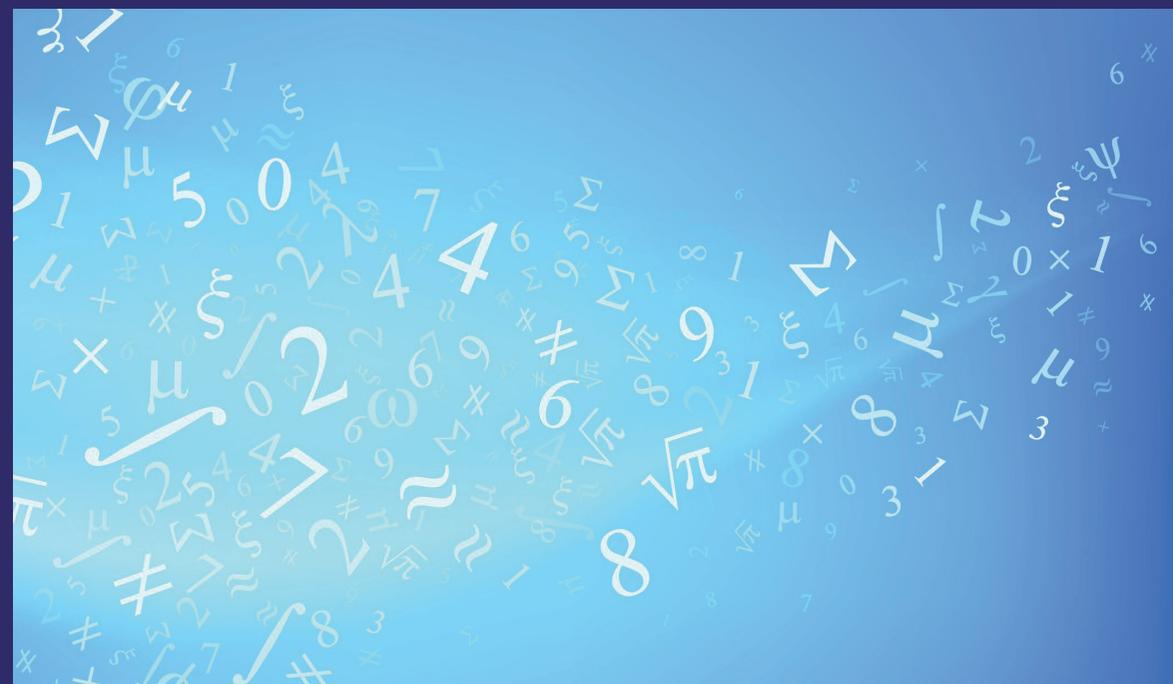


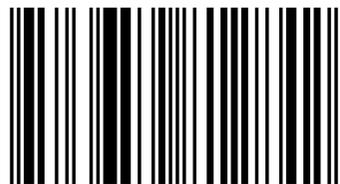
Если для уравнения Штурма-Лиувилля прямые и обратные задачи изучены достаточно полно, то в теории прямых и обратных задач для пучков имеется лишь отдельные фрагменты, не составляющие общей картины и относящиеся в основном к случаю конечного отрезка. Однако практический интерес представляет изучение прямой и обратной задачи для пучка операторов Штурма-Лиувилля на всей прямой и на полупрямой. Настоящая работа посвящена изучению обратной спектральной задачи для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на всей прямой и на полуоси. Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории линейных операторов, в математической физике при интегрировании нелинейных уравнений, а также в квантовой механике и в других областях естествознания.



Базар Бабажанов

Бабажанов Базар Атажанович, Кандидат Физико-математических наук, Ургенчский Государственный университет, Заведующий кафедрой "Прикладная Математика".

Обратные задачи для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля



978-3-659-81284-2



Базар Бабажанов

**Обратные задачи для
квадратичного пучка операторов
Штурма-Лиувилля**

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:

LAP LAMBERT Academic Publishing

ist ein Imprint der / является торговой маркой

OmniScriptum GmbH & Co. KG

Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия

Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /

Напечатано: см. последнюю страницу

ISBN: 978-3-659-81284-2

Zugl. / Утверд.: Ургенч, Ургенчский Государственный университет, 2005

Copyright / АВТОРСКОЕ ПРАВО © 2015 OmniScriptum GmbH & Co. KG

Alle Rechte vorbehalten. / Все права защищены. Saarbrücken 2015

Содержание

Введение.....	3
Глава 1.	
Необходимые сведения из общей теории квадратичного пучка уравнений Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.....	17
§1.1. Функция Ляпунова и ее свойства.....	17
§1.2. Решения Флоке и их свойства.....	26
§1.3. Вывод формул следов.....	28
Глава 2.	
Спектральные свойства квадратичного пучка уравнений Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на всей прямой.....	33
§2.1. Вывод системы уравнений Дубровина-Трубовица для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на всей прямой.....	33
§2.2. Исследование задачи Коши для системы уравнений Дубровина-Трубовица.....	38
§2.3. Связь длины лакун с аналитичностью коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$	41
§2.4. Тожество для квадратов собственных функций квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.....	46
Глава 3.	
Обратная задача для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с конечнозонным периодическим потенциалом на полуоси.....	51
§3.1. Вывод граничного условия через спектральные данные.....	51
§3.2. Вывод системы уравнений Дубровина-Трубовица для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на полуоси.....	60
§3.3. Формулы следов для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим конечнозонным потенциалом на полуоси.....	67
Литература.....	73

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая монография посвящена изучению прямой и обратной спектральной задачи для квадратичного пучка

$$T(\lambda)y \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0 \quad (0.1)$$

операторов Штурма-Лиувилля с периодическими коэффициентами на всей прямой и на полуоси. ($p(x)$ и $q(x)$ π -периодические действительные функции.)

