots + k_n\vec{e}_n = \vec{0} \quad (2)$$

bunda $k \neq 0$, chunki $k = 0$ bo'lsa, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ chiziqli bog'langan bo'lar edi, bu esa bazis tushunchasiga ziddir. (2) ning ikkala qismini $\frac{1}{k}$ ga ko'paytirib ($\frac{1}{k} \cdot \vec{0} = \vec{0}$ ni hisobga olib), ikkinchi qo'shiluvchidan boshlab barcha hadlarni o'ng tomonga o'tkazsak,

$$\vec{a} = -\frac{k_1}{k}\vec{e}_1 - \frac{k_2}{k}\vec{e}_2 - \dots - \frac{k_n}{k}\vec{e}_n.$$

Bunda $-\frac{k_1}{k} = x_1, -\frac{k_2}{k} = x_2, \dots, -\frac{k_n}{k} = x_n$ belgilashlarni kiritib, so'nggi ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n. \quad (3)$$

Bundan berilgan $\vec{a}$ vektorning bazis vektorlar orqali ifodalanishi ko'rinib turibdi.

Endi (3) yoyilmaning yagona ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $\vec{a}$ vektor $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazis vektorlar orqali ikkinchi ko'rinishda ifodalansin:

$$\vec{a} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n. \quad (4)$$

U holda (3) dan (4) ni hadlab ayirsak, (I_4 ga asosan $\vec{a} - \vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ hamda II_2 ga asosan):

$$(x_1 - y_1)\vec{e}_1 + (x_2 - y_2)\vec{e}_2 + \dots + (x_n - y_n)\vec{e}_n = \vec{0}. \quad (5)$$

Lekin bazis vektorlar chiziqli erkliligi sababli:

$$x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 = 0, \dots, x_n - y_n = 0$$

yoki $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$. Bu esa (3) yoyilmaning yagonaligini tasdiqlaydi.

Ta'rif. (3) yoyilmadagi $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar, $\vec{a}$ vektorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisdagi **koordinatalari** deb ataladi va u $\vec{a}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'rinishda belgilanadi. Demak,

$$\vec{a}(x_1, x_2, \dots, x_n) \iff \vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n.$$

Xususiyl holda

$$\vec{a} = \vec{e}_1 \Rightarrow \vec{e}_1(1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$\vec{a} = \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_2(0, 1, 0, \dots, 0),$$

.....

$$\vec{a} = \vec{e}_n \Rightarrow \vec{e}_n(0, 0, 0, \dots, 0, 1),$$

$$\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{0}(0, 0, 0, \dots, 0).$$

Teorema. Bir bazisga nisbatan berilgan vektorlarni qo'shishdan hosil qilingan vektorning koordinatalari qo'shiluvchi vektorlar mos koordinatalarining yig'indisiga teng, vektornisonga ko'paytirishda esa uning barcha koordinatalari shu songa ko'paytiriladi.

Isbot. $\vec{a}(x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{b}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorlar yoyilmalari

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n, \vec{b} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n,$$

bundan

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2 + \dots + (x_n + y_n)\vec{e}_n,$$

va

$$(\vec{a} + \vec{b})(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \quad (6)$$

Endi $\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ ifodaning ikkala qismini k ga ko'paytiramiz:

$$k\vec{a} = kx_1\vec{e}_1 + kx_2\vec{e}_2 + \dots + kx_n\vec{e}_n$$

yoki

$$k\vec{a}(kx_1, kx_2, \dots, kx_n). \quad (7) \blacktriangle$$

Eslatma. Qo'shiluvchi vektorlar soni ikkitadan ortiq bo'lsa ham teorema o'z kuchini saqlaydi. Buni mashq sifatida isbotlashni talabaga havola qilamiz.

V_n da $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisga nisbatan

$$\vec{b}_1(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}), \vec{b}_2(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n}), \dots, \vec{b}_m(b_{m1}, b_{m2}, \dots, b_{mn})$$

vektorlar berilgan bo'lsin. Quyidagi matritsani tuzaylik:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Teorema. Berilgan $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ vektorlardan olingan chiziqli erkli vektorlar soni (8) matritsaning rangiga tengdir.

Isbot. Faraz qilaylak, berilgan vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsin, u holda shunday $k_1, k_2, \dots, k_m$ sonlar mavjudki,

$$k_1\vec{b}_1 + k_2\vec{b}_2 + \dots + k_m\vec{b}_m = \vec{0}, \quad k_1^2 + \dots + k_m^2 \neq 0, \quad (*)$$

bu tenglikni koordinatalarda yozaylik:

$$k_1(b_{11}\vec{e}_1 + b_{12}\vec{e}_2 + \dots + b_{1n}\vec{e}_n) + k_2(b_{21}\vec{e}_1 + b_{22}\vec{e}_2 + \dots + b_{2n}\vec{e}_n) + \dots + \\ + k_m(b_{m1}\vec{e}_1 + b_{m2}\vec{e}_2 + \dots + b_{mn}\vec{e}_n) = \vec{0}$$

yoki $(k_1b_{11} + k_2b_{21} + \dots + k_mb_{m1})\vec{e}_1 + (k_1b_{12} + k_2b_{22} + \dots + k_mb_{m2})\vec{e}_2 + \dots + (k_1b_{1n} +$

$$+ k_2 b_{2n} + \dots + k_m b_{mn}) \vec{e}_n = \vec{0}.$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazis vektorlar bo'lgani uchun

$$k_1 b_{11} + k_2 b_{21} + \dots + k_m b_{m1} = 0,$$

$$k_1 b_{12} + k_2 b_{22} + \dots + k_m b_{m2} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$k_1 b_{1n} + k_2 b_{2n} + \dots + k_m b_{mn} = 0;$$

bu tengliklarning barchasini qo'shaylik:

$$k_1(b_{11} + b_{12} + \dots + b_{1n}) + k_2(b_{21} + b_{22} + \dots + b_{2n}) + \dots + k_m(b_{m1} + b_{m2} + \dots + b_{mn}) = \vec{0} \quad (**)$$

Bu esa B matritsa satrlarining chiziqli bog'liqligini ko'rsatadi. Aksincha, $(**) \Rightarrow (*)$ ham o'rinalidir.

Demak, berilgan vektorlar sistemasidagi chiziqli erkli vektorlarning maksimal soni B matritsaning chiziqli erkli satrlari sonlarining eng kattasiga teng. $\blacktriangle$

Agar $m = n$, ya'ni berilgan vektorlar soni fazo o'lchoviga teng bo'lsa, B matritsa kvadrat matritsa bo'lib, yuqoridagi teoremdan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. n o'lchovli vektor fazo berilgan n ta vektorning chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning koordinatalaridan tuzilgan n -tartibli determinantning nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir.

Endi bir bazisdan ikkinchi bazisga o'tish masalasiga to'xtalaylik. $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, $B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)$ lar V_n ning ikki bazisi bo'lsin. $\vec{a} \in V_n$ ning shu bazislardagi koordinatalari mos ravishda

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), (x'_1, x'_2, \dots, x'_n),$$

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n, \vec{a} = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + \dots + x'_n \vec{e}'_n. \quad (8')$$

Bundan tashqari, $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ lardan har birining B bazisdagi koordinatalari ma'lum bo'lsin:

$$\vec{e}'_1 = c_{11} \vec{e}_1 + c_{21} \vec{e}_2 + \dots + c_{n1} \vec{e}_n,$$

$$\vec{e}'_2 = c_{12} \vec{e}_1 + c_{22} \vec{e}_2 + \dots + c_{n2} \vec{e}_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\vec{e}'_n = c_{1n} \vec{e}_1 + c_{2n} \vec{e}_2 + \dots + c_{nn} \vec{e}_n. \quad (9)$$

Bunda

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

aks holda $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'lar edi. Bu qiymatlarni (8') ning ikkinchisiga qo'yamiz:

$$\begin{aligned}\vec{a} = & x'_1(c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + \dots + c_{n1}\vec{e}_n) + x'_2(c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + \dots + c_{n2}\vec{e}_n) + \dots + \\ & + x'_n(c_{1n}\vec{e}_1 + c_{2n}\vec{e}_2 + \dots + c_{nn}\vec{e}_n).\end{aligned}$$

Bundan

$$\begin{aligned}\vec{a} = & (c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \dots + c_{1n}x'_n)\vec{e}_1 + (c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + \dots + c_{2n}x'_n)\vec{e}_2 + \dots + \\ & + (c_{n1}x'_1 + c_{n2}x'_2 + \dots + c_{nn}x'_n)\vec{e}_n.\end{aligned}$$

(8') va (9) dan:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \dots + c_{1n}x'_n, \\ x_2 &= c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + \dots + c_{2n}x'_n, \\ &\vdots \\ x_n &= c_{n1}x'_1 + c_{n2}x'_2 + \dots + c_{nn}x'_n. \end{aligned} \tag{10}$$

Bu formulalar $\vec{a}$ ning B bazisdagi koordinatalarini shu vektorning B' bazisdagi koordinatalari bilan bog'lagani uchun (10) ifodalar vektor koordinatalarini almashtirish formulalari deyiladi.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Bu aynimagan matritsadir, chunki uning determinanti ((9) dan ko'rinib turibdiki) noldan farqli. Bu matritsani (9) ning matritsasi

$$C^* = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Bilan solishtirsak, (11) matritsa C^* ning transponirlanishidan hosil bo'lganligi oshkor bo'ladi.

Misol. Quyida berilgan to'rtta vektorning V_4 vektor fazo uchun bazis bo'lishini isbotlang: $\vec{a}_1(2, 3, 4, -3)$, $\vec{a}_2(5, 4, 9, -2)$, $\vec{a}_3(1, 0, 0, 0)$, $\vec{a}_4(3, 5, 5, 3)$.

Yechish. Berilgan vektorlar sistemasining V_4 uchun bazis bo'lishini ko'rsatish uchun ularning chiziqli erkli ekanligini ko'rsatish kifoyadir. Haqiqatan,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -3 \\ 5 & 4 & 9 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 4 & 9 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 98 \neq 0,$$

demak, berilgan vektorlar chiziqli erkli.

Nazorat uchun savollar.

1. Chiziqli fazo deb nimaga aytiladi?
2. Chiziqli amallar deb nimaga aytiladi?
3. Aylanma ellipsoid deb nimaga aytiladi?
4. Haqiqiy sonlar maydoni ustidagi vektor fazo deb nimaga aytiladi?
5. V kompleks sonlar maydoni ustidagi vektor fazo deb nimaga aytiladi?
6. Qism fazosi deb nimaga aytiladi?
7. Vektorlar sistemasi qachon chiziqli bog'liq deyiladi?
8. Chiziqli erkli vektorlar deb nimaga aytiladi?
9. Qachon vektor fazo n o'lchovli vektor fazo deyiladi?
10. Vektor fazoning bazisi deb nimaga aytiladi?
11. Vektorning berilgan bazisga nisbatan koordinatalarini ta'riflang.

36-mavzu: Affin fazolar. Affin fazolarda to'g'ri chiziq va tekislik.

Reja

1. Affin fazo va affin koordinatalar sistemasi.
2. Affin fazolarda to'g'ri chiziq va tekislik.

1. Affin fazo va affin koordinatalar sistemasi.

V_n vektor fazo va elementlari nuqtalar deb atalgan (bu elementlarni biz bosh lotin harflari bilan belgilaymiz) $\Omega = \{A, B, \dots\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Ω to'plam bilan V_n to'plam orasida shunday moslik o'rnatamizki, Ω dan ma'lum tartibda olingan ikki M, N nuqta uchun V_n dagi aniq bitta $\vec{a}$ vektor mos kelsin, buni $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ deb belgilaymiz. Lekin shuni ta'kidlash zarurki, V_n dagi har bir vektorga Ω da nuqtalarning tartiblangan turli juftlari mos kelishi mumkin. Masalan, $\vec{a} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{KL}$, bunda M, N, P, Q, K, L larning barchasi Ω ga tegishlidir.

$\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ yozuvini quyidagicha ifodalaymiz: $\vec{a}$ vektorni M nuqtadan qo'yish bilan N nuqta hosil qilinadi.

Yuqorida keltirilgan Ω bilan V_n orasidagi moslikning quyidagi ikki aksiomani qanoatlantirishi talab qilinadi.

IV_1 . $\forall M \in \Omega$ va $\forall \vec{a} \in V_n$ uchun yagona shunday $N \in \Omega$ mavjudki, uning uchun $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$.

IV_2 . $\forall A, B, C \in \Omega$ uchun $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Bu ikki aksioma ba'zan **vektorni nuqtadan boshlab qo'yish aksiomalari** deb yuritiladi.

Ta'rif. Elementlari $I_{1-4}, II_{1-4}, III_{1-2}, IV_{1-2}$ aksiomalarni qanoatlantiruvchi bo'sh bo'lmagan to'plam n **o'lchovli haqiqiy affin fazo** deb ataladi. Uni A_n orqali belgilaymiz. Agar V_n vektor fazo kompleks vektor fazo bo'lsa, u holda A_n ham **kompleks affin fazo** deb ataladi.

Demak, n o'lchovli affin fazoni simvolik ravishda quyidagi ko'rinishda yozish mumkin ekan: $A_n = V_n \cup \Omega$.

V_n vektor fazo A_n ning **eltuvchisi** deyiladi.

Yuqorida keltirilgan jami 12 ta aksioma Veyl kiritgan (1918 yil) aksiomalarning bir qismidir.

A_n ning barcha xossalarini isbotlashda biz faqat yuqoridagi 12 ta aksiomaga va ulardan kelib chiqqan natijalargagina suyanamiz (lekin V_n xossalarining ko'pchiligi «Algebra va sonlar nazariyasi» kursida to'la isbotlangani uchun ulardan kerak hollarda isbotsiz foydalanaveramiz).

Misol tariqasida quyidagi teoremlarni isbotlaylik.

1-teorema. Ω ning ustma-ust tushgan ikki nuqtasiga V_n ning nol vektori mos keladi, ya'ni $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Isbot. $\forall A \in \Omega$ bo'lsin. A, A nuqtalarga V_n dan biror $\vec{a}$ mos kelsin: $\forall \vec{b} \in V_n$ ni olsak, IV_1 ga asosan, shunday B nuqta mavjudki, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, endi IV_2 ni tatbiq qilsak $\vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Bundan I_3 ga asosan $\vec{a} = \vec{0}$. $\blacktriangle$

2-teorema. $\overrightarrow{AB} = \vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -\vec{a}$.

Isbot. $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$ desak, IV_2 ga asosan $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$, bundan $\vec{b} = -\vec{a}$. $\blacktriangle$

3-teorema. $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

Isbot. IV_2 ga asosan

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{A'B'}. \quad (*)$$

Lekin $\overrightarrow{A'O} = -\overrightarrow{OA'} \Rightarrow \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = -k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} = k(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = k \cdot \overrightarrow{AB}$, bundan va (*) dan: $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$. $\blacktriangle$

Endi affin koordinatalar sistemasi tushunchasini kiritaylik, A_n da ixtiyoriy bir O nuqtani olaylik, V_n ning biror $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ bazisining barcha vektorlari O nuqtadan qo'yilgan bo'lsin, natijada O nuqta va $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazis vektorlardan tashkil topgan $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ to'plam hosil bo'ladi. Bu to'plam **affin koordinatalar sistemasi** deb atalib, uni $\beta = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ bilan belgilaymiz. O nuqta **koordinatalar boshi**, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ **koordinata vektorlari** deb ataladi.

Affin koordinatalar sistemasi deyish o'rniga bundan buyon qisqacha **affin reper** deymiz. Demak, affin reper ikki turdagi ob'ektdan-nuqta va vektorlardan tashkil topgan sistemadir. A_n ning ixtiyoriy M nuqtasini olsak va affin reper $\beta = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ ma'lum bo'lsa, $\overrightarrow{OM}$ vektor hosil qilinib, bu vektor M nuqtaning **radius-vektori** deb ataladi.

U holda $\overrightarrow{OM} \in V_n$ bo'lgani uchun uning $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ bazisdagi koordinatalarini $x_1, x_2, \dots, x_n$ desak,

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n. \quad (1)$$

Ta'rif. M nuqta radius-vektorining koordinatalari shu nuqtaning **affin koordinatalari** deb ataladi: u $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'rinishda belgilanadi, demak, $(1) \Leftrightarrow M(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

A_n dagi β affin reperga nisbatan $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $N(y_1, y_2, \dots, y_n)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. $\overrightarrow{MN}$ vektorning koordinatalarini $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$ yoki $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM}$ ga asosan bazis vektorlar orqali ifodalaylik:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \dots + y_n \vec{e}_n - (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n) = \\ &= (y_1 - x_1) \vec{e}_1 + (y_2 - x_2) \vec{e}_2 + \dots + (y_n - x_n) \vec{e}_n,\end{aligned}$$

bundan:

$$\overrightarrow{MN}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n). \quad (2)$$

Ta'rif. A_n ning uchlari M, N nuqtalarda bo'lib, $\overrightarrow{MP} = t \overrightarrow{PN}$ ($0 \leq t \leq 1$) tenglikni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar to'plami MN **kesma** deyiladi.

MN kesma berilgan bo'lib,

$$\overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{PN} \quad (3)$$

(bunda $\lambda \in R$, $\lambda \neq 1$) bo'lsa, P **nuqta berilgan kesmani λ nisbatda bo'ladi** deymiz.

(3) dan $\overrightarrow{MP} = \lambda (\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP})$ yoki $\overrightarrow{MP} = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \overrightarrow{MN}$. Har bir $\lambda \neq 1$ uchun MN

kesmani λ nisbatda bo'luvchi yagona nuqta mavjud; $\lambda > 0$ bo'lgan holda bo'luvchi nuqta kesmaning *ichki nuqtasidir*.

A_n dagi β affin reperda uchlari $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $N(y_1, y_2, \dots, y_n)$ nuqtalardagi MN kesmani λ nisbatda bo'luvchi P nuqtaning koordinatalarini $z_1, z_2, \dots, z_n$ desak,

$$z_1 = \frac{x_1 + \lambda y_1}{1 + \lambda}, z_2 = \frac{x_2 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \dots, z_n = \frac{x_n + \lambda y_n}{1 + \lambda}.$$

$\lambda = 1$ da P nuqta kesmaning o'rta nuqtasi bo'ladi:

$$z_1 = \frac{x_1 + y_1}{2}, z_2 = \frac{x_2 + y_2}{2}, \dots, z_n = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Endi nuqtaning affin koordinatalarini almashtirish formulalarini topaylik. A_n da $\beta = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ va $\beta' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)$ affin reperlar berilgan bo'lsin. $\forall M \in A_n$ ning shu bazislardagi koordinatalari mos ravishda $x_1, x_2, \dots, x_n$ va

$x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ bo'lsin hamda β' reper elementlari β reperga nisbatan quyidagicha aniqlangan bo'lsin:

$$O'(c_{10}, c_{20}, \dots, c_{n_0}), \vec{e}'_1(c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1_n}), \dots, \vec{e}'_n(c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nn}). \quad (4)$$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ ni koordinatalarda yozaylik:

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n = c_{10}\vec{e}_1 + c_{20}\vec{e}_2 + \dots + c_{n0}\vec{e}_n + x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2 + \dots + x'_n\vec{e}'_n.$$

$\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ ni $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ orqali ifodalab,

$$(-x_1 + c_{10} + c_{11}x'_1 + \dots + c_{n1}x'_n)\vec{e}_1 + (-x_2 + c_{20} + c_{12}x'_1 + \dots + c_{n2}x'_n)\vec{e}_2 + \dots + (-x_n + c_{n0} + c_{1n}x'_1 + \dots + c_{nn}x'_n)\vec{e}_n = 0$$

ni hosil qilamiz. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ –chiziqli erkli bo'lgani uchun ularning bu ifodadagi barcha koeffitsiyentlari nolga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{21}x'_2 + \dots + c_{n1}x'_n + c_{10}, \\ x_2 &= c_{12}x'_1 + c_{22}x'_2 + \dots + c_{n2}x'_n + c_{20}, \\ . &. \\ x_n &= c_{1n}x'_1 + c_{2n}x'_2 + \dots + c_{nn}x'_n + c_{n0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Bu izlangan formulalar bo'lib, ixtiyoriy nuqtaning β, β' reperlarga nisbatan koordinatalari orasidagi bog'lanishni aniqlaydi. Bu formulada

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

Aks holda $\Delta = 0$ bo'lsa, bazis vektorlar chiziqli bog'liq bo'lar edi. $\Delta \neq 0$, shuning uchun (5) ni $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ ga nisbatan ham echish mumkin. Xususiyl holda $O \neq O', \bar{e}_1 = \bar{e}'_1, \bar{e}_2 = \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}_n = \bar{e}'_n$ bo'lsa, (4) dan:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1, \quad c_{12} = c_{13} = \dots = c_{1n} = 0, \\ c_{21} &= 0, \quad c_{22} = 1, \quad c_{23} = c_{24} = \dots = c_{2n} = 0, \\ . &. \\ c_{n1} &= c_{n2} = \dots = c_{n(n-1)} = 0, \quad c_{nn} = 1, \end{aligned}$$

demak,

$$\begin{aligned}
x_1 &= x'_1 + c_{10}, \\
x_2 &= x'_2 + c_{20}, \\
&\dots \dots \dots \\
x_n &= x'_n + c_{n0}.
\end{aligned}
\tag{7}$$

Buni ba'zan koordinatalarni parallel ko'chirish formulalari deb ataladi.

1-misol. A_4 fazoda $\beta = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ reperga nisbatan beshta nuqta berilgan: $C_0(1, 0, 0, 2), C_1(0, 1, 2, 0), C_2(2, 0, 0, 2), C_3(0, 2, 1, 0), C_4(2, 0, 0, 1)$. Yangi reper sifatida $\beta' = (C_0, \overrightarrow{C_0C_1}, \overrightarrow{C_0C_2}, \overrightarrow{C_0C_3}, \overrightarrow{C_0C_4})$ ni olib, ixtiyoriy nuqtaning koordinatalarini almashtirish formulalarini yozing.

Echish. Avvalo yangi bazis vektorlarning β ga nisbatan koordinatalarini topaylik. (2) ga asosan $\overrightarrow{C_0C_1}(-1, 1, 2, -2), \overrightarrow{C_0C_2}(1, 0, 0, 0), \overrightarrow{C_0C_3}(-1, 2, 1, -2), \overrightarrow{C_0C_4}(1, 0, 0, -1)$. U holda bu qiymatlarni (5) ga qo'ysak (hamda $O' = C_0, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{C_0C_1}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{C_0C_2}, \vec{e}'_3 = \overrightarrow{C_0C_3}, \vec{e}'_4 = \overrightarrow{C_0C_4}$ deb olsak),

$$\begin{aligned}
x_1 &= -x'_1 + x'_2 - x'_3 - 2x'_4 + 1, \quad x_2 = -x'_1 + 2x'_3, \\
x_3 &= 2x'_1 + x'_3 - 2x'_4, \quad x_4 = -2x'_1 - 2x'_3 - x'_4
\end{aligned}$$

bu izlangan formulalardir.

2-misol. Quyida berilgan formulalar sistemasi A_3 da biror nuqtaning affin koordinatalarini almashtirish formulalari vazifasini bajaradimi: $x_1 = x'_1 + 2x'_2 - x'_3 - 1, x_2 = 2x'_1 + x'_2 + x'_3, x_3 = x'_1 - 3x'_2 + 1$?

Echish. Bu formulalar nuqta koordinatalarini almashtirish formulalari vazifasini bajarishi uchun $\Delta \neq 0$ bo'lishi kerak; haqiqatan ham, bu erda

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Endi berilgan formulalarni (5) bilan taqqoslab quyidagilarni topamiz:

$$O'(-1, 0, 1), \vec{e}'_1(1, 2, 1), \vec{e}'_2(2, 1, -3), \vec{e}'_3(-1, 1, 0).$$

2. Affin fazolarda to'g'ri chiziq va tekislik.

Afin fazoda $M_0, M_1, \dots, M_m$ nuqtalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar $\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \dots, \overrightarrow{M_0M_m}$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo'lsa, berilgan **nuqtalar sistemasi chiziqli erkli** deyiladi, aks holda berilgan **nuqtalar sistemasi chiziqli bog'liq** deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, berilgan nuqtalar sistemasi chiziqli erkli bo'lsa, uning har qanday qismi ham chiziqli erkli bo'ladi, bundan tashqari, III_1 aksiomaga asosan A_n

da $n+1$ ta chiziqli erkli nuqtalar mavjud bo'lib, soni $n+1$ tadan ko'p bo'lgan har qanday nuqtalar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lishi kelib chiqadi.

Xususiyl holda ikki nuqtadan tashkil topgan nuqtalar sistemasining chiziqli erkli bo'lishi uchun, ravshanki, ular turli bo'lishi (ustma-ust tushmasligi), uch nuqtadan tashkil topgan nuqtalar sistemasining chiziqli erkli bo'lishi uchun ularning bir to'g'ri chiziqda yotmasligi zarur va etarlidir.

A_n n o'lchovli affin fazo, uning eltuvchisi V_n vektor fazo hamda A_n ning qism fazosi A_k bo'lib, uning eltuvchisi $V_k \subset V_n$ bo'lsin. A_n ning tayin P nuqtasini olaylik.

Ta'rif. A_n fazodagi $\overrightarrow{PN} \in V_k$ shartni qanoatlantiruvchi barcha N nuqtalar to'plami k o'lchovli tekislik deb ataladi va Π_k deb belgilanadi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, $V_k \subset \Pi_k$ bo'lib, $P \in \Pi_k$ dir, chunki $N = P$ bo'lsa, $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$ bo'lib, V_k qism fazo bo'lgani uchun $\vec{0} \in \Pi_k$ dir. P nuqta Π_k ning boshlang'ich nuqtasi, V_k esa eltuvchisi deyiladi.

Xususiyl hollarda: 1) $k = 0$ bo'lsa, u holda Π_0 tekislik bitta P nuqtadan iborat, demak, A_n dagi har bir nuqta nol o'lchovli tekislikdir; 2) $k = 1$ bo'lsa, Π_1 bir o'lchovli tekislik bo'lib, biz uni to'g'ri chiziqli deb ataganmiz; 3) $k = 2$ bo'lsa, Π_2 ikki o'lchovli tekislik bo'lib, uni biz bevosita tekislik deb ataganmiz; 4) $k = n-1$ bo'lsa, Π_{n-1} tekislikni, maxsus nom bilan, ya'ni gipertekislik deb yuritiladi.

Tekislik ta'rifdan ko'rinadiki, $k = n$ bo'lgan holda A_n ham n o'lchovli tekislik ekan.

Teorema-1. Π_k tekislikda $(k+1)$ ta nuqtadan iborat kamida bitta chiziqli erkli nuqtalar sistemasi mavjuddir.

Isbot. Agar $\vec{a} \in V_k$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) bo'lsa, $\overrightarrow{PM_0} = \vec{a}$ bilan aniqlanuvchi M_0 nuqta Π_k tekislikning nuqtasi bo'ladi. V_k ning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ bazis vektorlarini olib, $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{e}_1, \overrightarrow{M_0M_2} = \vec{e}_2, \dots, \overrightarrow{M_0M_k} = \vec{e}_k$ desak, hosil bo'lgan $M_0, M_1, M_2, \dots, M_k$ nuqtalar sistemasi ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ bazis vektorlar chiziqli erkli) chiziqli erkli bo'ladi. ▲

Teorema-2. Π_k ning ta'rifidagi P nuqta alohida ajratilgan nuqta bo'lmasdan, balki Π_k dagi barcha nuqtalarning har biri ham shunday xossaga egadir (boshqacha aytganda, P nuqta Π ning qayerida olinishiga bog'liq emas).

Isbot. P dan farqli $Q \in \Pi_k$ ni olaylik. Agar $N \in \Pi_k$ bo'lgandagina $\overrightarrow{QN} \in V_k$ ekanini ko'rsatsak, teoremani isbotlagan bo'lamiz. Haqiqatan ham $\overrightarrow{QN} \in V_k$ bo'lsin, u holda $\overrightarrow{PQ} \in V_k$ bo'lib (tekislik ta'rifiga ko'ra), Π_k ga asosan $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{PN} \in V_k$ bo'ladi, demak, $N \in \Pi_k$, aksincha $N \in \Pi_k$ bo'lsa, $\overrightarrow{PN} \in V_k \rightarrow \overrightarrow{QN} \in V_k$. ▲

Teorema-3. Affin fazodagi har qanday k o'lchovli Π_k tekislik o'z yo'lida k o'lchovli A_k affin fazodir.

Isbot. Π_k ning affin fazo ekanini ko'rsatish uchun IV_1, IV_2 aksiomalar shartlarining qanoatlanishini ko'rsatish kifoyadir. $\forall M, N \in \Pi_k$ ni olaylik, u holda $\overrightarrow{PM} \in V_k, \overrightarrow{PN} \in V_k \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM} \in V_k$. Demak, Π_k da ma'lum tartibda olingan ikki M, N nuqtaga V_k da aniq bitta vektor mos keladi (IV_1 ning sharti bajariladi). IV_2 ning sharti A_n uchun bajarilgani sababli Π_k uchun ham bajariladi. ▲

Teorema-4. A_n da P nuqta va $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ ($k \leq n$) chiziqli erkli vektorlar faqat bitta Π_k tekislikni aniqlaydi.

Isbot. Bazis vektorlari $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ dan iborat V_k qism vektor fazoni qaraylik, bu vaqtda tekislik ta'rifiga asosan P nuqta va V_k biror tekislikni aniqlaydi. SHu tekislikning yagona ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, P nuqtani va $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ vektorlarni o'z ichiga olgan boshqa Π'_k tekislik mavjud bo'lsin, uning boshlang'ich nuqtasi P va eltuvchisi V'_k bo'lsin. Avvalo shuni payqaymizki, V_k va V'_k ning ikkalasi ham chiziqli erkli $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ vektorlarni o'z ichiga olgani uchun ular ustma-ust tushadi. Bundan tashqari, $P \in V'_k$ bo'lgani uchun 3-teoremaga asosan $\Pi_k = \Pi'_k$. ▲

Bu teoremadan quyidagi ikki natija kelib chiqadi.

1-natija. A_n dagi $(k+1)$ ta chiziqli erkli nuqtalar sistemasi faqat bitta k o'lchovli tekislikni aniqlaydi.

2-natija. A_n dagi har qanday n ta chiziqli erkli nuqtalar sistemasi faqat bitta gipertekislikni aniqlaydi.

Endi k o'lchovli tekislikning analitik ifodasini, ya'ni tenglamalarini keltirib chiqarish bilan shug'ullanaylik.

A_n da biror $\beta = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ affin reper berilgan bo'lsin. 4-teoremaga asosan Π_k tekislik bitta nuqta va k ta chiziqli erkli vektor bilan to'liq aniqlanadi. Π_k ni aniqlovchi nuqta P va chiziqli erkli vektorlar $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_k$ bo'lsin. U holda Π_k ning ixtiyoriy nuqtasi N ni olsak, $\overrightarrow{PN}$ vektor hosil bo'lib, bu vektor Π_k ning eltuvchisi V_k ga tegishli bo'ladi, demak, undagi $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_k$ chiziqli erkli vektorlar orqali ifodalanadi.

$$\overrightarrow{PN} = t_1 \vec{p}_1 + t_2 \vec{p}_2 + \dots + t_k \vec{p}_k, \quad (8)$$

bunda $t_1, t_2, \dots, t_k \in R$. U holda $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN}$ o'rinli bo'lgani uchun

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} + t_1 \vec{p}_1 + t_2 \vec{p}_2 + \dots + t_k \vec{p}_k. \quad (9)$$

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \dots + a_n\vec{e}_n + t_1(u_{11}\vec{e}_1 + u_{21}\vec{e}_2 + \dots + u_{n1}\vec{e}_n) + \\ + t_2(u_{12}\vec{e}_1 + u_{22}\vec{e}_2 + \dots + u_{n2}\vec{e}_n) + \dots + t_k(u_{1k}\vec{e}_1 + u_{2k}\vec{e}_2 + \dots + u_{nk}\vec{e}_n).$$
$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t_1 u_{11} + t_2 u_{12} + \dots + t_k u_{1k}, \\ x_2 &= a_2 + t_1 u_{21} + t_2 u_{22} + \dots + t_k u_{2k}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t_1 u_{11}, \\ x_2 &= a_2 + t_1 u_{21} \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + t_1 u_{n1}. \end{aligned} \tag{11}$$

92

Bu sistema chiziqli erkli va birgalikda bo'lgani uchun $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n-k,1} & u_{n-k,2} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{n-k,n} \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi $n-k$ ga tengdir, demak, shu matritsaning $(n-k)$ – tartibli determinantlaridan kamida bittasi noldan farqli, umumiyligni buzmaslik uchun shu determinant

$$\begin{vmatrix} u_{1,k+1} & u_{1,k+2} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{1n} \\ u_{2,k+1} & u_{2,k+2} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n-k,k+1} & u_{n-k,k+2} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Bo'lsin. U holda berilgan sistemani $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ ga nisbatan yechsak,

$$x_{k+1} = u'_{11}x_1 + u'_{12}x_2 + \dots + u'_{1k}x_k + a'_{k+1},$$

$$x_{k+2} = u'_{21}x_1 + u'_{22}x_2 + \dots + u'_{2k}x_k + a'_{k+2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n = u'_{n-k,1}x_1 + u'_{n-k,2}x_2 + \dots + u'_{n-k,k}x_k + a'_n.$$

Agar $x_1, x_2, \dots, x_k$ ni parametrlar deb qabul qilsak, ya'ni ularni $x_1 = t_1, x_2 = t_2, \dots, x_k = t_k$ deb belgilasak, so'nggi sistemani quyidagicha yozish mumkin:

$$x_1 = t_1,$$

$$x_2 = t_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_k = t_k, \tag{16}$$

$$x_{k+1} = u'_{11}x_1 + u'_{12}x_2 + \dots + u'_{1k}x_k + a'_{k+1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n = u'_{n-k,1}x_1 + u'_{n-k,2}x_2 + \dots + u'_{n-k,k}x_k + a'_n.$$

(16) ni (10) bilan taqqoslab ko'rsak, (16) sistema (10) sistemaning xususiy holi ekanini ko'ramiz. Shuning uchun (16) sistema biror $(n-k)$ o'lchovli tekislikning parametrik tenglamalaridir. Bu sistema berilgan sistemaga ekvivalentligi uchun u ham shu tekislikning tenglamalari hisoblanadi. (15) tenglamalar sistemasi $(n-k)$ o'lchovli tekislikning umumiy tenglamalari deb ataladi.

Xususiyl holda, $k = n - 1$ bo'lsa, isbotlangan 6-teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Gipertekislikning umumiy tenglamasi bitta aynimagan chiziqli tenglamadan iborat (aynimagan chiziqli tenglama- o'zgaruvchilarining oldidagi koeffitsiyentlaridan kamida bittasi noldan farqli bo'lgan tenglamadar).

Demak, A_n da k ta chiziqli tenglama sistemasi berilgan bo'lsa, ulardan har birini shu fazodagi gipertekislik deb qarash, u holda berilgan tenglamalar sistemasi (agar sistema birgalikda bo'lsa) k ta gipertekislik kesishmasidan hosil bo'lgan tekislikni aniqlaydi. (Bunga misol tariqasida A_3 da ikki tekislikning kesishmasidan to'g'ri chiziq hosil bo'lishini eslash kifoyadir.)

Misol. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ reper berilgan. Koordinata tekisliklarining tenglamalarini yozing.

Yechish. O nuqta va $\vec{e}_1$ vektor bilan aniqlanadigan bir o'lchovli koordinata tekisligi (ya'ni koordinatalar to'g'ri chizig'i) (11) ga asosan

$$x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0.$$

$\Pi_2 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ tekislik tenglamasi esa (15) ga asosan

$$x_3 = 0, x_4 = 0.$$

$\Pi_3 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tekislik tenglamasi (shu fazo uchun gipertekislik)

$$x_4 = 0.$$

Qolgan tekisliklarning tenglamalarini yozishni mashq sifatida talabaga havola qilinadi.

Tayanch iboralar.

n o'lchovli haqiqiy affin fazo, kompleks affin fazo, eltuvchisi, affin koordinatalar sistemasi, affin koordinatalari, kesmani λ nisbatda bo'lish, nuqtalar sistemasi chiziqli erkli, nuqtalar sistemasi chiziqli bog'liq.

Nazorat uchun savollar.

1. n o'lchovli haqiqiy affin fazo deb nimaga aytiladi?
2. Kompleks affin fazo deb nimaga aytiladi?
3. Eltuvchisi degani nima?
4. Affin koordinatalar sistemasi deb nimaga aytiladi?
5. Nuqtalar sistemasi chiziqli erkli degani nima?

37- mavzu: Chiziqli fazoda skalyar ko'paytma va ortonormal bazis.

Reja:

1. n o'lchovli vektorli Evklid fazosi.
2. Chiziqli fazoda skalyar ko'paytma va ortonormal bazis.

Biz I_{1-4} , II_{1-4} , III_{1-2} aksiomalar yordamida n o'lchovli vektor fazo tushunchasini kiritgan Edik hamda chiziqli amallarga asoslanib, shu fazo xossalarini o'rgangandik, lekin bu fazoda vektorning uzunligi, ikki vektor orasidagi burchak, ikki vektorning perpendikulyarligi kabi tushunchalar kiritilmagan edi. Shuning uchun I_{1-4} , II_{1-4} , III_{1-2} aksiomalar qatoriga chngi aksiomalar kiritish bilan yangi vektor fazolarni hosil qilamiz, shulardan biri vektorli evklid fazosidir.

Ta'rif. V_n vektor fazoning ixtiyoriy ikki $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektori uchun ularning **skalyar ko'paytmasi** deb atalgan haqiqiy son mos keltirilgan bo'lib (ko'paytmani $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bilan belgilaymiz), quyidagi to'rtta aksioma bajarilsa, bunday fazo n **o'lchovli vektorli Evklid fazosi** deb ataladi (uni V_E bilan belgilaymiz):

$$V_1. \forall \vec{a}, \vec{b} \in V_n \text{ uchun } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

$$V_2. \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n \text{ uchun } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c},$$

$$V_3. \forall \vec{a}, \vec{b} \in V_n \text{ va } \forall k \in R \text{ uchun } k \vec{a} \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

$$V_4. \forall \vec{a} \neq 0 \in V_n \text{ uchun } \vec{a} \cdot \vec{a} > 0.$$

Bu aksiomalarni odatda vektorlarning **skalyar ko'paytirish aksiomalari** deb yuritiladi.

Avvalo yuqoridagi aksiomalardan kelib chiqadigan ba'zi natijalarni ko'raylik.

1-natija. V_2 aksiomadagi assotsiativlik qonuni ikki qo'shiluvchi vektor uchun o'rinli bo'lsa, u istalgan sondagi qo'shiluvchilar uchun o'rinlidir, $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_m) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b} + \dots + \vec{a}_m \cdot \vec{b}$ (ifodadagi barcha vektorlar V_E tegishli).

Haqiqatan ham, $\vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_m = \vec{b}_1$ desak, V_2 ga asosan $(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{b}_1 \cdot \vec{b}$, bu ifodaning ikkinchi qo'shiluvchisidagi $\vec{b}_1$ ni $\vec{a}_2 + \vec{b}_2$ deb olsak, bunda $\vec{b}_2 = \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \dots + \vec{a}_m$, u holda V_2 ni yana tatbiq qilsak, $(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b} + \vec{b}_2 \cdot \vec{b}$; endi shu ishni uchinchi qo'shiluvchi uchun takrorlaymiz va h.k. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ ning soni chekli bo'lgani uchun ma'lum qadamdan so'ng izlangan tenglik hosil bo'ladi.

2-natija. $\vec{0}$ vektorning har qanday vektor bilan skalyar ko'paytmasi nolga tengdir, chunki V_3 ga asosan $(\vec{0} \cdot \vec{a}) = (0\vec{b} \cdot \vec{a}) = 0(\vec{b} \cdot \vec{a}) = 0$.

3-natija. $\vec{a} \cdot \vec{a}$ skalyar ko'paytma faqat $\vec{a} = \vec{0}$ bo'lgandagina nolga tengdir, bu bevosita V_4 aksioma va 2-natijadan kelib chiqadi.

$\vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \Rightarrow \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ – haqiqiy son.

Ta’rif. $\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ haqiqiy sonni $\vec{a}$ vektorning **moduli** (uzunligi) deyiladi va uni $\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = |\vec{a}|$ ko’rinishda belgilanadi. Xususiylas holda $|\vec{a}| = 1$ bo’lsa, bunday $\vec{a}$ vektor **birlik vektor** deb ataladi, bundan tashqari, nol vektorning moduli nolga tengligi ham ravshandir.

4-natija. $\vec{b} = \lambda \vec{a} \Rightarrow |\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$, chunki $|\vec{b}| = \sqrt{\lambda \vec{a} \cdot \lambda \vec{a}} = \sqrt{\lambda(\vec{a} \cdot \lambda \vec{a})} = \sqrt{\lambda \lambda (\vec{a} \cdot \vec{a})} = \sqrt{\lambda^2 \vec{a} \cdot \vec{a}} = |\lambda| |\vec{a}|$.

Teorema. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_E$ uchun

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \quad (1)$$

o’rinlidir (Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi).

Isbot. $\vec{a}, \vec{b} \in V_E$ berilgan bo’lsin. $\vec{a} - \lambda \vec{b}$ ko’rinishdagi vektorni tekshiraylik. $|\vec{a} - \lambda \vec{b}|^2 \geq 0$ dan: $(\vec{a} - \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \geq 0$. Bu tengsizlikning chap tomoniga V_{1-4} aksiomalarni va yuqorida keltirilgan natijalarni tatbiq qilib, $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$, $\vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{b}^2$ desak,

$$\vec{a}^2 - 2\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\lambda \vec{b})^2 \geq 0$$

yoki

$$\vec{b}^2 \lambda^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})\lambda + \vec{a}^2 \geq 0, \quad (2)$$

bundan ko’rinadiki, λ ga nisbatan kvadrat uchhad λ ning har qanday qiymatida manfiy emas, u holda bu uchhadning diskriminanti musbat bo’lishi mumkin emas, ya’ni $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - \vec{a}^2 \vec{b}^2 \leq 0$, bundan $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \vec{b}^2$ yoki $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$.

Shuni ta’kidlashimiz zarurki, (1) tengsizlikdagi tenglik belgisi $\vec{a}, \vec{b}$ kollinear bo’lgandagina o’rinlidir. Haqiqatan ham,

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} \Rightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\lambda \vec{b} \cdot \vec{b}| = |\lambda(\vec{b} \cdot \vec{b})| = |\lambda| |\vec{b} \cdot \vec{b}| = |\lambda| |\vec{b}|^2 = |\lambda \vec{b}| |\vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|, \quad (3)$$

aks holda $\vec{a} - \lambda \vec{b} \neq \vec{0}$ bo’lsa, (2) ning chap tomonidagi λ ga nisbatan kvadrat uchhadning diskriminanti manfiy bo’ladi, ya’ni qat’iy tengsizlik ro’y beradi.