Обычно функцию $u(x) = q(x) - ip(x)$ называют потенциалом уравнения (0.1).

Следует заметить, что в случае $p(x) \equiv 0$, уравнение (0.1) превращается в классическое уравнение Штурма-Лиувилля

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda^2 y. \quad (0.2)$$

Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля исследовалась в работах В.А.Амбарцумяна, Г.Борга, Ю.М.Березанского, А.Ш.Блоха, М.Г.Гасимова, И.М.Гельфанда, М.Г.Крейна, И.Кея, Б.М.Левитана, Н.Левинсона, В.Э.Лянце, В.А.Марченко, Ю.Мозера, В.В.Жикова, Ф.С.Рофе-Бекетова, В.А.Садовниченко, А.Н.Тихонова, Ш.А.Алимова, Л.Д.Фаддеева, Л.А.Чудова и других.

Интерес к обратным задачам для уравнения Штурма-Лиувилля резко возрос в 1967 году. Это было связано с появлением на свет замечательной работы Г.Гарднера, Ж.Грина, М.Крускала и Р.Миуры (ГГКМ) [12], в которой они показали «интегрируемость» уравнения Кортевега-де Фриза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (0.3)$$

с помощью метода обратной задачи для уравнения Штурма-Лиувилля.

После работ ГГКМ возникла потребность в изучение оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами специального вида, например, с периодическими, почти-периодическими, конечнозонными, убывающими и т.д.

В работе В.А.Марченко, И.В.Островского [56] была изучена обратная задача для уравнения Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.

В этом случае спектр оператора Штурма-Лиувилля имеет зонную структуру т.е. он получается выкидыванием из всей прямой не более чем счетного числа не пересекающихся интервалов, которые называются лакунами.

Если для уравнения Штурма-Лиувилля прямые и обратные задачи изучены достаточно полно, то в теории прямых и обратных задач для пучков имеется лишь отдельные фрагменты, не составляющие общей картины и относящиеся в основном к случаю конечного отрезка. (Например [13], [15], [17], [87]).

Однако практический интерес представляет изучение прямой и обратной задачи для пучка операторов Штурма-Лиувилля (0.1) на всей прямой и на полупрямой. Эта связано с результатами работ А.Р.Итса [36], М.Jaulent, I.Miodek [25] и др., в которых установлена связь пучка (0.1) с нелинейными уравнениями, интегрируемыми методом обратной задачи.

В работах В.А.Юрко [87] исследовалась прямая и обратная задача для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля по функции Вейля-Титчмарша на полупрямой, а в работах Г.Ш.Гусейнова [15-17] изучена прямая и обратная задача для уравнения (0.1) на всей прямой в случае периодических и периодических конечнозонных потенциалов.

В работе В.А.Марченко, И.В.Островского [56] и в работе Б.М.Левитана, Г.Ш.Гусейнова [46] хорошо изучена асимптотика длины лакун оператора Штурма-Лиувилля с периодическим коэффициентом, в частности из их результата следует, что если потенциал k раз непрерывно-дифференцируем, то для длин лакун имеет место асимптотика:

$$\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1} = \underline{O}\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Хорошо известно (см. [73]), что каждый периодический потенциал $q(x)$ оператора Штурма-Лиувилля однозначно определяется заданием границ

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots < \lambda_{2n-1} \leq \lambda_{2n} < \dots$$

зон спектра и спектральных параметров

$$\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}], \quad \sigma_n = \pm 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Для нахождения $q(x)$ сделаем сдвиг $q(x) \rightarrow q(x+t)$, $t \in R^1$, при этом спектральные параметры ξ_n перейдут в $\xi_n(t)$, оставаясь в указанных интервалах. Одним из важных моментов в теории обратных задач для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом является вывод системы дифференциальных уравнений для $\xi_n(t)$:

$$\frac{d\xi_n(t)}{dt} = n^2 \left(\prod_{k \neq n} \frac{\xi_k(t) - \xi_n(t)}{k^2} \right)^{-1} \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 4(\lambda_0 - \lambda) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{k^2}.$$

Эта система дифференциальных уравнений (называемая системой уравнений Дубровина-Трубовица) в периодическом случае получена Е.Трубовицом (см. [73]), а в конечнозонном случае Б.А.Дубровиным (см. [22]). Потенциал $q(x)$ уравнения $Hu = -y'' + q(x)y = \lambda y$, $x \in R^1$ можно восстановить по формуле

$$q(t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(t)).$$

Тем самым получена точная формула для $q(x)$ через спектральные данные.

Применяя вышеуказанную процедуру для оператора Штурма-Лиувилля Е.Трубовиц [73] получил связь между аналитичностью потенциала и порядком убывания длин лакун.

Механическое описание дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица дано в работе Ю.Мозера [61]. При этом используется, полученные в работах Х.П.Мак-Кина-Е.Трубовица [59] и П.Дейфта-Е.Трубовица [20], тождество для квадратов нормированных собственных функций $\varphi_{2k}(x)$, соответствующих собственным значениям λ_{2k} :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \varphi_{2k}^2(x) = 1,$$

где ε_k зависит только от $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$, и является положительным, если $\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} > 0$ и равно нулю если $\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = 0$. А.В.Савиным в работе [69] было получено аналогичное тождество для бесконечнозонных почти периодических потенциалов оператора Штурма-Лиувилля. Это тождество играет важную роль при сведении спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с конечнозонным потенциалом к задаче Неймана о движении точки на сфере единичного радиуса под действием квадратичного потенциала (Ю.Мозер [61], А.П.Веселов [11]).