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini $\vec{a} \neq \vec{0}$ va $\vec{b} \neq \vec{0}$ vektorlar uchun quyidagicha yozib olaylik: $-1 \leq \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \leq 1$. Bundan $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ kasrni biror φ burchakning kosinusi deb

olish mumkin, ya’ni

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}. \quad (4)$$

Ta’rif. (4) tenglik bilan aniqlanadigan burchaklarning eng kichigi $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar orasidagi **burchak** deb ataladi.

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ da $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar ortogonal deb ataladi. (4) dan ko'rinib turibdiki, nol bo'lmagan ikki vektor ortogonal bo'lishi uchun ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va etarli ekan.

(4) da $\varphi = 0$ yoki $\varphi = \pi$ bo'lsa, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$; (3) ga asosan $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ yoki $\vec{a} \parallel \vec{b}$,

$$(4) \Rightarrow \vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi. \quad (5)$$

Demak, ikki vektorning skalyar ko'paytmasi shu vektorlar modullari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko'paytmasiga teng.

Endi V_E ning bazisi masalasiga to'xtalaylik.

Ta'rif. V_E dagi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazis vektorlarning har biri birlik vektor bo'lib, ularning istalgan ikkitasi o'zaro ortogonal bo'lsa, bunday vektorlar sistemasi **ortonormalangan bazis** (yoki **dekart bazisi**) deb ataladi, uni ham odatdagidek $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ deb belgilaylik.

Demak, ortonormalangan bazis uchun

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (6)$$

Bunda $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Endi ortonormalangan bazisda koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalyar ko'paytmasi, vektorning uzunligi, ikki vektor orasidagi burchakni hisoblash formulalarini topaylik.

Faraz qilaylik, biror dekart bazisida

$$\vec{a}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n,$$

$$\vec{b}(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \dots + y_n \vec{e}_n.$$

U holda skalyar ko'paytmasining xossalarini va (6) ni nazarda tutsak,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n)(y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \dots + y_n \vec{e}_n) = x_1 y_1 (\vec{e}_1 \vec{e}_1) + x_1 y_2 (\vec{e}_1 \vec{e}_2) + \\ &+ \dots + x_1 y_n (\vec{e}_1 \vec{e}_n) + x_2 y_1 (\vec{e}_2 \vec{e}_1) + x_2 y_2 (\vec{e}_2 \vec{e}_2) + \dots + x_2 y_n (\vec{e}_2 \vec{e}_n) + \dots + x_n y_1 (\vec{e}_n \vec{e}_1) + \\ &+ x_n y_2 (\vec{e}_n \vec{e}_2) + \dots + x_n y_n (\vec{e}_n \vec{e}_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n, \end{aligned}$$

ya'ni

$$\vec{a} \vec{b} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (7)$$

Demak, V_E da ikki vektorning skalyar ko'paytmasi shu vektorlar mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n \Rightarrow \vec{a} \vec{a} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

yoki

$$\sqrt{\vec{a} \vec{a}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

vektorning uzunligining ta'rifiga ko'ra

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (8)$$

Demak, vektorning uzunligi uning koordinatalari yig'indisidan olingan arifmetik kvadrat ildizga teng.

(7) va (8) ni e'tiborga olsak, ikki vektor orasidagi burchakni hisoblash (aniqrog'i, shu burchakning kosinusini topish) formulasi topiladi. (4) dan:

$$\cos \varphi = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}}. \quad (9)$$

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi esa quyidagi ko'rinishni oladi:

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2). \quad (10)$$

1-misol. To'rt o'lchovli vektorli evklid fazosidagi dekart bazisi $\vec{a}(3, 2, 1, 1)$, $\vec{b}(4, -2, -1, 1)$ berilgan. Quyidagilarni toping. *a)* shu vektorlarning uzunliklari; *b)* $\vec{a} \vec{b}$ skalyar ko'paytma; *c)* vektorlar orasidagi burchak.

Yechish. *a)* (8) ga asosan

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{15},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{22};$$

b) (7) ga asosan

$$\vec{a} \vec{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 12 - 4 - 1 + 1 = 8;$$

c) (9) ga asosan $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{8}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{22}} = \frac{8}{\sqrt{330}};$

$$\varphi = \arccos \frac{8}{\sqrt{330}}.$$

2-misol. $\vec{a}(1, 3, 2, -1)$, $\vec{b}(5, 1, -4, 0)$, $\vec{c}(0, 4, 1, 14)$ vektorlar ortogonal sistemani hosil qilishini isbotlang.

Isbot. Umuman, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar sistemasida ixtiyoriy ikki vektor o'zaro ortogonal bo'lsa, bunday vektorlar sistemasi **ortogonal sistema** deb ataladi. Bu yerda ahvol shunday, haqiqatan,

$$\vec{a} \vec{b} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 0 = 8 - 8 = 0.$$

$$\vec{a} \vec{c} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 14 = 14 - 14 = 0.$$

$$\vec{b} \vec{c} = 5 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 14 = 4 - 4 = 0.$$

Nazorat uchun savollar.

1. n o'lchovli vektorli Evklid fazosi deb nimaga aytiladi?
2. Skalyar ko'paytirish aksiomalari deb nimaga aytiladi?
3. Ikki vektor orasidagi burchak deb nimaga aytiladi?

4. Ortonormalangan bazis nima?
5. Ortogonal sistema nima?

38- mavzu: Evklid fazosi.

Reja

1. n o'lchovli evklid fazosi.
2. n o'lchovli evklid fazosiga doir misollar.

Ta'rif. Etluvchisi V_E bo'lgan (n o'lchovli vektorli evklid fazosi) n o'lchovli afflin fazosi **n o'lchovli evklid fazosi** deb ataladi va E_n bilan belgilanadi.

Demak, elementlari nuqta va vektor deb atalgan bo'sh bo'lmagan to'plam $I_{1-4}, II_{1-4}, III_{1-2}, IV_{1-2}, V_{1-4}$ aksiomalarni qanoatlantirsa, u to'plam n o'lchovli evklid fazosi bo'ladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, n o'lchovli afflin fazoning barcha ta'rif va teoremlari E_n da ham kuchini saqlaydi.

E_n dagi nuqtaning koordinatalarini 36-mavzudagidek ta'riflasak hamda Dekart reperi $\beta = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ deb olsak ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ortonormalangan bazis), u holda uch o'lchovli evklid fazosi singari E_n da qator masalalarni hal qilish mumkin. Biror Dekart reperida $A(x_1, x_2, \dots, x_n), B(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ni olaylik.

Ta'rif. E_n dagi A, B nuqtalar aniqlagan $\overline{AB}$ vektor uzunligi shu ikki nuqta orasidagi masofa deb ataladi va $\rho(A, B)$ bilan belgilanadi.

Ta'rifga asosan $\rho(A, B) = |\overline{AB}|$. 36-mavzudagi (2) ni eslasak, $\overline{AB}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$, (8) formuladan:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}. \quad (1)$$

Bu formula E_n dagi ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidir.

Teorema. E_n dagi ixtiyoriy uchta A, B, C nuqta uchun

$$\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$$

o'rinalidir.

Haqiqatan, IV_2 aksiomaga asosan $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Bu tenglikning ikki tomonidagi vektorlarni o'z-o'ziga skalyar ko'paytiramiz:

$$\overline{AC} \cdot \overline{AC} = (\overline{AB} + \overline{BC})(\overline{AB} + \overline{BC})$$

yoki

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC}^2,$$

bundan

$$|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} + |\overline{BC}|^2.$$

Lekin $\overline{AB} \cdot \overline{BC} \leq |\overline{AB}||\overline{BC}|$ (chunki $\overline{AB} \cdot \overline{BC} < 0$ holda tengsizlik ravshan, $\overline{AB} \cdot \overline{BC} > 0$ holda esa Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi asosida). U holda

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}|^2 &\leq |\overrightarrow{AB}|^2 + 2|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BC}|^2, \\ |\overrightarrow{AC}|^2 &\leq (|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|)^2, \end{aligned}$$

bundan

$$|\overrightarrow{AC}| \leq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$$

yoki

$$\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C). \quad (2)$$

Bu yerdagi tenglikning o'rinli bo'lishi uchun B nuqta A yoki C bilan ustma-ust tushishi, yoki B nuqta A bilan C ning orasida yotishi lozim (buni mustaqil isbotlang).

Tabiiyki, k o'lchovli tekislik ta'rif va xossalari A_n da qanday bo'lsa, E_n da shunday saqlanib qoladi, bundan tashqari, bu fazoda shu xossalar yoniga yangi xossalar qo'shiladi. Bu xossalar metrik xarakterga ega bo'lib, ularning barchasini biz bu erda keltirmaymiz (ikki tekislik orasida masofa, to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak va h. k.). Misol tariqasida quyidagi masalani ko'rib chiqaylik.

Dekart reperida berilgan nuqtadan berilgan gipertekislikkacha masofa hisoblansin.

Ta'rif. E_n da nuqtadan gipertekislikkacha **masofa** deb, shu nuqtadan gipertekislikka tushirilgan perpendikulyar to'g'ri chiziqlarning bu tekislik bilan kesishgan nuqtasigacha bo'lgan masofaga aytiladi.

Shuni ta'kidlaymizki, gipertekislik o'ziga perpendikulyar to'g'ri chiziq bilan faqat bitta nuqtada kesishadi, chunki gipertekislik bitta chiziqli tenglama bilan, to'g'ri chiziq esa $(n-1)$ ta chiziqli tenglama bilan aniqlanib, ularning umumiy nuqtalarini topish uchun jami n ta chiziqli tenglamani (bu sistema albatta birgalikda) yechiladi. Umumiy holda n ta tenglamadan n ta noma'lum bo'lgani uchun tegishli sistemani yechib, izlangan nuqta topiladi.

$M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ nuqta va

$$\Pi_{n-1} : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0 \quad (3)$$

gipertekislik berilgan bo'lsin. $\rho(M_0, \Pi_{n-1})$ ni izlaymiz.

M_0 nuqtadan Π_{n-1} ga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazib, uning Π_{n-1} bilan kesishgan nuqtasini N_0 deb belgilaylik, u holda $\overrightarrow{M_0N_0}$ vektor hosil bo'ladi, N_0 ning koordinatalari $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ bo'lsin.

$$N_0 \in \Pi_{n-1} \Rightarrow a_1x'_1 + a_2x'_2 + \dots + a_nx'_n + a_0 = 0. \quad (4)$$

Bu ayniyatni (2) tenglamadan hadlab ayirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$a_1(x_1 - x'_1) + a_2(x_2 - x'_2) + \dots + a_n(x_n - x'_n) = 0, \quad (5)$$

Bu tenglikning chap tomonini o'zaro perpendikulyar $\vec{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ va $\overrightarrow{N_0P}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, \dots, x_n - x'_n)$ vektoring skalyar ko'paytmasi deb qarash mumkin, bu yerda $N_0 \in \Pi_{n-1}, P \in \Pi_{n-1} \Rightarrow \vec{a} \perp \Pi_{n-1}$, chunki P nuqta Π_{n-1} ning

ixtiyoriy nuqtasidir. Demak, Π_{n-1} ning (3) tenglamadagi o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlar shu tekislikka ortogonal vektorning koordinatalaridan iborat, demak, $\vec{a} \parallel \overrightarrow{M_0 N_0}$. U holda

$$\overrightarrow{M_0 N_0} \cdot \vec{a} = |\overrightarrow{M_0 N_0}| \cdot |\vec{a}| \cos \varphi = \pm |\overrightarrow{M_0 N_0}| \cdot |\vec{a}| \quad (\varphi = 0 \text{ yoki } \pi),$$

bundan

$$|\overrightarrow{M_0 N_0} \cdot \vec{a}| = \rho(M_0, \Pi_{n-1}) |\vec{a}|,$$

$$\rho(M_0, \Pi_{n-1}) = \frac{|\overrightarrow{M_0 N_0} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

Bu formulani koordinatalarda yozish uchun

$$\overrightarrow{M_0 N_0} \cdot \vec{a} = a_1(x'_1 + x_1^0) + a_2(x'_2 + x_2^0) + \dots + a_n(x'_n + x_n^0) = a_1x'_1 + a_2x'_2 + \dots +$$

$$+ a_nx'_n - (a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + \dots + a_nx_n^0)$$

ni e'tiborga olsak, $\overrightarrow{M_0 N_0} \cdot \vec{a} = -(a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + \dots + a_nx_n^0) - a_0$,

$$\rho(M_0, \Pi_{n-1}) = \frac{|a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + \dots + a_nx_n^0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}. \quad (6)$$

Bu formula E_3 dagi nuqtadan tekislikkacha masofani topish formulasining umumlashgan holidir.

Endi E_3 dagi bir dekart reperining ikkinchi dekart reperi bilan qanday bog'langanligini ko'raylik.

Bu bog'lanish umumiy holda 36-mavzudagi (5) formuladan aniqlanadi. U formuladagi ikkinchi affin reperring bazis vektorlarini birinchi affin repenga nisbatan koordinatalari bo'lgan $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{nn}$ sonlar endi reperlar dekart reperlaridan iborat bo'lganda ma'lum shartlarni qanoatlantirishi kerak. Haqiqatan ham, endi $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ lar birlik vektorlardan iborat:

$$c_{11}^2 + c_{12}^2 + \dots + c_{1n}^2 = 1,$$

$$c_{21}^2 + c_{22}^2 + \dots + c_{2n}^2 = 1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$c_{n1}^2 + c_{n2}^2 + \dots + c_{nn}^2 = 1. \quad (7)$$

Undan tashqari, bu bazis vektorlarning ixtiyoriy ikkitasi o'zaro perpendikulyar:

1-misol. E_5 da $A(4, 3, 3, 4, 5)$, $B(-2, -2, 2, 5, 4)$ nuqtalar berilgan. Shu nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. (1) formulaga asosan

$$\begin{aligned}\rho(A, B) &= \sqrt{(-2-4)^2 + (-2-3)^2 + (2-3)^2 + (5-4)^2 + (4-5)^2} = \\ &= \sqrt{36 + 25 + 1 + 1 + 1} = \sqrt{64} = 8.\end{aligned}$$

2-misol. E_5 da $A(3, -2, 1, 4, 1)$ va $B(2, 4, -3, 1, 2)$ nuqtalardan teng uzoqlikda yotgan nuqtalar to'plamini toping.

Yechish. Izlangan nuqtalardan birini $N(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ desak, quyidagi shart bajarilishi kerak:

$$\rho(A, N) = \rho(B, N).$$

Buni koordinatalarda yozsak,

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x_1 - 3)^2 + (x_2 + 2)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 4)^2 + (x_5 - 1)^2} = \\ &= \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 + (x_3 + 3)^2 + (x_4 - 1)^2 + (x_5 - 2)^2}.\end{aligned}$$

Ikkala qismni kvadratga ko'tarib, qavslarni ochib, ixchamlab chiqsak,

$$x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 + \frac{3}{2} = 0,$$

bu chiziqli tenglama E_5 da to'rt o'lchovli tekislikni, ya'ni gipertekislikni aniqlaydi. Demak, izlangan nuqtalar to'plami gipertekislikdan iborat.

3-misol. $M(1, 4, -5, 3, 2)$ nuqtadan $\Pi_4 : 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - 3 = 0$ gipertekislikkacha bo'lgan masofani hisoblang.

Yechish. (6) formulaga asosan

$$\rho(M_0, \Pi_4) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 + 2(-5) - 3 + 2 - 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{16}} = \frac{15}{4}.$$

Nazorat uchun savollar.

1. n o'lchovli evklid fazosi deb nimaga aytiladi?
2. Evklid fazosi ikki nuqta orasidagi masofa deb nimaga aytiladi?
3. Evklid fazosi nuqtadan gipertekislikkacha masofa deb nimaga aytiladi?

ASOSIY ADABIYOTLAR:

- 1.Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. М., Наука, 1990.
- 2.Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М. Наука, 1981.
- 3.Погорелов А.В. Аналитик геометрия. Т., Ўқитувчи, 1983.
- 4.Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр 1. М., Наука, 1983.
- 5.Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar to'plami T. Universitet, 2006.
6. Kravchenko K. Resheniya zadach po analiticheskoy geometrii.
- 7.Додожонов Н. Д, Жўраева М.Ш , Геометрия. 1-қисм Т., Ўқитувчи, 1996.

QO'SHIMCHA ADABIYOTLAR:

- 8.Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., Наука, 1963.
- 9.Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М., Наука, 1968.
- 10.Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., Гостехиздат, 1970.
- 11.Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М., Гостехиздат, 1957
- 12.Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М. Наука, 1976.
- 13.Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М. Наука, 1998.
- 14.[http:// www.a-geometry.narod.ru](http://www.a-geometry.narod.ru)
15. J. Akilova, M. Jabbarov, Q. Mamasoliyev, R.Safarov. Chiziqli algebra va analitik geometriyadan masalalar yechish. Toshkent, «Turon-iqbol», 2006.(50 dona)
16. A.Y.Narmanov. Analitik geometriya. Toshkent, 2008.(75 dona)

Internet saytlari:

1. www.ziyonet.uz
2. www.referat.uz
3. www.istedod.uz
4. www.dekan.ru
5. www.ursu.uz
6. www.arxiv.org

MUNDARIJA

Soʻz boshi.....	
1. Vektorlar. Vektorlar ustida chiziqli amallar.....	
2. Vektoʻrning oʻqdagi proeksiyasi. Chiziqli bogʻliq va chiziqli erkli vektorlar. Kollinearlik va komplanarlik. Bazis. Vektoʻrning berilgan bazisga nisbatan koordinatalari. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar.....	
3. Fazoda affin va dekart koordinatalar sistemasi.....	
4. Vektorlarning skalyar koʻpaytmasi. Vektorning yoʻnaltiruvchi kosinuslari.....	
5. Tekislikda affin va dekart koordinatalar sistemasi.	
6. Vektorlarning vektor koʻpaytmasi va aralash koʻpaytmasi.	
7. Tekislikda affin, dekart koordinatalar sistemasini almashtirish.....	
8. Fazoda affin koordinatalar sistemasini almashtirish.....	
9. Tekislikda va fazoda orientatsiya.....	
10. Qutb, silindrik va sferik koordinatalar sistemasi.....	
11. Fazoda tekislik tenglamalari. Nuqtadan tekislikgacha boʻlgan masofa.....	
12. Tekisliklarning oʻzaro vaziyati.	
13. Fazoda toʻgʻri chiziqli tenglamalari. Fazoda toʻgʻri chiziqlarning oʻzaro vaziyati. Fazoda toʻgʻri chiziqli bilan tekislikning oʻzaro vaziyati.....	
14. Algebraik chiziqli. Tekislikda toʻgʻri chiziqli tenglamalari.	
15. Ikki toʻgʻri chiziqli orfsidagi burchak. Nuqtadan toʻgʻri chiziqligacha masofa. Tekislikda toʻgʻri chiziqlarning oʻzaro vaziyati. Toʻgʻri chiziqlar dastasi.....	
16. Ellips va uning kanonik tenglamasi.....	
17. Giperbola va uning kanonik tenglamalari.....	
18. Parabola va uning kanonik tenglamalari.....	
19. Ellips, giperbola va parabolaning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamalari...	
20. Ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamasi.....	
21. Ikkinchi tartibli chiziqlarning tasnifi. Ikkinchi tartibli chiziqli markazi. Markaziy va nomarkaziy chiziqlar.....	
22. Ikkinchi tartibli chiziqlining toʻgʻri chiziqli bilan kesishishi. Asimptotik yoʻnalishlar. Urinma va asimptotalar.....	
23. Ikkinchi tartibli chiziqlining diametrlari.....	
24. Ikkinchi tartibli chiziqlining bosh yoʻnalishlari va simmetriya oʻqlari.....	
25. Ikkinchi tartibli sirtlarning toʻgʻri chiziqli va tekislik bilan kesishishi.....	
26. Sferik sirtlar.	
27. Ikkinchi tartibli silindrik sirtlar.....	
28. Ikkinchi tartibli konus sirtlari. Konus kesimlari.....	
29. Aylanma sirtlar.	
30. Ellipsoid.....	
31. Giperboloidlar.....	
32. Paraboloidlar.	
33. Ikkinchi tartibli sirtlarning toʻgʻri chiziqli yasovchilari.	
34. Ikkinchi tartibli sirtning urinma tekisligi.....	
35. Chiziqli fazo. Chiziqli fazoda bazis.....	
36. Affin fazolar. Affin fazolarda toʻgʻri chiziqli va tekislik.....	
37. Chiziqli fazoda skalyar koʻpaytma va ortonormal bazis.	
38. Evklid fazosi.....	
40. Adabiyotlar roʻyxati.....	

So'z boshi

Analitik geometriya kursi bakalavriyatning birinchi kursida o'qitilib, mutaxassislik fanlarining asosiylaridan biri hisoblanadi. Bu kursda birinchi, ikkinchi darajali algebraik tenglamalar bilan aniqlanuvchi chiziqlar va sirtlar o'rganiladi. Fazoda va tekislikda koordinatalari birinchi darajali tenglamalarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami mos ravishda tekisliklar yoki to'g'ri chiziqlarni aniqlaydi. Tekislik va to'g'ri chiziqlar maktab kursida aksiomatik aniqlanadi. Analitik geometriya kursida tekislik va to'g'ri chiziqlar algebraik tenglama yordamida aniqlanadi. Fazoda va tekislikda koordinatalari ikkinchi darajali tenglamalarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami mos ravishda ikkinchi tartibli sirt yoki ikkinchi tartibli chiziqlarni aniqlaydi. Ikkinchi tartibli sirt va ikkinchi tartibli chiziqlarning ba'zi birlari maktab kursida ham o'rganiladi. Shuning uchun ham analitik geometriya kursi maktab geometriya kursi bilan chambarchas bog'langandir. Analitik geometriya kursining asosiy maqsadi talabalarda geometriyada algebraik metodlarni tadbiq qilish ko'nikmalarini shakllantirishdan iboratdir. Analitik geometriya kursida algebraik metodlar asosiy rolni o'ynaydi. Analitik geometriya kursi matematikaning algebra, matematik analiz kabi bo'limlari bilan uzviy bog'liq ravishda olib boriladi.

Bu kursning matematika yo'nalishidagi mutaxassislarni tayyorlashdagi o'rni analitik geometriya fani matematikaning asosiy fundamental bo'limlaridan biri ekanligi bilan aniqlanadi.

Fanni o'qitishning maqsadi-talabalarda geometriyada algebraik metodlarni tadbiq qilish ko'nikmalarini shakllantirishdan iboratdir.

Fanni o'qitishning vazifalari-geometrik obektlar matematikada algebraik tenglamalar yordamida aniqlanadi yoki differentsiallanuvchi funktsiyalar yordamida parametrlanadi. Bu kursning asosiy vazifasi algebraik tenglamalar yordamida aniqlanadigan geometrik obektlarni o'rganish uchun zaruriy metodlar bilan tanishtirishdan iboratdir.

Mamlakatimizda amalga oshirilayotgan ta'lim islohotlarining hozirgi bosqichidagi muhim vazifalar qatorida quyidagilarni alohida ko'rsatish lozim:

- ta'lim sifatini oshirish,
- o'quv jarayoniga zamonaviy pedagogik va axborot texnologiyalarni kengroq joriy qilish,
- o'quv va uslubiy adabiyotlarning yangi avlodini yaratish.

Oliy ta'lim tizimidagi o'quv jarayoni sifatini ta'minlovchi asosiy omillardan biri – bu o'quv va uslubiy adabiyotlar bilan ta'minlanganlik darajasi, ularning sifati va pedagogik hamda metodik talablarga muvofiqligidir.

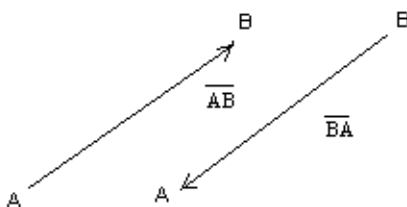
1-Mavzu: Vektorlar. Vektorlar ustida chiziqli amallar.

Reja.

1. Yo'nalgan kesmalar haqida tushuncha.
2. Vektor.
3. Vektorlar ustida chiziqli amallar:
 - 1) vektorlarni qo'shish.
 - 2) vektorlarni ayirish.
 - 3) vektorlarni songa ko'paytirish.

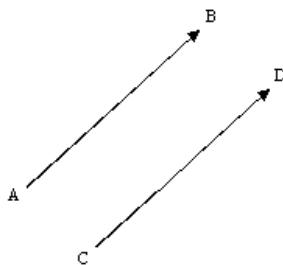
1. Yo'nalgan kesmalar haqida tushuncha.

Ta'rif: Berilgan kesmaning uchlaridan qaysi biri birinchi va qaysinisi ikkinchiligi aniqlangan bo'lsa, bunday kesma **yo'nalgan kesma** deyiladi. Yo'nalgan kesmaning birinchi uchi uning **boshi**, ikkinchi uchi esa **oxiri** deyiladi.



1-chizma

Boshi A va oxiri B nuqtada bo'lgan yo'nalgan kesmani $\overrightarrow{AB}$ bilan belgilaymiz. Yo'nalgan $\overrightarrow{AB}$ kesmaning **uzunligi** deb, AB kesmaning uzunligiga aytiladi va u $|\overrightarrow{AB}|$ yoki AB bilan belgilanadi.

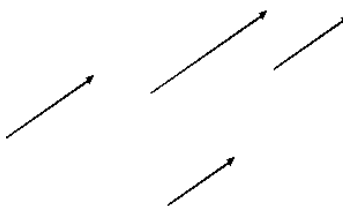


2- chizma

Ta'rif: Agar AB va CD nurlar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalishli bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ yo'nalgan kesmalar **bir xil (qarama-qarshi) yo'nalishli** deyiladi.

2. Vektor.

Ta'rif: Uzunliklari teng va bir xil yo'nalishli barcha kesmalar to'plami **ozod vektor** yoki qisqacha **vektor** deb ataladi.



3- chizma

Vektorlarni ustiga « $\rightarrow$ » belgi qo'yilgan kichik lotin harflari $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{x}, \vec{y}$ bilan belgilaymiz. Fazodagi barcha vektorlar to'plamini V bilan belgilaymiz. Yuqoridagi ta'rifdan vektorning uzunliklari teng va bir xil yo'nalishli kesmalar sinfidan iborat ekanligi ravshan. Bu sinfga tegishli har bir yo'nalgan kesma sinfni to'liq aniqlaydi. Shuning uchun, agar $\overline{AB} \in \vec{a}$ bo'lsa, $\vec{a}$ vektorni $\vec{a} = \overline{AB}$ ko'rinishda belgilash mumkin.

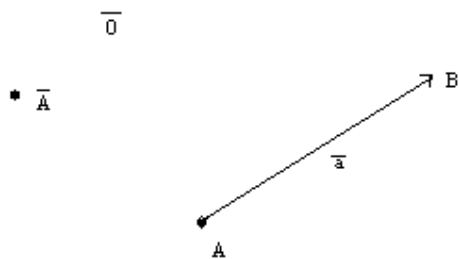
$\overline{AB}$ vektorda A uning **boshi**, B esa **oxiri** deyiladi. Yo'nalgan $\overline{AB}$ kesmaning uzunligi $\overline{AB}$ vektorning **uzunligi** (yoki **moduli**) deyiladi va $|\overline{AB}|$ ko'rinishda belgilanadi. Bundan

$$|\overline{AB}| = \rho(A, B).$$

Ta'rif: Uzunligi birga teng bo'lgan vektor **birlilik vektor** yoki **ort** deyiladi.

Ta'rif: Boshi bilan oxiri ustma-ust tushgan vektor **nol vektor** deyiladi. Nol vektor $\vec{0}$ ko'rinishda belgilanadi va uning uzunligi nolga teng deb hisoblanadi.

Nol bo'lmagan har qanday vektor tayin bir yo'nalishni aniqlaydi. Nol vektor yo'nalishga ega emas.



4- chizma

Ta'rif: Agar $\overline{AB} \in \vec{a}, \overline{CD} \in \vec{b}$ yo'nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalishli bo'lsa, $\vec{a} = \overline{AB}$ va $\vec{b} = \overline{CD}$ vektorlar **bir xil (qarama-qarshi) yo'nalishli** deb ataladi. $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlarning bir xil yo'nalishli ekanini $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{CD}$ ko'rinishda, qarama-qarshi yo'nalishli ekanini $\overline{AB} \uparrow \downarrow \overline{CD}$ ko'rinishda belgilaymiz.

Ikki vektorning tengligi, ya'ni $\vec{a} = \vec{b}$ yozuvi $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarning bitta vektor ekanini, lekin turlicha belgilanganini bildiradi:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \end{pmatrix}.$$

Ta'rif: Bitta to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan vektorlar **kollinear vektorlar** deyiladi.

Faraz qilaylik, fazoda bir nechta vektorlar berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy O nuqta tanlab olib, bu vektorlarning boshini shu nuqtaga parallel ko'chiramiz. Vektorlarning bunday ko'chirish amaliga **vektorlarni umumiy boshga keltirish** deyiladi.

Ikkitadan ortiq vektorni umumiy boshga keltirganda ular bir tekislikda yotmasligi mumkin.

Ta'rif: Umumiy boshga keltirganda bir to'g'ri chiziqli yotuvchi vektorlar **kollinear vektorlar** deyiladi.

Ta'rif: Umumiy boshga keltirganda bitta tekislikda yotuvchi vektorlar **komplanar vektorlar** deyiladi. Komplanarlik sharti uchta va undan ortiq vektorlar uchun o'rinli. Parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar komplanar vektorlardir.

Ta'rif: Bitta tekislikka parallel bo'lgan vektorlar to'plami **komplanar vektorlar** deyiladi.

3. Vektorlar ustida chiziqli amallar.

Vektorlar ustida bajariladigan quyidagi amallar **chiziqli amallar** deb ataladi.

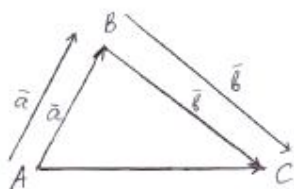
1. Vektorlarni qo'shish.
2. Vektorlarni ayirish.
3. Vektorlarni songa ko'paytirish.

Vektorlarni qo'shish. **Ta'rif:** Ikki $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorning **yig'indisi** deb, istalgan A nuqtadan $\vec{a}$ vektorni qo'yib, uning oxiri B ga $\vec{b}$ vektorni qo'yganda boshi $\vec{a}$ vektorning boshi A da, oxiri $\vec{b}$ vektorning oxiri C da bo'lgan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi. $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a} + \vec{b}$ bilan belgilanadi.

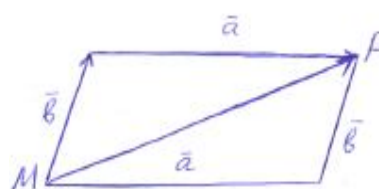
Vektorlarni qo'shish ta'rifidan istalgan A , B va C uch nuqta uchun

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. (1) tenglik **vektorlarning qo'shishning uchburchak qoidasi** deyiladi. Ikki kollinear vektorni qo'shish ham shu qoida bo'yicha bajariladi (5-chizma).



5- chizma



6- chizma

$\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar o'zaro kollinear bo'lmagan vektor bo'lsin. Ularni bitta M nuqtaga parallel ko'chiramiz, so'ngra tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat bo'lgan parallelogramm chizamiz. Uning M nuqtaga qarama-qarshi uchini P deb $\overrightarrow{MP}$ vektorni qaraymiz. Ravshanki, $\overrightarrow{MP} = \vec{a} + \vec{b}$. Vektorlar yig'indisini bunday geometrik yasash odatda «parallelogramm qoidasi» deb yuritiladi (6- chizma).

Vektorlarni qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

1°. Qo'shishning guruhlanish (assotsiativlik) xossasi. Har qanday $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar uchun

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

munosabat o'rinli.

2°. Qo'shishning o'rin almashtirish (kommutativlik) xossasi. Har qanday ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor uchun $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ tenglik o'rinlidir.

3°. Har qanday $\vec{a}$ vektorga nol vektorni qo'shilsa, $\vec{a}$ vektor hosil bo'ladi, ya'ni

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

4°. Har qanday $\vec{a}$ vektor uchun shunday $\vec{a}'$ vektor mavjudki, uning uchun

$$\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}. \quad (2)$$

(2) tenglikni qanoatlantiruvchi $\vec{a}'$ vektorga $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi va $-\vec{a}$ bilan belgilanadi.

Vektorlarni ayirish. **Ta'rif:** $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning **ayirmasi** deb, $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi $-\vec{b}$ vektorning yig'indisiga aytiladi. Bu ta'rifdan ko'rinadiki, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ ayirma vektorni yasash uchun $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ vektorni yasash kerak ekan. Agar $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar bitta O nuqtaga qo'yilgan bo'lsa hamda $\vec{a} = \vec{OA}$ va $\vec{b} = \vec{OB}$ deb belgilangan bo'lsa, u holda

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{BO} = \vec{BO} + \vec{OA} = \vec{BA}.$$

Bu holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasini topish uchun boshi B nuqtada, oxiri esa A nuqtada bo'lgan $\vec{BA}$ vektorni yasash yetarli bo'ladi. Bu qoidadan ko'rinadiki, ayirma vektor doimo mavjuddir.

Vektorni songa ko'paytirish.

Ta'rif: $\vec{a} \neq \vec{0}$ vektorning $\alpha \in R$ songa **ko'paytmasi** deb, shunday $\vec{b}$ vektorga aytiladiki, $\alpha > 0$ bo'lganda $\vec{b}$ ning yo'nalishi $\vec{a}$ ning yo'nalishi bilan bir xil, $\alpha < 0$ da $\vec{b}$ ning yo'nalishi $\vec{a}$ ning yo'nalishiga teskari bo'lib, $\vec{b}$ vektorning uzunligi esa $\vec{a}$ vektorning uzunligi bilan α son modulining ko'paytmasiga teng. Bu ko'paytma $\alpha \vec{a}$ shaklida belgilanadi.

Bu ta'rifdan bevosita quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

- a) $\forall \vec{a}$ vektor uchun $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$;
- b) $\forall \alpha \in R$ uchun $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$;
- c) $\forall \vec{a}$ vektor uchun $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$;
- d) $\vec{a}$ va $\alpha \vec{a}$ vektorlar o'zaro kollinear.

Shuni ta'kidlaymizki, biror $\vec{a} \neq \vec{0}$ vektorni o'zining uzunligiga teskari $\frac{1}{|\vec{a}|}$ songa ko'paytirilsa, shu vektor yo'nalishdagi birlik vektor (ort) hosil bo'ladi, ya'ni

$$\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \vec{a}_0 \quad (|\vec{a}_0| = 1).$$

Teorema: Agar $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) bo'lsa, u holda shunday α son mavjudki,

$$\vec{b} = \alpha \vec{a} \quad (3)$$

bo'ladi.

Isbot. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ bo'lgani uchun quyidagi uch hol bo'lishi mumkin:

1) $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ bo'lsa, $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$ bo'lib, bundan $\vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$, bu holda $\alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$

bo'ladi.

2) $\vec{a} \downarrow \vec{b}$ bo'lsa, $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = -\frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$ bo'lib, bundan $\vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$, bu holda $\alpha = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$

bo'ladi.

3) $\vec{b} = 0$ bo'lganda $\vec{b} = 0 \cdot \vec{a}$; bundan $\alpha = 0$. **Teorema isbotlandi.**

Demak, vektorni songa ko'paytirish ta'rifidan va bu teoremadan bunday xulosa chiqaramiz; $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$. Shunday qilib (3) munosabat $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinearligining zaruriy va etarli shartidir.

Vektorni songa ko'paytirish quyidagi xossalarga ega:

1°. Guruhlanish xossasi. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor va har qanday $\alpha, \beta \in R$ sonlar uchun

$$\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha \beta) \vec{a}$$

munosabat o'rinlidir.

2°. Har qanday $\vec{a}$ vektor va ixtiyoriy $\alpha, \beta \in R$ sonlar uchun

$$(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$$

munosabat o'rinli.

3°. Har qanday $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar va ixtiyoriy $\alpha \in R$ uchun

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$$

munosabat o'rinlidir.

Shunday qilib, barcha ozod vektorlar to'plami V da aniqlangan vektorlarni qo'shish va vektorni songa ko'paytirish amallari quyidagi xossalarni qanoatlantirar ekan:

1°. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (qo'shishning assotsiativligi).

2°. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (qo'shishning kommutativligi).

3°. $\forall \vec{a} \in V$ uchun $\exists \vec{0} \in V, \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (nol vektorning mavjudligi).

4°. $\forall \vec{a} \in V$ uchun $\exists (-\vec{a}) \in V, \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ (qarama-qarshi vektorning mavjudligi).

5°. $\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha \beta) \vec{a}$ (vektorni songa ko'paytirishning sonlarga nisbatan assotsiativligi).

6°. $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$ (vektorni songa ko'paytirishning sonlarni qo'shishga nisbatan distributivligi).

7°. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$ (vektorlarni qo'shishga nisbatan songa ko'paytirishning distributivligi).

8°. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Bu sakkiz xossani qanoatlantiruvchi vektorlar to'plami V **vektor fozo** (yoki **chiziqli fazo**) deb ataladi.

Tayanch iboralar.

Vektor, birlik vektor, nol vektor, kollinear vektor, komplanar vektor, teng vektorlar, qarama-qarshi vektorlar, modul, uchburchak qoidasi, parallelogramm qoidasi, chiziqli fazo.

Nazorat uchun savollar.

1. Yo'nalgan kesma deb nimaga aytiladi?
2. Vektor deb nimaga aytiladi?
3. Nol vektor deb nimaga aytiladi?
4. Teng vektor deb nimaga aytiladi?
5. Bir xil yo'nalgan vektor deb nimaga aytiladi?
6. Qarama-qarshi yo'nalgan vektor deb nimaga aytiladi?
7. Kollinear vektor deb nimaga aytiladi?
8. Komplanar vektor deb nimaga aytiladi?
9. Vektorlar yig'indisi va ayirmasi qanday topiladi?
10. Vektorni songa ko'paytirish deb nimaga aytiladi?
11. Chiziqli fazo deb nimaga aytiladi?

2-mavzu: Vektorning o'qdagi proyeksiyasi. Chiziqli bog'liq va chiziqli erkli vektorlar. Kollinearlik va komplanarlik. Bazis.

Reja.

1. To'g'ri chiziqdagi yo'nalish.
2. Vektorning o'qdagi proektsiyasi.
3. Chiziqli bog'liq va chiziqli erkli vektorlar.
4. Vektor fazoning bazisi va o'lchovi.

1. To'g'ri chiziqdagi yo'nalish. Musbat yo'nalishi tanlab olingan l to'g'ri chiziq ***o'q*** deb ataladi. O'qning yo'nalishini odatda strelka bilan ko'rsatiladi(1-chizma), bu strelkaning yo'nalishi l to'g'ri chiziqdagi musbat yo'nalishni aniqlovchi $\vec{m}$ vektor yo'nalishi bilan bir xil bo'ladi.

Yo'nalishi o'qdagi musbat yo'nalishi bilan bir xil bo'lgan hamda uzunligi birga teng bo'lgan (ya'ni $|\vec{e}| = 1$) $\vec{e}$ vektor ***o'qning orti (bazisi)*** deyiladi.

Agar to'g'ri chiziqqa koordinatalar boshi deb ataluvchi O nuqta, musbat yo'nalish va uzunlik birligi tanlab olingan bo'lsa, u holda to'g'ri chiziqda ***Dekart koordinatalar sistemasi*** berilgan deyiladi.



1-chizma



2-chizma

Agar o'qda biror bazis tanlangan bo'lsa, u holda o'qdagi har bir vektorga to'la aniqlangan bitta son mos keltiriladi va bu son vektorning bazis bo'yicha yoyilmasining koeffitsientidan iborat bo'ladi.

l o'qda yotgan $\overline{OM}$ vektor shu o'qda tanlangan $\vec{e}$ bazis bilan kollinear bo'ladi. Vektorlarning kollinear bo'lish shartidan(2-chizma)

$$\overline{OM} = x \vec{e} \quad (1)$$

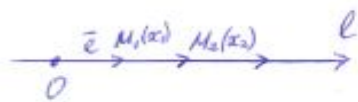
munosabatni yoza olamiz. (1) dagi x soni odatda $\overline{OM}$ ***vektorning koordinatasi*** deyiladi. Agar x son $\overline{OM}$ vektorning koordinatasi bo'lsa, uning $M(x)$ ko'rinishdagi yozuvi x son $\overline{OM}$ vektorning koordinatasi degan ma'noni anglatadi, shu bilan birga x son M nuqtaning koordinatasi degan ma'noni ham anglatadi.

1-Teorema. O'qning ixtiyoriy ikki $M_1(x_1)$ va $M_2(x_2)$ nuqtasi uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi (3-chizma):

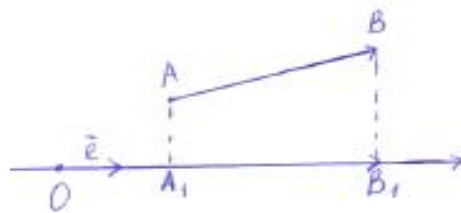
$$|M_1 M_2| = |x_2 - x_1|. \quad (2)$$

Isbot. Haqiqatan ham, vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra

$$\overline{OM_1} + \overline{M_1 M_2} = \overline{OM_2}.$$



3-chizma



4-chizma

Bundan

$$\overline{M_1 M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}.$$

Agar $\overline{OM_2} = x_2 \bar{e}$, $\overline{OM_1} = x_1 \bar{e}$ ekanini e'tiborga olsak,

$$\overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1) \bar{e} \text{ yoki } |\overline{M_1 M_2}| = |x_2 - x_1| |\bar{e}| = |x_2 - x_1|$$

formulaga ega bo'lamiz.

(2) formula bilan aniqlangan $|x_2 - x_1|$ miqdor $M_1(x_1)$ va $M_2(x_2)$ **nuqtalar orasidagi masofa** deyiladi va uni d bilan belgilanadi, ya'ni

$$d = |x_2 - x_1|.$$

2. Vektorning o'qdagi proyeksiyasi.

1-Ta'rif. $\overline{AB}$ vektorning l o'qdagi proyeksiyasi deb, shunday $\overline{A_1 B_1}$ vektorning uzunligiga aytiladiki, unda A_1 va B_1 mos ravishda A va B nuqtalarning l o'qdagi ortogonal proyeksiyalari bo'lib, bu uzunlik $\overline{A_1 B_1}$ va $\bar{e}$ vektorlarning yo'nalishlari bir xil bo'lganda musbat ishora bilan, aks holda manfiy ishora bilan olinadi (4-chizma).

$\overline{AB}$ vektorning l o'qdagi proyeksiyasini $np_l \overline{AB}$ simvoli bilan belgilaymiz. Ta'rif bo'yicha

$$np_l \overline{AB} = \pm |\overline{A_1 B_1}|.$$

Bu ta'rifdan $\overline{AB}$ vektor o'qqa perpendikulyar bo'lgandagina uning proyeksiyasi nolga teng degan xulosa kelib chiqadi. (1) formulaga ko'ra

$$\overline{A_1 B_1} = x \bar{e} \quad (3)$$

deb yoza olamiz. Bu tenglikdagi x son $\overline{AB}$ vektorning proyeksiyasidir, ya'ni

$$x = np_l \overline{AB}.$$

Vektorning o'qdagi proyeksiyasi xossalari.