В главе II настоящей монографии для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля (0.1) с π -периодическими коэффициентами выведен аналог системы уравнений Дубровина-Трубовица, доказана разрешимость этой системы, а также установлена связь между аналитичностью коэффициентов $p(x)$, $q(x)$ и порядком убывания длин лагун. Кроме этого, здесь же, получены тождества для квадратов нормированных собственных функций регулярного квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля (0.1).

Аналогичные результаты в случае оператора Дирака

$$Dy \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (0.4)$$

где коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ π -периодические непрерывные действительные функции, λ – комплексный параметр, были получены в работах А.Б.Хасанова и А.М.Ибрагимова [75].

Отметим, что метод вывода системы уравнений Дубровина-Трубовица заимствован нами из работы А.Б.Хасанова и А.М.Ибрагимова [75], а при доказательствах теорем о связях аналитичности коэффициентов и порядком убывания длин лагун уравнения (0.1) использованы методы работы Е.Трубовица [73].

В работах Н.И.Ахиезера [3], Х.Хохштадта и В.Г.Голдберга [84] и др. изучены обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля на полупрямой в случае конечнозонных периодических потенциалов; а в случае необязательно

периодических конечнозонных потенциалов изучены в работах Б.М. Левитана, А.В.Савина [48] и др.

Отметим, что обратная задача рассматриваемая на полупрямой несколько отличается от задачи рассматриваемой на всей прямой, в первом случае требуется найти и формулу восстановления граничного условия.

В главе III изучается обратная задача на полуоси для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля (0.1) с π -периодическими коэффициентами. Отметим, что рассматриваемая задача в случае конечнозонных (не обязательно периодических) потенциалов изучена в работе А.Э.Маматова [54], а в случае периодических коэффициентов исследована в работе А.М.Ибрагимова и А.Б.Яхшимуратова [35]. Следует отметить, что в этих работах не имеется точная формула восстановления граничного условия через спектральные данные. В §1 третьей главы использован метод работы Б.М.Левитана, А.В.Савина [48].

Формулировка основных результатов.

I. В первой главе монографии приведены необходимые в дальнейшем классические факты из работ М.Г.Гасымова, Г.Ш.Гусейнова [13], Г.Ш.Гусейнова [15-17].

Во второй главе монографии изучается обратная задача для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля (0.1) на всей прямой с π -периодическими коэффициентами.

В § 1 рассматривается квадратичный пучок уравнений Штурма-Лиувилля

$$T(\lambda)y \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in R^1, \quad (0.5)$$

где коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ π -периодические непрерывные действительные функции, λ комплексный параметр.

Введем операторный пучок $T(\lambda)$, порожденный в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ выражением (0.5) и имеющий в нем максимальную область

определения. Те комплексные значения параметра λ , для которых $T^{-1}(\lambda)$ существует и является ограниченным оператором, определенным на всем $L_2(-\infty, \infty)$ называются регулярными точками пучка $T(\lambda)$. Дополнение в комплексной плоскости к множеству регулярных точек называется спектром пучка $T(\lambda)$.

Как и в работах [15-17] всюду будем считать, что выполняются следующие условия:

а) $p(x)$, $q(x)$ определены на R^1 , π -периодичны, $q(x) \in L_2[0, \pi]$, $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$;

б) для всех функций $y(x) \in W_2^2[0, \pi]$, $y(x) \not\equiv 0$ удовлетворяющих условию $y'(0)\bar{y}(0) - y'(\pi)\bar{y}(\pi) = 0$, выполняется неравенство

$$\int_0^{\pi} \left\{ |y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2 \right\} dx > 0$$

(это неравенство заведомо выполняется, если $q(x) > 0$).

Через $W_2^n[0, \pi]$ мы обозначили пространство С.Л.Соболева состоящее из заданных на сегменте $[0, \pi]$ комплекснозначных функций, которые имеют $n - 1$ абсолютно непрерывных производных и производную n -го порядка, суммируемую с квадратом на сегменте $[0, \pi]$.

В этом случае функции Вейля-Титчмарша имеют вид

$$m_{\pm}(\lambda) = \frac{s'(\pi, \lambda) - c(\pi, \lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi, \lambda)}, \quad (0.6)$$

где $c(x, \lambda)$ и $s(x, \lambda)$ решения уравнения (0.5) удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{cases} c(0, \lambda) = 1 \\ c'(0, \lambda) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} s(0, \lambda) = 0 \\ s'(0, \lambda) = 1, \end{cases} \quad (0.7)$$

а спектр оператора (0.5) имеет зонную структуру, т.е.

$$E = R^1 \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n^-, \lambda_n^+),$$

непересекающиеся интервалы $(\lambda_n^-, \lambda_n^+)$, $n \in Z$, называются лакунами уравнения (0.5). Легко видеть, что концы лакун являются собственными значениями либо периодической $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$, либо антипериодической $y(0) = -y(\pi)$, $y'(0) = -y'(\pi)$ граничной задачи для уравнения (0.5), и состоят из нулей функции $\Delta^2(\lambda) - 4$, где $\Delta(\lambda) = c(\pi, \lambda) + s'(\pi, \lambda)$.

Нули ξ_n , $n \in Z \setminus \{0\}$, функции $s(\pi, \lambda)$ (знаменателя в выражении (0.6)) являются собственными значениями задачи Дирихле $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ на отрезке $[0, \pi]$ для уравнения (0.5). Справедливы следующие оценки

$$\lambda_n^- \leq \xi_n \leq \lambda_n^+, \quad n \in Z \setminus \{0\},$$

$$\lambda_n^-, \lambda_n^+ = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{\varepsilon_n^\pm}{n}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varepsilon_n^\pm|^2 < \infty.$$

Определение. Последовательность чисел

$$\dots < \lambda_{-1}^- \leq \lambda_{-1}^+ < \lambda_0^- < \lambda_0^+ < \lambda_1^- \leq \lambda_1^+ < \dots$$

и спектральные параметры

$$\xi_n \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+], \quad \sigma_n = \text{sign} \left(\frac{1}{s'(\pi, \xi_n)} - s'(\pi, \xi_n) \right) = \pm 1, \quad n \in Z \setminus \{0\}$$

называются спектральными данными уравнения (0.5).

Основным результатом второго параграфа является следующая

Теорема 1. (теорема 2.1.1). Если $u(x) = q(x) - ip(x) \in C^1(R^1)$ π -периодический потенциал уравнения (0.5), имеющий спектр

$$E = R^1 \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n^-, \lambda_n^+)$$

и спектральные параметры $\xi_n \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+]$, $\sigma_n = \pm 1$, $n \in Z \setminus \{0\}$, то для любого действительного параметра $t \in R^1$, уравнение

$$-y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y = \lambda^2 y, \quad -\infty < x < \infty, \quad (0.8)$$

имеет тот же спектр E , и спектральные параметры

$$\xi_n(t) \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+], \quad \sigma_n(t) = \pm 1, \quad n \in Z \setminus \{0\}$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина- Трубовица

$$\frac{d\xi_n(t)}{dt} = -2\sigma_n(t)\sqrt{(\xi_n(t) - \lambda_n^-)(\lambda_n^+ - \xi_n(t))} \times \\ \times \sqrt{(\xi_n(t) - \lambda_0^-)(\xi_n(t) - \lambda_0^+)} \prod_{k \neq n, 0} \frac{(\xi_n(t) - \lambda_k^-)(\xi_n(t) - \lambda_k^+)}{(\xi_n(t) - \xi_k(t))^2}, \quad n \in Z \setminus \{0\}, \quad (0.9)$$

а также начальным условиям

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n(0) = \xi_n^-, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n(0) = \sigma_n, \quad n \in Z \setminus \{0\}, \quad (0.10)$$

где корни понимаются в арифметическом смысле и знак $\sigma_n(t)$ изменяется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами лакуны $[\lambda_n^-, \lambda_n^+]$.

При доказательстве этой теоремы рассматривается уравнение

$$-y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < \pi, \quad (0.11)$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (0.12)$$

Для этой граничной задачи выводится равенство

$$2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t) = ([q'(x+t) + 2\xi_n(t)p'(x+t) + 2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)]y_n, y_n), \quad (0.13)$$

где $\xi_n(t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ собственные значения граничной задачи (0.11)+(0.12) соответствующие нормированным собственным функциям $y_n(x, t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$, (\cdot, \cdot) скалярное произведение пространства $L_2(0, \pi)$. После ряда преобразований из (0.13) получается система уравнений Дубровина-Трубовица.

При этом используется интегрирование по частям и следующее тождество

$$2\xi_n \int_0^\pi s^2(x, \xi_n) dx = s'(\pi, \xi_n) \frac{\partial s(\pi, \xi_n)}{\partial \lambda} + 2 \int_0^\pi p(x) s^2(x, \xi_n) dx. \quad (0.14)$$

В § 2 доказывается разрешимость системы уравнений Дубровина-Трубовица. Доказательство разрешимости осуществляется путем замены

$$\xi_n(t) = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin^2 x_n(t), \quad n \in Z \setminus \{0\} \quad (0.15)$$

в системе уравнений Дубровина-Трубовица (0.9). В результате этой замены получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_n}{dt} = -\sigma_n(0) h_n(\dots, \xi_{-1}, \xi_1, \dots), \quad n \in Z \setminus \{0\}, \quad (0.16)$$

где

$$h_n = \sqrt{(\xi_n - \lambda_0^-)(\xi_n - \lambda_0^+) \prod_{k \neq n, 0} \frac{(\xi_n - \lambda_k^-)(\xi_n - \lambda_k^+)}{(\xi_n - \xi_k)^2}}. \quad (0.17)$$

Начальные условия рассматриваются в виде

$$x_n(0) = \arcsin \sqrt{\frac{\xi_n(0) - \lambda_n^-}{\lambda_n^+ - \lambda_n^-}}, \quad n \in Z \setminus \{0\}. \quad (0.18)$$

Окончательно (0.16) можно переписать следующим образом:

$$\frac{dx_n}{dt} = H_n(\dots, x_{-1}, x_1, \dots), \quad n \in Z \setminus \{0\}, \quad (0.19)$$

где

$$H_n(x) = -\sigma_n(0) h_n(\xi) \quad (0.20)$$

и

$$\xi_n = \xi_n(t) = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin^2 x_n(t), \quad n \in Z \setminus \{0\}. \quad (0.21)$$

Для изучения задачи Коши (0.19)–(0.21) введём действительное банахово пространство

$$K = \left\{ x = (\dots, x_{-1}, x_1, \dots) : \|x\| = \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) |x_n| < \infty \right\}$$

и обозначим $H = (\dots, H_{-1}, H_1, \dots)$.

Перепишем систему Дубровина-Трубовица в виде одного уравнения в банаховом пространстве K :

$$\frac{dx}{dt} = H(x).$$

Далее доказывается что, $H(x)$ удовлетворяет условию Липшица в пространстве K .