1^o. Vektorlarning yig'indisining biror o'qdagi proyeksiyasi qo'shiluvchi vektorlarning shu o'qdagi proyeksiyalari yig'indisiga teng, ya'ni

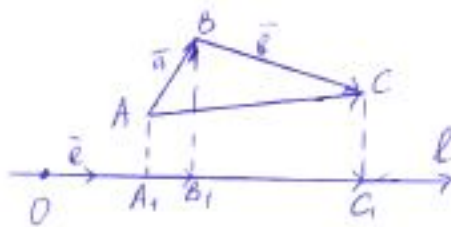
$$np_l (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \dots + \bar{d}) = np_l \bar{a} + np_l \bar{b} + np_l \bar{c} + \dots + np_l \bar{d} \quad (4)$$

Isbot. Isbotni ikki vektor uchun keltiramiz, ya'ni

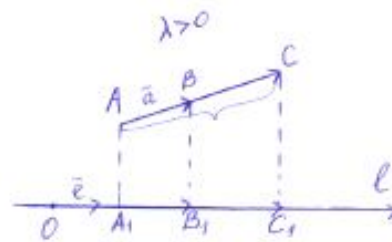
$$np_l (\bar{a} + \bar{b}) = np_l \bar{a} + np_l \bar{b} \quad (5)$$

ekanini isbot qilamiz. Agar $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{BC}$ bo'lsin desak, u holda

$\bar{a} + \bar{b} = \overline{AC}$ bo'ladi (5-chizma).



5-chizma



6-chizma

5-chizmadan, (3) ni e'tiborga olsak,

$$\overline{A_1B_1} = x_1 \bar{e}, \quad \overline{B_1C_1} = x_2 \bar{e}, \quad \overline{A_1C_1} = x_3 \bar{e}$$

ni yoza olamiz. Bunda $x_1 = np_l \bar{a}$, $x_2 = np_l \bar{b}$, $x_3 = np_l (\bar{a} + \bar{b})$. Endi $x_3 = x_1 + x_2$

ekanini ko'rsatamiz. Ravshanki, $x_3 \bar{e} = \overline{A_1C_1} = \overline{A_1B_1} +$

$+\overline{B_1C_1} = x_1 \bar{e} + x_2 \bar{e} = (x_1 + x_2) \bar{e}$. Shunday qilib, (5) formula isbot qilindi.

Qo'shiluvchilar soni ikkitadan ortiq bo'lganda ham isbot shunga o'xshash olib boriladi.

2^o. vektorning songa ko'paytmasining proyeksiyasi shu vektor proyeksiyasini o'sha songa ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$np_l(\lambda \bar{a}) = \lambda np_l \bar{a}, \quad \lambda \neq 0. \quad (6)$$

Isbot. $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AC} = \lambda \bar{a}$ bo'lsin deb faraz qilaylik. A, B, C nuqtalarning l o'qdagi proyeksiyalari A_1, B_1, C_1 bo'lsin (6-chizma). AA_1, BB_1, CC_1 kesmalar o'zaro parallel, shuning uchun $\overline{A_1C_1} = \lambda \overline{A_1B_1}$. (3) formulaga ko'ra

$$\overline{A_1B_1} = x \bar{e}, \quad \overline{A_1C_1} = x_1 \bar{e},$$

ya'ni $x = np_l \bar{a}$, $x_1 = np_l(\lambda \bar{a})$ deb belgilasa

$$x_1 \bar{e} = \overline{A_1C_1} = \lambda \overline{A_1B_1} = \lambda (x \bar{e}) = (\lambda x) \bar{e},$$

bundan esa $x_1 = \lambda x$ kelib chiqadi. Xossaning isboti tugadi.

3^o. Teng vektorlarning bitta o'qqa proyeksiyalari o'zaro tengdir.

Isboti unchalik qiyin emas.

2-Ta'rif. l o'q bilan $\bar{a}$ vektor orasidagi burchak deb, l o'qning birlik vektori $\bar{e}$ bilan $\bar{a}$ vektor orasidagi burchakka aytiladi.

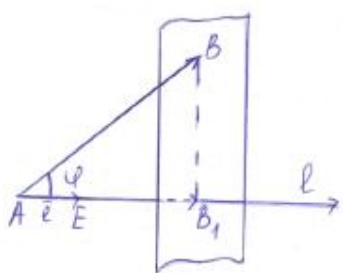
4^o. Vektorning o'qdagi proyeksiyasining kattaligi shu vektor uzunligini vektor va o'qning musbat yo'nalishi orasidagi φ burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$np_l \bar{a} = |\bar{a}| \cos \varphi. \quad (7)$$

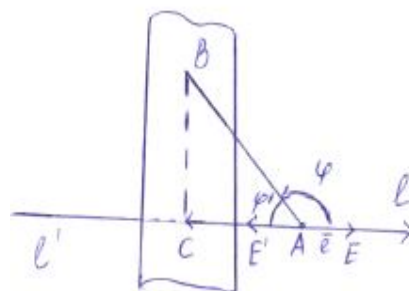
Isbot. Aytaylik, $A \in l$, $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AE} = \bar{e}$, B_1 nuqta B ning l o'qdagi proyeksiyasi bo'lsin. $\overline{AB}$ vektor bilan o'q orasidagi burchak o'tkir bo'lsa (7-chizma), proyeksiya ta'rifiga ko'ra $np_l \overline{AB} = +|\overline{AB_1}|$ bo'ladi. ABB_1 uchburchakdan

$$|\overline{AB_1}| = |\overline{AB}| \cos \varphi = |\bar{a}| \cos \varphi, \text{ ya'ni}$$

$$np_i \bar{a} = |\bar{a}| \cos \varphi.$$



7-chizma



8-chizma

Agar φ burchak o'tmas bo'lsa, u holda

$$np_i \overline{AB} = -|\overline{AC}|. \quad (8)$$

8-chizmadagi ABC uchburchakdan

$$|\overline{AC}| = |\bar{a}| \cos \varphi', \quad (9)$$

bu yerda $\varphi' = \pi - \varphi$. Bundan

$$\cos \varphi' = -\cos \varphi. \quad (10)$$

(8)-(10) formulalardan izlangan (7) formula kelib chiqadi.

3. Chiziqli bog'liq va chiziqli erkli vektorlar.

3-Ta'rif. Ixtiyoriy $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ vektorlar sistemasi va $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin, u holda

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n \quad (11)$$

vektor $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ **vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi** deb ataladi, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar **bu chiziqli kombinatsiyaning koeffitsientlari** deyiladi.

4-Ta'rif. Agar kamida biri noldan farqli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$ sonlar mavjud bo'lib, chiziqli kombinatsiya nol vektor, ya'ni

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n = \bar{0} \quad (12)$$

bo'lsa, u holda $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ vektorlar sistemasi **chiziqli bog'liq** va (12) munosabat $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlarning barchasi nolga teng bo'lgan holda bajarilsa, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ vektorlar **chiziqli erkli** deb ataladi.

2-teorema. Agar $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ vektorlar sistemasining bir vektori nol vektor bo'lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'ladi.

Isbot: $\bar{a}_k = \bar{0}$ bo'lsin, u holda $\alpha_k \neq 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$ sonlar uchun (12) munosabat o'rinli bo'ladi. Demak, 4-Ta'rifga asosan $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ vektorlar chiziqli bog'liq. **Teorema isbotlandi.**

3-teorema. Agar $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, sistemaning kamida bitta vektori uning qolgan vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi.

Isbot: $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsin, u holda 4-Ta'rifga ko'ra kamida bitta noldan farqli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$ sonlar mavjud bo'lib, (12) munosabat o'rinli bo'ladi. Aniqlik uchun $\alpha_k \neq 0$ bo'lsin, u holda (12) munosabatni α_k ga hadma-had bo'lib, $\bar{a}_k$ vektorni topsak,

$$\bar{a}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} \bar{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k} \bar{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k} \bar{a}_n$$

tenglikka ega bo'lamiz. **Teorema isbotlandi.**

4-teorema. Ikkita vektorning chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning kollinear bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot: *Zarurligi.* $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsin, u holda kamida biri noldan farqli $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ sonlar mavjud bo'lib,

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 = \bar{0} \quad (13)$$

bo'ladi. Aniqlik uchun $\alpha_1 \neq 0$ bo'lsin, u holda (13) munosabatdan $\bar{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \bar{a}_2$,

$\lambda = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ belgilashni kiritsak, $\bar{a}_1 = \lambda \bar{a}_2$ bo'ladi, bundan oldingi mavzudagi teorema asosan $\bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2$ ekani kelib chiqadi.

Yetarliligi: $\bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2$ bo'lsin, u holda shunday $\lambda \in R$ son mavjudki, $\bar{a}_1 = \lambda \bar{a}_2$ yoki $(-1)\bar{a}_1 + \lambda \bar{a}_2 = \bar{0}$; shu mavzudagi 4-Ta'rifga ko'ra $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ vektorlar chiziqli bog'liq. **Teorema isbotlandi.**

5-teorema. Uch vektor chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning komplanar bo'lishi zarur va yetarli.

6-teorema. Har qanday to'rtta $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ vektor chiziqli bog'liqdir.

4. Vektor fazoning bazisi va o'lchovi.

5-Ta'rif. Vektor fazoning ma'lum tartibda olingan $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n \in V$ vektorlari sistemasi chiziqli erkli bo'lib, shu vektorning har bir vektori $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ lar orqali chiziqli ifodalansa, bu vektorlar sistemasi vektor fazoning **bazisi** deyiladi va $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ orqali belgilanadi.

6-Ta'rif. Agar bazisning har bir vektori birlik vektor bo'lib, ularning har ikkitasi o'zaro perpendikulyar bo'lsa, bunday bazis **ortonormalangan** deyiladi. Bazisning vektorlari soni vektor fazoning **o'lchovi** deb ataladi.

7-Teorema. V_3 da har qanday to'rtta vektor chiziqli bog'liq bo'ladi.

Tayanch iboralar.

Proyeksiya, chiziqli bog'liq, chiziqli erkli, bazis, o'lchov.

Nazorat uchun savollar.

1. Vektorning o'qdagi proyeksiyasini ta'riflang.
2. Chiziqli kombinatsiya nima?
3. Chiziqli bog'liq vektorlar deb nimaga aytiladi?
4. Chiziqli erkli vektorlar deb nimaga aytiladi?
5. Bazis deb nimaga aytiladi?
6. Vektor fazo bazisi va o'lchovi nimani anglatadi?

3-mavzu: Fazoda affin va dekart koordinatalar sistemasi.

Reja.

1. Fazoda affin sistema.
2. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.
3. To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi.
5. Vektorning berilgan bazisga nisbatan koordinatalari.
6. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar.

1. Fazoda affin sistema. Koordinatalarning affin sistemasi (affin reperi) biror O nuqta va shu nuqtadan qo'yilgan ma'lum tartibda olingan uchta nokomplanar $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vektorlar sistemasidan iborat, bu sistemani $\beta(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ ko'rinishda belgilaymiz. O nuqtadan o'tib, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vektorlar bilan aniqlanadigan to'g'ri chiziqlar mos ravishda Ox, Oy, Oz deb belgilab, ular **koordinata o'qlari**, birinchisi **abstsissalar o'qi**, ikkinchisi **ordinatalar o'qi** va, nihoyat, uchinchi **applikatalar o'qi** deb ataladi. Bu o'qlarning har ikkitasi bilan aniqlanadigan uchta tekislik xOy, xOz, yOz deb belgilab, ular **koordinata tekisliklari** deb ataladi.

β sistema berilganda, fazodagi har bir M nuqtaga aniq bir $\overline{OM}$ vektorni doimo mos keltirish mumkin, ya'ni boshi koordinatalar boshida, oxiri esa berilgan M nuqtada bo'lgan vektorni mos keltiradi.

$\overline{OM}$ vektorning koordinatalar (x, y, z) bo'lsa, u holda bu uchta x, y, z son M nuqtaning affin reperdagi koordinatalari bo'ladi:

$$\overline{OM}(x, y, z) \Leftrightarrow M(x, y, z). \quad (1)$$

Demak, fazo nuqtalari to'plami bilan ma'lum tartibda olingan haqiqiy sonlar uchliklari to'plami orasida biektiv moslik mavjud.

Berilgan nuqtaning koordinatalarini topish uchun shu nuqta radius-vektorining koordinatalarini topish kifoya va aksincha.

Umuman, $M(a, b, c)$ nuqtani yasash uchun, ya'ni

$$\overline{OM} = a \bar{e}_1 + b \bar{e}_2 + c \bar{e}_3 \quad (2)$$

vektorning oxirini topish uchun quyidagi qoidadan foydalaniladi: koordinatalar boshidan Ox o'q bo'yicha $a \bar{e}_1$ vektor, uning oxiridan Oy o'qqa parallel holda $b \bar{e}_2$ vektor qo'yiladi, so'ngra uning oxiridan $c \bar{e}_3$ vektor yasalsa, shu vektorning oxiri izlangan nuqta bo'ladi.

Uchta koordinatalar tekisligi birgalikda fazoni sakkiz qismga ajratadi, ularning har biri *oktantalar* deb ataladi. Quyidagi jadvalda oktantalar va undagi nuqta koordinatalarining ishoralari berilgan.

oktantalar	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
koordinatalar								
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

2. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.

Biror affin reperida $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ($M_1 \neq M_2$) nuqtalar va biror haqiqiy λ ($\lambda \neq -1$) son berilgan bo'lsin.

Ta'rif. M nuqta uchun

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{M M_2} \quad (3)$$

shart bajarilsa, M nuqta $M_1 M_2$ **kesmani** λ **nisbatda bo'ladi** deyiladi.

M_1, M_2 nuqtalarning koordinatalari orqali M nuqtaning x, y, z koordinatalarini topaylik. (2) ga asosan

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = (x - x_1)\bar{e}_1 + (y - y_1)\bar{e}_2 + (z - z_1)\bar{e}_3, \\ \overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1). \\ \overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM} = (x_2 - x)\bar{e}_1 + (y_2 - y)\bar{e}_2 + (z_2 - z)\bar{e}_3, \\ \overrightarrow{MM_2}(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z). \end{aligned}$$

Bu ifodalarni (3) ga qo'yib va $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ ning chiziqli erkliligini e'tiborga olsak,

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Bulardan

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (4)$$

Berilgan kesmani berilgan nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini topish formulalari shulardir. M nuqta $M_1 M_2$ kesmaning o'rtasi bo'lsa, (4) formulalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (5)$$

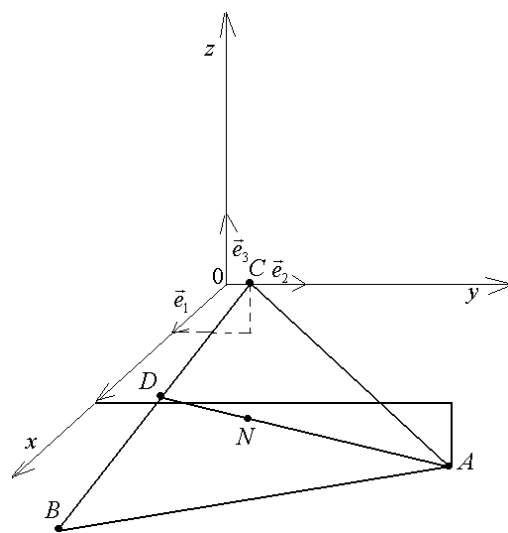
Bu formulalar kesma o'rtasining koordinatalarini topish formulalaridir.

Misol. $\beta(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ affin reperda $A(2, 3, -1)$, $B(3, 0, -1)$, $C(1, 1, 1)$ nuqtalarni yasab, ABC uchburchak og'irlik markazining (medianalarining kesishgan nuqtasi) koordinatalarini toping.

Yechish. $A(2, 3, -1) \Rightarrow \overrightarrow{OA}(2, 3, -1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \overrightarrow{OA} = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - \bar{e}_3,$

$$\begin{aligned} B(3, 0, -1) &\Rightarrow \overrightarrow{OB}(3, 0, -1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overrightarrow{OB} = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_3, \end{aligned}$$

$$C(1, 1, 1) \Rightarrow \overrightarrow{OC}(1, 1, 1) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3.$$



1-chizma

A, B, C nuqtalarni yasash natijasida 1-chizmadagi ABC uchburchak hosil qilinadi. BC kesmaning o'rtasi D ning koordinatalarini topaylik:

$$x = \frac{3+1}{2} = 2, \quad y = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{-1+1}{2} = 0, \quad D\left(2, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Medianalarning kesishgan nuqtasi AD ni A dan boshlab $\lambda = 2:1$ nisbatda bo'lgani uchun izlangan N nuqta AD kesmani $\lambda = 2:1$ nisbatda bo'ladi, ya'ni

$$x = \frac{2+2 \cdot 2}{2+1} = 2, \quad y = \frac{3+2 \cdot \frac{1}{2}}{2+1} = \frac{4}{3}, \quad z = \frac{-1+2 \cdot 0}{2+1} = -\frac{1}{3}.$$

$$N\left(2, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

3. Fazoda to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi.

Affin sistemasining xususiy hollaridan biri to'g'ri burchakli dekart sistemasidir.

Affin sistemasidagi bazis vektorlar ortonormalangan bo'lsa, ya'ni ularning har ikkitasi o'zaro perpendikulyar bo'lib, har biri birlik vektor bo'lsa, $(O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ dekart reperi hosil qilinadi, bu yerda

$$\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1, \quad (6)$$

$$\bar{i} \bar{j} = \bar{j} \bar{k} = \bar{i} \bar{k} = 0. \quad (7)$$

Bu reperda metrik xaraktyerdagi masalalarni yechish ancha qulay,

a) $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ vektorning uzunligini hisoblaylik.

$$|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \quad (8)$$

b) Ikki $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorning skalyar ko'paytmasi quyidagicha

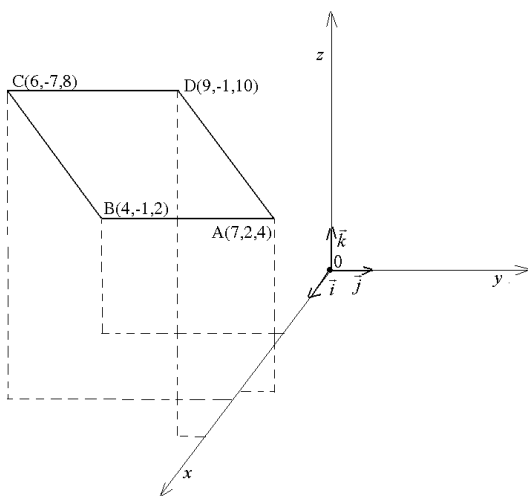
$$\bar{a} \bar{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (9)$$

c) Shu ikki vektor orasidagi burchakning kosinusi:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \bar{b}}{|\bar{a}| |\bar{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (10)$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsa, ular orasidagi $\rho(M_1, M_2) = |\overline{M_1 M_2}|$ masofani topish mumkin:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (11)$$



2 – chizma

Misol. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ reperda uchlari $A(7, 2, 4), B(4, -4, 2),$

$C(6, -7, 8), D(9, -1, 10)$ nuqtalarda bo'lgan to'rtburchakning kvadrat ekanligini isbotlang.

Yechish. Avvalo $\overline{AB}, \overline{DC}$ vektorlarning koordinatalarini topaylik:

$$\overline{AB} = (-3, -6, -2),$$

$$\overline{DC} = (-3, -6, -2),$$

bulardan ko'rinadiki, $\overline{AB} = \overline{DC}$, demak, $ABCD$ to'rtburchak parallelogramm ekan, uning kvadrat ekanligini ko'rsatish uchun diagonallari o'zaro teng va perpendikulyar ekanligini isbotlash kerak (2-chizma). Haqiqatan ham, $\rho(A, C)$ va $\rho(D, B)$ ni (11) formula bo'yicha hisoblasak,

$$\rho(A, C) = \sqrt{(6-7)^2 + (-7-2)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{1+81+16} = \sqrt{98},$$

$$\rho(D, B) = \sqrt{(4-9)^2 + (-4+1)^2 + (2-10)^2} = \sqrt{25+9+64} = \sqrt{98},$$

bundan

$$\rho(A, C) = \rho(D, B).$$

$\overline{AC}(-1, -9, 4), \overline{DB}(-5, -3, -8)$ bo'lgani uchun (9) ga asosan:

$$\overline{AC} \cdot \overline{DB} = (-1)(-5) + (-9)(-3) + 4(-8) = 5 + 27 - 32 = 0,,$$

demak,

$$\overline{AC} \perp \overline{DB}.$$

4.Vektorning berilgan bazisga nisbatan koordinatalari.

$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ V_3 vektor fazoning biror tayin bazisi bo'lsin. Ixtiyoriy $\vec{a} \in V_3$ vektorni olamiz. U holda shunday $x, y, z \in R$ haqiqiy sonlar mavjudki,

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \quad (12)$$

Agar $\vec{a}$ vektor (12) ko'rinishda ifodalansa, $\vec{a}$ vektor B bazisning vektorlari bo'yicha **yoyilgan** deyiladi.

Teorema. V_3 vektor fazoda har qanday vektor tayinlangan $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ bazis vektorlari bo'yicha yagona yoyilmaga ega.

Isbot. Faraz qilaylik, $\bar{a}$ vektor $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ bazis vektorlari bo'yicha

$$\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$$

yoyilmadan boshqa yana

$$\bar{a} = x'\bar{e}_1 + y'\bar{e}_2 + z'\bar{e}_3 \quad (13)$$

Yoyilmaga ham ega bo'lsin. (12) tenglikdan (13) tenglikni hadlab ayirib ushbu munosabatga ega bo'lamiz:

$$(x' - x)\bar{e}_1 + (y' - y)\bar{e}_2 + (z' - z)\bar{e}_3 = \bar{0}.$$

Bu tenglikda $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vektorlar chiziqli erkli bo'lgani uchun $x' - x = 0, y' - y = 0, z' - z = 0$. Bundan $x' = x, y' = y, z' = z$. Demak, $\bar{a}$ vektor uchun tanlangan $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ bazisda (12) yoyilmadan boshqa ko'rinishdagi yoyilma mavjud emas. **Teorema isbotlandi.**

Ta'rif. (12) yoyilmadagi x, y, z sonlar $\bar{a}$ vektorning $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ bazisga nisbatan **koordinatalari** deyiladi va $\bar{a}(x, y, z)$ bilan belgilanadi.

Shunday qilib,

$$\bar{a}(x, y, z) \Leftrightarrow \bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3.$$

5. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar. V_3 vektor fazodagi $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ bazisga nisbatan $\bar{a}, \bar{b}$ vektorlar ushbu koordinatalarga ega bo'lsin:

$$\bar{a}(x_1, y_1, z_1) \Rightarrow \bar{a} = x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_2 + z_1\bar{e}_3;$$

$$\bar{b}(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \bar{b} = x_2\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + z_2\bar{e}_3.$$

1. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarni qo'shamiz:

$$\bar{a} + \bar{b} = (x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_2 + z_1\bar{e}_3) + (x_2\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + z_2\bar{e}_3).$$

Bu tenglikdan vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari xossalariga ko'ra

$$\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2)\bar{e}_1 + (y_1 + y_2)\bar{e}_2 + (z_1 + z_2)\bar{e}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\bar{a} + \bar{b})(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Demak, ikki vektor yig'indisining koordinatalari qo'shiluvchi vektorlar mos koordinatalarining yig'indisidan iborat.

2. Shuning singari $\bar{a} - \bar{b}$ ning koordinatalari:

$$(\bar{a} - \bar{b})(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

3. $\{x_1, y_1, z_1\}$ vektoring λ songa ko'paytmasining koordinatalari:

$$\lambda \bar{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

Tayanch iboralar.

Affin reper, radius-vektor, koordinata o'qlari, koordinata tekisliklari, applikata, oktanta.

Nazorat uchun savollar.

1. Qanday sistemaga fazoda affin koordinatlar sistemasi deyiladi?
2. Qanday sistemaga fazoda dekart koordinatlar sistemasi deyiladi?
3. Oktanta deb nimaga aytiladi?
4. Fazoda $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarni tutishtiruvchi AB kesmani λ nisbatda bo'luvchi $C(x, y, z)$ nuqtaning koordinatalarini toping.
5. Vektorning berilgan bazisga nisbatan koordinatalarini ta'riflang.

4-mavzu: Vektorlarning skalyar ko'paytmasi. Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari.

Reja:

1. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi va uning xossalari.
2. Skalyar ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi.
3. Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari.

1. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi va uning xossalari. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar V_3 vektor fazoning ixtiyoriy ikki vektori bo'lsin.

Ta'rif. $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusini ko'paytirishdan hosil qilingan son bu **vektorlarning skalyar ko'paytmasi** deb ataladi.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $\vec{a} \vec{b}$ yoki $(\vec{a} \vec{b})$ ko'rinishda belgilanadi.

Demak, $\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$, $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$.

Ikki vektorni skalyar ko'paytirish amali quyidagi xossalarga ega.

1°. Skalyar ko'paytirish o'rin almashtirish qonuniga bo'ysunadi:

$$\vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}.$$

Isbot. Ta'rifga ko'ra

$$\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos (\vec{a}, \vec{b}),$$

$$\vec{b} \vec{a} = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos (\vec{b}, \vec{a}).$$

Kosinus juft funktsiya ekanligini e'tiborga olsak, $\cos (\vec{a}, \vec{b}) = \cos (\vec{b}, \vec{a})$ bundan $\vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$. **Isbot tugadi.**

2°. Har qanday vektorning o'z-o'ziga skalyar ko'paytmasi bu vektor uzunligining kvadratiga teng:

$$\vec{a} \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Isbot. Skalyar ko'paytma ta'rifidan,

$$\vec{a} \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos (\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \cos 0 = |\vec{a}|^2. \text{ Isbot tugadi.}$$

$\vec{a} \vec{a}$ ifoda $|\vec{a}|^2$ bilan belgilanadi va $\vec{a}$ vektorning **skalyar kvadrati** deb ataladi.

U holda $\vec{a} \vec{a} = |\vec{a}|^2$ tenglikdan $\vec{a}$ vektorning uzunligi:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \vec{a}}.$$

3°. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ularning birining uzunligi bilan ikkinchisining birinchisi yo'nalishiga tushirilgan proyeksiyasi ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| np_a \vec{b} = |\vec{b}| np_b \vec{a} \quad (\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0).$$

Isbot:

$$\bar{a} \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| np_{\bar{a}} \bar{b},$$

$$\bar{a} \bar{b} = |\bar{b}| |\bar{a}| \cos(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{b}| np_{\bar{b}} \bar{a}.$$

(bu yerda ortogonal proyeksiya ko'zda tutilgan). **Isbot tugadi.**

4°. Skalyar ko'paytirish skalyar ko'paytuvchiga nisbatan guruhlanish qonuniga bo'ysunadi, ya'ni

$$(m \bar{a}) \bar{b} = m(\bar{a} \bar{b}), \text{ bu yerda } m \in R.$$

Isbot: Yuqoridagi 1°, 3° – xossalarga ko'ra

$$(m \bar{a}) \bar{b} = \bar{b} (m \bar{a}) = |\bar{b}| np_{\bar{b}} (m \bar{a}) = |\bar{b}| m np_{\bar{b}} \bar{a} = m(\bar{b} \bar{a}) = m(\bar{a} \bar{b}).$$

Isbot tugadi.

5°. Ko'paytuvchi vektorlar perpendikulyar bo'lsa, skalyar ko'paytma nolga teng:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \bar{b} = 0.$$

Isbot: $\bar{a} \perp \bar{b}$. Bu holda $(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \bar{a} \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0.$

Isbot tugadi.

6°. Skalyar ko'paytirish taqsimot qonuniga bo'ysunadi, ya'ni har qanday $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlar uchun

$$(\bar{a} + \bar{b}) \bar{c} = \bar{a} \bar{c} + \bar{b} \bar{c}. \quad (1)$$

Isbot: (1) munosabatning $\bar{c} = \bar{0}$ hol uchun o'rinli ekanligi ravshan. $\bar{c} \neq \bar{0}$ bo'lsin. Yuqoridagi 1°, 3° – xossalarga ko'ra

$$(\bar{a} + \bar{b}) \bar{c} = \bar{c} (\bar{a} + \bar{b}) = |\bar{c}| np_{\bar{c}} (\bar{a} + \bar{b}) = |\bar{c}| (np_{\bar{c}} \bar{a} + np_{\bar{c}} \bar{b}) = \bar{c} \bar{a} + \bar{c} \bar{b} = \bar{a} \bar{c} + \bar{b} \bar{c}.$$

Isbot tugadi.

7°. Ortonormalangan $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ bazis uchun

$$\bar{e}_i \bar{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ da} \\ 1, & i = j \text{ da} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Isbot: Skalyar ko'paytma ta'rifidan

$$\bar{e}_i \bar{e}_j = |\bar{e}_i| |\bar{e}_j| \cos(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ da} \\ 1, & i = j \text{ da} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Isbot tugadi.

Ta'rif. Ikkita vektor *ortogonal* deyiladi, agar ular orasidagi burchak 90° bo'lsa.

2. Skalyar ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi.

V_3 vektor fazoda ortonormalangan $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ bazisni olaylik. $\bar{a}, \bar{b}$ vektorlar bu bazisga nisbatan (x_1, y_1, z_1) va (x_2, y_2, z_2) koordinatalarga ega bo'lsin:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= x_1 \bar{e}_1 + y_1 \bar{e}_2 + z_1 \bar{e}_3, \\ \bar{b} &= x_2 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + z_2 \bar{e}_3.\end{aligned}$$

Yuqoridagi 4^0 , 6^0 – xossalarga asosan

$$\begin{aligned}\bar{a} \bar{b} &= (x_1 \bar{e}_1 + y_1 \bar{e}_2 + z_1 \bar{e}_3)(x_2 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + z_2 \bar{e}_3) = \\ &= x_1 x_2 \bar{e}_1^2 + y_1 y_2 \bar{e}_2^2 + z_1 z_2 \bar{e}_3^2 + (x_2 y_1 + x_1 y_2) \bar{e}_1 \bar{e}_2 + \\ &\quad + (z_1 y_2 + y_1 z_2) \bar{e}_2 \bar{e}_3 + (x_1 z_2 + z_1 x_2) \bar{e}_1 \bar{e}_3\end{aligned}$$

munosabatni yoza olamiz, yuqoridagi 7-xossani e'tiborga olsak,

$$\bar{a} \bar{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (2)$$

Demak, koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalyar ko'paytmasi bu vektorlar mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

Natijalar. 1. $\bar{a}(x, y, z)$ vektorning uzunligi uning koordinatalari kvadratlarining yig'indisidan olingan arifmetik kvadrat ildizga teng:

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2. Ikki $\bar{a}$, $\bar{b}$ vektor orasidagi burchak ushbu formula bo'yicha hisoblanadi:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \bar{b}}{|\bar{a}| |\bar{b}|},$$

bu yerda φ – $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchak.

Koordinatalari bilan berilgan $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar uchun

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \bar{b}}{|\bar{a}| |\bar{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (3)$$

3. $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning perpendikulyarlik sharti quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

Haqiqatan, $\bar{a} \perp \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \bar{b} = 0$. (1) dan

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

3. Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari.

Odatda vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan α , β , γ burchaklarining kosinuslari uning **yo'naltiruvchi kosinuslari** deyiladi.

$\bar{a}(x, y, z)$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari uning koordinatalari orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (4)$$

Haqiqatan, masalan, $\cos \alpha$ uchun formula quyidagicha isbotlanadi:

$$x = np_{\vec{e}_1} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha; \quad \cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Birlik vektorning koordinatalari uning yo'naltiruvchi kosinuslaridan iborat, ya'ni agar $|\vec{a}_0| = 1$ bo'lsa, $\vec{a}_0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$.

(4) ga ko'ra

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (5)$$

formulani hosil qilish mumkin, ya'ni vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari kvadratlarning yig'indisi birga teng.

Misol. 1) $\vec{a} (1, -1, 0)$, $\vec{b} (1, -2, 2)$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning koordinatalarini ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasi (3) ga qo'yamiz:

$$\cos \varphi = \frac{1 + 2 + 0}{\sqrt{1+1+0} \cdot \sqrt{1+4+4}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bundan

$$\varphi = 45^\circ.$$

2) $\vec{a} (1, 3, 2)$, $\vec{b} (3, 1, -3)$, $\vec{c} (2, 0, -2)$ vektorlarning qaysi jufti perpendikulyar?

Tayanch iboralar.

Skalyar ko'aytma, skalyar kvadrati, ortogonal, perpendikulyarlik sharti, yo'naltiruvchi kosinuslar.

Nazorat uchun savollar.

1. Ikki vektorning skalyar ko'aytmasi deb nimaga aytiladi?
2. Vektor ko'aytma xossalari aytib bering.
3. Vektorlarning perpendikulyarlik shartini ta'riflang.
4. Vektorlarning kollinearlik shartini aytib bering.
5. Vektorlar orasidagi burchak deganda nimani tushunasiz?

5-mavzu: Tekislikda affin va dekart koordinatalar sistemalari.

Reja.

1. Tekislikda koordinatalarning affin sistemasi.
2. Tekislikda kesmani berilgan nisbatda bo'lish.
3. Tekislikda Dekart koordinatalarining to'g'ri burchak sistemasi. Ikki nuqta orasidagi munosabat.

Tekislikdagi nuqtaning o'rnini ma'lum sonlar yordamida aniqlashga imkon beradigan usul ko'rsatilgan bo'lsa, tekislikda koordinatalar sistemasi berilgan deb aytamiz. Tekislikda koordinatalarning turli sistemalari mavjud bo'lib, ulardan biz soddasini kiritamiz.

1. Tekislikda koordinatalarning affin sistemasi.

Tekislikda biror O nuqtadan qo'yilgan nokollinear ixtiyoriy ikki $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlar sistemasi $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ bazisni aniqlaydi. Tekislikda $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ vektorlar orqali o'tuvchi a, b ($a \cap b = O$) to'g'ri chiziqlarni olamiz.

Ta'rif. Musbat yo'nalishlari mos ravishda $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ vektorlar bilan aniqlanuvchi a, b to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan sistema tekislikda koordinatalarning **affin sistemasi** yoki **affin reper** deyiladi va u $\beta = (O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ ko'rinishida belgilanadi. $O = a \cap b$ nuqta **koordinatalar boshi**, $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ vektorlar esa **koordinata vektorlari** deyiladi. Musbat yo'nalishlari $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ vektorlar bilan aniqlangan a, b to'g'ri chiziqlar mos ravishda **abstsissalar** va **ordinatalar o'qlari** deb ataladi, ularni Ox, Oy bilan belgilaymiz.

Demak, affin reper O nuqta va $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ bazis vektorlarning berilishi bilan to'liq aniqlanadi.

Tekislikda $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ affin reper berilgan bo'lsin. Shu tekislikning M nuqtasi uchun $\overline{OM}$ vektor M nuqtaning **radius-vektori** deyiladi. $\overline{OM}$ vektor quyidagicha ifodalanadi:

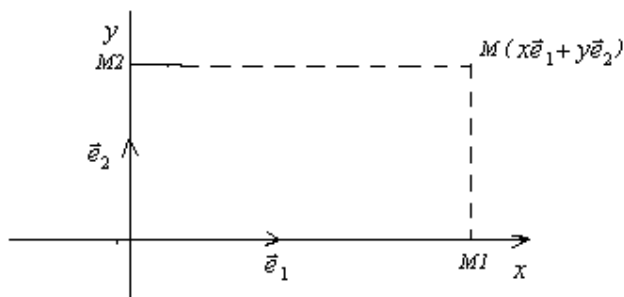
$$\overline{OM} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2.$$

Ta'rif. $\overline{OM}$ radius-vektorning x, y koordinatalari M nuqtaning $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ **affin reperdagi koordinatalari** deyiladi va $M(x, y)$ bilan belgilanadi. Bunda x son M nuqtaning **abstsissalar** yoki **birinchi koordinatasi**, y son esa M nuqtaning **ordinatasi** yoki **ikkinchi koordinatasi** deyiladi.

Xullas, tekislikda koordinatalarning affin sistemasi berilsa, undagi istalgan M nuqtaga uning koordinatalari bo'lmish bir juft haqiqiy x, y son mos keladi va, aksincha.

Haqiqatan, tanlangan $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ affin reporning abstsissalar o'qiga koordinatalar boshidan boshlab $\overline{OM}_1 = x\bar{e}_1$ vektorni, ordinatalar o'qiga esa $\overline{OM}_2 = y\bar{e}_2$ vektorni qo'yib(1-chizma), hosil qilingan M_1, M_2 nuqtalardan mos ravishda Oy va Ox o'qlarga

paralel to'g'ri chiziqlar o'tkazsak, ularning kesishgan nuqtasi izlanayotgan M nuqta bo'ladi, chunki $\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$.



1-chizma

Shunday qilib, $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ reperga nisbatan

$$M(x, y) \Leftrightarrow \overline{OM} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2. \quad (1)$$

M nuqtaning abstsissasi $x = 0$ bo'lsa, (1) dan $\overline{OM} = y\bar{e}_2 \Rightarrow \overline{OM} \parallel \bar{e}_2 \Rightarrow M$ nuqta Oy o'qda yotadi. Xuddi shuningdek, M nuqtaning ordinatasi $y = 0$ bo'lsa, M nuqta abstsissalar o'qida yotadi.

Shunday qilib, abstsissalar o'qida yotgan nuqtaning koordinatalari $x, 0$ va ordinatalar o'qida yotgan nuqtaning koordinatalari $0, y$ bo'ladi. Koordinatlar boshining koordinatalari $0, 0$. Koordinata o'qlari butun tekislikni 4 ta koordinat choraklarga ajratadi.

$M(x, y)$ nuqta koordinata o'qlarida yotmasa, uning qaysi chorakda yotishini x, y ning ishoralariga qarab qaysi chorakda yotishi aniqlanadi.

Haqiqatan, M nuqta

$x > 0, y > 0$ bo'lgan holda 1-chorakka,

$x < 0, y > 0$ bo'lgan holda 2-chorakka,

$x < 0, y < 0$ bo'lgan holda 3-chorakka,

$x > 0, y < 0$ bo'lgan holda 4-chorakka

tegishli bo'ladi.

Vektorning boshi va oxirining koordinatalari biror affın reperga nisbatan ma'lum bo'lsa, bu vektorning shu bazisdagi koordinatalarini topishni ko'raylik. $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ reperga nisbatan $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ nuqtalarni olaylik. Bu holda $\overline{OA} = x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_2$, $\overline{OB} = x_2\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2$, $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ va $\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{e}_1 + (y_2 - y_1)\bar{e}_2$. Bundan

$$\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

ya'ni vektorning koordinatalari shu vektor oxirining koordinatalaridan mos ravishda boshining koordinatalarini ayirish bilan hosil qilinadi.

2. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.

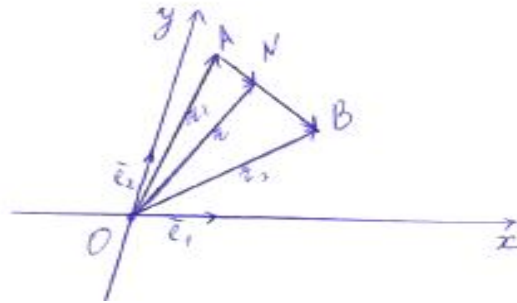
A, B - tekislikdagi turli ikki nuqta bo'lsin, N esa AB to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $\overline{AN}, \overline{NB}$ vektorlar kollinear bo'lgani uchun shunday λ son mavjud bo'ladiki,

$$\overline{AN} = \lambda \overline{NB}. \quad (2)$$

Agar N nuqta AB kesmada yotsa, ya'ni kesmani ichki ravishda bo'lsa, $\overline{AN}, \overline{NB}$ vektorlar bir xil yo'nalishli bo'lib, $\lambda > 0$ va N nuqta AB kesmada yotmasdan, lekin AB to'g'ri chiziqda yotsa, $\overline{AN}, \overline{NB}$ vektorlar qarama-qarshi yo'nalishli bo'lib, $\lambda < 0$. Biz N nuqta bu holda AB kesmani **tashqi ravishda bo'ladi**, deb aytamiz. λ son uchta A, B, N nuqtaning **oddiy nisbati** deb ataladi. Biz uni $(AB, N) = \lambda$ bilan belgilaymiz.

$$(2) \text{ dan } \lambda = (AB, N) = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}.$$

Tekislikda $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ reporni olaylik. Bu reperda A, B, N nuqtalar $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ va $N(x, y)$ koordinatalarga ega bo'lsin. Bu nuqtalarning radius-vektorlarini quyidagicha belgilaymiz: $\overline{OA} = \bar{r}_1, \overline{OB} = \bar{r}_2, \overline{ON} = \bar{r}$, u holda $\overline{AN} = \overline{ON} - \overline{OA} = \bar{r} - \bar{r}_1, \overline{NB} = \overline{OB} - \overline{ON} = \bar{r}_2 - \bar{r}$ bo'lib, ularni $\overline{AN} = \lambda \overline{NB}$ ifodaga qo'yamiz:



2-chizma

$\bar{r} - \bar{r}_1 = \lambda (\bar{r}_2 - \bar{r})$ yoki $(1 + \lambda) \bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda \bar{r}_2$, bundan $1 + \lambda \neq 0$ deb farazda

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_1 + \lambda \bar{r}_2}{1 + \lambda} \quad (3)$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bu ifoda bo'luvchi N nuqtaning radius-vektorini aniqlaymiz. (3) ni koordinatalarini yozaylik.

$\bar{r} = x \bar{e}_1 + y \bar{e}_2, \bar{r}_1 = x_1 \bar{e}_1 + y_1 \bar{e}_2, \bar{r}_2 = x_2 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2$ bo'lgani uchun (3) dan

$$x \bar{e}_1 + y \bar{e}_2 = \frac{(x_1 \bar{e}_1 + y_1 \bar{e}_2) + \lambda (x_2 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2)}{1 + \lambda}$$

yoki

$$x \bar{e}_1 + y \bar{e}_2 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \bar{e}_1 + \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \bar{e}_2.$$

$\bar{e}_1, \bar{e}_2$ vektorlarning chiziqli erkliligidan ($\bar{e}_1, \bar{e}_2$ vektorlar oldidagi koeffitsientlarni tenglashtiramiz):

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Bu formulalar orqali berilgan kesmani berilgan λ nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini topish mumkin. Bu yerda albatta $\lambda \neq -1$; $\lambda = -1$, ya'ni $1 + \lambda = 0$ bo'lgan holni biz hozircha qaramaymiz. $\lambda = 1$ bo'lganda N nuqta AB kesmaning o'rtasi bo'lib, bu holda uning koordinatalari quyidagicha aniqlanadi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. Tekislikda Dekart koordinatalarining to'g'ri burchak sistemasi. Ikki nuqta orasidagi munosabat.

Ta'rif. Affin reper $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ ning koordinata vektorlari $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ ortonormalangan bazisni tashkil etsin, ya'ni $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$, $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1$ bo'lsin. Bu holda biz koordinatalarning to'g'ri burchakli sistemasi, qisqacha, **Dekart reperi** berildi deb aytamiz. Bundan reporni $(O, \bar{i}, \bar{j})$ ko'rinishda belgilaymiz. Bu yerda $\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = 1$, $\bar{i} \bar{j} = 0$. Bu holda koordinata o'qlari perpendikulyardir. Dekart reperi affin reporning xususiy holi bo'lgani uchun affin reperga nisbatan o'rinli mulohazalar Dekart reperida ham o'z kuchini saqlaydi.