В параграфе 3 второй главы монографии с помощью системы уравнений Дубровина-Трубовица, изучается связь длины лагун с аналитичностью коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (0.5).

Основными результатами этого параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 2. (Теорема 2.3.1). Если $p(x)$, $q(x)$ π -периодические действительные функции из класса $C^2(-\infty, \infty)$ и длины лагун $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$ экспоненциально убывают, т.е. если существуют постоянные числа $a > 0, b > 0$ для которых $\lambda_n^+ - \lambda_n^- < ae^{-b|n|}$, при любых целых n , то $p(x)$ и $q(x)$ являются действительными аналитическими функциями на всей прямой.

Теорема 3. (Теорема 2.3.2). Если $p(x)$ и $q(x)$ действительные аналитические π -периодические функции, то длины лагун $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$ убывают экспоненциально.

В § 4 второй главы получены некоторые тождества для квадратов собственных функций квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.

Обозначим через

$$\dots, y_{-1}^-(x), y_{-1}^+(x), y_0^-(x), y_0^+(x), y_1^-(x), y_1^+(x), \dots \quad (0.22)$$

нормированные собственные функции соответствующие собственным значениям

$$\dots < \lambda_{-1}^- \leq \lambda_{-1}^+ < \lambda_0^- < \lambda_0^+ < \lambda_1^- \leq \lambda_1^+ < \dots \quad (0.23)$$

периодической или антипериодической задачи для уравнения (0.5) на отрезке $[0, \pi]$.

Теорема 4. (Теорема 2.4.1). Для функций (0.22) выполняются следующие тождества:

$$\sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{1}{f'(\lambda_k^-)} \left\{ -\frac{\Delta'(\lambda_k^-)}{2\lambda_k^-} + \frac{1}{\lambda_k^-} \int_0^\pi p(t)s(\pi, \lambda_k^-, t) dt \right\} (y_k^-(t))^2 = p(t) - \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} - \frac{c}{2},$$

$$\sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{1}{g'(\lambda_k^+)} \left\{ -\frac{\Delta'(\lambda_k^+)}{2\lambda_k^+} + \frac{1}{\lambda_k^+} \int_0^\pi p(t)s(\pi, \lambda_k^+, t) dt \right\} (y_k^+(t))^2 = p(t) - \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} + \frac{c}{2},$$

где

$$f(\lambda) = \pi \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_k^-}{k}, \quad g(\lambda) = \pi \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_k^+}{k}, \quad c = \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} (\lambda_k^+ - \lambda_k^-),$$

и $s(x, \lambda, t)$ решение уравнения

$$-y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

удовлетворяющее начальным условиям $s(0, \lambda, t) = 0, \quad s'(0, \lambda, t) = 1, \quad (t \text{ действительный параметр}).$

В § 1 третьей главы выводится выражение для функции Вейля-Титчмарша в случае квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля на полупрямой с периодическим потенциалом, вводится определение спектральных параметров, описывается структура спектра и выводится формула для восстановления граничного условия через спектральные данные.

Рассмотрим в пространстве $L_2(0, \infty)$ следующий пучок

$$T(\lambda)y \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0, \quad (0 < x < \infty) \quad (0.24)$$

операторов Штурма-Лиувилля с граничным условием

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi), \quad (0.25)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ действительные функции, имеющие период π , а λ комплексный параметр. Обозначим через $\xi_0^-, \xi_0^+, \xi_n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ корни уравнения

$$\varphi(\pi, \lambda) \cos \alpha + \varphi'(\pi, \lambda) \sin \alpha = 0.$$

Отметим, что $\xi_0^-, \xi_0^+, \xi_n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ совпадают с собственными значениями регулярной задачи для уравнения (0.24) с граничными условиями

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad y(\pi) \cos \alpha + y'(\pi) \sin \alpha = 0$$

и выполняются включения $\xi_0^- \in [\lambda_0^-, 0), \quad \xi_0^+ \in (0, \lambda_0^+], \quad \xi_n \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+], \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$

Определение. Числа $\xi_0^-, \xi_0^+, \xi_n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и знаки

$$\sigma_0^\pm = \text{sign} \left\{ \frac{\varphi(\pi, \xi_0^\pm)}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\varphi(\pi, \xi_0^\pm)} \right\}, \quad \sigma_n = \text{sign} \left\{ \frac{\varphi(\pi, \xi_n)}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\varphi(\pi, \xi_n)} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

называются спектральными параметрами задачи (0.24)+(0.25).

Определение. Спектральные параметры и границы $\lambda_n^-, \lambda_n^+, n \in \mathbb{Z}$ непрерывного спектра назовём спектральными данными задачи (0.24)+(0.25).

Конечнозонность уравнения (0.24) означает, что уравнение $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$ имеет лишь конечное число простых корней. Изменяя нумерацию обозначим их через

$$\lambda_0^- < \lambda_0^+ < \lambda_1^- < \lambda_1^+ < \dots < \lambda_{n_0}^- < \lambda_{n_0}^+ < \dots < \lambda_N^- < \lambda_N^+,$$

где $(\lambda_{n_0}^-, \lambda_{n_0}^+)$ лакуна, содержащая точку $\lambda = 0$.