Ammo Dekart reperidagi ayrim mulohazalar affin reperda doimo o'rinli bo'lavermaydi.

Ta'rif. M_1, M_2 nuqtalar orasidagi **masofa** deb, $\overline{M_1 M_2}$ (yoki $\overline{M_2 M_1}$) vektorning uzunligiga aytiladi.

Demak, ta'rifga ko'ra

$$\rho(M_1, M_2) = |\overline{M_1 M_2}|.$$

Endi koordinatalari bilan berilgan ikki nuqta orasidagi masofani hisoblash formulasini topaylik. Tekislikda $(O, \bar{i}, \bar{j})$ Dekart reperi berilgan bo'lib, bu reperga nisbatan M_1, M_2 nuqtalar ushbu koordinatalarga ega bo'lsin: $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$, u holda $\overline{M_1 M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}(x_2, y_2)$, $\overline{OM_1}(x_1, y_1)$ bo'lib, $\overline{OM_2}$ va $\overline{OM_1}$ vektorlarga ayirmasi bo'lgan $\overline{M_1 M_2}$ vektor ushbu koordinatalarga egadir:

$$\overline{M_1 M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

$\overline{M_1 M_2}$ vektorning uzunligi quyidagigateng:

$$\rho(M_1, M_2) = |\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Demak, berilgan $M_1(x_1, y_1)$ va $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa ushbu formula bo'yicha topiladi:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Tayanch iboralar.

Affin reper, radius-vektor, koordinata boshi, koordinata o'qlari, abstsissa, ordinata.

Nazorat uchun savollar.

1. Qanday sistemaga affin koordinatlar sistemasi deyiladi?
2. Qanday sistemaga dekart koordinatlar sistemasi deyiladi?
3. $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani λ nisbatda bo'luvchi $C(x, y)$ nuqtaning koordinatalarini toping.
4. Agar $C(x, y)$ nuqta AB kesmaning o'rtasi bo'lsa, $C(x, y)$ nuqtaning koordinatalari qanday topiladi?
5. Uchlari $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ va $C(x_3, y_3)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakning yuzini hisoblash formulasini yozing.

6-mavzu: Vektorlarning vektor ko'paytmasi va aralash ko'paytmasi.

Reja.

1. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi.
2. Vektor ko'paytmaning xossalari.
3. Uch vektorning aralash ko'paytmasi. Tetraedrning hajmi. Uch vektorning komplanarlik sharti.

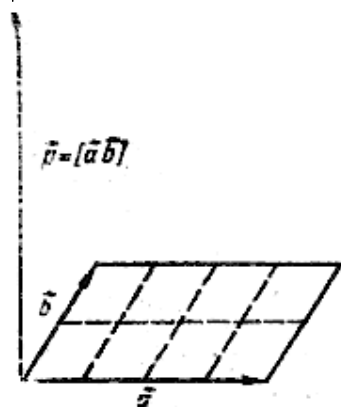
1. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi. Biz 1 bo'limda vektorlar ustida bajariladigan chiziqli amallar (qo'shish, ayirish, vektorni songa ko'paytirish) va ikki vektorning skalyar ko'paytmasi tushunchalari bilan ish ko'rgan edik. Biz endi ikki vektor ustida bajariladigan yangi amalni-vektor ko'paytmani ta'riflaymiz.

Tarif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning **vektor ko'paytmasi** deb quyidagi uchta shartni qanoatlantiradigan $\vec{p}$ vektorga aytiladi:

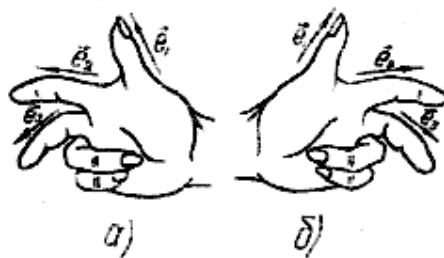
1. $|\vec{p}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.
2. $\vec{p} \perp \vec{a}$, $\vec{p} \perp \vec{b}$.
3. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ vektorlar umumiy boshga keltirilib, $\vec{p}$ ning uchidan $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar yotgan tekislikka qaralganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektor tomonga qarab eng qisqa yo'l bilan burilish soat mili harakatiga teskari bo'lsin. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini $[\vec{a} \vec{b}]$ bilan belgilaymiz: $\vec{p} = [\vec{a} \vec{b}]$.

Avvalo bu ta'rifda keltirilgan uch shartdan har birining geometrik ma'nosini aniqlaylik.

1-shart $\vec{p}$ vektorning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzi necha kvadrat birlik bo'lsa, shuncha uzunlik birligiga tengligini bildiradi (1-chizma) (chunki $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzidir).



1-chizma



2-chizma

2-shart vektor ko'paytma $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bilan aniqlanadigan tekislikka perpendikulyar ekanligini bildiradi.

Nihoyat, 3-shart vektor ko'paytmaning yo'nalishini aniqlaydi.

Odatda $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\vec{a} \vec{b}]$ vektorlar uchligini **o'ng uchlik** deb atash qabul qilingan (fizikadan o'ng qo'l qoidasini eslang). U holda $\vec{a}$, $\vec{b}$, $-[\vec{a} \vec{b}]$ vektorlar uchligi chap uchlikdir (fizikadan chap qo'l qoidasini eslang, 2-chizma).

2. Vektor ko'paytmaning xossalari. Vektor ko'paytma bir qator xossalarga ega bo'lib, biz shu xossalari bilan batafsil tanishib chiqamiz.

1^o. Ko'paytuvchi vektorlardan kamida bittasi nol vektor yoki $\vec{a} // \vec{b}$ bo'lsa, u holda $[\vec{a} \vec{b}] = 0$.

Isbot. Xaqiqatan ham, $\vec{a} // \vec{b}$ bo'lsa, $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ yoki 180° bo'lib, birinchi shartga asosan $\vec{p} = 0$ bo'ladi, moduli nolga teng vektor esa albatta nol vektordir.

2^o. $[\vec{a} \vec{b}] = -[\vec{b} \vec{a}]$, ya'ni vektor ko'paytma antikommutativdir.

Isbot. Xaqiqatan, vektor ko'paytma ta'rifining 1 va 2-shartlariga asosan $[\vec{a} \vec{b}]$ va $[\vec{b} \vec{a}]$ vektorlarning uzunliklari teng va ikkalasi ham bitta tekislikka perpendikulyar, yo'nalishlari esa uchunchi shartga asosan $[\vec{a} \vec{b}]$ vektor uchidan qaranganda $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ vektor tomonga qarab eng qisqa yo'l bilan burilish soat mili harakatiga teskari bo'lsa, $\vec{b}$ dan $\vec{a}$ vektor tomonga qarab qisqa yo'l bilan burilish esa soat mili harakati bo'yicha bo'lib qoladi, demak, yo'nalish avvalgiga o'xshash bo'lishi uchun $[\vec{b} \vec{a}]$ vektor $[\vec{a} \vec{b}]$ ga nisbatan qarama-qarshi yo'nalgan bo'lishi kerak.

3^o. $[(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c}] = [\vec{a} \vec{c}] + [\vec{b} \vec{c}]$, ya'ni vektor ko'paytma qo'shish amaliga nisbatan taqsimot qonuniga bo'ysunadi.

Isbot. Bu xossani isbot qilish uchun vektor ko'paytmani topishning boshqacharoq usulini ko'raylik (3-chizma).

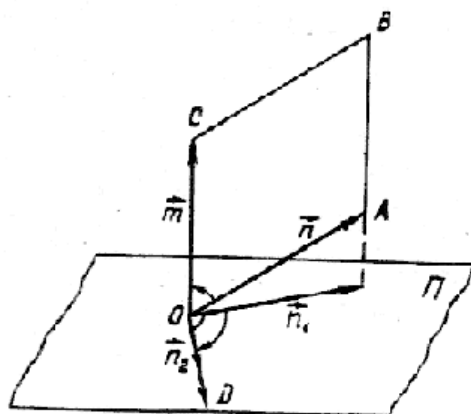
O'zaro kollinear bo'lmagan $\vec{m}$ va $\vec{n}$ vektorlarni olaylik. Bu vektorlarning boshlarini bir O nuqtaga keltirib, O nuqtadan $\vec{m}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan Π tekislikni o'tkazib, $\vec{n}$ vektorning Π tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi $\vec{n}_1$ ni hosil qilamiz, so'ngra $\vec{n}_1$ ni O nuqta atrofida 90° ga shunday buramizki, $\vec{m}$ ning uchidan qaraganimizda burilishning yo'nalishi soat milining harakati bilan bir xil bo'lsin, natijada $\vec{n}_2$ vektor hosil bo'ladi, u holda

$$[\vec{m} \vec{n}] = |\vec{m}| |\vec{n}_2|, \quad (1)$$

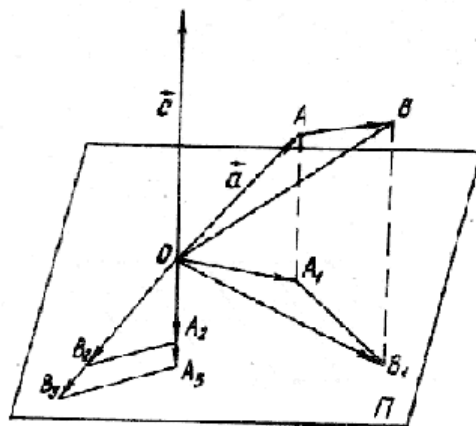
chunki: 1) $|\vec{m}| |\vec{n}_2| = |\vec{m}| |\vec{n}_2| = |\vec{m}| |\vec{n}_1|$, bu esa $\vec{m}$, $\vec{n}$ ga qurilgan parallelogramning yuzini aniqlaydi;

2) $(|\vec{m}| \vec{n}_2) \perp \vec{n}$, $(|\vec{m}| \vec{n}_2) \perp \vec{m}$;

3) $\vec{m}$, $\vec{n}$ va $|\vec{m}| \vec{n}_2$ vektorlar uchligi o'ng uchlikni hosil qiladi.



3-chizma



4-chizma

Endi 3⁰-xossani isbotlashga o'taylik. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin. $\vec{c}$ ning boshini O deb belgilab, shu nuqtadan $\vec{c}$ ga perpendikulyar Π tekislikni o'tkazaylik, $\vec{a}$ ning boshini ham O nuqtaga keltirib $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OB}$ ni (4-chizma) yasab va ΔOAB ni Π tekislikka ortogonal proyeksiyalab, ΔOA_1B_1 ni hosil qilaylik. ΔOA_1B_1 ni Π da O nuqta atrofida 90° ga shunday buraylikki, bu burish yo'nalishi $\vec{c}$ vektorning uchidan qaralganda soat mili harakati bo'yicha bo'lsin, natijada ΔOA_2B_2 hosil bo'ladi. Shu uchburchakning har bir tomonini $|\vec{c}|$ ga ko'paytirib, ΔOA_2B_2 ga o'xshash ΔOA_3B_3 ni hosil qilamiz. Yuqorida isbot qilingan (1) ga asosan:

$$\begin{aligned} \overline{OA_3} &= |\vec{c}| \overline{OA_2} = [\vec{a} \vec{c}], \\ \overline{A_3B_3} &= |\vec{c}| \overline{A_2B_2} = [\vec{b} \vec{c}], \quad \overline{OB_3} = |\vec{c}| \overline{OB_2} = [(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c}]. \end{aligned} \quad (2)$$

Bundan tashqari, bu chizmadan

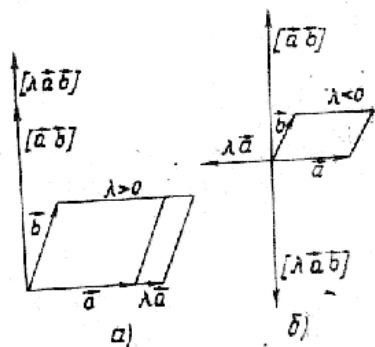
$$\overline{OB_3} = \overline{OA_3} + \overline{A_3B_3}, \quad (3)$$

Bundagi vektorlar o'rniga (2) dagi ifodalarni qo'ysak,

$$[(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c}] = [\vec{a} \vec{c}] + [\vec{b} \vec{c}]$$

ga ega bo'lamiz. Isbot tugadi.

Natija. $[\vec{c}(\vec{a} + \vec{b})] = [\vec{c} \vec{a}] + [\vec{c} \vec{b}]$. Buni ko'rsatish uchun isbot qilingan 3⁰-xossaga 2⁰-xossani tadbiiq qilish kifoyadir.



5-chizma

4⁰. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ uchun $[\lambda \vec{a} \vec{b}] = \lambda [\vec{a} \vec{b}]$, ya'ni vektor ko'paytma skalyar ko'paytuvchiga nisbatan guruhlash qonuniga bo'ysunadi.

Isboti. $[\lambda \vec{a} \vec{b}]$ va $\lambda [\vec{a} \vec{b}]$ vektorlarning modullari tengdir, yo'nalishlari esa $\lambda > 0$ bo'lganda $[\vec{a} \vec{b}]$ vektor bilan bir xil, $\lambda < 0$ bo'lganda esa $[\vec{a} \vec{b}]$ ning yo'nalishiga qarama-qarshidir (5-a,b chizma).

Eslatma. 3^0 -xossa ikki qo'shiluvchi vektor uchungina emas, balki istalgan sondagi qo'shiluvchilar uchun ham o'rinlidir, bundan tashqari, vektor ko'paytmaning har bir vektori bir nechta vektorning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, ularni algebradagi ko'phadni ko'phadga ko'paytirish qoidasi bo'yicha ochish mumkin, bunda faqat vektorlar tartibining saqlanishiga e'tibor berish kerak.

Endi Dekart sistemasidagi bazis vektorlarning vektor ko'paytmasini topaylik.

Vektor ko'paytmani ta'rifiga asosan,

$$[\vec{i} \vec{i}] = \vec{0}, [\vec{j} \vec{j}] = \vec{0}, [\vec{k} \vec{k}] = \vec{0}.$$

$[\vec{i} \vec{j}] = |\vec{i}| |\vec{j}| \sin 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ hamda $\vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}$ ekanini e'tiborga olsak,

$[\vec{i} \vec{j}] = \vec{k}$. Shunga o'xshash $[\vec{k} \vec{i}] = \vec{j}, [\vec{j} \vec{k}] = \vec{i}$ ham o'rinli. 2^0 ga asosan

$$[\vec{j} \vec{i}] = -\vec{k}, [\vec{k} \vec{j}] = -\vec{i}, [\vec{i} \vec{k}] = -\vec{j}.$$

Endi Dekart sistemasida koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar vektor ko'paytmasining koordinatalarini topaylik:

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k},$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

Vektor ko'paytmaning xossalarini hamda bazis vektorlarning vektor ko'paytmalarini e'tiborga olsak,

$$\begin{aligned} [\vec{a} \vec{b}] &= [x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}] = \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}, \end{aligned}$$

demak

$$[\vec{a} \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \quad (4)$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar vektor ko'paytmasining moduli tomonlari shu vektorlardan iborat parallelogramm yuziga teng bo'lganligi uchun uning yarmisi shu $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan uchburchakning yuziga teng bo'ladi, demak, uchburchak yuzi

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |[\vec{a} \vec{b}]|. \quad (5)$$

Bu formulani koordinatalarda yozmasdan, misollar ko'ra qolaylik.

1-misol. $A(1, -1, 2), B(2, 1, -1), C(1, 0, 3)$ nuqtalar berilgan. ABC uchburchakning yuzini hisoblang.

Yechish. $\vec{AB}$ va $\vec{AC}$ ning koordinatalarini hisoblaylik, (4) ga asosan.

$$\vec{AB}(1, 2, -3),$$

$$\overline{AC}(0, 1, 1), [\overline{AB} \overline{AC}] \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right),$$

$$[\overline{AB} \overline{AC}] (5, -1, 1),$$

$$|[\overline{AB} \overline{AC}]| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{27}.$$

$$(5) \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{27} \text{ kv. birlik.}$$

2-misol. Uchburchakning uchlari $A(5, -6, 2)$, $B(1, 3, -1)$, $C(1, -1, 2)$ nuqtalarda. Uning A uchidan chiqqan balandligining uzunligini toping.

Yechish. Avvalgi misoldagidek hisoblasak,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 25 \text{ kv.birlik.}$$

Endi BC tomonning uzunligini hisoblaylik:

$$\rho(BC) = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Agar A uchdan chiqqan balandlikni h desak,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} h |BC| = \frac{1}{2} h \cdot 5.$$

U holda $\frac{1}{2} h \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 25$, bundan $h = 5$ uzunlik birligi.

3-misol. $\vec{m}$, $\vec{n}$ birlik vektorlar bo'lib, ular orasidagi burchak 30° ga teng. $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuzini hisoblang.

$$\begin{aligned} \text{Yechish. } [\vec{a} \vec{b}] &= [\vec{m} - 2\vec{n} \quad 2\vec{m} + 3\vec{n}] = [\vec{m} \quad 2\vec{m}] + [-2\vec{n} \quad 2\vec{m}] + \\ &+ [\vec{m} \quad 3\vec{n}] + [-2\vec{n} \quad 3\vec{n}] = \vec{0} - 4[\vec{n} \quad \vec{m}] + 3[\vec{m} \quad \vec{n}] + \vec{0} = 4[\vec{m} \quad \vec{n}] + 3[\vec{m} \quad \vec{n}] = 7[\vec{m} \quad \vec{n}]; \end{aligned}$$

$$[\vec{a} \vec{b}] = 7[\vec{m} \quad \vec{n}] = 7|\vec{m}||\vec{n}|\sin 30^\circ = 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \text{ kv.birlik.}$$

4-misol. Ixtiyoriy $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uchun ushbu ayniyat isbotlansin:

$$[\vec{a} \vec{b}]^2 + (\vec{a} \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2.$$

Isbot. $(\vec{a} \vec{b}) = \varphi$ desak,

$$\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos \varphi, \quad |[\vec{a} \vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin \varphi,$$

bu ikki tenglikni kvadratga ko'tarib, hadlab qo'shsak,

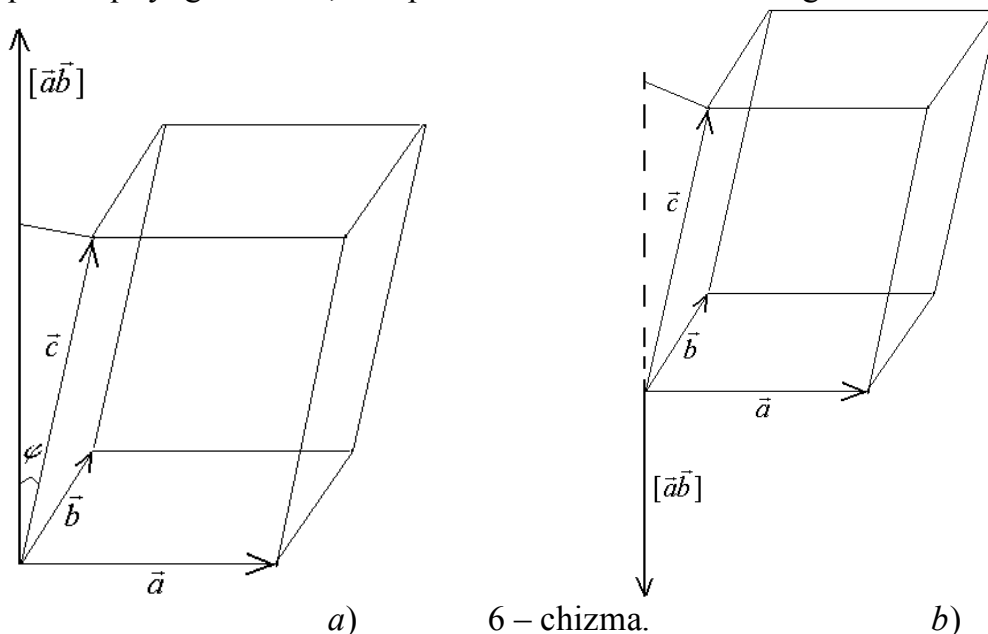
$$[\vec{a} \vec{b}]^2 + (\vec{a} \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2.$$

3. Uch vektorning aralash ko'paytmasi. Tetraedrning hajmi. Uch vektorning komplanarlik sharti.

Uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Birinchi ikki vektorning vektor ko'paytmasidan iborat vektorni uchinchi vektorga skalyar ko'paytirishdan hosil qilingan son shu uch vektorning *aralash ko'paytmasi* deb ataladi, ya'ni $[\vec{a} \vec{b}] \vec{c}$, bu ko'paytma $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ko'rinishda belgilanadi.

Avvalo aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi bilan tanishaylik. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bir O nuqtadan qo'yilgan bo'lib, komplanar bo'lmasin hamda o'ng uchlikni hosil qilsin.



6 – chizma.

Qirralar shu berilgan vektorlardan iborat parallelepipedni yasasak, $|\vec{a} \vec{b}|$ miqdor shu parallelepiped asosining yuzini bildiradi, ta'rifga asosan $[\vec{a} \vec{b}] \vec{c} = |\vec{a} \vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi$, $\varphi = (\vec{a} \vec{b}, \vec{c})$ bo'lib, $|\vec{c}| \cos \varphi$ miqdor $\vec{c}$ ning $[\vec{a} \vec{b}]$ vektor yo'nalishidagi to'g'ri chiziqdagi proyeksiyasiga teng bo'lib, parallelepipedning balandligidir: $|\vec{c}| \cos \varphi = h$ (6– a chizma). U holda

$$[\vec{a} \vec{b}] \vec{c} = S_{ac} \cdot h = V,$$

bu son esa parallelepipedning hajmini aniqlaydi.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lar chap uchlikdan iborat bo'lsa, $[\vec{a} \vec{b}]$ vektor bilan $\vec{c}$ orasidagi burchak $\varphi \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi \leq 0$ (6– b chizma). U holda $[\vec{a} \vec{b}] \vec{c} = -V$, demak,

$$|[\vec{a} \vec{b}] \vec{c}| = V.$$

Biz quyidagini isbot qildik: uch vektorning aralash ko'paytmasidan iborat sonlarni absolyut qiymati qirralari shu vektorlardan iborat parallelepiped hajmiga teng.

Endi aralash ko'paytmaning xossalari bilan tanishaylik.

$$1^0. (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{b} \vec{c} \vec{a}).$$

Haqiqatan ham, bu uch vektorga qurilgan parallelepiped hajmlarining absolyut qiymatlari teng, undan tashqari $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ uchlik bilan $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ uchlikning orientatsiyalari

bir xil. Shuning singari $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{b} \vec{c} \vec{a}) = (\vec{c} \vec{a} \vec{b})$.

2⁰. $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = -(\vec{b} \vec{a} \vec{c})$, chunki $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = [\vec{a} \vec{b}] \vec{c} = -[\vec{b} \vec{a}] \vec{c} = -(\vec{b} \vec{a} \vec{c})$. demak, $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = -(\vec{b} \vec{a} \vec{c})$, $(\vec{b} \vec{c} \vec{a}) = -(\vec{c} \vec{b} \vec{a})$, $(\vec{c} \vec{a} \vec{b}) = -(\vec{a} \vec{c} \vec{b})$.

3⁰. $((\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} \vec{d}) = (\vec{a} \vec{c} \vec{d}) + (\vec{b} \vec{c} \vec{d})$, chunki $((\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} \vec{d}) = [\vec{a} + \vec{b} \vec{c}] \vec{d} = ([\vec{a} \vec{c}] + [\vec{b} \vec{c}]) \vec{d} = [\vec{a} \vec{c}] \vec{d} + [\vec{b} \vec{c}] \vec{d} = (\vec{a} \vec{c} \vec{d}) + (\vec{b} \vec{c} \vec{d})$.

4⁰. $\forall \lambda \in R$ uchun $(\lambda \vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \lambda (\vec{a} \vec{b} \vec{c})$, chunki $(\lambda \vec{a} \vec{b} \vec{c}) = [\lambda \vec{a} \vec{b}] \vec{c} = \lambda [\vec{a} \vec{b}] \vec{c} = \lambda (\vec{a} \vec{b} \vec{c})$.

5⁰. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar bo'lsa, ularning aralash ko'paytmasi nolga teng, chunki ularga qurilgan parallelepiped tekislikda joylashib qoladi, bunday parallelepipedning balandligi nolga tengligidan hajmi ham nolga teng; aksincha $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar. Haqiqatan ham $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = 0 \Rightarrow [\vec{a} \vec{b}] \vec{c} = 0$ yoki $[\vec{a} \vec{b}] \perp \vec{c}$. Lekin vektor ko'paytmaning ta'rifiga asosan $[\vec{a} \vec{b}] \perp \vec{a}$, $[\vec{a} \vec{b}] \perp \vec{b}$, bundan $[\vec{a} \vec{b}]$ vektorning $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ning har biriga perpendikulyarligi kelib chiqadi, demak, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar.

Endi koordinatalari bilan berilgan uchta vektorning aralash ko'paytmasini topaylik: $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$, $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$, $\vec{c} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}$.

Yuqoridagi (4) ga asosan

$$[\vec{a} \vec{b}] \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

$[\vec{a} \vec{b}]$ bilan $\vec{c}$ vektorning skalyar ko'paytmasi mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng:

$$[\vec{a} \vec{b}] \vec{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3,$$

demak,

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Bu formulaning tatbiqi sifatida uchlarning koordinatalari bo'yicha tetraedr hajmini hisoblash formulasini keltirib chiqaraylik.

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3), D(x_4, y_4, z_4)$$

nuqtalar tetraedring uchlari bo'lsin.

$$\begin{aligned} &\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \\ &\overline{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1), \\ &\overline{AD}(x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1). \end{aligned}$$

Tetraedrning hajmi tetraedrning bir uchidan chiqqan uchta qirrasiga qurilgan parallelepiped hajmining $\frac{1}{6}$ qismiga teng bo'lgani uchun hamda (6) formulaga asosan

$$V_{mem} = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} \overline{AB} & \overline{AC} & \overline{AD} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

(7) formulani ba'zan undan ko'ra qulayroq quyidagicha yozish ma'quldir:

$$V_{mem} = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

(7) yoki (8) formula izlangan formuladir.

Endi qator misollar ko'raylik.

Misollar. 1. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - ixtiyoriy vektorlar va α, β, γ - ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lsa, $\alpha \vec{a} - \beta \vec{b}, \gamma \vec{b} - \alpha \vec{c}, \beta \vec{c} - \gamma \vec{a}$ vektorlarning komplanar ekanligi isbotlansin.

Isbot. Shu uchta vektorning $(\alpha \vec{a} - \beta \vec{b} \quad \gamma \vec{b} - \alpha \vec{c} \quad \beta \vec{c} - \gamma \vec{a})$ aralash ko'paytmasini hisoblaylik. Buning uchun yuqorida keltirilgan $1^0 - 5^0$ -xossalarni nazarda tutsak,

$$\begin{aligned} &(\alpha \vec{a} - \beta \vec{b} \quad \gamma \vec{b} - \alpha \vec{c} \quad \beta \vec{c} - \gamma \vec{a}) = (\alpha \vec{a} (\gamma \vec{b} - \alpha \vec{c}) (\beta \vec{c} - \gamma \vec{a}) - \\ & - (\beta \vec{b} (\gamma \vec{b} - \alpha \vec{c}) (\beta \vec{c} - \gamma \vec{a})) = (\alpha \vec{a} \gamma \vec{b} \beta \vec{c} - \gamma \vec{a}) - (\alpha \vec{a} \beta \vec{c} \alpha \vec{c} - \gamma \vec{a}) - \\ & - (\beta \vec{b} \gamma \vec{b} \beta \vec{c} - \gamma \vec{a}) + (\beta \vec{b} \alpha \vec{c} \beta \vec{c} - \gamma \vec{a}) = \alpha \gamma \beta (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) - \alpha \gamma \gamma (\vec{a} \vec{b} \vec{a}) - \alpha \alpha \beta (\vec{a} \vec{c} \vec{c}) + \\ & + \alpha \alpha \gamma (\vec{a} \vec{c} \vec{a}) - \beta \gamma \beta (\vec{b} \vec{b} \vec{c}) + \beta \gamma \beta (\vec{b} \vec{b} \vec{c}) + \beta \gamma \gamma (\vec{b} \vec{b} \vec{a}) + \beta \alpha \beta (\vec{b} \vec{c} \vec{c}) - \\ & - \beta \alpha \gamma (\vec{b} \vec{c} \vec{a}) = \alpha \beta \gamma (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) - \alpha \beta \gamma (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = 0. \end{aligned}$$

Aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lgani uchun 5^0 ga asosan ular komplanardir.

2. $\overline{AB}(2, 0, 0), \overline{AC}(3, 4, 0), \overline{AD}(3, 4, 2)$ vektorlarga qurilgan tetraedr berilgan. Quyidagilar topilsin: a) tetraedrning hajmi, b) ABC yoqning yuzi, c) D uchdan tushirilgan balandlik, d) AB va BC qirralar orasidagi φ_1 burchak kosinusi, e) ABC va ADC yoqlar orasidagi φ_2 burchak kosinusi.

Yechish. a) (7) formulaga asosan

$$V_{mem} = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 16 = \frac{8}{3}.$$

b) (5) ga asosan

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \ \overline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^2} = 4.$$

c) Tetraedrning hajmi asosining yuzi bilan asosga tushirilgan balandligi ko'paytmasining uchdan biriga teng: $V_{mem.} = \frac{1}{3} S_{ac} h$; a), b) larni hisobga olsak,

$$\frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot h \Rightarrow h = 2.$$

d) AB , BC qirralar orasidagi burchak kosinusi $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ vektorlar orasidagi burchak kosinusiga teng bo'lgani uchun

$$\cos \varphi_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

e) ABC va ADC yoqlar orasidagi φ_2 burchak shu yoqlarga perpendikulyar vektorlar orasidagi burchakka teng. ABC yoqqa perpendikulyar vektor

$$\vec{p}_1 = [\overline{AB} \ \overline{AC}] \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) \Rightarrow p_1(0, 0, 8).$$

ADC yoqqa perpendikulyar vektor $\vec{p}_2 = [\overline{AC} \ \overline{AD}](8, -6, 0)$, demak,

$$\cos \varphi_2 = \frac{\vec{p}_1 \vec{p}_2}{|\vec{p}_1| |\vec{p}_2|} = \frac{8 \cdot 0 + 0 \cdot (-6) + 8 \cdot 0}{\sqrt{8^2} \cdot \sqrt{100}} = 0 \Rightarrow \text{bu yoqlar o'zaro perpendikulyar.}$$

Tayanch iboralar.

Vektor ko'paytma, aralash ko'paytma, o'ng uchlik, proyeksiya.

Nazorat uchun savollar.

1. Vektor ko'paytma deb nimaga aytiladi?
2. Vektor ko'paytmaning xossalarini sanab bering?

3. Uchburchakning yuzi vektor ko'paytma orqali qanday topiladi?
4. Aralash ko'paytma deb nimaga aytiladi?
5. Aralash ko'paytmaning xossalarini aytib bering?
6. Tetraedrning hajmi qanday topiladi?

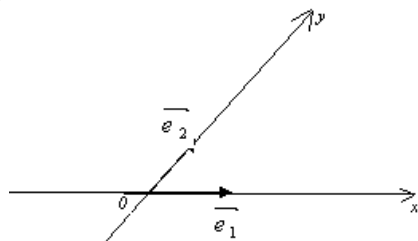
7-mavzu: Tekislikda affin va dekart koordinatalar sistemasini almashtirish.

Reja:

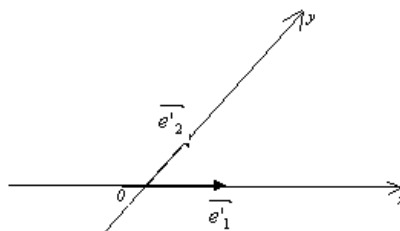
1. Tekislikda affin koordinatalar sistemasini almashtirish.
2. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini almashtirish.

1. Tekislikda affin koordinatalar sistemasini almashtirish.

Tekislikda ikkita $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, $(O', \bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$ affin reper berilgan bo'lsin. Qulaylik uchun ularning birinchisini eski reper, ikkinchisini yangi reper deb ataymiz. Bundan tashqari, yangi



1-rasm .



2-rasm.

reperning eski reperga nisbatan vaziyati berilgan bo'lsin, ya'ni

$$O'(c_1, c_2), \bar{e}'_1(a_1, a_2), \bar{e}'_2(b_1, b_2), OO' = c_1 \bar{e}_1 + c_2 \bar{e}_2, \quad (1)$$

$$\bar{e}'_1 = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2, \bar{e}'_2 = b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2)$$

Tekislikda ixtiyoriy M nuqtani olamiz. Bu nuqtaning eski va yangi reperlarga nisbatan koordinatalarini mos ravishda x, y va x', y' orqali belgilaymiz. U holda $\overline{OM} = x \bar{e}_1 + y \bar{e}_2$ $\overline{O'M} = x' \bar{e}'_1 + y' \bar{e}'_2$. Vektorlarni qo'shish ta'rifi va (1), (2) munosabatlardan foydalansak,

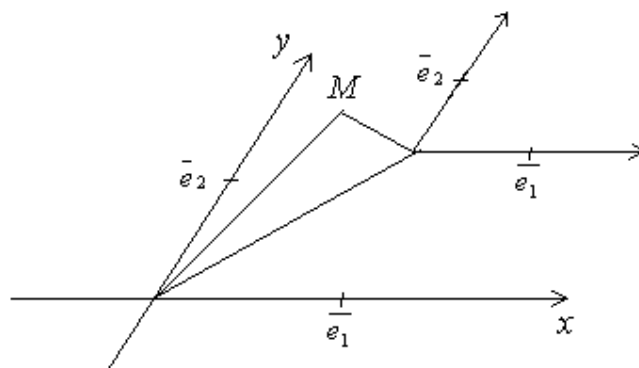
$$\begin{aligned} \overline{OM} &= \overline{OO'} + \overline{O'M} = c_1 \bar{e}_1 + c_2 \bar{e}_2 + x' \bar{e}'_1 + y' \bar{e}'_2 = \\ &= c_1 \bar{e}_1 + c_2 \bar{e}_2 + x'(a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2) + y'(b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2) \end{aligned}$$

yoki

$$x \bar{e}_1 + y \bar{e}_2 = (a_1 x' + b_1 y' + c_1) \bar{e}_1 + (a_2 x' + b_2 y' + c_2) \bar{e}_2.$$

$\bar{e}_1, \bar{e}_2$ vektorlarning chiziqli erkliligini hisobga olsak,

$$x = a_1 x' + b_1 y' + c_1, \quad y = a_2 x' + b_2 y' + c_2. \quad (3)$$



3-rasm

M nuqtaning eski sistemasiga nisbatan koordinatalari x, y , uning yangi sistemaga nisbatan koordinatalari x', y' orqali shu (3) ko'rinishda ifodaladi.

(3) formulalar bir affin koordinatalar sistemasidan ikkinchi affin koordinatalar sistemasiga ***o'tish formulalari*** deyiladi. Bu formulalarda $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ shart bilan

bog'langan oltita koeffitsient qatnashgan. Quyidagi ikki xususiy holni qaraymiz:

1. $O \neq O', \bar{e}_1' = \bar{e}_1, \bar{e}_2' = \bar{e}_2$ bo'lsin. U holda $a_1 = b_2 = 1, a_2 = b_1 = 0$ bo'lib, (3) formulalar

$$\begin{cases} x = x' + c_1, \\ y = y' + c_2 \end{cases} \quad (4)$$

ko'rinishni oladi.

(4) formulalar koordinatalar sistemasini ***parallel ko'chirish formulalari*** deb ataladi.

2. $O = O'$ va bazis vektorlar turlicha bo'lsin. U holda $c_1 = c_2 = 0$ bo'lib, (3) dan

$$\begin{cases} x = a_1 x' + b_1 y', \\ y = a_2 x' + b_2 y'. \end{cases} \quad (5)$$

2. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini almashtiish.

Tekislikda $\beta = (O, \bar{i}, \bar{j})$ va $\beta' = (O', \bar{i}', \bar{j}')$ Dekart koordinatalar sistemasini berilgan bo'lsin. Bu holda (3) formulardagi a_1, a_2 lar $\bar{i}'$ vektorning, b_1, b_2 lar esa $\bar{j}'$ vektorning $\beta = (O, \bar{i}, \bar{j})$ koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalari bo'ladi, ya'ni

$$\bar{i}' = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j}, \quad \bar{j}' = b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j}. \quad (6)$$

$(\bar{i}, \wedge \bar{i}') = \alpha$ bo'lsin. Agar β va β' Dekart koordinatalar sistemalari bir xil orientatsiyali bo'lsa,

$$(\bar{i}, \wedge \bar{j}') = 90^\circ + \alpha, \quad (\bar{i}', \wedge \bar{j}) = 90^\circ - \alpha, \quad (\bar{j}, \wedge \bar{j}') = \alpha. \quad (7)$$

β, β' Dekart koordinatalar sistemalari qarama-qarshi orientatsiyali bo'lsa,

$$(\bar{i}, \wedge \bar{j}') = 270^\circ + \alpha, \quad (\bar{i}', \wedge \bar{j}) = 90^\circ - \alpha, \quad (\bar{j}, \wedge \bar{j}') = 180^\circ + \alpha. \quad (8)$$

(6) tengliklarni navbat bilan $\bar{i}$, $\bar{j}$ vektorlarga skalyar ko'paytirsak,

$$a_1 = \bar{i}'\bar{i} = \cos(\bar{i}', \wedge \bar{i}), \quad a_2 = \bar{i}'\bar{j} = \cos(\bar{i}', \wedge \bar{j}),$$

$$b_1 = \bar{j}'\bar{i} = \cos(\bar{j}', \wedge \bar{i}), \quad b_2 = \bar{j}'\bar{j} = \cos(\bar{j}', \wedge \bar{j}).$$

(7) va (8) munosabatlarni hisobga olsak, $\bar{i}'$, $\bar{j}'$ vektorlarning β reperga nisbatan koordinatalari, agar β , β' reperlar bir xil orientatsiyali bo'lsa,

$$\bar{i}'(\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \bar{j}'(-\sin \alpha, \cos \alpha);$$

β , β' reperlar qarama-qarshi orientatsiyali bo'lganda esa

$$\bar{i}'(\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \bar{j}'(\sin \alpha, -\cos \alpha).$$

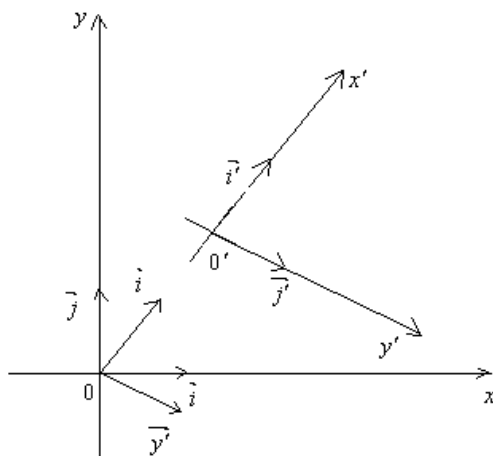
U holda (3) formulalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + c_1, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + c_2, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha + c_1, \\ y = x' \sin \alpha - y' \cos \alpha + c_2. \end{cases} \quad (10)$$

(9) va (10) formulalar bitta

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - \varepsilon y' \sin \alpha + c_1, \\ y = x' \sin \alpha + \varepsilon y' \cos \alpha + c_2 \end{cases} \quad (11)$$



4-rasm

ko'rinishdagi yozuvga birlashtirish mumkin, bu yerda $\varepsilon = \pm 1$. Shunday qilib, β , β' reperlar Dekart reperlari bo'lganida ularning biridan ikkinchisiga o'tish (11) formulalar bilan ifodalanadi. Bu yerda β , β' reperlar bir xil orientatsiyali bo'lsa, $\varepsilon = +1$, aks holda esa $\varepsilon = -1$.

Nazorat uchun savollar.

1. Bir koordinatalar sistemasidan ikkinchi koordinatalar sistemasiga o'tish formulalari deb nimaga aytiladi?
2. Koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish deb nimaga aytiladi?

8-mavzu: Fazoda affin va dekart koordinatalarni almashtirish.

Reja:

1. Fazoda affin koordinatalar sistemasini almashtirish.
2. Fazoda Dekart koordinatalar sistemasini almashtirish.

Fazodagi biror nuqtaning tayin bir sistemadagi koordinatalaridan boshqa sistemadagi koordinatalariga o'tishga to'g'ri keladi. Biz shu masalani ikkita affin reper uchun hal qilamiz. $\beta = (O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, $\beta' = (O', \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$ affin reperlar berilgan bo'lsin.

I hol. Reperlarning boshlari har xil bo'lib, bazis vektorlari mos ravishda kollinear bo'lsin, ya'ni $O \neq O'$, $\bar{e}_1 \parallel \bar{e}'_1$, $\bar{e}_2 \parallel \bar{e}'_2$, $\bar{e}_3 \parallel \bar{e}'_3$ hamda O' ning β ga nisbatan koordinatalari a, b, c bo'lsin (1-a chizma). U holda fazodagi ixtiyoriy M nuqtaning β va β' ga nisbatan koordinatalari mos ravishda x, y, z va x', y', z' bo'lsa, shular orasidagi bog'lanishni izlaymiz:

$$M(x, y, z) \Rightarrow \overline{OM}(x, y, z) \Rightarrow \overline{OM} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3,$$

$$M(x', y', z') \Rightarrow \overline{O'M}(x', y', z') \Rightarrow \overline{O'M} = x'\bar{e}'_1 + y'\bar{e}'_2 + z'\bar{e}'_3,$$

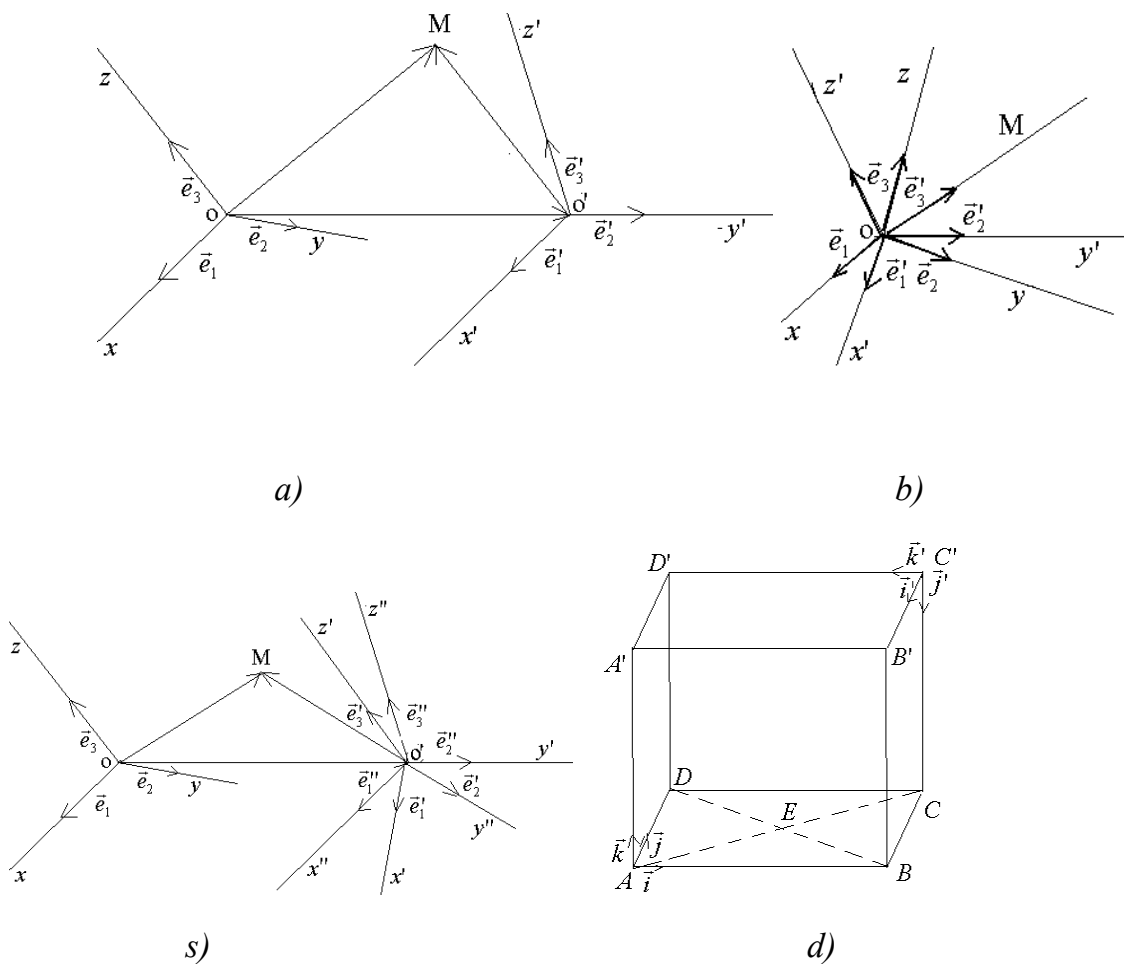
$$\overline{OO'}(a, b, c) \Rightarrow \overline{OO'} = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3.$$

Lekin $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$ bo'lgani uchun

$$x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3 + x'\bar{e}'_1 + y'\bar{e}'_2 + z'\bar{e}'_3.$$

Bundan tashqari, bazis vektorlar mos ravishda kollinear bo'lgani uchun

$$\bar{e}'_1 = \lambda_1 \bar{e}_1, \quad \bar{e}'_2 = \lambda_2 \bar{e}_2, \quad \bar{e}'_3 = \lambda_3 \bar{e}_3,$$



1 – chizma

demak,

$$x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 = (\lambda_1 x' + a)\bar{e}_1 + (\lambda_2 y' + b)\bar{e}_2 + (\lambda_3 z' + c)\bar{e}_3. \quad (1)$$

$$x = \lambda_1 x' + a, \quad y = \lambda_2 y' + b, \quad z = \lambda_3 z' + c. \quad (2)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ bo'lsa, ya'ni bazis vektorlar mos ravishda o'zaro teng bo'lsa, (2) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c. \quad (3)$$

Bu formulalar ba'zan **koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish formulalari** deb yuritiladi.

II hol. Reperlarning boshlari bir xil, bazis vektorlarning yo'nalishlari esa har xil bo'lsin, u holda (1-b chizma)

$$O = O', \bar{e}'_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + a_{31}\bar{e}_3, \quad \bar{e}'_2 = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + a_{32}\bar{e}_3,$$

$$\bar{e}'_3 = a_{13}\bar{e}_1 + a_{23}\bar{e}_2 + a_{33}\bar{e}_3$$

bo'lsin. Endi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (4)$$

matritsani tuzamiz. Bu matritsani ***bir bazisdan ikkinchi bazisga o'tish matritsasi*** deb ataymiz, $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ bazis vektorlar bo'lgani uchun (4) matritsaning determinanti noldan farqlidir.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5)$$

Aks holda, determinantning bir satri qolgan ikki satrining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lib, $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ ham chiziqli bog'liq bo'lar edi.

Fazoda ixtiyoriy M nuqtaning β va β' reperga nisbatan koordinatalarini mos ravishda x, y, z va x', y', z' deb olsak,

$$\overline{OM} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3,$$

$$\overline{OM} = x'\bar{e}'_1 + y'\bar{e}'_2 + z'\bar{e}'_3,$$

ya'ni

$$x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 = x'\bar{e}'_1 + y'\bar{e}'_2 + z'\bar{e}'_3.$$

Endi bu tenglikka $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ ning qiymatlarini qo'yib, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ ga nisbatan gruppallasak,

$$\begin{aligned} x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 &= (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')\bar{e}_1 + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')\bar{e}_2 + \\ &+ (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')\bar{e}_3, \end{aligned}$$

bundan

$$\begin{aligned}
x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\
y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\
z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'.
\end{aligned} \tag{6}$$

Ushbu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{7}$$

matritsa **almashtirish matritsasi** deb ataladi. (7) va (4) matritsalar o'zaro transponirlangan matritsalaridir. Bu matritsalar kvadrat matritsalar bo'lgani uchun ularning uchinchi tartibli determinantlari o'zaro teng bo'lib, (5) ga asosan (7) ning determinanti noldan farqlidir, demak, (6) ni x' , y' , z' ga nisbatan yechsak,

$$\begin{aligned}
x' &= a'_{11}x + a'_{12}y + a'_{13}z, \\
y' &= a'_{21}x + a'_{22}y + a'_{23}z, \\
z' &= a'_{31}x + a'_{32}y + a'_{33}z
\end{aligned} \tag{8}$$

hosil bo'lib, bunda

$$a'_{ik} = \frac{A_{ki}}{\det A}; \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

A_{ki} esa A matritsa a_{ki} elementining ad'yunktidir, ya'ni algebraik to'ldiruvchisidir.

III hol. Reperlar fazoda ixtiyoriy vaziyatda joylashgan. β reper berilgan bo'lib, shu sistemaga nisbatan β' reper elementlarining koordinatalari quyidagicha bo'lsin:

$$\begin{aligned}
O'(a, b, c), \quad \bar{e}'_1 &= a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + a_{31}\bar{e}_3, \\
\bar{e}'_2 &= a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + a_{32}\bar{e}_3, \\
\bar{e}'_3 &= a_{13}\bar{e}_1 + a_{23}\bar{e}_2 + a_{33}\bar{e}_3,
\end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (*)$$

β dan β' ga o'tish uchun biz yana shunday uchinchi $\beta'' = (O'', \bar{e}''_1, \bar{e}''_2, \bar{e}''_3)$ affin reporni qaraymizki, u β ni $\overline{OO'}$ vektor qadar parallel ko'chirishdan hosil bo'lsin. U holda fazodagi ixtiyoriy M nuqtaning koordinatalarini bu sistemalarga nisbatan mos ravishda x, y, z ; x'', y'', z'' va x', y', z' deb belgilasak (1-c chizma), β bilan β'' orasidagi bog'lanish (3) ga asosan

$$x = x'' + a, \quad y = y'' + b, \quad z = z'' + c, \quad (9)$$

β'' bilan β' orasidagi bog'lanish esa (6) ga asosan

$$x'' = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z',$$

$$y'' = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z',$$

$$z'' = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z',$$

buni (9) ga qo'ysak, izlanayotgan quyidagi ifoda hosil qilinadi:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a, \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + b, \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + c. \end{aligned} \quad (10)$$

(10) ni x', y', z' ga (*) shart o'rinli bo'lgani uchun) nisbatan ham yechish mumkin, demak, M nuqtaning β ga nisbatan koordinatalari ma'lum bo'lsa, shu nuqtaning koordinatalarini β' ga nisbatan ham topish mumkin.

Bir affin sistemasidan ikkinchi affin sistemasiga o'tish 12 ta parametr ga bog'liqdir, chunki (10) ga shu almashtirishni aniqlaydigan ushbu 12 ta parametr kiradi: $a, b, c, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$.

Agar β, β' dekart reperlari bo'lsa, ularni almashtirish 12 ta parametr ga emas, balki eng ko'pi bilan 6 ta parametr ga bog'liq bo'lib qoladi. Haqiqatan ham, $\bar{e}_1 = \bar{i}, \bar{e}_2 = \bar{j}, \bar{e}_3 = \bar{k}$ va $\bar{e}'_1 = \bar{i}', \bar{e}'_2 = \bar{j}', \bar{e}'_3 = \bar{k}'$ bo'lsa, 4-maruzadagi (6) va (7) ni e'tiborga olsak,

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1, & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1, & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0, \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1, & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (11) \quad (12)$$

Demak, (10) dagi 12 ta parametr (11) va (12) dagi 6 ta shartni qanoatlantirishi kerak, u holda jami 6 ta parametr qoladi. «Algebra va sonlar nazariyasi» kursidan ma'lumki, (7) ko'rinishdagi kvadrat matritsaning elementlari (11) va (12) shartlarning barchasini qanoatlantirsa, bunday matritsa **ortogonal matritsa** deb ataladi. Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: bir dekart reperidan ikkinchi dekart reperiga o'tish matritsasi ortogonal matritsadan iborat.

1-misol. Yangi affın reperning boshi eski reperga nisbatan $O'(0, 3, -1)$ nuqtada, bazis vektorlar $\bar{e}'_1(1, 3, 0)$, $\bar{e}'_2(0, -3, 1)$, $\bar{e}'_3(1, 1, -2)$ bo'lsa, bu reperlarni almashtirish formulalarini yozing.

Yechish. Berilishiga ko'ra:

$$\begin{aligned} a &= 0, \quad b = 3, \quad c = -1, \\ a_{11} &= 1, \quad a_{21} = 3, \quad a_{31} = 0, \\ a_{12} &= 0, \quad a_{22} = -3, \quad a_{32} = 1, \\ a_{13} &= 1, \quad a_{23} = 1, \quad a_{33} = -2. \end{aligned}$$

Bu qiymatlarni (10) ga qo'ysak,

$$\begin{aligned} x &= x' + z', \\ y &= 3x' - 3y' + z' + 3, \\ z &= y' - 2z' - 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Endi eski bazisdan yangi bazisga o'tish formulasini topish uchun bu sistemani x', y', z' ga nisbatan yechamiz:

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{8}x + \frac{1}{8}y + \frac{3}{8}z, \\ y' = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + 1, \\ z' = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y - \frac{3}{8}z. \end{cases}$$

2-misol. Qirradi a ga teng bo'lgan $ABCD A'B'C'D'$ kub berilgan. $\beta(A, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ va $\beta'(C', \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}')$ dekart reperlari 1-d chizmada ko'satilganidek aniqlangan. Shu reperlarni almashtirish formulalarini yozing xamda E nuqtaning koordinatalarini ikkala reperda aniqlang.

Yechish: Avvalo C' nuqtaning β reperga nisbatan koordinatalarini topaylik.

$$\overline{AB} = a\bar{i}, \quad \overline{BC} = a\bar{j}, \quad \overline{CC'} = a\bar{k},$$

$$\overline{AC'} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CC'} = a\bar{i} + a\bar{j} + a\bar{k}, \quad C'(a, a, a).$$

Endi $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ ning koordinatalarini topaylik, chizmadan $\bar{i}' = -\bar{j}$, $\bar{j}' = -\bar{k}$, $\bar{k}' = -\bar{i} \Rightarrow \bar{i}'(0, -1, 0)$, $\bar{j}'(0, 0, -1)$, $\bar{k}'(-1, 0, 0)$. $\bar{e}'_1 = \bar{i}'$, $\bar{e}'_2 = \bar{j}'$, $\bar{e}'_3 = \bar{k}'$ desak, (10) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = -z' + a, \quad y = -x' + a, \quad z = -y' + a. \quad (\Delta)$$

Bu izlanayotgan formuladir.

$$\overline{AE} = \overline{AF} + \overline{FE} = \frac{a}{2} \bar{i} + \frac{a}{2} \bar{j} \Rightarrow \beta \text{ reperda } E\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right).$$

E ning β' reperdagi koordinatalarini topish uchun E ning β dagi koordinatalarini (Δ) dagi x, y, z ning o'rniga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} &= -z' + a, & x' &= \frac{a}{2}, \\ \frac{a}{2} &= -x' + a, & \text{yoki } y' &= a, \\ 0 &= -y' + a & x' &= \frac{a}{2}, \end{aligned}$$

bulardan

$$E\left(\frac{a}{2}, a, \frac{a}{2}\right).$$

Tayanch iboralar.

Koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish formulalari, bir bazisdan ikkinchi bazisga o'tish matritsasi, almashtirish matritsasi, ortogonal matritsa.

Nazorat uchun savollar.

1. Koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish formulalari deb nimaga aytiladi?
2. Bir bazisdan ikkinchi bazisga o'tish matritsasi deb nimaga aytiladi?
3. Almashtirish matritsasi deb nimaga aytiladi?
4. Ortogonal matritsa deb nimaga aytiladi?

9-mavzu: Tekislikda va fazoda orientatsiya.

Reja:

1. Tekislikning orientatsiyasi.
2. Fazoda orientatsiya.

1. Tekislikning orientatsiyasi. $(\bar{e}_1, \bar{e}_2), (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2) - V_2$ vektor fazoning ikki bazisi bo'lsin. Ikkinchi bazis vektorlarini birinchi bazis vektorlari bo'yicha yoyib yozamiz.

$$\bar{e}'_1 = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2, \quad \bar{e}'_2 = b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2,$$

$\bar{e}'_1, \bar{e}'_2$ vektorlarning bu bazisga nisbatan koordinatalaridan $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ jadvalni ikkinchi tartibli kvadrat matritsani tuzamiz. Bu jadval birinchi bazisdan ikkinchi bazisga ***o'tish matritsasi*** deb ataladi.

a_1, a_2, b_1, b_2 sonlar $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ matritsaning elementlaridir. Bu matritsa ikkita satr va ikkita ustunga ega: a_1, b_1 sonlar birinchi satrni, a_2, b_2 sonlar esa ikkinchi satrni; a_1, a_2 sonlar birinchi ustunni, b_1, b_2 sonlar esa ikkinchi ustunni tashkil qiladi. $a_1 b_2 - a_2 b_1$ son $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ ***matritsaning determinanti*** deyiladi. Uni $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ yoki $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ko'rinishda belgilaymiz. Agar matritsaning barcha satrlari chiziqli erkli bo'lsa,

u ***aynimagan matritsa***, satrlari orasida chiziqli bog'lanish mavjud bo'lsa, ***aynigan matritsa*** deyiladi. Algebra va sonlar nazariyasi kursidan ma'lumki, kvadrat matritsa determinantining nolga teng bo'lishi uning aynigan bo'lishining zaruriy va etarli shartidir. $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ aynimagan matritsadir, chunki $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ bo'lgan

holda $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ bo'lib, bundan $a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2$. Demak, $\bar{e}_1 = \lambda \bar{e}_2$. Bu esa $(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$

bazis vektorlarning kollinearligidan darak beradi).

V_2 vektor fazoning barcha bazislari to'plamini Ω bilan belgilaylik. $B_1, B_2 \in \Omega$ bazislarni olamiz.

Ta'rif. Agar B_1 bazisdan B_2 bazisga o'tish matritsasining determinanti musbat (manfiy) son bo'lsa, u holda B_1, B_2 bazislar ***bir xil (har xil) ismli*** deyiladi.

Kiritilgan bir xil ismlilik tushunchasi quyidagi xossalarga ega:

1. $\forall B \in \Omega$ uchun $B \sim B$. Bu yerda $\sim$ belgi bir ismlilik belgisi.
2. $B_1 \sim B_2 \Rightarrow B_2 \sim B_1$.

$$3. (B_1 \sim B_2, B_2 \sim B_3) \Rightarrow B_1 \sim B_3.$$

Isbot. 1. $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ bazis vektorlarning yana shu bazis vektorlari bo'yicha yoyilmasi $\bar{e}_1 = 1 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2$, $\bar{e}_2 = 0 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2$ ga ko'ra B dan B ga o'tish matritsasi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bo'lib, uning determinanti $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$. Demak, $B \sim B$.

2. $B_1 \sim B_2$ bo'lsin. Agar $B_1 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ bazisdan $B_2 = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$ bazisga o'tish matritsasi $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ bo'lsa, shartga ko'ra uning determinanti $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} > 0$. Endi B_2 dan B_1 bazisga o'tish matritsasi determinantini topaylik, buning uchun $\bar{e}'_1 = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2$, $\bar{e}'_2 = b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2$ sistemani $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ ga nisbatan yechamiz:

$$\bar{e}_1 = \frac{b_2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \bar{e}'_1 - \frac{a_2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \bar{e}'_2, \quad \bar{e}_2 = -\frac{b_1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \bar{e}'_1 + \frac{a_1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \bar{e}'_2.$$

Bu sistema matritsasining determinanti:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{b_2}{\Delta} & -\frac{a_2}{\Delta} \\ -\frac{b_1}{\Delta} & \frac{a_1}{\Delta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{vmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{\Delta^2} = \frac{1}{\Delta},$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow B_2 \sim B_1.$$

3. Ω ning Ushbu uchta $B_1 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, $B_2 = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$, $B_3 = (\bar{e}''_1, \bar{e}''_2)$ bazisini qaraymiz.

$B_1 \sim B_2$ va $B_2 \sim B_3$ bo'lsin. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ determinant B_1 dan B_2 ga o'tish matritsasining

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{vmatrix}$ determinant B_2 dan B_3 ga o'tish matritsasining determinanti bo'lsin. U holda

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2, & \bar{e}''_1 = a'_1 \bar{e}'_1 + a'_2 \bar{e}'_2, \\ \bar{e}'_2 = b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2, & \bar{e}''_2 = b'_1 \bar{e}'_1 + b'_2 \bar{e}'_2 \end{cases}$$

dan

$$\begin{cases} \bar{e}''_1 = (a'_1 a_1 + a'_2 b_1) \bar{e}_1 + (a'_1 a_2 + a'_2 b_2) \bar{e}_2, \\ \bar{e}''_2 = (b'_1 a_1 + b'_2 b_1) \bar{e}_1 + (b'_1 a_2 + b'_2 b_2) \bar{e}_2 \end{cases}$$

va B_1 dan B_3 ga o'tish matritsasi

$$\begin{pmatrix} a'_1 a_1 + a'_2 b_1 & a'_1 a_2 + a'_2 b_2 \\ b'_1 a_1 + b'_2 b_1 & b'_1 a_2 + b'_2 b_2 \end{pmatrix}$$

bo'lib, matritsalarini ko'paytirish qoidasiga ko'ra uning determinanti $\Delta_3 = \Delta_2 \cdot \Delta_1$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0 \Rightarrow \Delta_3 > 0$. Demak, $B_1 \sim B_3$.

Isbotlangan bu uchta shartni qanoatlantiruvchi munosabat matematikada **ekvivalentlik munosabati** deb ataladi.

Bir bazisdan boshqa bazisga o'tishda o'tish matritsasining determinanti yoki musbat, yoki manfiy son bo'lgani uchun ixtiyoriy ikki bazis yoki bir xil ismli, yoki har xil ismli bo'ladi. Demak, tekislikdagi barcha bazislarni bir ismlilik tushunchasiga asoslanib, ikki sinfga ajratish mumkin, bu sinflarning biriga tegishli barcha bazislar o'zaro bir ismli bo'lib, har xil sinfga tegishli ikki bazis bir ismli bo'lmaydi. Shu sinflarning har biri **orientatsiya** deb atalib, undagi bazislar **orientirlangan bazislar** deb yuritiladi.

Ba'zan bu sinflarni bir-biridan farqlash uchun **o'ng orientatsiya** yoki **chap orientatsiya** deb ham yuritiladi. Bazisning orientatsiyasi ma'lum bo'lgan tekislik **orientatsiyali tekislik** deb ataladi. Agar $B_1 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ va $B_2 = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$ bazislar bir xil (qarama-qarshi) orientatsiyali bo'lsa, $\beta = (O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ va $\beta' = (O', \bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$ reperlar **bir xil (qarama-qarshi) orientatsiyali** deyiladi.

Odatda, $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ reperring $\bar{e}_1$ vektorini O nuqta atrofida $\bar{e}_2$ vektor ustiga tushirish uchun qisqa yo'l bo'yicha burish soat mili harakatiga teskari bo'lsa, u **musbat orientatsiyali** deyiladi.

Misol. Tekislikda $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, $(O', \bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$ reperlarni qaraymiz, bu yerda $\bar{e}'_1 = \bar{e}_1$, $\bar{e}'_2 = -\bar{e}_2$ bo'lsin. B' bazisning vektorlari B bazis bo'yicha ushbu yoyilmaga ega bo'ladi:

$$\bar{e}'_1 = 1 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2, \bar{e}'_2 = 0 \cdot \bar{e}_1 - 1 \cdot \bar{e}_2 \Rightarrow \bar{e}'_1(1, 0), \bar{e}'_2(0, -1).$$

B bazisdan B' bazisga o'tish matritsasining determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Demak, bu β, β' reperlar qarama-qarshi orientatsiyali. Qarama-qarshi orientatsiyali reperlarda birinchi koordinata vektorlaridan ikkinchi koordinata vektorlariga qarab qisqa yo'l bo'ylab burilish yo'nalishlari qarama-qarshidir.

2. Fazoda orientatsiya. Fazoda ikki affin reper berilgan bo'lib, ular orasidagi bog'lanish quyidagi formulalar bilan aniqlangan bo'lsin:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a, \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + b, \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + c. \end{aligned} \tag{1}$$

Ta'rif. (1) formulalardagi o'tish matritsasining determinanti musbat bo'lsa, u holda β, β' **reperlar bir xil ismli** deb ataladi, aks holda, ya'ni determinant manfiy bo'lsa, β, β' **har xil ismli reperlar** deb ataladi.

Oldingi mavzudagi 2-misolda olingan β, β' reperlar har xil ismli, chunki (Δ) ning o'tish matritsasining determinanti

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Oldingi mavzudagi 1-misolda topilgan (13) almashtirish o'tish matritsasining determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

bo'lgani uchun bu reperlar bir ismlidir.

Bundan ko'rinadiki, fazodagi barcha affin reperlarni bir ismlilik tushunchasiga asoslanib ikki sinfga ajratish mumkin, bu sinflarning biriga tegishli barcha reperlar o'zaro bir ismli bo'lib, har xil sinfga tegishli ikki reper bir ismli bo'lmaydi. SHu sinflarning har biri **orientatsiya** deb atalib, undagi reperlar **orientirlangan reper** deb yuritiladi, ba'zan bu sinflarni bir-biridan farqlash uchun «o'ng» orientatsiya yoki «chap» orientatsiya deb ham yuritiladi. Reperning orientatsiyasi ma'lum bo'lgan fazo **orientirlangan fazo** deb ataladi.

Tayanch iboralar.

Musbat orientatsiya, orientatsiyalangan fazo, orientatsiyali tekislik, bir xil (har xil) ismli reperlar.

Nazorat uchun savollar.

1. Orientatsiya nima?
2. Qachon bazislar bir xil ismli deyiladi?
3. Qachon bazislar har xil ismli deyiladi?
4. Orientirlangan reper deb nimaga aytiladi?
5. Orientirlangan fazo deb nimaga aytiladi?
6. Orientatsiyali tekislik deb qanday tekislikka aytiladi?
7. Musbat orientatsiyali degani nima?

10-mavzu: Qutb, silindrik va sferik koordinatalar sistemasi.

Reja:

1. Qutb koordinatalar sistemasi.
2. Nuqtaning qutb va dekart koordinatalari orasidagi bog'lanish.
3. Silindrik koordinatalar sistemasi.
4. Sferik koordinatalar sistemasi.

1. Qutb koordinatalar sistemasi. Orientatsiyali tekislikda O nuqta OP nur va OP nurda yotuvchi $\overrightarrow{OE} = \vec{i}$ birlik vektorni belgilaymiz. Hosil qilingan geometrik obraz **qutb koordinatalar sistemasi** deyiladi. Uni $(O, \vec{i})$ ko'rinishda belgilaymiz. O nuqta **qutb boshi**, OP nur esa **qutb o'qi** deyiladi. M nuqtaning tekislikdagi vaziyati ma'lum tartibda olingan ikki son: biri OE birlik kesma yordamida o'lchangan $r = |\overrightarrow{OM}| \geq 0$ masofa, ikkinchisi OP nur OM nurning ustiga tushishi uchun burilishi kerak bo'lgan $\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ burchak bilan to'la aniqlanadi.

Qutb o'qini OM nur ustiga tushgunga qadar burish musbat yo'nalishda, ya'ni soat mili yo'nalishiga teskari yo'nalishda bajarilsa, φ musbat deb, aks holda φ ni manfiy deb hisoblanadi.

r ni M nuqtaning **qutb radiusi**, φ ni M nuqtaning **qutb burchagi** deyilib, ularni M nuqtaning **qutb koordinatalari** deyiladi va $M(r, \varphi)$ ko'rinishda belgilanadi.

O nuqta uchun $r = 0$ bo'lib, φ aniqlanmagan hisoblanadi. Agar $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ yarim segmentda o'zgarsa, tekislikning har bir nuqtasi qutb koordinatalari bilan ta'minlanadi.

Ravshanki, sonlarning har qanday (r, φ) jufti uchun tekislikning bitta nuqtasi mavjud bo'lib, sonlarning bu jufti shu nuqta uchun qutb koordinatalar bo'ladi. Ammo bir nuqtaning o'ziga cheksiz ko'p sonlar juftligi mos keladi. Chunonchi, M nuqtaning koordinatalari $r = a > 0$, $\varphi = \alpha$ bo'lsa, $r = a > 0$, $\varphi = \alpha \pm 2\pi k$ (bu yerda $k = 0, 1, 2, \dots$) juftliklar ham shu M nuqtaning koordinatalari bo'ladi, chunki OM nur OP qutb o'qini α burchak qadar burilishidan hosil bo'ladi deb faraz qilsak, u holda OP nurni $\varphi = \alpha \pm 2\pi k$ qadar burilishidan ham o'sha nurning o'zini hosil qilish mumkin.

M nuqtaning qutb burchagi qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari orasidan $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ tengsizlikni qanoatlantiradigan aniq bir qiymati ajratiladi va u **bosh qiymat** deb ataladi. Qutb burchagining bosh qiymati sifatida OP nurni OM nurning ustiga tushirish uchun uni burish kerak bo'lgan burchak olinadi. OM nur OP nurga qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, 180° ga ikki yo'nalishda burish mumkin, bu vaqtda qutb burchagining bosh qiymati uchun $\varphi = \pi$ qabul qilinadi.

2. Nuqtaning qutb va dekart koordinatalari orasidagi bog'lanish. Tekislikda $(O, \vec{i})$ qutb koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Koordinatalar boshi qutb boshi bilan, abstsissalar o'qining musbat qismi qutb o'qi bilan ustma-ust tushadigan musbatorientatsiyali $(O, \vec{i}, \vec{j})$ Dekart reperini kiritamiz.

M nuqtaning qutb koordinatalari r, φ Dekart koordinatalari esa x, y bo'lsin.

OM_1M to'g'ri burchakli uchburchakdan:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (1)$$

M nuqtaning qutb koordinatalari r, φ ma'lum bo'lsa, (1) formulalar bo'yicha uning Dekart koordinatalari hisoblanadi.

O'z navbatida M nuqtaning qutb koordinatalari r, φ ni uning Dekart koordinatalari x, y orqali topish mumkin. OM_1M uchburchakdan:

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \\ \cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(1) M nuqtaning qutb koordinatalaridan Dekart koordinatalariga, (2) M nuqtaning Dekart koordinatalaridan qutb koordinatalariga o'tish formulalaridir.

Shuni eslatib o'tamizki, M nuqtaning Dekart koordinatalaridan qutb koordinatalariga o'tishda $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ formula qutb burchagining bosh qiymatini to'la aniqlamaydi, chunki buning uchun yana φ miqdor musbat yoki manfiy ekanligini ham bilish kerak. Odatda bu M nuqtaning qaysi chorakda joylashishiga qarab aniqlanadi. Masalan, (2) formulada $x = 3, y = 3$ bo'lsa, $\operatorname{tg} \varphi = 1$ bo'lib, $\varphi = 45^\circ$. Lekin $x = -3, y = -3$ bo'lganda ham $\operatorname{tg} \varphi = 1$ bo'lib, endi φ burchak 45° emas, balki -135° bo'lishi kerak, chunki $(-3, -3)$ nuqta uchinchi chorakda joylashgan. φ burchakning qiymati va ishorasini $\cos \varphi, \sin \varphi$ ga qarab aniqlash qulayroq.

Misol. Qutb koordinatalari bilan berilgan $M_1(r_1, \varphi_1), M_2(r_2, \varphi_2)$ nuqtalar orasidagi masofani hisoblash formulasini keltirib chiqaring.

Yechish. M_1, M_2 nuqtalarning Dekart koordinatalari $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ bo'lsin. Dekart koordinatalaridan qutb koordinatalariga o'tish formulalariga ko'ra

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos \varphi_1, & x_2 &= r_2 \cos \varphi_2, \\ y_1 &= r_1 \sin \varphi_1, & y_2 &= r_2 \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad \text{va}$$

U holda

$$\begin{aligned} \rho(M_1, M_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\ &= \sqrt{(r_2 \cos \varphi_2 - r_1 \cos \varphi_1)^2 + (r_2 \sin \varphi_2 - r_1 \sin \varphi_1)^2} = \\ &= \sqrt{r_1^2 (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) + r_2^2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2) - 2r_1 r_2 (\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1)} = \\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \\ \rho(M_1, M_2) &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \end{aligned}$$

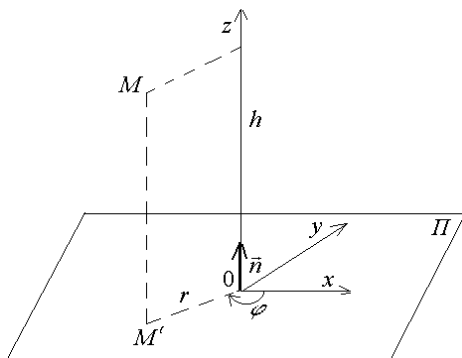
Fazoda koordinatalarning boshqa sistemalari. Fazoda yuqorida ko'rilgan affin va dekart sistemalari bilan bir qatorda boshqa sistemalar ham mavjud bo'lib, ulardan ba'zilarini ko'rib chiqamiz.

3. Silindrik koordinatalar. Bu sistema quyidagicha hosil qilinadi. Fazodagi biror Π tekislik va undan tayin bir O nuqta olinadi. Π tekislikka tegishli va uchi shu O da bo'lgan l nur belgilanadi hamda l nurning yo'nalishini aniqlovchi $\vec{i}$ birlik vektor olinadi (ya'ni Π da koordinatalarning qutb sistemasi kiritiladi). $\vec{n}$ birlik vektor Π ning O dan qo'yilgan normal vektori bo'lsa, $\vec{n}$ ning uchidan qaraganda Π ni shu vektor atrofida burishdagi harakatning yo'nalishi soat mili harakatiga teskari bo'lsa, burish burchagini musbat deb olinadi. Bu vaqtda fazodagi har bir nuqtaning o'rnini yuqoridagi berilganlarga nisbatan uchta son bilan to'liq aniqlash mumkin. Haqiqatan, M fazodagi biror nuqta bo'lsa, uning Π dagi ortogonal proyeksiyasini M' deb belgilasak, $\overline{MM'} \parallel \vec{n}$, demak, $\overline{MM'} \parallel h\vec{n}$. M' nuqtaning Π dagi qutb sistemasiga nisbatan koordinatalarini r, φ desak, (r, φ, h) sonlar M nuqtaning **silindrik koordinatalari** deb ataladi.

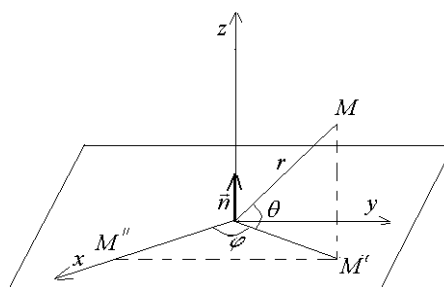
Dekart sistemasini 1-chizmada ko'rsatilgandek qilib tanlab olinsa, M nuqtaning dekart koordinatalari x, y, z ni shu nuqtaning tsilindrik koordinatalari r, φ, h orqali ifodalash mumkin:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h. \quad (3)$$

4. Sferik koordinatalar. Π tekislikda qutb koordinatalar sistemasi kiritiladi, $\vec{n} \perp \Pi$ birlik vektor qo'yiladi. Fazodagi har bir M nuqtaning o'rnini uchta r, φ, θ son bilan aniqlash mumkin, bunda



1 – chizma



2 – chizma

$r = |\overline{OM'}|$, φ -bu M nuqtaning Π tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi M' ning qutb burchagi, θ -bu $\overline{OM}, \overline{OM'}$ vektorlar orasidagi burchak, bu uch son M nuqtaning **sferik koordinatalari** deyiladi va $M(r, \varphi, \theta)$ ko'rinishda yoziladi. Biz $r > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ deb faraz qilamiz, bundan tashqari, xOy koordinatalar

tekisligidan «yuqori» turgan nuqtalar uchun $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ va «quyi» yarim fazoga tegishli nuqtalar uchun $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq 0$ olinadi (2-chizma).

Koordinatalarning dekart sistemasi 2-chizmadagidek tanlab olinsa, sferik va dekart koordinatalarni bog'lovchi ushbu formulalarni topish mumkin:

$$\begin{aligned}x &= |\overline{OM'}| \cos \varphi = r \cos \theta \cos \varphi, \\y &= |\overline{OM'}| \sin \varphi = r \cos \theta \sin \varphi, \\z &= |\overline{MM'}| = r \sin \theta.\end{aligned}\tag{4}$$

Silindrik va sferik koordinatalar asosan mexanika, matematik fizika fanlarida ko'proq ishlatiladi. Biz ulardan chiziqlar va sirtlar nazariyasida foydalanamiz.

Tayanch iboralar.

Qutb, qutb o'qi, qutb burchagi, qutb radiusi, qutb koodinatalar, tsilindrik koordinatalar, sferik koordinatalar.

Nazorat uchun savollar.

1. Qutb koordinatalar sistemasi qanday kiritiladi?
2. Qutb va Dekart koordinatalar sistemasi orasidagi bog'lovchi formulalarni yozib ko'rsating.
3. Silindrik koordinatalar sistemasi qanday kiritiladi?
4. Sferik koordinatalar sistemasini kiritilishini aytib bering?

11-mavzu: Fazoda tekislik tenglamalari. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa.

Reja:

1. Fazoda tekislikning turli tenglamalari.
2. Dekart reperida tekislikka doir ba'zi masalalar.

1. Fazoda tekislikning turli tenglamalari.

1. Nokollinear ikki $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ vektor va bitta M_0 nuqta Π tekislikning vaziyatini to'la aniqlaydi.

$\forall M \in \Pi$ nuqtani olaylik. U holda $\overline{M_0M}$ vektor va $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ vektorlar bilan komplanar bo'ladi, demak, bu vektorlar chiziqli bog'liq bo'lib, bundan ularning koordinatalaridan tuzilgan uchinchi tartibli determenant nolga teng bo'lishi kelib chiqadi. SHuni koordinatalarda yozaylik.

$$M_0(x_0, y_0, z_0), \bar{p}_1(a_1, b_1, c_1), \bar{p}_2(a_2, b_2, c_2) \quad (1)$$

bo'lsin. M ning koordinatalarini x, y, z deb olaylik. $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ bo'lib, quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Aksincha, (2) shart bajarilsa, M nuqta albatta Π tekislikka tegishli bo'ladi. Demak, (2) Π ning tenglamasi. Bu tenglama berilgan nuqtadan o'tib, berilgan (nokollinear) ikki vektorga parallel bo'lgan tekislikning **tenglamasi** deb yuritiladi.

Bundan tashqari $\overline{M_0M}, \bar{p}_1, \bar{p}_2$ vektorlar bir tekislikda yotgani uchun ular chiziqli bog'liqdir, ya'ni

$$\overline{M_0M} = u \bar{p}_1 + \vartheta \bar{p}_2, \quad u, \vartheta \in R, \quad (3)$$

bu yerda u, ϑ sonlar parametrlardir. (3) dan

$$\begin{cases} x - x_0 = u a_1 + \vartheta a_2, \\ y - y_0 = u b_1 + \vartheta b_2, \\ z - z_0 = u c_1 + \vartheta c_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u a_1 + \vartheta a_2 + x_0, \\ y = u b_1 + \vartheta b_2 + y_0, \\ z = u c_1 + \vartheta c_2 + z_0. \end{cases} \quad (4)$$

(4) **tekislikning parametrik tenglamalari** deb ataladi (u va ϑ ga istalgan qiymatlar berib, tekislikning shu parametrlarga mos nuqtalarini topish mumkin).

Endi (2) tenglamani quyidagicha yozaylik:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (5)$$

bundan

$$A = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

$$(5) \Rightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0, \text{ bunda } -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D$$

demak,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (7)$$

tenglama hosil bo'ladi. (2) $\Leftrightarrow$ (7) bo'lgani uchun (7) ham tekislikning tenglamasidir.

(6) da A, B, C larning kamida bittasi noldan farqli ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$), aks holda $A = B = C = 0$ bo'lsa, (6) dan $a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2, c_1 = \lambda c_2 \Rightarrow \bar{p}_1 \parallel \bar{p}_2$, bu esa $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ larning berilishiga zid. Shunday qilib, tekislik afflin repyerda (7) chiziqli tenglama bilan ifodalanadi. Bu xulosaning teskarisi ham o'rinlidir, ya'ni (7) ko'rinishdagi har qanday chiziqli tenglama fazodagi biror afflin repyerga nisbatan tekislikni aniqlaydi.

Haqiqatan, $Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$) tenglama biror afflin repyerda biror nuqtalar to'plamini aniqlasin. Uch o'zgaruvchini bog'lagan bu tenglamaning yechimi cheksiz ko'pdir, ularning biri (x_0, y_0, z_0) bo'lsa, u holda $Ax_0 + Bx_0 + Cz_0 + D = 0$, bundan va (7) dan $\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ -tekislik tenglamasidir.

(7) tenglama **tekislikning umumiy tenglamasi** deb ataladi.

2. Bir to'g'ri chiziqli yotmaydigan uchta nuqta tekislikning vaziyatini aniqlaydi. Shu ma'lumotlarga ko'ra uning tenglamasini tuzaylik. Berilgan nuqtalar $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ bo'lsin. Biz $M_0 = M_1, \bar{p}_1 = \overline{M_1M_2}, \bar{p}_2 = \overline{M_1M_3}$ desak, hamda $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \overline{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ ni e'tiborga olsak, (2) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

uch nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasi shudir.

Agar tekislik koordinatalar boshidan o'tmasa, u Ox, Oy, Oz o'qlarni uchta $M_1(a, 0, 0), M_2(0, b, 0), M_3(0, 0, c)$ nuqtada kesadi, bu yerda a, b, c tekislikning shu o'qlardan ajratgan kesmalaridir. Bunga (8) ko'rinishli tenglamani tatbiq qilamiz:

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

bundan

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (9)$$

bu tenglama **tekislikning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalari bo'yicha tenglamasi** deb ataladi.

Biz bu mavzuda tekislikning 6 xil ko'rinishidagi (2), (3), (4), (7), (8), (9) tenglamalarini ko'rdik.

2. Dekart reperida tekislikka doir ba'zi masalalar.

Dekart reperi affin reperring xususiy holi bo'lgani uchun affin repyerdagi chiqarilgan tenglamalar Dekart reperida ham o'z kuchini saqlaydi, lekin Dekart reperida tekislikka doir metrik xaraktyerdagi masalalarni echish mumkin.

1. $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglama affin sistemasida tekislikning umumiy tenglamasidir, shu tenglamani Dekart reperida qarasak, A, B, C parametrlarning muhim geometrik xossasi ayon bo'ladi.

Haqiqatan, berilgan tenglamaga ekvivalent bo'lgan ushbu tenglamani olaylik:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Endi $\vec{n}(A, B, C)$ va $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ deb olinsa, oxirgi tenglikning chap tomoni $\vec{n}$ va $\overline{M_0M}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini ifoda qiladi. Demak,

$$\vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overline{M_0M} \in \Pi \Rightarrow \vec{n} \perp \Pi.$$

Xullas, A, B, C sonlar berilgan tekislikka perpendikulyar vektorni aniqlaydi. Shu vektor tekislikning **normal vektori** deb ataladi. Biz

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

tenglamani berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tib, berilgan $\vec{n}(A, B, C)$ vektorga perpendikulyar tekislikning tenglamasi deb atashga haqlimiz.

2. Endi berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha bo'lgan masofani topish masalasini qaraylik.

Ta'rif. Berilgan M_1 nuqtadan berilgan Π tekislikkacha bo'lgan masofa deb, shu nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyar to'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishgan nuqtasi orasidagi masofaga aytiladi.

Π tekislik umumiy tenglama bilan berilgan bo'lib, $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin \Pi$ bo'lsin. M_1 dan Π ga perpendikulyar tushirib, uning asosini $M_0(x_0, y_0, z_0)$ desak, $M_0 \in \Pi$ bo'lgani uchun

$$Ax_0 + Bx_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (10)$$

U holda $\vec{n}(A, B, C)$ vektor Π ning normal vektoridir.

$\vec{n} \parallel \overline{M_0M_1}$, demak, $\overline{M_0M_1} \cdot \vec{n} = |\overline{M_0M_1}| |\vec{n}| \cos(\overline{M_0M_1}, \vec{n}) = \rho(M_1, \Pi) |\vec{n}| \cdot (\pm 1)$, bundan:

$$\rho(M_1, \Pi) = \frac{|\overline{M_0M_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}. \quad (11)$$

$\overline{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$; (11) dan

$$\rho(M_1, \Pi) = \frac{|(x_1 - x_0)A + (y_1 - y_0)B + (z_1 - z_0)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(10) ga asosan

$$\rho(M_1, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (12)$$

Bu izlangan formuladir. Xususiyl holda, koordinatalar boshidan tekislikkacha bo'lgan masofa:

$$\rho(O, \Pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Misol. $M_1(1, -2, 2)$ nuqtadan $2x + y + 2z - 7 = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. (12) formulaga asosan:

$$\rho(M_1, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + (-2) + 2 \cdot 2 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-3|}{3} = 1.$$

Tayanch iboralar.

Tekislikning normal vektori, tekislikning umumiy tenglamasi, tekislikning vektorli tenglamasi, tekislikning parametrik tenglamasi, tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi.

Nazorat uchun savollar.

1. Tekislik qanday usullar bilan berilishi mumkin?
2. Tekislikning normal vektori deb nimaga aytiladi?
3. Tekislikning umumiy tenglamasi qanday ifodalanadi?
4. Tekislikning parametrik tenglamasini ko'rsating.
5. Uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
6. Tekislikning vektor ko'rinishdagi tenglamasini yozing.
7. Tekisliklarning paralellik va perpendikulyarlik shartlarini aytib bering.
8. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani topish formulasini ko'rsating.