Используя метод работы Б.М.Левитана, А.В.Савина [48] доказывается основной результат первого параграфа:

Теорема 5. (Теорема 3.1.1). Если задаче (0.24)+(0.25) соответствуют лакуны $(\lambda_0^-, \lambda_0^+)$, ..., $(\lambda_{n_0}^-, \lambda_{n_0}^+)$, ..., $(\lambda_N^-, \lambda_N^+)$ и спектральные параметры $\xi_0 \in [\lambda_0^-, \lambda_0^+]$, ..., $\xi_{n_0-1} \in [\lambda_{n_0-1}^-, \lambda_{n_0-1}^+]$, $\xi_{n_0}^-, \xi_{n_0}^+ \in [\lambda_{n_0}^-, \lambda_{n_0}^+]$, $\xi_{n_0+1} \in [\lambda_{n_0+1}^-, \lambda_{n_0+1}^+]$, ..., $\xi_N \in [\lambda_N^-, \lambda_N^+]$, $\sigma_0 = \pm 1$, ..., $\sigma_{n_0}^- = \pm 1$, $\sigma_{n_0}^+ = \pm 1$, ..., $\sigma_N = \pm 1$, (где $(\lambda_{n_0}^-, \lambda_{n_0}^+)$ лакуна, содержащая точку $\lambda = 0$), то имеет место следующая формула:

$$ctg \alpha = -\xi_{n_0}^- \frac{\sigma_{n_0}^- \sqrt{-R(\xi_{n_0}^-)}}{\tilde{A}'(\xi_{n_0}^-)} - \xi_{n_0}^+ \frac{\sigma_{n_0}^+ \sqrt{-R(\xi_{n_0}^+)}}{\tilde{A}'(\xi_{n_0}^+)} - \sum_{n_0 \neq n=0}^N \xi_n \frac{\sigma_n \sqrt{-R(\xi_n)}}{\tilde{A}'(\xi_n)}, \quad (0.26)$$

где

$$\tilde{A}(\lambda) = (\lambda - \xi_{n_0}^-)(\lambda - \xi_{n_0}^+) \prod_{n_0 \neq n=0}^N (\lambda - \xi_n), \quad R(\lambda) = \prod_{n=0}^N (\lambda - \lambda_n^-)(\lambda - \lambda_n^+).$$

Замечание. При решении обратной задачи для задачи (0.24)+(0.25), по формуле (0.26) восстанавливается граничное условие.

Во втором параграфе третьей главы выводятся система уравнений Дубровина-Трубовица для задачи (0.24)+(0.25).

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема:

Теорема 6. (Теорема 3.2.1). Пусть задача (0.24)+(0.25) имеет непрерывный спектр

$$E_{ess} = \mathbb{R}^1 \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n^-, \lambda_n^+) \quad (0.27)$$

и спектральные параметры $\xi_n, \sigma_n, n \in Z \setminus \{0\}, \xi_0^\pm, \sigma_0^\pm$. Тогда при всех действительных значениях параметра $t \in (-\infty, \infty)$, следующая задача

$$\begin{aligned} -y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y - \lambda^2 y &= 0, \quad 0 < x < \infty \\ y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha &= 0, \quad \alpha \in (0, \pi), \end{aligned}$$

имеет тот же непрерывный спектр (0.27) и спектральные параметры $\xi_n(t), \sigma_n(t), n \in Z \setminus \{0\}, \xi_0^\pm(t), \sigma_0^\pm(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0^\pm(t) &= \frac{[(\xi_0^\pm(t))^2 - 2\xi_0^\pm(t)p(t) - q(t) + ctg^2 \alpha] \sigma_0^\pm(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_0^\pm(t)) - 4}}{\Phi'(\xi_0^\pm(t))}, \\ \dot{\xi}_n(t) &= \frac{[\xi_n^2(t) - 2\xi_n(t)p(t) - q(t) + ctg^2 \alpha] \sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{\Phi'(\xi_n(t))}, \quad n \in Z \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \pi(\lambda - \xi_0^-)(\lambda - \xi_0^+) \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \xi_k}{k}, \\ \Delta^2(\lambda) - 4 &= -4\pi^2(\lambda - \lambda_0^-)(\lambda - \lambda_0^+) \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_k^-)(\lambda - \lambda_k^+)}{k^2}, \end{aligned}$$

а также начальным условиям

$$\begin{aligned} \xi_n(t) = \xi_n(0) = \xi_n, \quad \sigma_n(t) = \sigma_n(0) = \sigma_n, \quad n \in Z \setminus \{0\}, \\ \xi_0^\pm(t) = \xi_0^\pm(0) = \xi_0^\pm, \quad \sigma_0^\pm(t) = \sigma_0^\pm(0) = \sigma_0^\pm. \end{aligned}$$

Знак $\sigma_n(t), (\sigma_0^\pm(t))$ меняются на противоположный при каждом столкновении спектрального параметра $\xi_n(t), (\xi_0^\pm(t))$ с границами своей лакуны.

В третьем параграфе третьей главы выводится формула следов для задачи (0.24)+(0.25), а именно доказывается следующая теорема.

Теорема 7. (Теорема 3.3.1). Если задаче (0.24)+(0.25) соответствуют лакуны $(\lambda_0^-, \lambda_0^+), \dots, (\lambda_{n_0}^-, \lambda_{n_0}^+), \dots, (\lambda_N^-, \lambda_N^+)$ и спектральные параметры $\xi_0 \in [\lambda_0^-, \lambda_0^+], \dots, \xi_{n_0}^+, \xi_{n_0}^- \in [\lambda_{n_0}^-, \lambda_{n_0}^+], \dots, \xi_N \in [\lambda_N^-, \lambda_N^+], \sigma_0 = \pm 1, \dots, \sigma_{n_0}^+ = \pm 1,$