12-Mavzu: Tekisliklarning o'zaro vaziyati

Reja:

1. Ikki tekislikning o'zaro vaziyati.
2. Uchta tekislikning o'zaro vaziyati.

1. Ikki tekislikning o'zaro vaziyati. Biror $\beta = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ affin repenga nisbatan Π_1, Π_2 tekisliklar umumiy tenglamalari bilan berilgan bo'lsin.

$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (1)$$

$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Ikki tekislik yo to'g'ri chiziq orqali kesishadi, yoki ular o'zaro parallel bo'lib, umumiy nuqtaga ega emas, yoki ustma-ust tushadi. Bu holning qay biri yuz berishini bilish uchun Π_1, Π_2 ga tegishli tenglamalar sistemasini tekshiramiz. Avvalo quyidagi matritsalarini tuzib olamiz:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \quad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

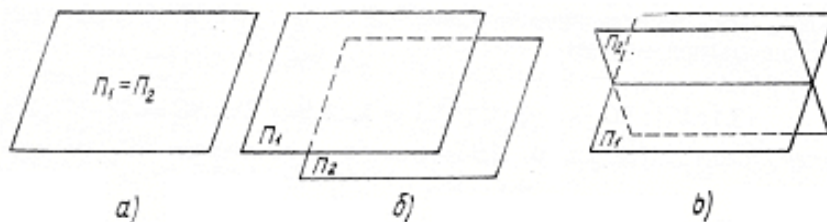
M matritsaning rangini r , kengaytirilgan M^* matritsaning rangini esa r^* deb belgilaylik. Bu yerda quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1. Π_1, Π_2 tekisliklar ustma-ust tushsa, ularning tenglamalarida

$$A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2, C_1 = \lambda C_2, D_1 = \lambda D_2,$$

ya'ni

$$r = r^* = 1. \quad (2)$$



1-chizma

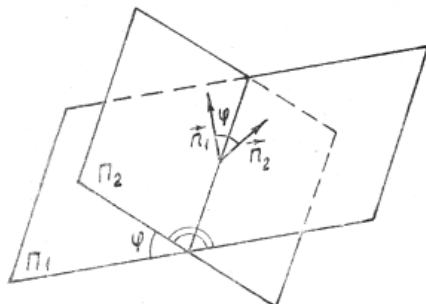
Aksincha, (2) shartlar o'rinli bo'lsa, (1) tenglamalar ekvivalent bo'lib, $\Pi_1 = \Pi_2$, demak, $\Pi_1 = \Pi_2 \iff r^* = r = 1$ (1-a chizma).

2. Π_1, Π_2 lar har xil, lekin parallel bo'lsa, u holda (2) shartlardan birinchi uchta bajariladi, lekin $D_1 \neq \lambda D_2$ (1-b chizma), bu vaqtda $r^* = 2, r = 1$.

3. $r^* = r = 2$ bo'lgan holda tenglamalar sistemasi birgalikda bo'ladi, boshqacha aytganda, Π_1, Π_2 tekisliklar umumiy nuqtaga ega, demak, ular biror to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi (1-c chizma).

Metrik xarakterli masalalardan biri ikki tekislik orasidagi burchakni topish masalasidir.

Ikki tekislik kesishganda to'rtta ikki yoqli burchak hosil bo'lib, ulardan o'zaro vertikal bo'lganlari teng (2-chizma). Demak, ikkita har xil burchak hosil bo'lib, bularning biri ikkinchisini π ga to'ldiradi.



2-chizma

Shuning uchun shu ikki burchakdan birini topsak kifoya. Ikki yoqli bu ikki burchakdan birining chiziqli burchagi berilgan tekisliklarning $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ normal vektorlari orasidagi burchakka teng bo'ladi (mos tomonlari o'zaro perpendikulyar bo'lgan burchaklar tengdir).

Π_1, Π_2 orasidagi burchakni φ desak,

$$\cos \varphi = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3)$$

Burchak kosinusi ma'lum bo'lsa, burchakning o'zini hisoblash osondir.

2. Uchta tekislikning o'zaro vaziyati. Biror affin repyerda tekisliklar umumiy tenglamalar bilan berilgai bo'lsin.

$$\begin{aligned} \Pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0, \\ \Pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0, \\ \Pi_3 : A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Bu uch tekislikning o'zaro vaziyatini aniqlash bu tenglamalar sistemasini tekshirishni taqozo qiladi. Berilgan tenglamalarning koeffitsientlaridan quyidagi matritsalarini tuzamiz:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \quad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

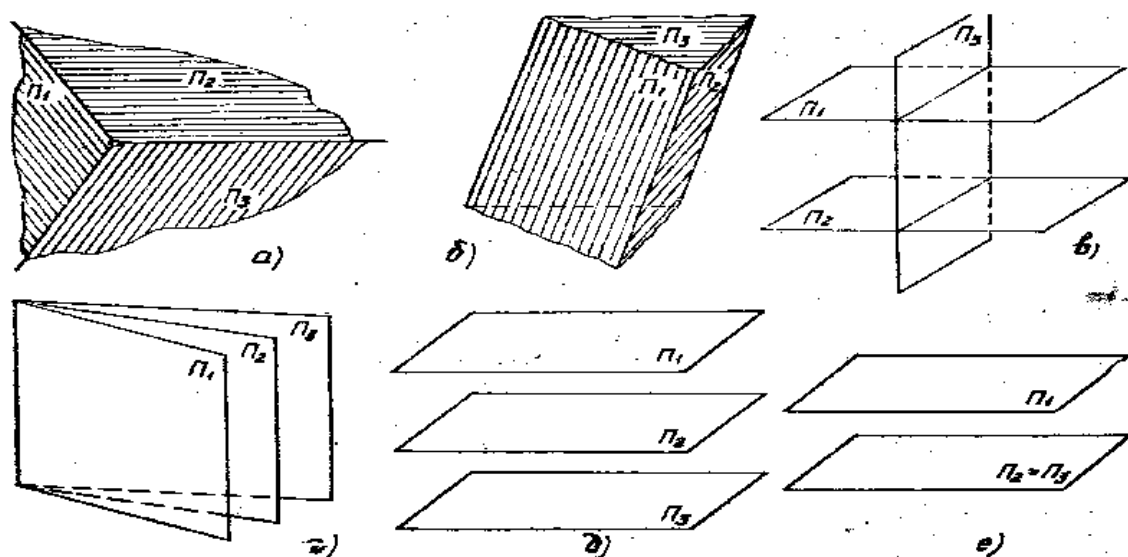
Bu matritsalarining ranglarshi mos ravishda r, r^* deb belgilaylik. Ravshanki, $1 \leq r \leq 3, 1 \leq r^* \leq 3$ hamda $r \leq r^*$.

Quyidagi hollarni ayrim-ayrim ko'rib o'tamiz:

1. $r = 3, r^* = 3$. Bu vaqtda yuqoridagi uchta tenglama birgalikda bo'lib, yagona echimga egadir, demak, berilgan uchta tekislik bitta umumiy nuqtaga ega (3-a chizma).

2. $r = 2, r^* = 3$. M, M^* matritsalarining ranglari o'zaro teng bo'lmagani uchun berilgan sistema yechimga ega emas, demak, tekisliklarning uchalasiga tegishli nuqta mavjud emas. Lekin bu vaqtda quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin.

a) M matritsaning ixtiyoriy ikkita satrining elementlari proporsional emas, u holda uchta tekislikning har ikkitasi kesishib, hosil bo'lgan uchta to'g'ri chiziqliq paralleldir (3-6 chizma).



3-chizma

b) M matritsaning tayin ikki satri elementlari proporsional bo'lsa, shu satrlarga mos tekisliklar parallel bo'lib, uchinchi tekislik ularni albatta kesib o'tadi (3-6 chizma).

3. $r = 2, r^* = 2$. Bu vaqtda M, M^* matritsalarining faqat ikki satri elementlari proporsional bo'lmasdan, qolgan bitta satri shu ikki satr elementlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi, demak, uchala tekislik bitta to'g'ri chiziqliq orqali kesishadi (3-2 chizma).

4. $r = 1, r^* = 2$. Bu holda sistema birgalikda bo'lmaydi, demak, Π_1, Π_2, Π_3 lar umumiy nuqtaga ega emas. Lekin $r^* = 2$ bo'lgani uchun quyidagi xulosani chiqaramiz: Π_1, Π_2, Π_3 dan ikkitasi parallel bo'lib (umumiy nuqtasiz), uchinchi bulardan biri bilan ustma-ust tushadi (3-e chizma), yoki ularning uchalasi parallel (umumiy nuqtasiz) (3-d chizma).

5. $r = 1, r^* = 1$. Bu vaqtda berilgan tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p echimga ega bo'lib, u sistema faqat bitta chiziqliq erkli tenglamadan iborat bo'lib qoladi, demak, Π_1, Π_2, Π_3 tekisliklarning uchalasi ustma-ust tushib qoladi.

1-misol. Dekart reperida $\Pi_1: 2x + 5y + 4z + 15 = 0$ va $\Pi_2: 6x - 3z + 2 = 0$ tekisliklar berilgan. Bu tekisliklarning o'zaro vaziyatini aniqlang hamda ular orasidagi burchakni hisoblang.

Yechish. Berilgan tenglamalarning koeffitsientlaridan quyidagi matritsalar tuzamiz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad M^* = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 15 \\ 6 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -30 \Rightarrow r = 2 \text{ va } r^* = 2.$$

Demak, berilgan tekisliklar kesishadi.

Endi (15) formula bo'yicha shu tekisliklar orasidagi burchakni topaylik:
 $\bar{n}_1(2, 5, 4), \bar{n}_2(6, 0, -3);$

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 6 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2} \cdot \sqrt{6^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{12 - 12}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{45}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = 90^\circ \Rightarrow \Pi_1 \perp \Pi_2.$$

2-misol. Affin repyerda berilgan

$$\begin{aligned} \Pi_1: 2x - y + z - 4 &= 0, \\ \Pi_2: x + y - z - 2 &= 0, \\ \Pi_3: 2x - y + 3z - 6 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

tekisliklarning o'zaro vaziyatini aniqlang hamda ularning kesishmasini toping.

Yechish.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

matritsalarini tuzib, ularning ranglarini hisoblaylik:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow r = 3,$$

demak, $r^* = 3$. Yuqorida ko'rilgan 1-holga asosan bu tekisliklar bitta nuqtada kesishadi. Shu nuqtani topaylik, uning uchun (5) sistemani echamiz. Sistemadagi birinchi va ikkinchi tenglamalarni qo'shsak,

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2,$$

u holda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga $x = 2$ ni qo'ysak,

$$y - z = 0,$$

$$-y + 3z - 2 = 0.$$

Bundan $2z - 2 = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow y = 1$. Tekisliklar $(2, 1, 1)$ nuqtada kesishadi.

3-misol. Affin sistemasida berilgan

$$\Pi_1 : x + y - z + 1 = 0,$$

$$\Pi_2 : x + y - z = 0,$$

$$\Pi_3 : -x - y + z - 1 = 0$$

tekisliklarning o'zaro vaziyatini aniqlang.

Yechish.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsialarning ranglarini hisoblasak,

$$r = 1, \quad r^* = 2.$$

Bundan ko'rinadiki, bu tekisliklardan ikkitasi, aniqrog'i Π_1, Π_3 ustma-ust tushadi, lekin $\Pi_1 \parallel \Pi_2, \Pi_2 \parallel \Pi_3 (\Pi_1 \cap \Pi_3 \neq \emptyset, \Pi_2 \cap \Pi_3 = \emptyset)$.

Nazorat uchun savollar.

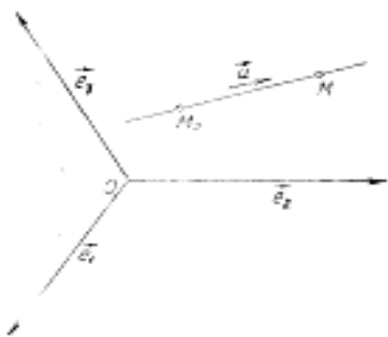
1. Qachon ikki tekislik ustma-ust tushadi?
2. Tekisliklarning paralellik shartini aytib bering.
3. Tekisliklarning perpendikulyarlik shartini aytib bering.
4. Ikki tekislik qachon kesishadi?
5. Ikki tekislik orasidagi burchakni hisoblash formulasini yozib bering.
6. Uch tekislik qachon bitta umumiy nuqtaga ega bo'ladi?
7. Qachon uch tekislik ustma-ust tushadi?

13-mavzu: Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari. Fazoda to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyati. Fazoda to'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro vaziyati.

Reja:

1. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari.
2. Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. To'g'ri chiziqlar bog'lami.
3. Fazoda to'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro vaziyati.

I. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari.



1. Fazodagi to'g'ri chiziq o'zining nuqtasi va shu chiziqqa parallel biror $\bar{u} \neq \bar{0}$ vektor bilan to'la aniqlanadi (1-chizma).

$(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ repyerda $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{u}(l, m, n)$ bo'lsin. To'g'ri chiziqning ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtasini olaylik:

$$\overline{M_0M} \parallel \bar{u} \Rightarrow \overline{M_0M} = t\bar{u} (t \in R). \quad (1)$$

$$\overline{OM_0} = \bar{r}_0, \quad \overline{OM} = \bar{r} \text{ desak hamda}$$

1-chizma

$\overline{M_0M} = \overline{OM} - \overline{OM_0}$ ni hisobga olsak, (1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{u}. \quad (2)$$

(2) tenglama **to'g'ri chiziqning vektorli tenglamasi** deb ataladi, t ga har xil qiymatlar berish bilan to'g'ri chiziqqa tegishli nuqtaning radius-vektori topiladi.

$\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ va (1) dan

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot l, \\ y - y_0 = t \cdot m, \\ z - z_0 = t \cdot n \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x = x_0 + t \cdot l, \\ y = y_0 + t \cdot m, \\ z = z_0 + t \cdot n. \end{cases} \quad (3)$$

Bu (3) tenglamalar sistemasi to'g'ri chiziqning **parametrik tenglamalari** deb yuritiladi. M_0 – berilgan nuqta, $\bar{u}$ esa u ning **yo'naltiruvchi vektori** deb ataladi.

$$\text{Agar } l \cdot m \cdot n \neq 0 \text{ bo'lsa, u holda } (3) \Rightarrow t = \frac{x - x_0}{l}, \quad t = \frac{y - y_0}{m}, \quad t = \frac{z - z_0}{n},$$

bulardan

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (4)$$

Bu tenglamalar **to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari** deb ataladi.

2. To'g'ri chiziqning ikki nuqtasi uning fazodagi vaziyatini to'la aniqlaydi: faraz etaylik, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalardan u to'g'ri chiziq o'tsin ($M_1 \neq M_2$). Oldingi banddagi M_0 nuqta o'rniga M_1 va $\bar{u} = \overline{M_1 M_2}$ olinsa, (4) ga asosan:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (5)$$

Berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziqning tenglamalari (5) dir.

3. Fazodagi har bir to'g'ri chiziqni ikki tekislikning kesishish chizig'i deb qarash mumkin. Shunga muvofiq

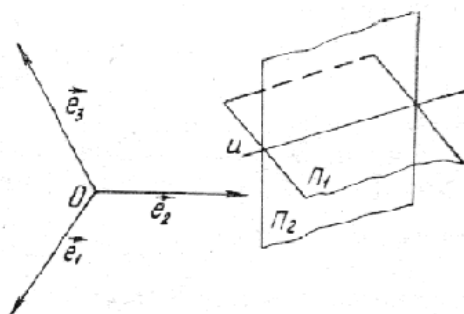
$$\begin{aligned} \Pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0, \\ \Pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

tenglamalar sistemasi

$$\Pi_1 // \Pi_2 \Rightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$$

shart bajarilganda to'g'ri chiziqni aniqlaydi (2-chizma).

To'g'ri chiziqning yuqorida ko'rilgan (2)-(5) tenglamalarining biridan qolganlariga o'tish mumkin. Lekin u (6) ko'rinishdagi tenglamalari bilan berilsa,



2-chizma

kanonik ko'rinishga bevosita o'tish mumkin ekanligi ochiqdan-ochiq ravshan emas. Biz hozir shu masalaga to'xtalamiz. Kanonik tenglamalarni yozish uchun to'g'ri chiziqning bitta nuqtasi va yo'naltiruvchi vektorini bilish kerak. (6) uch noma'lumli ikki tenglama, demak, o'zgaruvchilardan biriga, masalan, z ga $z = z_0$ qiymat berib va hosil qilingan ikki noma'lumli ikkita tenglamani yechib, $x = x_0, y = y_0$ qiymatlarni topamiz (bunda

biz $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ deb faraz qildik). Natijada (x_0, y_0, z_0) nuqta (6) to'g'ri chiziqqa

tegishli bo'ladi, u holda (6) ni quyidagicha yozib olsak bo'ladi.

$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0,$$

$$A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0.$$

Bu sistemadan quyidagilarni topamiz:

$$x - x_0 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} t, \quad y - y_0 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} t, \quad z - z_0 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} t.$$

Bulardan

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \quad (7)$$

Agar (6) tenglamalarni dekart reperida qarasak, $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ vektor Π_1 tekislikning, $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ vektor Π_2 tekislikning normal vektori bo'ladi. (7) tenglamalardagi maxrajlarda turgan ifodalar Π_1, Π_2 tekisliklar normal vektorlarining vektor ko'paytmasining mos koordinatalaridan iborat, ya'ni $\bar{u} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2]$.

1-misol. $M_0(1, 0, -4)$ nuqtadan o'tadigan va $\bar{u} = \{1, -3, 2\}$ vektorga parallel to'g'ri chiziqning parametrik va kanonik tenglamalarini yozib, uning uchta nuqtasini toping.

Yechish. Bu yerda $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = -4$ va $l = 1, m = -3, n = 2$, tegishli tenglamalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t, \\ y &= -3t, \\ z &= -4 + 2t; \end{aligned} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+4}{2}.$$

Endi shu to'g'ri chiziqning M_0 dan tashqari yana ikki nuqtasini topish uchun t ga ikkita qiymat beramiz:

$$\begin{aligned} t = 1 &\Rightarrow x = 2, y = -3, z = -2, M_1(2, -3, -2), \\ t = -1 &\Rightarrow x = 0, y = 3, z = -6, M_2(0, 3, -6). \end{aligned}$$

2-misol.

$$\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0, \\ x + y + 5z - 2 = 0 \end{cases}$$

to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalarini yozing.

Yechish. Bu to'g'ri chiziqning biror nuqtasini topamiz, $z = 0$ deb faraz qilish bilan hosil qilingan

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

sistemadan $x = 2, y = 0 \Rightarrow M_0(2, 0, 0)$.

Endi yo'naltiruvchi vektorning koordinatalarini topamiz. Bu yerda

$$\begin{aligned} A_1 &= 2, B_1 = -1, C_1 = 1, A_2 = 1, B_2 = 1, C_2 = 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow l &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -6, \quad m = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -9, \quad n = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

Bu qiymatlarni (7) ga qo'yamiz:

$$\frac{x-2}{-6} = \frac{y}{-9} = \frac{z}{3} \quad \text{yoki} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}.$$

II. Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. To'g'ri chiziqlar bog'lami.

Fazoda u_1, u_2 to'g'ri chiziqlar biror affin sistemasida ushbu parametrik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$u_1 : \begin{cases} x = x_1 + l_1 t, \\ y = y_1 + m_1 t, \\ z = z_1 + n_1 t, \end{cases} \quad u_2 : \begin{cases} x = x_2 + l_2 t, \\ y = y_2 + m_2 t, \\ z = z_2 + n_2 t, \end{cases}$$

bu yerda $\bar{u}_1(l_1, m_1, n_1), \bar{u}_2(l_2, m_2, n_2)$.

Fazoda ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel, kesishuvchi va ayqash bo'lishi mumkin. Shu holatlarni ayrim-ayrim ko'raylik.

$$1. \quad u_1 \parallel u_2 \Rightarrow \bar{u}_1 \parallel \bar{u}_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (8)$$

2. $u_1 \cap u_2 \neq \emptyset$, ya'ni u_1, u_2 to'g'ri chiziqlar kesishsin. Bu holda bu ikki to'g'ri chiziq bir tekislikka tegishli bo'lib, $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \overline{M_1 M_2}$ vektorlar komplanar, ya'ni $(\bar{u}_1 \bar{u}_2 \overline{M_1 M_2}) = 0$ yoki

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

(9) tenglik u_1, u_2 to'g'ri chiziqlarning bir tekislikka tegishlilik shartidir.

Agar (9) shart bajarilib, (8) bajarilmasa, u_1, u_2 lar bitta nuqtada kesishadi.

3. u_1 va u_2 kesishmasa hamda parallel bo'lmasa, ular ayqash, demak, ayqash ikki to'g'ri chiziq uchun

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (10)$$

u_1, u_2 to'g'ri chiziqlarning dekart reperida qarasak, metrik xarakterli ba'zi masalalarni hal qilish mumkin.

4. Fazodagi ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. ***Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak*** deb, bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi.

Parametrik tenglamalari bilan berilgan u_1, u_2 to'g'ri chiziqlar uchun $\bar{u}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\bar{u}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruchi vektorlaridir, demak,

$$\cos(u_1, \wedge u_2) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (11)$$

Burchakning kosinusi ma'lum bo'lsa, bu burchakni topish osondir.

$$(u_1, \wedge u_2) = \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa, } u_1 \perp u_2 \text{ bo'lib, } (4) \Rightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (12)$$

Bu shart ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik shartidir.

5. Fazodagi ayqash ikki u_1, u_2 to'g'ri chiziqning umumiy perpendikulyarini topish masalasini qaraylik. Ikki ayqash to'g'ri chiziq bitta umumiy perpendikulyarga egadir.

u_1, u_2 to'g'ri chiziqlarning tenglamalari parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin, u holda ularning umumiy perpendikulyarining yo'naltiruvchi vektori $\bar{u} = [\bar{u}_1 \bar{u}_2]$ vektordan iborat, $\bar{u}$ vektor va u_1 to'g'ri chiziq bilan aniqlanadigan tekislikni Π_1 bilan, $\bar{u}$ vektor va u_2 to'g'ri chiziq bilan aniqlanadigan tekislikni Π_2 bilan belgilasak, bu tekisliklarning kesishmasidan hosil qilingan to'g'ri chiziq izlangan to'g'ri chiziqdir.

Aniq misolda bu tenglamalar sodda ko'rinishda bo'ladi. Shuning uchun biz bu yerda ko'rinishi ancha murakkab tenglamani keltirmaymiz.

1-misol. Quyidagi to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyatini aniqlang:

$$u_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 7 + t, \\ z = 3 + 4t \end{cases} \quad u_2 : \begin{cases} x = 6 + 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = -2 + t. \end{cases}$$

Yechish. u_1 to'g'ri chiziqda $M_1(1, 7, 3)$, $\bar{u}_1(2, 1, 4)$; u_2 to'g'ri chiziqda; $M_2(6, -1, -2)$, $\bar{u}_2(3, -2, 1)$. Endi (2) shartni tekshiramiz:

$$(\bar{u}_1 \bar{u}_2 \overline{M_1 M_2}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = 20 - 96 + 5 + 40 + 16 + 15 = 0,$$

demak, bu to'g'ri chiziqlar bir tekislikka tegishli.

2-misol. Ushbu ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni toping (dekart reperida).

$$u_1 : \begin{cases} y + 1 = 0, \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad u_2 : \begin{cases} x = 0, \\ z - 1 = 0. \end{cases}$$

Yechish. Bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlarini topamiz:

$$\bar{u}_1 \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right), \quad \bar{u}_2 \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right),$$

$$\bar{u}_1(2, 0, -1), \bar{u}_2\left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\right), \bar{u}_2(0, -1, 0),$$

demak, $\bar{u}_2 = -\bar{j}$.

(4) ga asosan $\cos \varphi = \cos(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0 \Rightarrow 90^\circ \Rightarrow u_1 \perp u_2$.

Endi to'g'ri chiziqlar bog'lami haqida fikr yuritamiz.

Ta'rif. Fazodagi tayin M_0 nuqtadan o'tgan barcha to'g'ri chiziqlar to'plami M_0 **markazli to'g'ri chiziqlar bog'lami** deb ataladi. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ markazli bog'lam ushbu

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt$$

parametrik tenglamalar bilan ifodalanadi, bu yerda l, m, n bog'lamdagi har bir to'g'ri chiziq uchun tayin qiymatlarga ega.

Fazoda M_0 nuqtadan farqli biror M nuqta berilsa, shu M nuqtadan bog'lamga tegishli faqat bitta to'g'ri chiziq o'tadi.

Ta'rif. Agar fazoda tayin u to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa, unga parallel barcha to'g'ri chiziqlar to'plami **parallel to'g'ri chiziqlar bog'lami** deb ataladi.

III. Fazoda to'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro vaziyati.

Dekart reperida u to'g'ri chiziq parametrik tenglamalari bilan, Π tekislik umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsin:

$$\text{EMB} \text{ Equation.3} \quad u: \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \quad (13) \quad \bar{u}(l, m, n),$$

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0 \quad (14) \quad \bar{n}(A, B, C).$$

Avvalo, to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini topish masalasiga to'xtalaylik: buning uchun berilgan tenglamalarni sistema deb qarash kerak. (13) va (14) dan

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + t(Al + Bm + Cn) = 0. \quad (15)$$

$Al + Bm + Cn \neq 0$ shartda

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \quad (16)$$

bo'ladi. t ning bu qiymatini (13) ga qo'ysak, izlangan nuqta topiladi. Lekin

$$Al + Bm + Cn = 0 \quad (16')$$

shart bajarilsa, ya'ni $\bar{u} \perp \bar{n}$ bo'lsa, u to'g'ri chiziq Π ga parallel bo'ladi. Aksincha, $u // \Pi \Rightarrow \bar{u} \perp \bar{n} \Rightarrow \bar{u} \cdot \bar{n} = 0$.

Demak, $\bar{u} \cdot \bar{n} = Al + Bm + Cn = 0$ shart to'g'ri chiziq bilan tekislikning parallelligini bildiradi.

$$u \perp \Pi \Rightarrow \bar{u} // \bar{n} \Rightarrow \frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}, \quad (17)$$

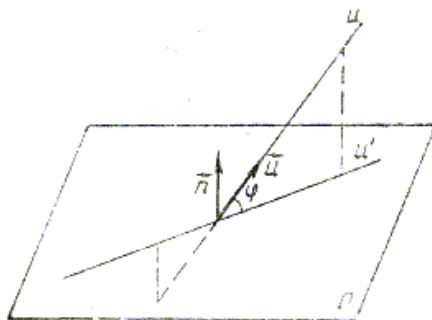
bu (17) shart to'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligini bildiradi.

$u \in \Pi$ bo'lgan hol uchun to'g'ri chiziq bilan tekislik o'zaro vaziyatining xususiy holidir. Bu vaqtda (16') shart bajarilib, undan tashqari $M_0 \in \Pi$ bo'lishi lozim, ya'ni

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (18)$$

Demak, $u \subset \Pi \Leftrightarrow (16'), (18)$.

Endi to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish formulasini beramiz.



3-chizma

Ta'rif. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deb, to'g'ri chiziq bilan uning shu tekislikdagi ortogonal proektsiyasi orasidagi burchakka aytiladi (3-chizma). Biz

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ deb faraz qilamiz.

3-chizmadan ko'rinadiki, φ ning o'rniga $(\vec{n}, ^\wedge \vec{u})$ burchakni qabul qilish mumkin. Bu burchak $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ga yoki $\frac{\pi}{2} + \varphi$ ga teng. Demak, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$,

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi$, shuning uchun

$$\sin \varphi = \left| \cos(\vec{n}, ^\wedge \vec{u}) \right| = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (19)$$

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3t, \\ z = -2 + t \end{cases}$$

to'g'ri chiziq bilan $2x - y + z + 1 = 0$ tekislikning kesishish nuqtasini toping.

Yechish. To'g'ri chiziq tenglamalaridagi x, y, z ning qiymatlarini tekislik tenglamasiga qo'yamiz:

$$2(1 + 2t) - 3t + (-2 + t) + 1 = 0 \quad \text{yoki} \quad t = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{U holda } x = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad y = -\frac{3}{2}, \quad z = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2};$$

$$\text{izlangan nuqta } \left(0, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right).$$

2-misol. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$ to'g'ri chiziq bilan $4x + 2y + 2z - 5 = 0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

$$\text{Yechish. } \vec{u}(1, -2, 2), \quad \vec{n}(4, 2, 2),$$

$$\sin \varphi = \frac{|4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 2|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{9} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

3-misol. $P(7, 9, 7)$ nuqtadan $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish uchun biz formula berganimiz yo'q, bunday masala quyidagicha oson hal qilinadi:

a) berilgan nuqtadan o'tib, berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik tenglamasi tuziladi;

b) shu tekislik bilan berilgan to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasi topiladi;

c) bu topilgan nuqta bilan berilgan nuqta orasidagi masofa topiladi.

Shu yo'sinda masalani yechishga kirishamiz.

a) $P(7, 9, 7)$ nuqtadan o'tib, $\vec{n} = \vec{u}(4, 3, 2)$ vektorga perpendikulyar tekislikning tenglamasini tuzamiz: $4(x-7) + 3(y-9) + 2(z-7) = 0$ yoki

$$4x + 3y + 2z - 69 = 0, \quad (*)$$

b) berilgan to'g'ri chiziq tenglamasini parametrik ko'rinishda yozamiz: $x = 2 + 4t, \quad y = (1 + 3t), \quad z = 2t$ va ularni (*) tenglamaga qo'yamiz:

$$4(2 + 4t) + 3(1 + 3t) + 2 \cdot 2t - 69 = 0,$$

$$29t - 58 = 0,$$

$$t = 2.$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 + 4 \cdot 2 = 10, \\ y = 1 + 3 \cdot 2 = 7, \\ z = 2 \cdot 2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow Q(10, 7, 4) \text{ nuqta to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishgan}$$

nuqtasidir.

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(10-7)^2 + (7-9)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}.$$

Tayanch iboralar.

To'g'ri chiziqlarning vektorli tenglamasi, parametrik tenglamalari, yo'naltiruvchi vektori, kanonik tenglamalari, ayqash to'g'ri chiziq, markazli to'g'ri chiziqlar bog'lami, parallel to'g'ri chiziqlar bog'lami.

Nazorat uchun savollar.

1. Fazoda to'g'ri chiziq qanday usullar bilan berilishi mumkin?
2. Qanday ko'rinishdagi tenglamaga to'g'ri chiziqlarning vektorli tenglamasi deyiladi?
3. Qanday ko'rinishdagi tenglamaga to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamasi deyiladi?
4. To'g'ri chiziqlarning kanonik tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
5. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini ko'rsating?
6. To'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasi deb qanday ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi?
7. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak qanday formula bilan topiladi?
8. Qanday shartda to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi?
9. Qanday shartda to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'ladi?
10. Ikki to'g'ri chiziq uchun qanday shart bajarilganda kesishadi?
11. Ikki to'g'ri chiziq uchun qanday shart bajarilganda ayqash bo'ladi?
12. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb nimaga aytiladi?
13. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni hisoblash formulasini yozib bering?
14. Markazli to'g'ri chiziqlar bog'lami deb nimaga aytiladi?
15. Parallel to'g'ri chiziqlar bog'lami deb nimaga aytiladi?

14-mavzu: Algebraik chiziq. Tekislikda to'g'ri chiziqning turli tenglamalari

Reja:

1. Algebraik chiziq va uning tartibi.
2. To'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari.
3. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.
4. To'g'ri chiziqning kesmalari bo'yicha tenglamasi.
5. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.
6. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.
7. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi.

1. Algebraik chiziq va uning tartibi.

Ta'rif. Tekislikdagi biror affin repyerda $F(x, y) = 0$ tenglamaning chap tomoni x, y ga nisbatan algebraik ko'phad, ya'ni $a_{ij}x^i y^j$ ko'rinishidagi hadlarning algebraik yig'indisidan iborat bo'lsa, bu tenglama bilan aniqlanuvchi nuqtalar to'plami **algebraik chiziq**, tenglama **algebraik tenglama** deyiladi.

i, j manfiy bo'lmagan butun sonlar bo'lib, $i + j$ son $a_{ij}x^i y^j$ hadning **darajasi** deyiladi. i, j darajalar yig'indisining maksimal qiymati $F(x, y)$ ko'phadning **darajasi**, shu bilan bir vaqtda $F(x, y) = 0$ tenglamaning ham **darajasi** deyiladi.

Masalan,

$$F(x, y) = Ax + By + C = 0$$

birinchi darajali algebraik tenglama,

$$F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ikkinchi darajali algebraik tenglamadir. Algebraik bo'lmagan barcha chiziqlar **transsendent chiziqlar** deyiladi.

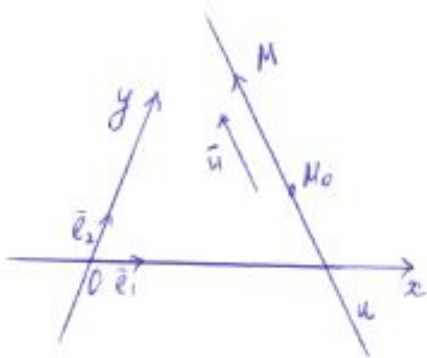
Ta'rif. Biror affin repyerda n –darajali algebraik tenglama bilan aniqlanadigan figura n –**tartibli algebraik chiziq** deb ataladi.

Teorema. Bir affin repyerdan ikkinchi affin reperga o'tishda chiziqning algebraikligi va uning tartibi o'zgarmaydi.

Ta'rif. To'g'ri chiziqqa parallel har qanday vektor uning **yo'naltiruvchi vektori** deyiladi.

2. To'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari.

Tekislikda u to'g'ri chiziqning vaziyati biror $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ affin reperga nisbatan shu to'g'ri chiziqqa tegishli $M_0(x_0, y_0)$ nuqta va yo'naltiruvchi $\bar{u}(a_1, a_2)$ vektor bilan to'la aniqlanadi(chizma). Bu ma'lumotlarga asoslanib, u to'g'ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaramiz. M orqali u to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasini belgilaymiz. U holda $\overline{M_0M}$ vektorni yo'naltiruvchi vektor sifatida olish mumkin.



Demak, shunday t son topiladiki,

$$\overline{M_0M} = t\overline{u} \quad (1)$$

bo'ladi. Aksincha, biror M nuqta uchun (1) munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $\overline{M_0M} \parallel \overline{u}$. Demak, (1) munosabat faqat u to'g'ri chiziqqa tegishli M nuqtalar uchungina bajariladi, M, M_0 nuqtalarning radius-vektorlarini mos ravishda $\overline{r}, \overline{r}_0$ bilan belgilasak, ya'ni $\overline{r} = \overline{OM}, \overline{r}_0 = \overline{OM}_0$ bo'lsa, u holda $\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r}_0$. (1) tenglikdan

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{u}. \quad (2)$$

Bu tenglama u to'g'ri chiziqning **vektorli tenglamasi** deb ataladi. t ga turli xil qiymatlar berib, u ga tegishli nuqtalarning radius-vektorlarini hosil qilamiz; (2) tenglamaga kirgan t o'zgaruvchi **parametr** deb ataladi.

Endi (2) ni koordinatalarda yozaylik. M nuqtaning koordinatalarini x, y bilan, M_0 nuqtaning koordinatalarini x_0, y_0 bilan belgilasak, natijada ushbu tenglamalar hosil qilinadi:

$$x = x_0 + a_1t, \quad y = y_0 + a_2t. \quad (3)$$

Bu tenglamalar to'g'ri chiziqning **parametrik tenglamalari** deb ataladi.

Agar u to'g'ri chiziq koordinata o'qlaridan birortasiga ham parallel bo'lmasa, ya'ni $a_1a_2 \neq 0$ shart bajarilsa, (3) dan ushbu

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad (4)$$

tenglamani hosil qilamiz. Undan

$$a_2x - a_1y + (-a_2x_0 + a_1y_0) = 0. \quad (5)$$

Bu yerda shartga ko'ra a_1, a_2 lardan kamida bittasi noldan farqli, shu sababli (5) birinchi darajali tenglamadir. Shuning bilan ushbu muhim xulosaga keldik: har qanday to'g'ri chiziq birinchi tartibli algebraik chiziqdir.

3. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

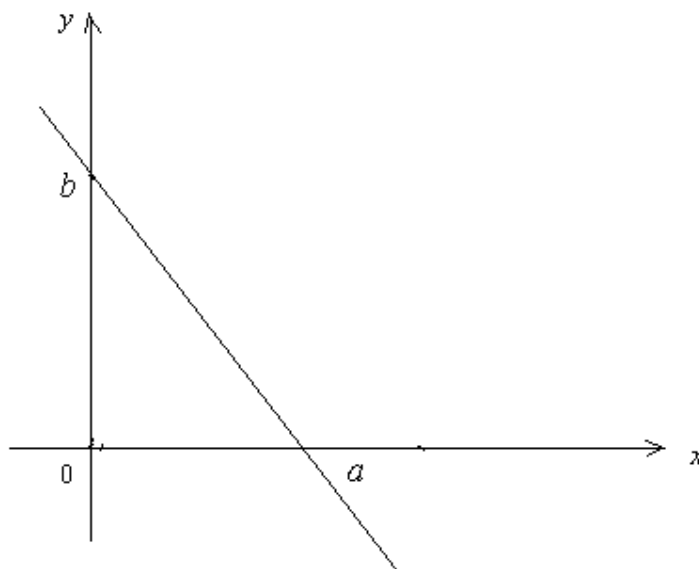
Har qanday to'g'ri chiziqning vaziyati uning ikkita har xil nuqtasi bilan aniqlanadi. $(O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ affin repyerda u to'g'ri chiziqning $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ nuqtalari ma'lum bo'lsin. shu to'g'ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaraylik. Qaralayotgan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\overline{u} = \overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ vektorni qabul qilish mumkin, shuning uchun (4) ga asosan u to'g'ri chiziq ushbu

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (6)$$

tenglama bilan ifodalanadi. Bu berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziqning tenglamasidir.

4. To'g'ri chiziqning kesmalari bo'yicha tenglamasi.

u to'g'ri chiziq Ox o'qni $A(a, 0)$ nuqtada, Oy o'qni esa $B(0, b)$ nuqtada kessin va koordinatalar boshidan o'tmasin, ya'ni $a \neq 0, b \neq 0$ bo'lsin. Bu holda ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziqning tenglamasi (6) quyidagi ko'rinishni oladi:



$$\frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b} \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (7)$$

(7) da a , b sonlar to'g'ri chiziqning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalaridir. Shuni hisobga olib, (7) **to'g'ri chiziqning kesmalari bo'yicha tenglamasi** deyiladi.

Misol. Absissalar o'qidan 3 birlik, ordinatalar o'qidan -5 birlik kesmalar ajratgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Berilishiga ko'ra $a = 3$, $b = -5$, u holda (7) tenglama $\frac{x}{3} + \frac{y}{-5} = 1$ yoki

$\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$ ko'rinishda bo'lib, bu izlangan to'g'ri chiziqning tenglamasidir.

5. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

Avvalo to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif: $\bar{u}$ vektor $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ bazisda a_1, a_2 koordinatalarga ega va $a_1 \neq 0$ bo'lsin, u holda $\frac{a_2}{a_1} = k$ son $\bar{u}$ **vektorning burchak koeffitsienti** deyiladi.

Teorema. Kollinear vektorlarning burchak koeffitsientlari o'zaro teng.

Isbot. Haqiqatan, $\bar{u} \parallel \bar{v}$ vektorlar berilgan bo'lib, ular $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ bazisga nisbatan $\bar{u}(a_1, a_2), \bar{v}(b_1, b_2)$ ($a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$) koordinatalarga ega bo'lsin hamda k_1, k_2 mos ravishda bu vektorlarning burchak koeffitsientlari bo'lsin. Ta'rifga ko'ra

$$k_1 = \frac{a_2}{a_1} \quad \text{va} \quad k_2 = \frac{b_2}{b_1}.$$

$\bar{u} \parallel \bar{v}$ bo'lgani uchun shunday λ son mavjudki, $\bar{u} = \lambda \bar{v}$ yoki $a_1 = \lambda b_1$,

$a_2 = \lambda b_2 \Rightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \Rightarrow \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1}$ yoki $k_2 = k_1$. **Isbot tugadi.**

Xulosa. Bitta to'g'ri chiziqqa parallel barcha vektorlarning burchak koeffitsientlari o'zaro teng. k son **to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti** deyiladi.

Endi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasini keltirib chiqaraylik.

Bitta nuqtasi va burchak koeffitsienti to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyatini to'la aniqlaydi. Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar uchun burchak koeffitsient mavjud emas.

Endi Oy o'qqa parallel bo'lmagan u to'g'ri chiziq $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tsin va k ga teng burchak koeffitsientga ega bo'lsin. u ning tenglamasini tuzamiz. (5) ga asosan

$$a_1 \neq 0 \text{ shartda } y - y_0 = \frac{a_2}{a_1}(x - x_0), \text{ ammo } k = \frac{a_2}{a_1}, \text{ demak,}$$

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (8)$$

yoki

$$y = kx + b,$$

bunda

$$b = y_0 - kx_0. \quad (9)$$

(9) tenglama **to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi** deyiladi.

Misol. $P(2, -3)$ nuqtadan o'tuvchi va burchak koeffitsienti $\frac{3}{4}$ bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Berilganlarga asosan $x_0 = 2, y_0 = -3, k = \frac{3}{4}$ bo'lib, ularni (8) tenglamaga qo'yamiz:

$$y - (-3) = \frac{3}{4}(x - 2) \text{ yoki } 3x - 4y - 18 = 0.$$

6. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi. To'g'ri chiziqning yuqorida keltirib chiqarilgan (3)-(7), (8) tenglamalarining har birini olib solishtirsak, ular umumiy ko'rinishdagi

$$Ax + By + C = 0 \quad (10)$$

ikki noma'lumli birinchi darajali tenglamaning xususiy hollari ekanini ko'ramiz.

Endi quyidagicha savol tug'iladi: aksincha, (10) ko'rinishdagi tenglama to'g'ri chiziqni ifoda etadimi?

Teorema. x, y o'zgaruvchilarga nisbatan birinchi darajali $Ax + By + C = 0$ (bu yerda $A^2 + B^2 \neq 0$) algebraik tenglama affin reperga nisbatan to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

Isbot. Bu yerda ikki holni tekshiramiz.

a) $B \neq 0$. Berilgan tenglamani

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Endi bu tenglamani yuqoridagi $y = kx + b$ tenglama bilan

solishtirsak, $k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$ ni hosil qilamiz. Demak, $Ax + By + C = 0$ tenglama

$B \neq 0$ shartda $y = kx + b$ ko'rinishni oladi, uning esa to'g'ri chiziqni ifodalashini bilamiz. Shunday qilib, umumiy ko'rinishli $Ax + By + C = 0$ tenglama ham $B \neq 0$ da biror to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

b) $B = 0$. Bu holda $A^2 + B^2 \neq 0$ munosabatga ko'ra $A \neq 0$ bo'lib, $Ax + By + C = 0$ tenglama $x = -\frac{C}{A}$ ko'rinishni oladi. Bunday tenglama Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Demak, ikkala hol uchun ham teorema kuchga ega. **Isbot tugadi.**

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

$$Ax + By + C = 0$$

berilgan bo'lsin, bunda $k = -\frac{A}{B} = \frac{a_2}{a_1}$, demak, to'g'ri chiziqning $\bar{u}$ yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari sifatida $-B, A$ sonlarni qabul qilish mumkin, ya'ni umumiy tenglamasi bilan berilgan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\bar{u}(-B, A)$ vektorni olish mumkin.

Endi to'g'ri chiziqning

$$Ax + By + C = 0$$

umumiy tenglamasini tekshiramiz.

1. $C = 0$. Bu holda tenglama quyidagi ko'rinishni oladi: $Ax + By = 0$. Bu to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi, chunki uni $(0, 0)$ qanoatlantiradi. Aksincha, to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tsa, u holda

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0.$$

2. $A = 0$.

$$By + C = 0. \quad (11)$$

Bu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi $\bar{u}(-B, 0) \Rightarrow \bar{u} = -B\bar{e}_1$ vektori $\bar{e}_1$ vektorga kollinear, demak, u Ox o'qqa parallel. $B \neq 0$ bo'lganda (11) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$y = b, \text{ bu yerda } b = -\frac{C}{B}.$$

Shunday qilib, $y = b$ tenglama Ox o'qqa parallel va ordinatalar o'qini $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ nuqtada kesib o'tadigan to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

Agar $A = 0, C = 0 \Rightarrow By = 0 \Rightarrow y = 0$ (chunki $B \neq 0$), $y = 0$ esa Ox o'qning tenglamasidir, chunki bu tenglama bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziq Ox o'qqa parallel va Oy o'qdan $b = 0$ kesma ajratadi.

3. $B = 0$. Bunda 2) holdagiga o'xshash to'g'ri chiziq Oy o'qqa parallel joylashadi va bu holda $C = 0$ bo'lsa ($Ax = 0 \Rightarrow x = 0$), to'g'ri chiziq Oy o'qning o'zini ifodalaydi.

7. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi.

Koordinatalar boshidan o'tmaydigan to'g'ri chiziqlar uchun ko'pincha $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$ tenglamaning maxsus formasidan foydalaniladi.

l koordinatalar boshidan o'tmaydigan to'g'ri chiziq bo'lsin. Koordinatalar boshidan l to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi p ga teng deylik, ya'ni $|\overline{OP}| = p$, bunda P — o'sha perpendikulyarning asosi. $\bar{n}$ va $\overline{OP}$ vektorlar kollinear hamda bir xil yo'nalgan bo'lib, $\bar{n}$ vektor ($|\bar{n}| = 1$) $\overline{OP}$ ning birlik vektori bo'lsin. Bu holda $\overline{OP} = p \bar{n}$ deb yozish mumkin.

$\overline{OP}$ vektor bilan $\bar{e}_1$ vektor o'zaro φ burchak hosil qilsin. Odatda, $\overline{OP}$ ni l chiziqning **normali** deyiladi. Agar ixtiyoriy $M(x, y) \in l$ nuqtani olsak, u holda $\overline{OM} = \bar{r}$ radius-vektorning koordinatalari (x, y) bo'ladi, ya'ni

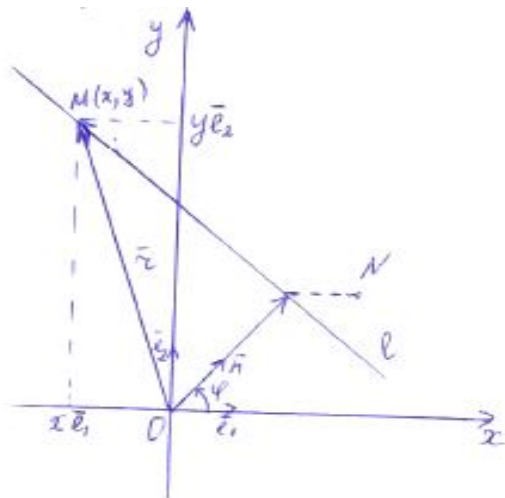
$$\overline{OM} = \bar{r} = x \bar{e}_1 + y \bar{e}_2.$$

Quyidagi chizmadan $\overline{PM} = \bar{r} - \overline{OP}$. Bu vektor $\overline{OP}$ vektorga perpendikulyar bo'lgani uchun ushbu tenglikni yoza olamiz:

$$(\bar{r} - \overline{OP}) \cdot \bar{n} = 0 \text{ yoki } \bar{r} \cdot \bar{n} = \overline{OP} \cdot \bar{n}.$$

Agar $\bar{n}$ birlik vektor uchun

$$\bar{n} = \bar{e}_1 \cos \varphi + \bar{e}_2 \sin \varphi$$



ekanini e'tiborga olsak, yuqoridagi tenglikdan

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = p \quad (12)$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama ***l* to'g'ri chiziqning normal tenglamasi** deyiladi. (12) tenglamada $\overline{OP} = p$ va φ miqdorlarning o'zgarishiga qarab, l to'g'ri chiziqning holati turlicha bo'lishi mumkin.

Endi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini normal tenglama ko'rinishiga keltirish bilan shug'ullanamiz. Buning uchun $Ax + By + C = 0$ tenglamaning har ikkala tomonini $\lambda \neq 0$ ga ko'paytiramiz (to'g'ri chiziqning $Ax + By + C = 0$ tenglamasi faqat $A^2 + B^2 \neq 0$ va $C < 0$ bo'lgandagina normal tenglama bo'ladi):

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + \lambda C = 0. \quad (13)$$

Endi λ ni quyidagicha tanlab olamiz:

$$\lambda A = \cos \varphi, \quad \lambda B = \sin \varphi, \quad \lambda C = -p.$$

Bu tengliklarning birinchisi va ikkinchisini kvadratga ko'tarib, qo'shamiz:

$$\lambda^2(A^2 + B^2) = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Bundan

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (14)$$

O'ng tomondagi $\pm$ ishoralardan qaysi birini olish $\lambda C = -p$, $p > 0$ tenglikka bog'liq bo'ladi. Boshqacha aytganda, λ va C ning ishorasi qarama-qarshi qilib tanlanadi.

λ ning topilgan qiymatini (13) tenglamaga qo'yamiz:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \quad (15)$$

(14) tenglik bilan aniqlangan λ ni **normallovchi ko'paytuvchi** deyiladi. Yuqoridagi mulohazalardan to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini normal tenglamaga keltirish uchun umumiy tenglamaning ikkala tomonini normallovchi ko'paytuvchiga ko'paytirish kifoya degan xulosa kelib chiqadi.

Tayanch iboralar.

Algebraik chiziq, transtsendent chiziq, normal vektor, normallovchi ko'paytuvchi.

Nazorat uchun savollar.

1. Algebraik chiziq deb nimaga aytiladi?
2. Algebraik chiziqning darajasi deb nimaga aytiladi?
3. Transtsendent chiziqlar deb nimaga aytiladi?
4. Tekislikda chiziq tenglamasi nimani anglatadi?
5. To'g'ri chiziqning normal vektori deb nimaga aytiladi?
6. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi qanday ifodalanadi?
7. To'g'ri chiziqning vektorli tenglama deb nimaga aytiladi?
8. To'g'ri chiziqning parametrik tenglamalarini yozing?
9. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi qanday ifodalanadi?
10. Ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozing?
11. To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha va burchak koeffitsientli tenglamalari qanday ko'rinishda bo'ladi?

**15-mavzu: Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.
Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Tekislikda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro
joylashishi. To'g'ri chiziqlar dastasi.**

Reja:

1. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.
2. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
3. Tekislikda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro joylashishi.
4. To'g'ri chiziqlar dastasi.

1. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.

Ta'rif. Kesma uzunligi va burchak kattaligini hisoblash bilan bog'liq bo'lgan masalalar *metrik masalalar* deyiladi.

Ta'rif. To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektoriga perpendikulyar har qanday vektor bu to'g'ri chiziqning *normal vektori* deyiladi.

$(O, \bar{i}, \bar{j})$ Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. To'g'ri chiziq $Ax + By + C = 0$ umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsin. $\bar{u}(-B, A)$ uning yo'naltiruvchi vektori, u holda $\bar{n}(A, B)$ vektor u to'g'ri chiziqning normal vektori bo'ladi. Haqiqatan, $\bar{u}$, $\bar{n}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi:

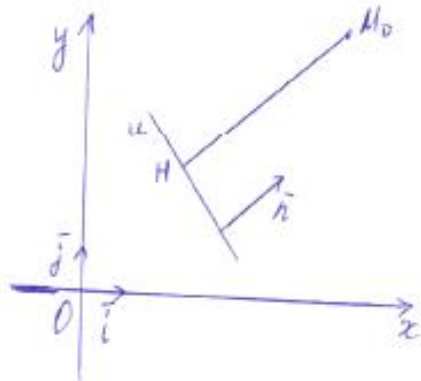
$$\bar{u} \cdot \bar{n} = -B \cdot A + A \cdot B = 0 \Rightarrow \bar{n} \perp \bar{u}.$$

Demak, to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasidagi A, B sonlar shu tartibda olinsa, ular shu tenglama bilan aniqlanadigan to'g'ri chiziq normal vektorining koordinatalarini bildiradi.

Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. $(O, \bar{i}, \bar{j})$ Dekart koordinatalar sistemasida

$$u: Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

to'g'ri chiziq va $M_0(x_0, y_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazamiz. Ularning kesishgan nuqtasini H bilan belgilaymiz. H nuqta bu perpendikulyarning *asosi* deyiladi. $\overline{HM_0}$ vektorning uzunligini M_0 nuqtadan u to'g'ri chiziqqacha bo'lgan *masofa* deyiladi va $\rho(M_0, u)$ ko'rinishda belgilanadi.



Agar $M_0 \in u$ bo'lsa, $M_0 = H$ bo'lib, $\rho(M_0, u) = 0$ bo'ladi. Agar $M_0 \notin u$ bo'lsin, u holda $\rho(M_0, u) = |\overline{HM_0}|$. $\bar{n}(A, B)$ vektor u to'g'ri chiziqning normal vektori bo'lgani uchun $\overline{HM_0}$ va $\bar{n}$ vektorlar kollinear bo'ladi, u holda bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi:

$\overline{HM}_0 \cdot \bar{n} = |\overline{HM}_0| |\bar{n}| \cos(\overline{HM}_0, ^\wedge \bar{n}) = \pm \rho(M_0, u) |\bar{n}|$
 $(\overline{HM}_0 \uparrow \uparrow \bar{n} \text{ bo'lsa, } (\overline{HM}_0, ^\wedge \bar{n}) = 0^0 \text{ bo'lib, } \cos(\overline{HM}_0, ^\wedge \bar{n}) = +1 \text{ bo'ladi. } \overline{HM}_0 \uparrow \downarrow \bar{n}$
 $\text{bo'lsa, } (\overline{HM}_0, ^\wedge \bar{n}) = 180^0 \text{ bo'lib, } \cos(\overline{HM}_0, ^\wedge \bar{n}) = -1 \text{ bo'ladi}), \text{ bu yerdan}$

$$\rho(M_0, u) = \frac{|\overline{HM}_0 \cdot \bar{n}|}{|\bar{n}|}.$$

H nuqtaning koordinatalari x_1, y_1 bo'lsin. U holda $\overline{HM}_0(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ bo'lib, $H \in u$ ekanini hisobga olsak, skalyar ko'paytma

$$\begin{aligned} \overline{HM}_0 \cdot \bar{n} &= A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1) = \\ &= Ax_0 + By_0 + C \end{aligned}$$

bo'ladi.

Shu bilan birga $|\bar{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$ ekanini nazarda tutsak,

$$\rho(M_0, u) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2)$$

(2) berilgan M_0 nuqtadan berilgan u to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash formulasidir.

2. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

Ta'rif. *Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak* deb bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi.

Berilgan u_1, u_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni φ bilan belgilaymiz. Dekart reperida u_1, u_2 to'g'ri chiziqlar

$$u_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$u_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

umumiy tenglamalari bilan aniqlangan bo'lsin. $\bar{u}_1(-B_1, A_1)$ vektor u_1 to'g'ri chiziqning, $\bar{u}_2(-B_2, A_2)$ vektor u_2 to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektoridir, u holda ta'rifga ko'ra u_1, u_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\cos \varphi = \cos(\bar{u}_1, ^\wedge \bar{u}_2) = \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{|\bar{u}_1| \cdot |\bar{u}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Xususiyl holda

$$u_1 \perp u_2 \Leftrightarrow \bar{u}_1 \perp \bar{u}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \quad (3)$$

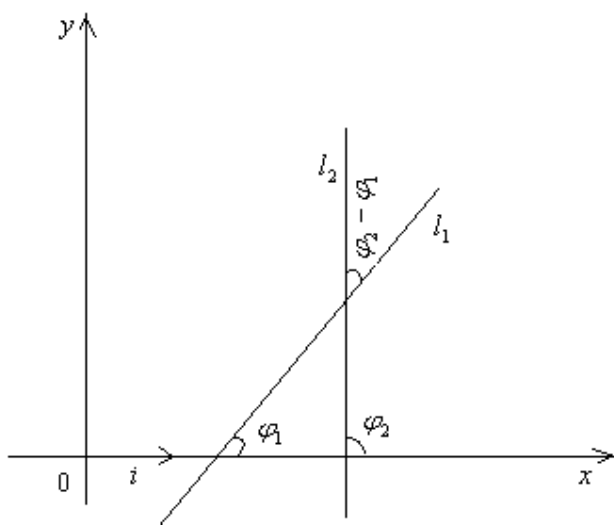
(3) tenglik *ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik shartidir.*

Dekart reperida Oy o'qqa parallel bo'lmagan u_1, u_2 to'g'ri chiziqlar burchak koeffitsientli tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$u_1 : y = k_1x + b_1, \quad u_2 : y = k_2x + b_2.$$

Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. To'g'ri chiziq Dekart reperida qaralganda uning $\bar{u}(a_1, a_2)$ yo'naltiruvchi vektorining burchak koeffitsienti

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \operatorname{tg}(\bar{u}, \bar{i})$$



bo'ladi. $(\bar{u}, \bar{i})$ burchak to'g'ri chiziqning Ox o'qqa **og'ish burchagi** deyiladi. u_1, u_2 to'g'ri chiziqlarning Ox o'qqa og'ish burchaklari mos ravishda φ_1, φ_2 bo'lsin, u holda

$$k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1, \quad k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 \text{ va}$$

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

bo'ladi. Ikki burchak ayirmasining tangensi formulasiga ko'ra

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2}.$$

$\operatorname{tg} \varphi_1, \operatorname{tg} \varphi_2$ ni k_1, k_2 bilan almashtirib, quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (4)$$

(4) ikki to'g'ri chiziq burchak koeffitsientli tenglamalari bilan berilganda ular orasidagi burchakni hisoblash formulasidir.

u_1, u_2 to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lgan holda $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ deyish mumkin

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi_2 = -\operatorname{ctg} \varphi_1 \text{ yoki}$$

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}, \quad k_1 k_2 = -1. \quad (5)$$

(5) tenglik u_1, u_2 to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik shartidir. u_1, u_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'lgan holda $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ yoki $k_2 = k_1 = 0$, bundan

$$k_1 = k_2. \quad (6)$$

(6) tenglik u_1, u_2 to'g'ri chiziqlarning parallellik shartidir.

Misol. u_1, u_2 to'g'ri chiziqlar

$$u_1: x + 7y - 5 = 0 \text{ va } u_2: 3x - 4y + 20 = 0$$

tenglamalari bilan berilgan. Ular orasidagi burchakni toping.

Yechish. u_1 to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsienti $k_1 = -\frac{1}{7}$, u_2 to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsienti $k_2 = \frac{3}{4}$. (4) formula bo'yicha

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{7}\right)}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{7}\right)} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{28}} = 1.$$

Demak,

$$\varphi = 45^\circ.$$

To'g'ri chiziqlar umumiy tenglamalari bilan berilgan holda

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}.$$

Endi (4) dan

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Bundan

$$u_1 \perp u_2 \Rightarrow A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

3. Tekislikda ikki to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashishi.

Tenglamalari aff'in sistemada berilgan u_1 , u_2 to'g'ri chiziqlarni olaylik:

$$u_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$

$$u_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

$\bar{u}_1(-B_1, A_1)$, $\bar{u}_2(-B_2, A_2)$ vektorlar mos ravishda bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlaridir. u_1 , u_2 to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuvida quyidagi hollar yuz berishi mumkin.

1. u_1 , u_2 to'g'ri chiziqlar kesishadi. U holda $\bar{u}_1 \parallel \bar{u}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Bundan to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasini topish uchun berilgan tenglamalar sistemasini yechish kerak.

$$2. u_1, u_2 \text{ to'g'ri chiziqlar parallel } \Rightarrow \bar{u}_1 \parallel \bar{u}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Aksincha, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2 \Rightarrow \bar{u}_1 = \lambda \bar{u}_2$, bu esa u_1, u_2 ning parallelligini anglatadi.

Agar $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ bo'lsa, u_1, u_2 to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi.

4. To'g'ri chiziqlar dastasi.

Tekislikdagi to'g'ri chiziqlar bitta nuqtadan o'tsa yoki bitta to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, ular dastani tashkil qiladi, deymiz. Shu nuqta **dasta markazi** deyiladi. Bu dastalarni ayrim-ayrim ko'rib chiqamiz.

1. Kesishuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi dasta markazining yoki dastaga tegishli ikki to'g'ri chiziqning berilishi bilan to'liq aniqlanadi. Dasta markazini M_0 deb belgilasak, $M \neq M_0$ nuqta orqali dastaning faqat bitta M_0M to'g'ri chizig'i o'tadi.

Endi bu dastaning tenglamasi bilan tanishamiz. $y - y_0 = k(x - x_0)$ tenglama (x_0, y_0) nuqtadan o'tuvchi va burchak koeffitsienti k bo'lgan to'g'ri chiziqni aniqlaydi. k ni parametr va (x_0, y_0) ni markaz deb qarasak, bu tenglama to'g'ri chiziqlar dastasini ifodalaydi.

Endi dastaning unga tegishli ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq bilan aniqlanishi masalasini qaraylik.

Dastaning M_0 nuqtada kesishuvchi ikkita (turli) u_1, u_2 to'g'ri chiziqlari berilgan bo'lsin:

$$u_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (7)$$

$$u_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (8)$$

Bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\forall \alpha, \beta \in R$ sonlarni olib, (7) va (8) tenglamalardan quyidagi tenglamani tuzaylik:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \quad (9)$$

Bu tenglama M_0 nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Haqiqatan, (9) tenglamani quyidagicha yozaylik:

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + \alpha C_1 + \beta C_2 = 0. \quad (10)$$

Bu tenglikda x, y o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsientlarning kamida biri noldan farqli, chunki

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \quad \alpha B_1 + \beta B_2 = 0$$

bo'lsin desak (masalan, $\alpha \neq 0$ bo'lganda), uni

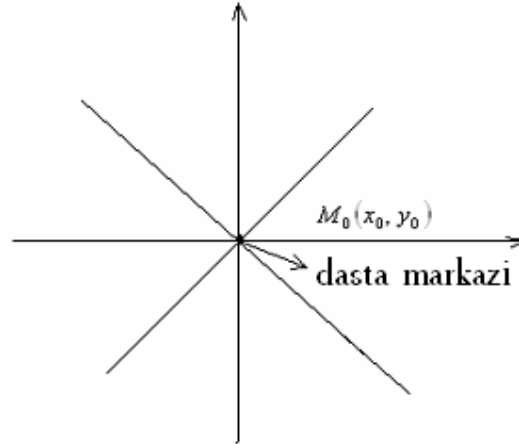
$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha}. \quad (11)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (11) dan $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow u_1 \parallel u_2$, bu zidlikka olib keladi:

shartga asosan $u_1 \cap u_2 = M_0$. Demak, (10) tenglama α, β ning bir vaqtda nolga teng bo'lmagan har bir qiymatida to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

$$M_0 \in u_1, M_0 \in u_2 \Rightarrow A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \text{ va } A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0.$$

Bundan ko'rinadiki, (10) tenglama bilan aniqlangan to'g'ri chiziq M_0 nuqtadan o'tadi.



Agar $M_1 \neq M_0$ nuqta berilsa, α, β ga tegishli qiymatlar berish yo'li bilan dastaning shu nuqtadan o'tadigan to'g'ri chizig'ini aniqlash mumkinligini ko'rsatamiz.

Dastaga tegishli to'g'ri chiziqning M_1 nuqtadan o'tish sharti:

$$\alpha(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \beta(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0. \quad (12)$$

$M_1 \neq M_0$ bo'lgani uchun $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1, A_2x_1 + B_2y_1 + C_2$ ifodalarning kamida biri noldan farqli, masalan, $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 \neq 0$ bo'lsin, u holda (12) dan

$$\alpha = -\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1} \beta. \quad (13)$$

(13) ni qanoatlantiruvchi α, β da dastaning M_1 nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chizig'i aniqlanadi. Shunday qilib, (9) tenglama bir vaqtda nolga teng bo'lmagan har qanday α, β da dastani ifodalaydi.

2. Parallel to'g'ri chiziqlar dastasi. Tekislikdagi parallel to'g'ri chiziqlar dastasi dasta to'g'ri chiziqlariga parallel bo'lgan biror $\bar{u}_0$ vektorning berilishi bilan to'liq aniqlanadi.

Parallel to'g'ri chiziqlar dastasini ifodalovchi tenglamani qaraylik. Parallel to'g'ri chiziqlar dastasi $\bar{u}_0(-B_0, A_0)$ vektor bilan aniqlangan bo'lsin. U holda $A_0x + B_0y + C = 0$ tenglama dastasini ifodalaydi. Bu yerda C har qanday qiymatlarni qabul qila oladi. Haqiqatan, C ning har bir qiymatida bu tenglama bilan aniqlangan to'g'ri chiziq $\bar{u}_0(-B_0, A_0)$ vektorga parallel bo'lgani sababli dastaga tegishli.

Misol. Yo'nalishi $\bar{u}_0(1, -2)$ vektor bilan aniqlangan, parallel to'g'ri chiziqlar dastasiga tegishli va koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqni toping.

Yechish. $\bar{u}_0(1, -2) \Rightarrow B_0 = -1, A_0 = -2; A_0x + B_0y + C = 0$ dan $2x + y - C = 0$ tenglama hosil qilinadi. Endi bu dastaning koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chizig'ini topamiz: $2 \cdot 0 + 0 - C = 0 \Rightarrow C = 0$. Izlanayotgan to'g'ri chiziq: $2x + y = 0$.

Nazorat uchun savollar.

1. Metrik masala nima?
2. To'g'ri chiziqning normal vektori deb nimaga aytiladi?
3. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa deb nimaga aytiladi?
4. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa qanday formula bilan hisoblanadi?
5. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb nimaga aytiladi?
6. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak qanday formula bilan hisoblanadi?
7. Tekislikdagi ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti qanday?

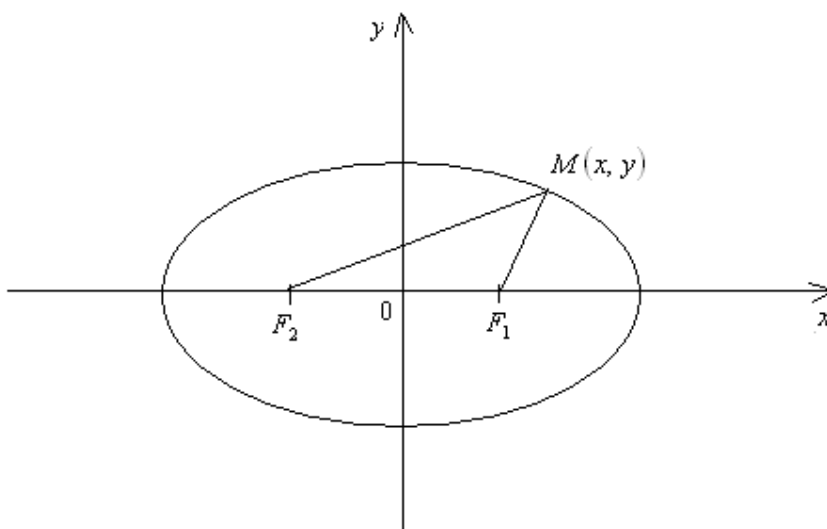
16-mavzu: Ellips va uning kanonik tenglamasi.

Reja:

1. Ellipsning ta'rifi, kanonik tenglamasi.
2. Ellips shakli.
3. Ellipsning ekstsentrishiteti.
4. Ellipsning fokal radiuslari.
5. Ellipsning parametrik tenglamasi.
6. Ellipsning direktrisalari.

1. Ellipsning ta'rifi, kanonik tenglamasi.

Tarif: Tekislikda har bir nuqtasidan *fokuslar* deb ataluvchi berilgan ikki F_1, F_2 nuqttagacha bo'lgan masofalari yig'indisi berilgan kesma uzunligiga teng bo'lgan barcha nuqtalar to'plami *ellips* deb ataladi. Berilgan kesma uzunligi fokuslar orasidagi masofadan katta.



1-chizma

Berilgan kesmaning uzunligini $2a$ ($a > 0$) bilan, fokuslar orasidagi masofani $2c$ ($c > 0$) bilan belgilaylik. ta'rifga ko'ra $a > c$.

Ellipsdagi ixtiyoriy M nuqtaning F_1 va F_2 fokuslardan masofalari uning *fokal radiuslari* deyiladi va mos ravishda r_1, r_2 bilan belgilanadi, ya'ni

$$r_1 = \rho(F_1, M) \text{ va } r_2 = \rho(F_2, M).$$

Ellipsning ta'rifiga ko'ra r_1, r_2 fokal radiuslarning yig'indisi o'zgarmas bo'lib, berilgan kesma uzunligiga teng, ya'ni

$$\rho(F_1, M) + \rho(F_2, M) = 2a \text{ yoki } r_1 + r_2 = 2a. \quad (1)$$

(1) tenglik ellipsga tegishli ixtiyoriy nuqta uchun o'rinli bo'lib, uni koordinatalarda ifodalaylik.

Dekart reperini tenglamaning sodda bo'lishiga imkon beradigan qilib tanlaymiz: abstsissalar o'qini fokuslar orqali F_2 dan F_1 ga yo'naltirib o'tkazamiz. Ordinatalar

o'qini esa F_1F_2 kesmaning o'rtasidan shu kesmaga perpendikulyar qilib o'tkazamiz. Tanlangan bu $(O, \bar{i}, \bar{j})$ repyerda F_1 va F_2 nuqtalarning koordinatalari mos ravishda $(c, 0)$ va $(-c, 0)$ bo'ladi.

Ellipsdagi ixtiyoriy M nuqtaning koordinatalarini x, y bilan belgilasak, ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \quad (2)$$

r_1, r_2 ning (2) munosabatlardagi qiymatlarini (1) tenglikka qo'yib, ushbu tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \quad (3)$$

(3) tenglama tanlangan repyerga nisbatan ellipsning tenglamasidir, chunki $M(x, y)$ nuqtaning koordinatalari bu tenglamani faqat M nuqta ellipsga tegishli bo'lgan holdagina qanoatlantiradi.

(3) tenglamani **kanonik tenglama** deb ataluvchi ko'rinishga keltiramiz.

(3) tenglamaning birinchi hadini o'ng tomonga o'tkazib, hosil bo'lgan tenglamaning ikkala tomonini kvadratga oshirsak.

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Bundan

$$2cx = 4a^2 - 2cx - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

yoki

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Hosil qilingan tenglamaning ikkala tomonini yana kvadratga oshiramiz:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

bundan

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (4)$$

$a > c \Rightarrow a^2 > c^2$, demak, $a^2 - c^2 > 0$, bu musbat soni b^2 deb olaylik:

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad (5)$$

u holda (4) tenglik quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \quad (6)$$

(6) ni a^2b^2 ga bo'lib, ushbu tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

Endi (7) tenglama haqiqatan ham ellipsni ifodalashini isbot qilamiz, chunki ellips tenglamasi (3) ko'rinishda olingan edi. (7) tenglama (3) tenglamani ikki marta radikallardan qutqarish bilan hosil qilindi. Demak, (7) tenglama (3) tenglamaning natijasi, boshqacha aytganda, koordinatalari (3) ni qanoatlantiradigan har bir nuqta (7) tenglamani ham qanoatlantiradi. Lekin (3) tenglama (7) tenglamaning natijasi ekani ravshan emas. (3) tenglama (7) tenglamaning natijasi ekanini ko'rsatamiz.

$M_1(x_1, y_1)$ (7) tenglamani qanoatlantiruvchi ixtiyoriy nuqta bo'lsin, ya'ni

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \quad (8)$$

M_1 nuqta uchun $r_1 + r_2 = 2a$ tenglikning bajarilishini ko'rsatamiz.

M_1 nuqtaning fokal radiuslari,

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}, \quad (9)$$

$$r_2 = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}. \quad (10)$$

(8) tenglikdan $y_1^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)$, bu qiymatni (9) va (10) tengliklarga qo'yib,

$$r_1 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1^2 - 2cx_1 + (b^2 + c^2)}.$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1^2 + 2cx_1 + (b^2 + c^2)}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. (5) munosabatdan $c^2 = a^2 - b^2$ va $a^2 = b^2 + c^2$, shuning uchun yuqoridagi tengliklar ushbu ko'rinishni oladi:

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x_1 - a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x_1 - a\right| = \left|a - \frac{c}{a}x_1\right|,$$

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x_1 + a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x_1 + a\right| = \left|a + \frac{c}{a}x_1\right|. \quad (11)$$

Yuqoridagi sabablarga ko'ra $0 < \frac{c}{a} < 1$, (8) tenglikdan $\Rightarrow |x_1| \leq a$. U holda $\frac{c}{a}|x_1| < a$,

shuning uchun $a - \frac{c}{a}x_1 > 0$ va $a + \frac{c}{a}x_1 > 0$. Bularni e'tiborga olsak, (11) tengliklar ushbu ko'rinishni oladi:

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x_1; \quad r_2 = a + \frac{c}{a}x_1. \quad (12)$$

(12) tengliklarni hadlab qo'shsak,

$$r_1 + r_2 = 2a$$

ga ega bo'lamiz. Demak, koordinatalari (7) tenglamani qanoatlantiradigan har qanday $M_1(x_1, y_1)$ nuqta ellipsqa tegishli.

(7) tenglama **ellipsning kanonik tenglamasi** deyiladi.

(12) tengliklardan ushbu xulosa kelib chiqadi: ellipsning ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtasining r_1, r_2 fokal radiuslari bu nuqtaning abstsissasi orqali

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x \text{ va } r_2 = a + \frac{c}{a}x \quad (13)$$

ko'rinishda chiziqli ifodalanadi.

Agar xususiy holda $a = b$ bo'lsa, ellipsning tenglamasi

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglama markazi koordinatalar boshida va radiusi a ga teng aylanani ifodalaydi. Demak, aylana ellipsning xususiy holi. $a = b$ bo'lganda $b^2 = a^2 - c^2$ dan $c = 0$. $c \neq 0$ bo'lganda $a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow a > b$.

2. Ellips shakli. Ellipsning $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (7) kanonik tenglamasi bo'yicha shaklini o'rganamiz.

1. (7) tenglamadan ko'rinadiki, ellips ikkinchi tartibli chiziq.

2. Ellips chegaralangan chiziq (agar figuraning barcha nuqtalari biror doiraga tegishli bo'lsa, uni chegaralangan figura deb ataladi). (7) tenglamadan ko'rinib turibdiki, uning chap tomonidagi ifoda doimo musbat bo'lib, har bir had quyidagi shartni qanoatlantirishi kerak: $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$, $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$. Bundan $|x| \leq a$, $|y| \leq b$.

Demak, (7) tenglama bilan aniqlangan ellipsning barcha nuqtalari tomonlari $2a$, $2b$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak ichiga joylashgan.

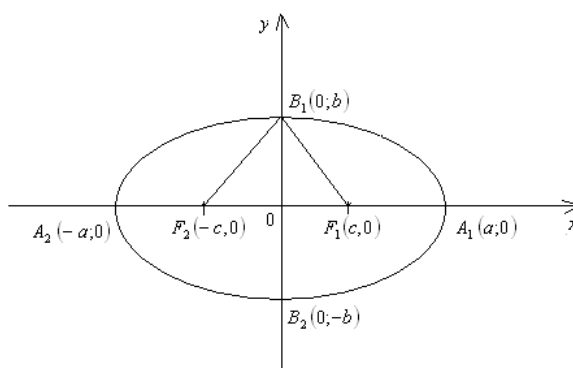
3. (7) tenglama bilan aniqlangan ellips koordinatalar o'qlariga nisbatan simmetrikdir. Koordinata o'qlari ellipsning simmetriya o'qlaridir. Simmetriya o'qlarining kesishgan nuqtasi $O(0, 0)$ **ellipsning markazi** deyiladi, fokuslar yotgan o'qi uning **fokal o'qi** deyiladi.

4. Ellipsning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini topamiz. Masalan, Ox o'q bilan kesishgan nuqtalarini topish uchun ushbu tenglamalarni birgalikda echamiz:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases} \quad (14)$$

(14) sistemaning ikkinchi tenglamasidan $y = 0$ ni birinchi tenglamasiga qo'ysak, $x = \pm a$ hosil bo'ladi. Shunday qilib, ellips Ox o'qni $A_1(a, 0)$ va $A_2(-a, 0)$ nuqtalarda kesadi. Shu singari ellipsning Oy o'q bilan kesishgan $B_1(0, b)$ va $B_2(0, -b)$ nuqtalari topiladi. Ellipsning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini uning **uchlari** deyiladi. Ellipsning to'rtta uchi bor, ular:

$$A_1, A_2, B_1, B_2.$$



2-chizma.

A_1A_2 kesma va uning uzunligi $2a$ ellipsning **katta o'qi**, OA_1 kesma va uning uzunligi a esa ellipsning **kata yarim o'qi** deyiladi. B_1B_2 kesma va uning uzunligi $2b$ ellipsning **kichik o'qi**, OB_1 kesma va uning uzunligi b esa ellipsning **kichik yarim o'qi** deyiladi.

5. Endi (7) tenglamani y ga nisbatan yechaylik:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (15)$$

Ellips koordinata o'qlarining har biriga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun uning birinchi koordinata choragida yotgan qisminigina tekshirish etarli. Birinchi chorakdagi nuqtalar uchun $x \geq 0$, $y \geq 0$ bo'lib, ellipsning bu chorakdagi qismi uchun

$$y = + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (16)$$

Bundan (16) funktsiyaning monoton kamayuvchi ekanligi va $a^2 - x^2 \geq 0$ bo'lishi, ya'ni $a^2 \geq x^2$ yoki $|x| \leq a$ bo'lishi bevosita ko'rinadi. Demak, faqat birinchi chorakda ish ko'rayotganimiz uchun $|x| \leq a$.

3. Ellipsning eksstsentrisiteti.

Tarif. Ellipsning fokuslari orasidagi masofaning katta o'qining uzunligiga nisbati **eksstsentrisitet** deyiladi va e harfi bilan belgilanadi.

Ta'rifga ko'ra $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ hamda $c < a \Rightarrow 0 < e < 1$.

Ellipsning eksstsentrisiteti uning shaklini aniqlashda muhim rol o'ynaydi. Haqiqatan ham, (5) dan $c^2 = a^2 - b^2$, shuning uchun

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

bundan

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}.$$

Ekstsentrisset $e \rightarrow 1$ da (lekin $e < 1$) $\frac{b}{a} \rightarrow 0$ bo'lib (bu yerda a o'zgarmaydi deb faraz qilinadi), b kichiklashadi va ellips Ox o'qqa qisila boradi, aksincha $e \rightarrow 0$ bo'lsa, $\frac{b}{a} \rightarrow 1 \Rightarrow b \rightarrow a$. Bu holda ellips aylanaga yaqinlasha boradi.

4. Ellipsning fokal radiuslari. (7) ellipsdagi ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtaning fokal radiuslari (12) formulalar orqali ifodalanar edi. $\frac{c}{a} = e$ ekanini e'tiborga olsak, bu formulalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$r_1 = a - ex; \quad r_2 = a + ex. \quad (17)$$

5. Ellipsning parametrik tenglamasi.

$$\begin{aligned} x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi \text{ yoki } \frac{x}{a} = \cos \varphi, \quad \frac{y}{b} = \sin \varphi, \\ \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \quad (18)$$

(18) tenglamalar ellipsning **parametrik tenglamalari** deyiladi.

6. Ellipsning direktrisalari.

Ta'rif. *Ellipsning direktrisalari* deb, uning katta o'qiga perpendikulyar bo'lgan va markazdan masofasi $\frac{a}{e}$ ga teng bo'lgan ikkita to'g'ri chiziqqa aytiladi.

Bu ta'rifga muvofiq, ellipsning direktrisalarining tenglamasi

$$x = +\frac{a}{e} \text{ va } x = -\frac{a}{e}$$

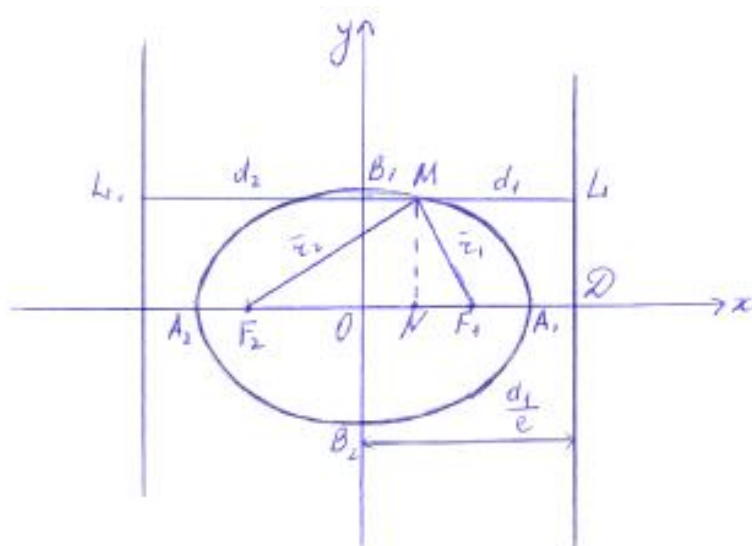
bo'ladi. Ellipsda $e < 1$ bo'lgani sababli $\frac{a}{e} > a$. Demak, direktrisalar ellipsning A_1 va A_2 uchlaridan tashqarida joylashgan.

$$x = \pm \frac{a}{e} \text{ to'g'ri chiziqlar ushbu xossaga ega.}$$

Xossa. Ellipsning har qanday nuqtasidan o'ng fokusigacha va o'sha nuqtadan unga mos direktrisagacha bo'lgan masofalar nisbati o'zgarmas miqdor bo'lib, e ga teng.

Isbot. Haqiqatan ham, $\frac{r_1}{d_1} = e$ yoki $\frac{r_2}{d_2} = e$ ekanini ko'rsatish kerak. 3-chizmadan

$d_1 = |ML|$, $d_2 = |ML_1|$ sonlar M nuqtadan direktrisalargacha bo'lgan masofalar bo'lib, r_1 , r_2 – fokal radiuslaridir. O'sha chizmadan



3-chizma

$$d_1 = |ML| = |OD| - |ON| = \frac{a}{e} - x = \frac{a - ex}{e}$$

ekani ko'rinib turibdi. Demak,

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a - ex}{\frac{a}{e} - x} = \frac{e(a - ex)}{a - ex} = e$$

shunga o'xshash,

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a + ex}{\frac{a}{e} + x} = \frac{e(a + ex)}{a + ex} = e.$$

Isbot tugadi.

Tayanch iboralar.

Ellips, fokus, fokal o'q, fokal radius, kanonik tenglama, katta o'q, kichik o'q, katta yarim o'q, kichik yarim o'q, ekstsentrisset, direktrisa.

Nazorat uchun savollar.

1. Ellipsning ta'rifini ayting?
2. Ellips tenglamasini yozing?
3. Ellips tenglamasini qanday qilib aylana tenglamasiga keltirish mumkin?
4. Ellipsning katta o'qi deb nimaga aytiladi?
5. Ellipsning kichik o'qi deb nimaga aytiladi?
6. Ellipsning ekstsentrisseti deb nimaga aytiladi?
7. Ellipsning direktrisasi deb nimaga aytiladi?

17-Mavzu: Giperbola va uning kanonik tenglamasi.

Reja:

1. Giperbolaning ta'rifi, kanonik tenglamasi.
2. Giperbola shakli.
3. Giperbolaning asimptotalari.
4. Teng tomonli giperbola.
5. Giperbolaning ekstsentrisiteti.
6. Giperbolaning fokal radiuslari.
7. Giperbolaning direktrisalari.

1. Giperbolaning ta'rifi, kanonik tenglamasi.

Ta'rif. tekislikda har bir nuqtasidan *fokuslar* deb ataluvchi berilgan ikki F_1, F_2 nuqttagacha bo'lgan masofalar ayirmasining absalut qiymati berilgan kesma uzunligiga teng bo'lgan barcha nuqtalar to'plami *giperbola* deb ataladi.

Giperbola ta'rifidagi berilgan kesma uzunligiga $2a$ ($a > 0$) bilan, fokuslari orasidagi masofani $2c$ ($c > 0$) bilan belgilaymiz.

Albatta

$$2a < 2c.$$

Giperboladagi M nuqtaning F_1, F_2 gacha masofalari uning *fokal radiuslari* deyiladi va r_1, r_2 bilan belgilanadi, ya'ni

$$r_1 = \rho(F_1, M), \quad r_2 = \rho(F_2, M).$$

Giperbolaning ta'rifiga binoan

$$|r_1 - r_2| = 2a. \quad (1)$$

(1) tenglik faqat giperbolada yotgan M nuqtalar uchungina o'rinli. Bu tenglikni koordinatalarda yozamiz. Buning uchun Dekart koordinatalar sistemasini ellips bilan ish ko'rganimizdek qilib tanlaymiz.

Fokuslar orasidagi masofa $\rho(F_1, F_2) = 2c$ bo'lgani uchun olingan koordinatalar sistemasiga nisbatan $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$. Shu koordinatalar sistemasiga nisbatan giperboladagi ixtiyoriy M nuqtaning koordinatalarini x, y bilan belgilaylik: $M(x, y)$. U holda

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (2)$$

bo'lib, (1) va (2) dan

$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

yoki

$$r_1 - r_2 = \pm 2a \iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (3)$$

Giperbolani ifodalovchi (3) tenglamani soddaroq ko'rinishga keltiraylik. (3) dan:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib, soddalashtiramiz:

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Bu tenglamani yana kvadratga ko'tarib, so'ngra soddalashtirsak,

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (4)$$

$a^2 < c^2 \Rightarrow c^2 - a^2 > 0$; bu ayirmani b^2 bilan belgilaymiz:

$$b^2 = c^2 - a^2. \quad (5)$$

U holda (4) munosabatdan ushbu soda tenglamaga kelamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6)$$

Demak, giperbola ikkinchi tartibli chiziqdır. (6) tenglama giperbolani ifodalovchi (3) tenglamaning natijasi, shunga ko'ra koordinatalari (3) tenglamani qanoatlantiradigan har bir M nuqta (6) tenglamani ham qanoatlantiradi.