$\sigma_{n_0}^- = \pm 1, \dots, \sigma_N = \pm 1$, (где $(\lambda_{n_0}^-, \lambda_{n_0}^+)$ лагуна, содержащая точку $\lambda = 0$), то имеют место следующие формулы:

$$p(t) = - \left(\frac{\lambda_{n_0}^+ + \lambda_{n_0}^-}{2} - \xi_{n_0}^+(t) - \xi_{n_0}^-(t) \right) - \sum_{n_0 \neq k=0}^N \left(\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^-}{2} - \xi_k(t) \right), \quad (0.28)$$

$$q(t) + 2p^2(t) = 2ctg^2 \alpha - \left(\frac{(\lambda_{n_0}^+)^2 + (\lambda_{n_0}^-)^2}{2} - (\xi_{n_0}^+(t))^2 - (\xi_{n_0}^-(t))^2 \right) - \sum_{n_0 \neq k=0}^N \left(\frac{(\lambda_k^+)^2 + (\lambda_k^-)^2}{2} - \xi_k^2(t) \right), \quad (0.29)$$

где $\xi_{n_0}^+(t)$, $\xi_{n_0}^-(t)$, $\xi_k(t)$, $k = \overline{0, N}$, $k \neq n_0$ спектральные параметры соответствующие коэффициентам $p(x+t)$ и $q(x+t)$.

Замечание. При решении обратной задачи для задачи (0.24)+(0.25) по формулам (0.28), (0.29) восстанавливаются коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (0.24). Спектральные параметры $\xi_{n_0}^+(t)$, $\xi_{n_0}^-(t)$, $\xi_k(t)$, $k = \overline{0, N}$, $k \neq n_0$ определяются как решения системы дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица из теоремы 6.

Пользуясь случаем, автор сердечно благодарит профессора А.Б.Хасанова за постоянное внимание и поддержку при работе над данной монографией.

Г Л А В А 1.
НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ О
КВАДРАТИЧНОМ ПУЧКЕ УРАВНЕНИЙ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С
ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В этой главе приводятся результаты (в основном без доказательства) полученные в работах М.Г. Гасимова, Г.Ш. Гусейнова [13], Г.Ш.Гусейнова [15-17], эти факты нам понадобятся в дальнейшем.

§ 1. 1. Функция Ляпунова и ее свойства.

Рассмотрим уравнение

$$T(\lambda)y \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in R^1, \quad (1.1.1)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ действительные функции имеющие период π , а λ комплексный параметр.

Введем операторный пучок $T(\lambda)$, порожденный в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ выражением (1.1.1) и имеющий в нем максимальную область определения. Те комплексные значения параметра λ , для которых $T^{-1}(\lambda)$ существует и является ограниченным оператором, определенным на всем $L_2(-\infty, \infty)$ называются регулярными точками пучка $T(\lambda)$. Дополнение в комплексной плоскости к множеству регулярных точек называется спектром пучка $T(\lambda)$.

Спектральные задачи для пучка $T(\lambda)$ хорошо изучены в работах [15-17], в частности из [17] следует, что при выполнении условий:

- а) $p(x)$, $q(x)$ определены на R^1 , π -периодичны, $q(x) \in L_2[0, \pi]$,
 $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$;

б) для всех функций $y(x) \in W_2^2[0, \pi]$, $y(x) \neq 0$ удовлетворяющих условию $y'(0)\bar{y}(0) - y'(\pi)\bar{y}(\pi) = 0$, выполняется неравенство

$$\int_0^{\pi} \left\{ |y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2 \right\} dx > 0,$$

(это неравенство заведомо выполняется, если $q(x) > 0$), спектр пучка $T(\lambda)$ непрерывен и состоит из последовательности сегментов, разделенных лакунами, т. е. спектр имеет следующий вид

$$E = \mathbb{R}^1 \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n^-, \lambda_n^+), \quad (1.1.2)$$

причем лакуна которая содержит точку $\lambda = 0$ (мы его обозначим через $(\lambda_0^-, \lambda_0^+)$) всегда является невырожденной.

Через $W_2^n[0, \pi]$ мы обозначили пространство С.Л.Соболева состоящее из заданных на сегменте $[0, \pi]$ комплекснозначных функций, которые имеют $n-1$ абсолютно непрерывных производных и производную n -го порядка, суммируемую с квадратом на сегменте $[0, \pi]$.

Замечание. Будем считать всюду, что условия а) и б) выполняются.

Обозначим через $c(x, \lambda)$ и $s(x, \lambda)$ решения уравнения (1.1.1) удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{cases} c(0, \lambda) = 1 \\ c'(0, \lambda) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} s(0, \lambda) = 0 \\ s'(0, \lambda) = 1. \end{cases}$$

Решения $c(x, \lambda)$ и $s(x, \lambda)$ существуют и являются целыми функциями относительно λ при фиксированных x .

Заметим, что $c(x, \lambda)$, $s(x, \lambda)$ составляют фундаментальную систему решений уравнения (1.1.1) и удовлетворяют тождеству

$$c(x, \lambda)s'(x, \lambda) - c'(x, \lambda)s(x, \lambda) = 1.$$

Теорема 1.1.1. Собственные значения уравнения (1.1.1) на отрезке $[0, \pi]$ с граничными условиями

$$y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi),$$

$$(y(0) = -y(\pi), y'(0) = -y'(\pi))$$

являются действительными и совпадают с корнями уравнения

$$\Delta(\lambda) - 2 = 0, \quad (\Delta(\lambda) + 2 = 0),$$

где

$$\Delta(\lambda) = c(\pi, \lambda) + s'(\pi, \lambda). \quad (1.1.3)$$

Функция $\Delta(\lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла.