Endi buning teskarisini isbot qilaylik. $M_1(x_1, y_1)$ (6) ni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy nuqta bo'lsin, ya'ni

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

M_1 nuqtaning F_1, F_2 fokuslardan masofalari:

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}. \quad (10)$$

(7) tenglikdan $y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2)$. Bu qiymatni (10) tengliklarga qo'yib, $b^2 = c^2 - a^2$ munosabatni e'tiborga olsak,

$$r_1 = \pm \left(\frac{c}{a}x_1 - a \right), \quad (11)$$

$$r_2 = \pm \left(\frac{c}{a}x_1 + a \right) \quad (12)$$

tengliklarga ega bo'lamiz, r_1, r_2 musbat sonlar, shunga ko'ra qavslar oldidagi ishoralarni shunday tanlash kerakki, (11) va (12) tengliklarning o'ng tomonlari ham musbat bo'lsin.

(7) dan $\Rightarrow |x_1| \geq a$. Bundan tashqari, $c > a \Rightarrow \frac{c}{a} > 1$. U holda, agar $|x_1| \geq a$ bo'lsa,

$\frac{c}{a}x_1 - a > 0$ va $\frac{c}{a}x_1 + a > 0$ bo'lib, (11) va (12) tengliklardagi qavslarni + ishora bilan olamiz, ya'ni

$$r_1 = \frac{c}{a}x_1 - a, \quad r_2 = \frac{c}{a}x_1 + a. \quad (13)$$

Bulardan $r_1 - r_2 = \frac{c}{a}x_1 - a - \frac{c}{a}x_1 - a = -2a$; $x_1 \leq -a$ bo'lsa, $\frac{c}{a}x_1 - a < 0$ va

$\frac{c}{a}x_1 + a < 0$ bo'lib, (11), (12) tengliklardagi qavslarni - ishora bilan olamiz, ya'ni

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x_1, \quad r_2 = -a - \frac{c}{a}x_1;$$

bulardan

$$r_1 - r_2 = a - \frac{c}{a}x_1 + a + \frac{c}{a}x_1 = 2a. \quad (14)$$

Demak, (6) tenglamadan (3) tenglama kelib chiqadi. Shunday qilib, (6) tenglama giperbolaning tenglamasidir. (6) tenglama giperbolaning **kanonik tenglamasi** deyiladi.

(13) va (14) tenglamalardan quyidagi natija kelib chiqadi: giperboladagi ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtaning r_1, r_2 fokal radiuslari uning x abstsissasi orqali

$$x > 0 \text{ bo'lganda} \quad r_1 = \frac{c}{a}x - a, \quad r_2 = \frac{c}{a}x + a, \quad (15)$$

$$x < 0 \text{ bo'lganda} \quad r_1 = a - \frac{c}{a}x, \quad r_2 = -a - \frac{c}{a}x \quad (16)$$

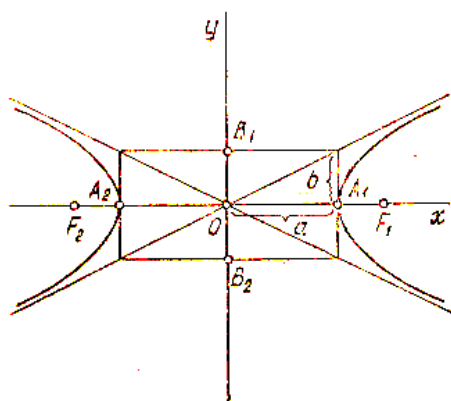
ko'rinishlarda chiziqli ifodalanadi.

2. Giperbola shakli. Giperbolaning $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglamasiga asoslanib uning shaklini aniqlaymiz.

Ellips tenglamasi ustida olib borilgan muhokamalarni takrorlab giperbolaning koordinatalar boshi, koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligi aniqlanadi.

Giperbola Ox o'qni $A_1(a, 0)$ va $A_2(-a, 0)$ nuqtalarda kesadi. (6) tenglama bilan aniqlangan giperbola Oy o'q bilan kesishmaydi. Haqiqatan (6) tenglamaga $x = 0$ ni qo'ysak, $-\frac{y^2}{b^2} = 1$. Ravshanki, bu tenglik haqiqiy sonlar sohasida o'rinli bo'lmaydi.

A_1, A_2 nuqtalar **giperbolaning uchlari** deyiladi. Shunday qilib, giperbolaning ikkita uchi bor ekan. Giperbolaning uchlari orasidagi masofa uning **haqiqiy o'qi** deyiladi.



Ordinatalar o'qida O dan b masofada turuvchi $B_1(0, b)$ va $B_2(0, -b)$ nuqtalarni belgilaymiz. $B_1B_2 = 2b$ ni giperbolaning **mavhum o'qi** deyiladi.

Agar $M(x, y)$ nuqta giperbolada yotsa, uning uchun (6) tenglamadan: $|x| \geq a$. Demak, $x = \pm a$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan $-a < x < a$ polosada giperbolaning nuqtalari yo'q.

(6) tenglamani y ordinataga nisbatan yechamiz:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (17)$$

Bu tenglamadan ko'rinadiki, x miqdor a dan $+\infty$ gacha ortganda va $-a$ dan $-\infty$ gacha kamayganda y miqdor $-\infty < y < +\infty$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qiladi. Demak, giperbola ikki qismdan iborat bo'lib, ular **giperbolaning tarmoqlari** deyiladi.

Giperbolaning bir (o'ng) tarmog'i $x \geq a$ yarim tekislikda, ikkinchi (chap) tarmog'i $x \leq -a$ yarim tekislikda joylashgan.

3. Giperbolaning asimptotalari.

Tarif. Agar $M \in \Gamma$ nuqta Γ chiziq bo'ylab harakatlanib borganda uning u to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofasi nolga intilsa, to'g'ri chiziq Γ chiziqning **asimptotasi** deyiladi.

Teorema. $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlar $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaning asimptotalaridir.

Isbot. Giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun giperbolaning birinchi chorakdagi qisminigina olish etarli. Shu maqsadda $x \geq a$ da giperbolaning birinchi chorakdagi qismini aniqlaydigan

$$y = +\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

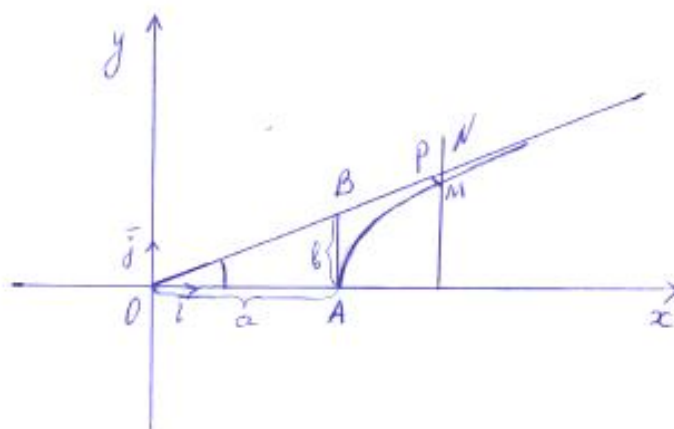
tenglama bilan

$$y = \frac{b}{a}x \quad (18)$$

tenglamani solishtiramiz. $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi va

burchak koeffitsienti $k = \frac{b}{a}$. Quyidagi chizmada to'g'ri chiziqning birinchi chorakdagi

bo'lagi tasvirlangan bo'lib, unda $OA = a$, $OB = b$. Giperbola va $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqda mos ravishda joylashgan bir xil abstsissali $M(x, y)$, $N(x, Y)$ nuqtalarni qaraymiz. Bu ikki nuqtaning mos ordinatalari:



$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad Y = \frac{b}{a}x$$

bo'ladi. MN kesmaning uzunligini hisoblaymiz:

$$Y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y \Rightarrow Y > y$$

yoki $Y - y > 0$, demak, $\rho(M, N) = Y - y$. Lekin

$$Y - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

yoki

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Giperboladagi M nuqtadan (18) to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning asosi P bo'lsin, u holda

$$\rho(M, P) < \rho(M, N) \Rightarrow \rho(M, P) < \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$ ifodani tekshiraylik. Uning maxraji cheksiz ortib boruvchi ikki musbat qo'shiluvchining yig'indisidan iborat bo'lib, surati esa o'zgarmas ab miqdordir, demak,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

U holda

$$\rho(M, P) < \rho(M, N) \text{ dan } \rho(M, P) \rightarrow 0.$$

Demak, giperboladagi M nuqta giperbola bo'yicha harakatlanib, uning uchidan etarlicha uzoqlashsa, M nuqtadan (18) to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa nolga intiladi.

Yuqoridagi ta'rifga ko'ra giperbolaning qaralayotgan qismi uchun (18) to'g'ri chiziq asimptota bo'ladi.

Giperbolaning koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan $y = -\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziq ham giperbolaning asimptotasidir. Shunday qilib,

$$y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x \quad (19)$$

tenglamalar bilan aniqlangan to'g'ri chiziqlar giperbolaning asimptotalaridir.

4. Teng tomonli giperbola.

Ta'rif: Yarim o'qlari teng bo'lgan giperbola *teng tomonli* deyiladi.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglamada $a = b$ bo'lganda:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Teng tomonli giperbola asimptotalarining tenglamalari $y = x$, $y = -x$ ko'rinishda bo'lib, ular o'zaro perpendikulyar ($k_1 k_2 = -1$). Bu asimptotalarni yangi koordinata o'qlari sifatida qabul qilsak, teng tomonli giperbola tenglamasi o'rta maktab kursida ko'riladigan ixcham $xy = a$ ko'rinishni oladi.

Haqiqatan, Ox o'q uchun $y = -x$ asimptotani, Oy o'q uchun esa $y = x$ asimptotani olsak, u holda $\varphi = (\bar{i}, \bar{i}') = -45^\circ$.

Eski x , y koordinatalardan yangi koordinatalarga o'tish formulalaridan:

$$x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

Endi x , y koordinatalardan x' , y' ga o'tsak, teng tomonli giperbolaning yangi tenglamasini hosil qilamiz:

$$x'y' = \frac{a^2}{2} \text{ yoki } y' = \frac{a^2}{2x'}.$$

5. Giperbola ekstsentrishiteti.

Ta'rif: Giperbolaning fokuslari orasidagi masofani haqiqiy o'qining uzunligiga nisbati giperbolaning *ekstsentrishiteti* deyiladi.

Ekstsentrishitetni ellipsdagidek e harfi bilan belgilasak,

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Giperbolada $c > a \Rightarrow e > 1$. Demak, giperbolaning ekstsentrishiteti hamma vaqt birdan kata bo'ladi. Ekstsentrishitet formulasini $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ekanidan foydalanib,

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Ellipsga o'xshash, e birga qancha yaqin bo'lsa, giperbolaning tarmoqlari shuncha siqiq va e birdan qancha katta bo'lsa, giperbola tarmoqlari shuncha yoyiq joylashgan bo'ladi.

6. Giperbolaning fokal radiuslari. (6) giperboladagi ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtaning fokal radiuslari $x > 0$ bo'lganda (15) formulalar orqali va $x < 0$ da (16) formulalar orqali ifodalanar edi. $\frac{c}{a} = e$ ekanini e'tiborga olsak, bu formulalar ushbu ko'rinishni oladi:

$$x > 0 \text{ bo'lganda } r_1 = ex - a, \quad r_2 = ex + a, \quad (20)$$

$$x < 0 \text{ bo'lganda } r_1 = a - ex, \quad r_2 = -a - ex. \quad (21)$$

7. Giperbolaning direktrisalari.

Ta'rif. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *giperbolaning direktrisalari* deb, uning markazidan $\pm \frac{a}{e}$ masofada fokal o'qiga perpendikulyar bo'lib o'tadigan ikki to'g'ri chiziqqa aytiladi.

Bu ta'rifga ko'ra giperbola direktrisalarining tenglamalari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

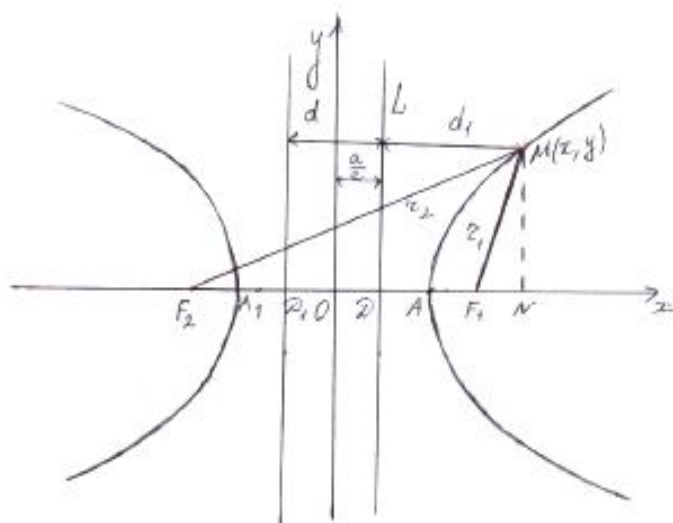
$$x = +\frac{a}{e} \text{ va } x = -\frac{a}{e}.$$

Giperbolada $e > 1$ bo'lgani sababli $\frac{a}{e} < a$ bo'ladi. Demak, giperbolaning direktrisalari uning markazi O bilan A_1 va A_2 uchlari orasida joylashgan.

$x = \pm \frac{a}{e}$ to'g'ri chiziqlar ushbu xossaga ega.

Xossa. Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokusgacha bo'lgan masofaning mos direktrisagacha bo'lgan masofaga nisbati o'zgarmas va e ga teng.

Isbot. Bu xossaning isbotini giperbolaning o'ng fokusi va unga mos direktrisasi uchun beramiz (uning chap fokusi va unga mos direktrisasi uchun xossaning to'g'ri ekani simmetriyadan kelib chiqadi). Giperbolaning $M(x, y)$ nuqtasidan DL direktrisagacha bo'lgan masofa d_1 bo'lsin. Quyidagi chizmadan



$$x = ON = OD + DN = \frac{a}{e} + d_1 \Rightarrow d_1 = x - \frac{a}{e}.$$

Agar $M(x, y)$ nuqta giperbolaning chap tarmog'i bo'lsa, u holda shunga o'xshash usul bilan

$$d_1 = \frac{a}{e} - x$$

bo'lishini ko'rish qiyin emas. Endi $\frac{r_1}{d_1}$ nisbatni tuzamiz.

M nuqta o'ng tarmoqda bo'lgan holda bu nisbat

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{-a + ex}{x - \frac{a}{e}} = \frac{e(-a + ex)}{ex - a} = e$$

ga, $M(x, y)$ nuqta chap tarmoqda bo'lgan holda

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a - ex}{\frac{a}{e} - x} = \frac{e(a - ex)}{a - ex} = e$$

ga teng bo'ladi. Ikkala holda ham nisbat o'zgarmas e songa teng ekani isbot qilindi.
Isbot tugadi.

Tayanch iboralar.

Giperbola, fokus, fokal o'q, fokal radius, kanonik tenglama, haqiqiy o'q, mavhum o'q, asimptota, giperbola tarmog'i, ekstsentrismet, direktrisa.

Nazorat uchun savollar.

1. Giperbola ta'rifini ayting.
2. Giperbola tenglamasini yozing?
3. Giperbolaning haqiqiy o'qi nimadan iborat?
4. Giperbolaning mavhum o'qi deb nimaga aytiladi?
5. Qaysi to'g'ri chiziqlar giperbolaning asimptotalari bo'ladi?
6. Giperbolaning ekstsentrisiteti deb nimaga aytiladi?
7. Giperbolaning direktrisasi deb nimaga aytiladi?
8. Qanday giperbolaga teng tomonli deyiladi?

18-Mavzu: Parabola.

Reja:

1. Parabolaning ta'rifi, kanonik tenglamasi.
2. Parabola shakli.
3. Parabolaning ekstsentrishiteti va direktrisasi.

1. Parabolaning ta'rifi, kanonik tenglamasi.

Ta'rif. tekislikda har bir nuqtasidan berilgan nuqtachacha va berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofalari o'zaro teng bo'lgan barcha nuqtalar to'plami *parabola* deb ataladi. Berilgan nuqta va berilgan to'g'ri chiziqda yotmaydi deb olinadi. berilgan nuqta *parabolaning fokusi*, berilgan to'g'ri chiziq esa *parabolaning direktrisasi* deyiladi.

Parabolaning fokusi va direktrisasini mos ravishda F va d bilan, fokusdan direktrisagacha bo'lgan masofani p bilan belgilaymiz. Ta'rifdan foydalanib, parabola tenglamasini keltirib chiqaraylik: buning uchun Dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha tanlaymiz: abtsissalar o'qi deb F nuqtadan o'tuvchi va d to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni qabul qilamiz, uning musbatyo'nalishi 1-chizmada ko'rsatilgandek bo'lib, abtsissalar o'qining d to'g'ri chiziq bilan kesishgan nuqtasi N bo'lsin. Ordinatalar o'qini FN kesmaning o'rtasidan o'tkazamiz. Tanlangan

koordinatalar sistemasida direktrisa tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$, F fokus esa $+\frac{p}{2}, 0$

koordinatalarga ega bo'ladi.

Parabolaning ixtiyoriy nuqtasi $M(x, y)$ bo'lsin. M nuqtadan direktrisaga tushirilgan perpendikulyarning asosini L bilan belgilaylik. U holda parabolaning ta'rifiga ko'ra

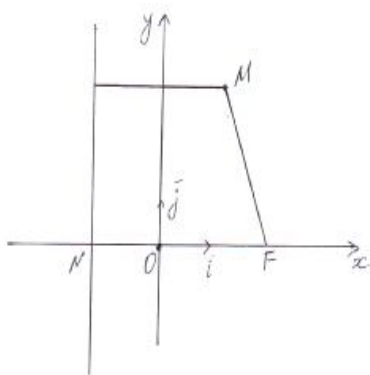
$$\rho(F, M) = \rho(L, M). \quad (1)$$

(1) tenglikni koordinatalarda ifodalaylik. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra

$$\rho(F, M) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$\rho(L, M) = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Bu qiymatlarni (1) munosabatga qo'yamiz:



1-chizma

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \quad (2)$$

(2) tenglama parabolaning tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan tenglamasidir, chunki uni faqat parabolada yotgan nuqtalarning koordinatalariga qanoatlantiradi.

(2) tenglamani soddaroq ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun uning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib, ixchamlaymiz:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \text{ yoki } x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

bundan

$$y^2 = 2px. \quad (3)$$

(3) tenglamani (2) tenglamaning natijasi sifatida keltirib chiqardik.

Endi o'z navbatida (2) tenglamani (3) tenglamaning natijasi sifatida keltirib chiqarish mumkinligini ko'rsatamiz. Buning uchun koordinatalari (3) tenglamani qanoatlantiradigan har bir nuqta parabolaga tegishli ekanini ko'rsatish kifoya.

$M_1(x_1, y_1)$ nuqtaning koordinatalari (3) tenglamani qanoatlantirsin, ya'ni $y_1^2 = 2px_1$ sonli tenglik bajarilsin. Shu bilan birga $x = -\frac{p}{2}$ tenglamaga ega bo'lgan d to'g'ri

chiziq va $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ nuqta berilgan bo'lsin. M_1 nuqtaning F va d dan bir xil masofada turishini ko'rsatishimiz kerak:

$$\rho(F, M_1) = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2}$$

va

$$\rho(L, M_1) = \left|x_1 + \frac{p}{2}\right|.$$

Bu tengliklarga $y_1^2 = 2px_1$ ni qo'ysak,

$$\rho(F, M_1) = \sqrt{x_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{4} + 2px_1} = \sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x_1 + \frac{p}{2}\right| = \rho(L, M_1).$$

Bundan $\Rightarrow M_1$ nuqta parabolaga tegishli. Demak, (3) parabola tenglamasi bo'lib, u **kanonik tenglama** deyiladi.

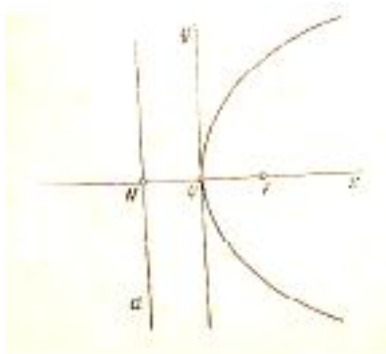
2. Parabola shakli. Parabolaning shaklini uning (3) tenglamasiga ko'ra tekshiramiz.

$y^2 \geq 0$ va $p > 0$ bo'lgani uchun $y^2 = 2px$ tenglamada $x \geq 0$ bo'lishi kerak. Bundan (3) parabolaning barcha nuqtalari o'ng yarim tekislikda joylashganligi kelib chiqadi;

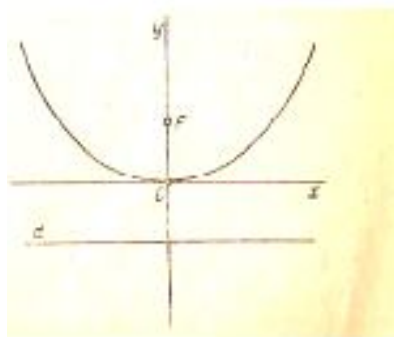
$x = 0$ da $(3) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ parabola koordinatalar boshidan o'tadi. Koordinatalar boshi **parabolaning uchi** deyiladi;

x ning har bir $x > 0$ qiymatiga y ning ishoralari qarama-qarshi, ammo absolyut miqdorlari teng bo'lgan ikki qiymati mos keladi. Bundan parabolaning Ox o'qqa nisbatan simmetrik joylashganligi aniqlanadi. Ox o'q parabolaning **simmetriya o'qi** deyiladi. U shu bilan bir vaqtda parabolaning **fokal o'qi** hamdir.

(3) $\Rightarrow y = \pm\sqrt{2px}$. Bu tenglamadan ko'rinadiki, x ortib borsa, $|y|$ ham ortib boradi, ya'ni $x \rightarrow +\infty$ da $|y| \rightarrow +\infty$. Ko'rsatilgan bu xossalarga asoslanib parabolaning shaklini 2-chizmadagidek taxmin qilish mumkin.

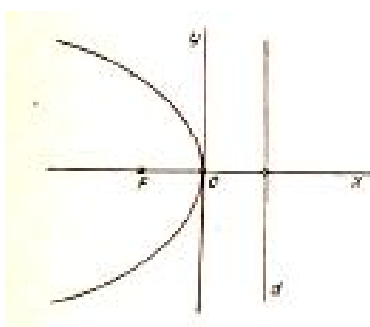


2-chizma

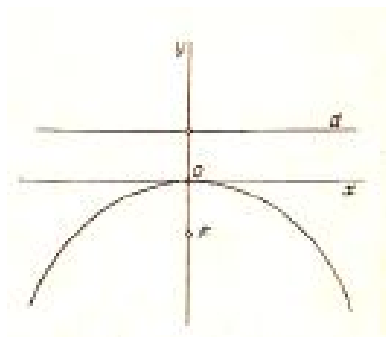


3-chizma

Parabolaning tenglamasini hosil qilish uchun Dekart koordinatalar sistemasini maxsus tanladik, ya'ni Ox o'qni fokus orqali direktrisaga perpendikulyar qilib o'tkazdik. Agar Dekart koordinatalar sistemasini boshqacha usulda tanlasak, albatta, parabolaning tenglamasi ham (3) ko'rinishdan farqli bo'ladi.



4-chizma



5-chizma

Masalan, agar parabola koordinatalar sistemasiga nisbatan 3-chizmada ko'rsatilgandek joylashgan bo'lsa, uning tenglamasi $x^2 = 2py$ ko'rinishda bo'ladi. 4- va 5-chizmalarda tasvirlangan parabolaning tenglamalari mos ravishda $y^2 = -2px$, $x^2 = -2py$ ko'rinishda bo'ladi.

Misol. $y^2 = 4x$ parabolada fokal radiusining uzunligi 26 bo'lgan nuqtani toping.

Yechish. Izlangan $M(x, y)$ nuqta uchun $\rho(F, M) = 26$. $y^2 = 4x \Rightarrow p = 2$, u holda

$$F(1, 0); 26 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 4x}$$

yoki $676 = x^2 + 2x + 1$, bundan $x^2 + 2x - 675 = 0$.

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 675} = -1 \pm 26, \quad x_1 = 25, \quad x_2 = -27.$$

$x_2 = -27$ ildiz yaramaydi, chunki $y^2 = 4x$ paraboladagi barcha nuqtalarning abstsissalari musbat bo'lishi kerak. $x_1 = 25$ ni $y^2 = 4x$ ga qo'yib, y ni topamiz:

$$y_1 = +10, \quad y_2 = -10.$$

Shunday qilib, izlanayotgan nuqtalar ikkita ekan:

$$M_1(25, 10), \quad M_2(25, -10).$$

3. Parabolaning ekstsentrishiteti va direktrisasi. Parabolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokusigacha bo'lgan masofa r bilan, direktrisasi bo'lgan masofa k bilan belgilasak, parabola ta'rifidan $r = k$ deb yozish mumkin. **Parabolaning ekstsentrishiteti**

deb, $e = \frac{r}{k}$ songa aytiladi. Bu holda, ravshanki,

$$e = \frac{r}{k} = 1.$$

Ellips, giperbola va parabola shunday ikkinchi tartibli chiziqlardan iboratki, bu chiziqlarning ixtiyoriy nuqtalaridan fokus deb ataluvchi nuqtachacha va direktrisa deb ataluvchi to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofalar nisbati o'zgarmas songa tengdir. Bu miqdor ekstsentrishitet deyiladi. Yuqoridagi mulohazalardan ravshanki, ellips uchun $e < 1$, giperbola uchun $e > 1$, parabola uchun $e = 1$.

Tayanch iboralar.

Parabola, fokus, fokal o'q, simmetriya o'qi, fokal radius, kanonik tenglama, ekstsentrishitet, direktrisa.

Nazorat uchun savollar.

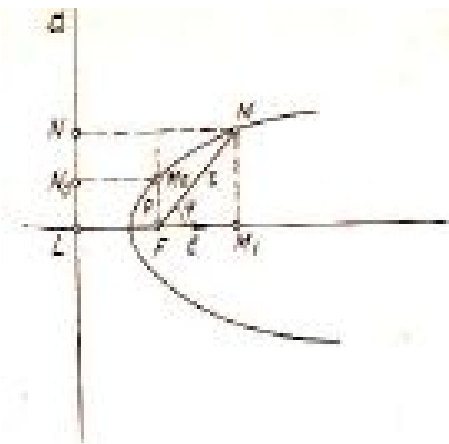
1. Parabola tenglamasini yozing?
2. Parabola deb qanday figuraga aytiladi?
3. Parabolaning qanday tenglamalari mavjud?
4. Parabolaning ekstsentrishiteti deb nimaga aytiladi?
5. Parabolaning direktrisasi deb nimaga aytiladi?
6. Parabolaning simmetriya o'qi deb nimaga aytiladi?

19-Mavzu: Ikkinchi tartibli chiziqlarning qutb koordinatalardagi tenglamalari.

Reja:

1. Ikkinchi tartibli chiziqlarning qutb koordinatalardagi tenglamalari.
2. Ikkinchi tartibli chiziqlarning qutb koordinatalardagi tenglamalariga doir misollar yechish.

Biz bu yerda ikkinchi tartibli chiziqlar (ellips, giperbola va parabola) ning oldingi mavzuda bayon etilgan xossalardan foydalanib, maxsus tanlangan qutb koordinatalardagi tenglamasini keltirib chiqaramiz. Bizga aytilgan chiziqlardan birortasi: ellips, giperbola yoki parabolaberilgan bo'lsin.



Berilgan chiziqlarning γ bilan belgilaymiz.

F bu γ chiziqlarning fokusi, d shu fokusga mos direktrisasi bo'lsin. Qutb koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. $FL \perp d$ to'g'ri chiziqni o'tkazamiz, $FE = \vec{i}$, $L = FL \cap d$ bo'lsin, bunda E nuqta FL to'g'ri chiziqda va F nuqtadan L nuqta yotmagan tomonda yotadi. F nuqtani qutb, FE nurni qutb o'qi deb qabul qilamiz. M_0 nuqta F

nuqtada qutb o'qiga o'tkazilgan perpendikulyarning γ bilan kesishgan nuqtasi bo'lsin. $\rho(M_0, F)$ masofani p bilan belgilaymiz va γ chiziqlarning **fokal parametri** deb ataymiz. Tanlangan qutb koordinatalar sistemasiga nisbatan γ chiziqlarning ixtiyoriy M nuqtasining koordinatalarini r, φ bilan belgilaymiz: $r = \rho(F, M)$, $\varphi = (\overline{EFM})$. Egri chiziqlarning tegishli hamma nuqtalarining umumiy xossasiga asosan ushbu munosabatlarni yoza olamiz:

$$\frac{\rho(F, M)}{\rho(d, M)} = e.$$

$$\frac{\rho(F, M_0)}{\rho(d, M_0)} = e \Rightarrow \rho(d, M_0) = \frac{\rho(F, M_0)}{e} = \frac{p}{e}. \quad (1)$$

Agar $\varphi > \frac{\pi}{2}$ bo'lsa,

$$\rho(d, M) = \rho(d, M_0) - r \cos(180^\circ - \varphi) = \frac{p}{e} + r \cos \varphi.$$

Agar $\varphi < \frac{\pi}{2}$ bo'lsa,

$$\rho(d, M) = \rho(d, M_0) + \rho(d, M_1) = \frac{p}{e} + r \cos \varphi.$$

(M_1 nuqta M nuqtadan qutb o'qiga tushirilgan perpendikulyarning asosi.)

Demak, ikkala holda ham

$$\rho(d, M) = \frac{p}{2} + r \cos \varphi.$$

$\rho(d, M)$ ning bu qiymatini (1) ga qo'ysak,

$$\frac{r}{\frac{p}{2} + r \cos \varphi} = e$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi} \quad (2)$$

(2) tenglama γ chiziqlarining **qutb koordinatalardagi tenglamasidir**.

Bu tenglama:

a) $e < 1$ bo'lsa, ellipsni aniqlaydi, φ bu holda $0 \leq \varphi < \pi$ oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qiladi;

b) $e = 1$ bo'lsa, parabolani aniqlaydi, φ bu holda $0 < \varphi < \pi$ oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qiladi. $\varphi = 0$ qiymatga parabolaning hech bir nuqtasi mos kelmaydi;

c) $e > 1$ bo'lsa, giperbolani aniqlaydi.

Bu holda φ ning qaysi oraliqda o'zgarishini tekshiramiz. $2\varphi_0$ – asimptotalar orasidagi tarmoq joylashgan burchak bo'lsin, u holda

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}} = \sqrt{e^2 - 1} \Rightarrow \frac{\sin^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi_0} = e^2 - 1 \Rightarrow e^2 \cos^2 \varphi_0 = 1 \quad \text{yoki}$$

$$\cos^2 \varphi_0 = \frac{1}{e^2}; \quad \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \text{ bo'lganidan } \cos \varphi_0 = \frac{1}{e}.$$

(2) tenglamada $r > 0$ uchun $1 - e \cos \varphi > 0$ yoki $\cos \varphi < \frac{1}{e} = \cos \varphi_0$ bo'lishi kerak. Bundan giperbolaning qaralayotgan tarmog'idagi nuqtalar uchun $\varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0$ tengsizliklar bajariladi, degan natija kelib chiqadi. (2) tenglamadagi $p = \rho(M_0, F)$ son **fokal parametr** deyiladi. Parabola uchun bu p fokal parametr uning kanonik tenglamasidagi p dan iborat. Ellips (giperbola) uchun p ning ma'nosini, ya'ni yarim o'qlar orqali ifodasini topaylik. FM_0 to'g'ri chiziq ellips (giperbola) ning fokal o'qiga perpendikulyar bo'lgani uchun M_0, F nuqtalar bir xil abstsissaga ega. $M_0(x_0, y_0)$ koordinatalarga ega bo'lsin desak, $x_0 = -c$ (giperbola bo'lsa, $x_0 = +c$).

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \right) \text{ va } p = \rho(M_0, F) = \sqrt{(-c + c)^2 + y_0^2} = |y_0|$$

ni hisobga olsak, $\frac{c}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$, bundan

$$p^2 = b^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) = b^2 \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2} \right) = \frac{b^4}{a^2}.$$

Demak, ellips (giperbola) da fokal parametr $p = \frac{b^2}{a}$ ga teng.

Misol. $r = \frac{25}{13 - 12 \cos \varphi}$ chiziqlarning dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan kanonik tenglamasini yozing.

Yechish. Berilgan tenglamani (2) $r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$ ko'rinishga keltirish uchun o'ng tomonining surat va maxrajini 13 ga bo'lamiz:

$$r = \frac{\frac{25}{13}}{1 - \frac{12}{13} \cos \varphi},$$

buni (2) bilan taqqoslasak, ko'ramizki, $e = \frac{12}{13} < 1$, demak, egri chiziq ellipsdir. Uning

kanonik tenglamasini yozamiz. Tenglamadan $p = \frac{25}{13}$, lekin $p = \frac{b^2}{a}$ edi, bundan

$\frac{b^2}{a} = \frac{25}{13}$, $b^2 = \frac{25}{13}a$; $e = \frac{c}{a} = \frac{12}{13} \Rightarrow c = \frac{12}{13}a$. b , a ning bu qiymatlarini

$b^2 = a^2 - c^2$ tenglikka qo'ysak, $\frac{25}{13} \cdot a = a^2 - \frac{144}{169}a^2$, bundan $\frac{25}{13} = \frac{25}{169}a$ yoki

$a = 13$, $b^2 = \frac{25}{13}a = \frac{25}{13} \cdot 13 = 25$, $b = 5$ berilgan ellipsning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Tayanch iboralar.

Fokal parametr, qutb, ellipsning qutb koordinatalardagi tenglamasi, giperbolaning qutb koordinatalardagi tenglamasi, parabolaning qutb koordinatalardagi tenglamasi.

Nazorat uchun savollar.

1. Fokal parametr nima?
2. Ellipsning qutb koordinatalardagi tenglamasi qanday?
3. Giperbolaning qutb koordinatalardagi tenglamasi qanday?
4. Parabolaning qutb koordinatalardagi tenglamasi qanday?

ASOSIY ADABIYOTLAR:

1. Aleksandrov A.D., Netsvetaev N.YU. Geometriya. M., Nauka, 1990.
2. Ilin V.A., Poznyak E.G. Analiticheskaya geometriya M. Nauka, 1981.
3. Pogorelov A.V. Analitik geometriya. T., O'qituvchi, 1983.
4. Postnikov M.M. Lektsii po geometrii. Semestr 1. M., Nauka, 1983.
5. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar to'plami T. Universitet, 2006.
6. Kravchenko K. Resheniya zadach po analiticheskoy geometrii.
7. Dodojonov N. D, Jo'raeva M.SH , Geometriya. 1-qism T., O'qituvchi, 1996.

QO'SHIMCHA ADABIYOTLAR:

8. Efimov N.V., Rozendorn E.R. Lineynaya algebra i mnogomernaya geometriya. M., Nauka, 1963.
9. Aleksandrov P.S. Lektsii po analiticheskoy geometrii. M., Nauka, 1968.
10. Suberbiller O.N. Zadachi i uprajneniya po analiticheskoy geometrii. M., Gostexizdat, 1970.
11. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii. M., Gostexizdat, 1957
12. Modenov P.S., Parxomenko A.S. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii. M. Nauka, 1976.
13. Kletenik D.V. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii. M. Nauka, 1998.
14. [http:// www.a-geometry.narod.ru](http://www.a-geometry.narod.ru)
15. J. Akilova, M. Jabbarov, Q. Mamasoliyev, R.Safarov. Chiziqli algebra va analitik geometriyadan masalalar yechish. Toshkent, «Turon-iqbol», 2006.
16. A.Y.Narmanov. Analitik geometriya. Toshkent, 2008.

Internet saytlari:

1. www.ziyonet.uz
2. www.referat.uz
3. www.istedod.uz
4. www.dekan.ru
5. www.ursu.uz
6. www.arxiv.org
7. [http:// www.a-geometry.narod.ru](http://www.a-geometry.narod.ru)
8. www.eknigu.com/lib/Mathematics/.
9. www.lib.homelinux.org/math/.
10. www.eknigu.com/lib/Mathematics/.
11. <http://lib.mexmat.ru/looks/2791>
12. <http://www.ksu.ru/intres/index1.php>

“Analitik geometriya” fanidan oraliq va yakuniy nazorat uchun savollar

1. Tekislikda affin koordinatalar sistemasi.
2. Tekislikda dekart koordinatalar sistemasi.
3. Tekislikda affin qutb koordinatalar sistemasi.
4. Fazoda affin koordinatalar sistemasi.
5. Fazoda dekart koordinatalar sistemasi.
6. Fazoda silindrik va sferik koordinatalar sistemalari.
7. Ikkita nuqta orasidagi masofa.
8. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.
9. Vektorlar. Vektorlar ustida amallar.
10. Vektorning o'qdagi proeksiyasi va uning xossalari.
11. Skalyar ko'paytma va uning xossalari.
12. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi.
13. Vektor ko'paytmaning algebraik xossalari.
14. Vektor ko'paytmaning Dekart koordinatalar sistemasidagi ifodasi.
15. Tekislikda va fazoda orientatsiya.
16. Uch vektorning aralash ko'paytmasi.
17. Aralash ko'paytmaning algebraik xossalari.
18. Aralash ko'paytmaning Dekart koordinatalardagi ifodasi.
19. Tekislik va fazoda Dekart koordinatalar sistemasini almashtirish.
20. Algebraik chiziq. Tekislikda to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.
21. To'g'ri chiziqning kesmalardagi va kanonik tenglamalari.
22. To'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi, burchak koeffitsientli tenglamasi.
23. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
24. To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.
25. To'g'ri chiziqlarning normal tenglamasi.
26. Nuqtadan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa.
27. To'g'ri chiziqlar dastasi.
28. Fazoda tekislik tenglamasi.
29. Tekislikning umumiy tenglamasi.
30. Ikki tekislik orasidagi burchak.
31. Tekisliklarning parallellik va perpendikularlik shartlari.
32. Bitta to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lmagan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi. Tekislikning normallangan tenglamasi.
33. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa.
34. Tekisliklar dastasi va bog'lami.
35. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamasi.
36. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi va parametrik tenglamasi.
37. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.
38. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
39. To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikularlik shartlari.
40. To'g'ri chiziqning tekislikka tegishlilik sharti.
41. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tushirish. Ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa.

42. Ellips, giperbola, parabolalarning kanonik tenglamalari.
43. Ellips, giperbola, parabola chiziqlari shaklini ularning kanonik tenglamalari orqali tekshirish.
44. Ellips va giperbolaning ektsentrisiteti, direktrisalari.
45. Ellips, giperbola va parabolaning urinma tenglamalari.
46. Ellips, giperbola, parabolaning optik xossalari. Ellips, giperbola, parabolaning parallel vatarlari o'rtalari haqida teorema.
47. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasi.
48. Dekart koordinatalar sistemasini almashtirishda ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasi koefitsientlarining o'zgarishi.
49. Ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamasi.
50. Ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasi.
51. Ikkinchi tartibli chiziqlarning tasnifi.
52. Ikkinchi tartibli chiziq markazi.
53. Ikkinchi tartibli chiziqning to'g'ri chiziq bilan kesishishi.
54. Asimptotik yo'nalishlar.
55. Ikkinchi tartibli chiziqqa urinma. Asimptota.
56. Ikkinchi tartibli chiziqning diametrlari va qo'shma yo'nalishlar.
57. Qo'shma diametrlar.
58. Ikkinchi tartibli chiziqning bosh yo'nalishlari.
59. Ikkinchi tartibli chiziqning simmetriya o'qlari.
60. Ikkinchi tartibli sirt va uning to'g'ri chiziq bilan kesishishi.
61. Ikkinchi tartibli sirtning tekislik bilan kesishishi.
62. Sferik sirt.
63. Ikkinchi tartibli silindrik sirt va uning yasovchilari.
64. Ikkinchi tartibli silindrik sirtning turlari.
65. Ikkinchi tartibli konus sirtlar va uning yasovchilari.
66. Ikkinchi tartibli konus kesimlari.
67. Aylanma sirtlar.
68. Aylanma sirtlar turlari.
69. Ellipsoid va uning shakli, ba'zi geometrik xossalari.
70. Ellipsoidning koordinata tekisliklariga parallel tekisliklari bilan kesimlari.
71. Bir pallali giperboloid.
72. Ikki pallali giperboloid.
73. Elliptik paraboloid.
74. Giperbolik paraboloid.
75. Elliptik paraboloid.
76. Giperbolik paraboloid.
77. Ikkinchi tartibli sirtning urinma tekisligi.
78. Ellipsoid va giperbolik paraboloidlarning urinma tekisliklari.
79. Chiziqli fazo va undagi bazis.
80. Chiziqli fazoda vektorning koordinatalari.
81. Affin fazo va affin koordinatalar sistemasi.
82. Affin fazolarda to'g'ri chiziq va tekislik.
83. n o'lchovli vektorli Evklid fazosi.

- 84. Chiziqli fazoda skalyar ko'paytma va ortonormal bazis.
- 85. n o'lchovli evklid fazosi.

MUNDARIJA

Soʻz boshi.....	
1. Vektorlar. Vektorlar ustida chiziqli amallar.....	
2. Vektorning oʻqdagi proeksiyasi. Chiziqli bogʻliq va chiziqli erkli vektorlar. Kollinearlik va komplanarlik. Bazis.	
3. Fazoda affin va dekart koordinatalar sistemasi.....	
4. Vektorlarning skalyar koʻpaytmasi. Vektorning yoʻnaltiruvchi kosinuslari.....	
5. Tekislikda affin va dekart koordinatalar sistemasi.	
6. Vektorlarning vektor koʻpaytmasi va aralash koʻpaytmasi.	
7. Tekislikda affin, dekart koordinatalar sistemasini almashtirish.....	
8. Fazoda affin koordinatalar sistemasini almashtirish.....	
9. Tekislikda va fazoda orientatsiya.....	
10. Qutb, silindrik va sferik koordinatalar sistemasi.....	
11. Fazoda tekislik tenglamalari. Nuqtadan tekislikgacha boʻlgan masofa.....	
12. Tekisliklarning oʻzaro vaziyati.	
13. Fazoda toʻgʻri chiziqli tenglamalari. Fazoda toʻgʻri chiziqlarning oʻzaro vaziyati. Fazoda toʻgʻri chiziqli bilan tekislikning oʻzaro vaziyati.....	
14. Algebraik chiziqli. Tekislikda toʻgʻri chiziqli tenglamalari.	
15. Ikki toʻgʻri chiziqli orfsidagi burchak. Nuqtadan toʻgʻri chiziqligacha masofa. Tekislikda toʻgʻri chiziqlarning oʻzaro vaziyati. Toʻgʻri chiziqlar dastasi.....	
16. Ellips va uning kanonik tenglamasi.....	
17. Giperbola va uning kanonik tenglamalari.....	
18. Parabola va uning kanonik tenglamalari.....	
19. Ellips, giperbola va parabolaning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamalari.....	
20. Adabiyotlar roʻyxati.....	