Можно доказать, что при $|\lambda| \rightarrow \infty$ имеют место следующие асимптотические формулы (см. [16])

$$c(x, \lambda) = \cos[\lambda x - \beta(x)] + \underline{O}\left(\frac{e^{x|\operatorname{Im} \lambda|}}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

$$s'(x, \lambda) = \cos[\lambda x - \beta(x)] + \underline{O}\left(\frac{e^{x|\operatorname{Im} \lambda|}}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

где

$$\beta(x) = \int_0^x p(t) dt.$$

Из которых при действительных λ получается следующая асимптотическая формула для функции Ляпунова

$$\Delta(\lambda) = 2 \cos[\lambda \pi - \beta(\pi)] + \underline{O}\left(\frac{e^{\pi|\operatorname{Im} \lambda|}}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

В частности, из последней формулы при действительных λ следует следующая асимптотика:

$$\Delta(\lambda) = 2 \cos[\lambda \pi - \beta(\pi)] + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что значения функции Ляпунова на бесконечности лежат в окрестности отрезка $[-2; 2]$.

Теорема 1.1.2. Для функции Ляпунова выполняется равенство (см. [17])

$$\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} = 2 \int_0^\pi \{c'(\pi, \lambda) s^2(t, \lambda) + [c(\pi, \lambda) - s'(\pi, \lambda)] \cdot c(t, \lambda) \cdot s(t, \lambda) -$$

$$-s(\pi, \lambda)c^2(t, \lambda) \} \times [\lambda - p(t)] dt. \quad (1.1.3)$$

Теорема 1.1.3. Если для действительного λ выполняется неравенство $-2 < \Delta(\lambda) < 2$, то $\Delta'(\lambda) \neq 0$.

Следствие. Из теоремы 1.1.3 следует, что во внутренности полосы $-2 < \Delta(\lambda) < 2$ экстремальных значений не существует.

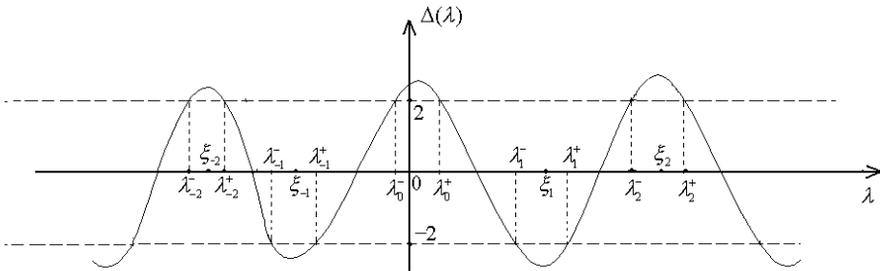
Теорема 1.1.4. Число λ является двукратным корнем уравнения $\Delta(\lambda) - 2 = 0$, ($\Delta(\lambda) + 2 = 0$), тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$\begin{aligned} s(\pi, \lambda) = 0, \quad c'(\pi, \lambda) = 0, \quad c(\pi, \lambda) = 1, \quad s'(\pi, \lambda) = 1, \\ (s(\pi, \lambda) = 0, \quad c'(\pi, \lambda) = 0, \quad c(\pi, \lambda) = -1, \quad s'(\pi, \lambda) = -1). \end{aligned}$$

Теорема 1.1.5. Если число λ является двукратным корнем уравнения $\Delta(\lambda) - 2 = 0$ ($\Delta(\lambda) + 2 = 0$), то $\Delta''(\lambda) < 0$ ($\Delta''(\lambda) > 0$). В частности в этой точке достигается локальный максимум (минимум).

Следствие. Кратность корней уравнений $\Delta(\lambda) + 2 = 0$, ($\Delta(\lambda) - 2 = 0$), не превышает двух.

Из вышеприведенных теорем и асимптотики функции $\Delta(\lambda)$ заключаем, что в общем случае график функции $\Delta(\lambda)$ имеет вид:



(рис.1)

Обозначим через ξ_n , $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ собственные значения задачи Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$

для уравнения (1.1.1). Эти числа совпадают с нулями функции $s(\pi, \lambda)$.

Очевидно, что

$$\dots < \lambda_{-1}^- \leq \lambda_{-1}^+ < \lambda_0^- < \lambda_0^+ < \lambda_1^- \leq \lambda_1^+ < \dots, \quad ,$$

$$\xi_n \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+], \quad n \in Z \setminus \{0\}.$$

Определение 1.1.1. Последовательность чисел

$$\dots < \lambda_{-1}^- \leq \lambda_{-1}^+ < \lambda_0^- < \lambda_0^+ < \lambda_1^- \leq \lambda_1^+ < \dots$$

и спектральные параметры

$$\xi_n \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+], \quad \sigma_n = \text{sign} \left(\frac{1}{s'(\pi, \xi_n)} - s'(\pi, \xi_n) \right) = \pm 1, \quad n \in Z \setminus \{0\}$$

называются спектральными данными уравнения (1.1.1).

Коэффициенты уравнения (1.1.1), т.е. π -периодические функции $p(x)$, $q(x)$ однозначно восстанавливаются по спектральным данным.

Рассмотрим уравнение

$$-y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y = \lambda^2 y, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.1.4)$$

где t действительный параметр. Обозначим через $c(x, \lambda, t)$ и $s(x, \lambda, t)$ решения уравнения (1.1.4) удовлетворяющие начальным условиям

$$c(0, \lambda, t) = 1, \quad c'(0, \lambda, t) = 0, \quad s(0, \lambda, t) = 0, \quad s'(0, \lambda, t) = 1. \quad (1.1.5)$$

Определение 1.1.2. Следующая матрица-функция

$$U(\lambda, t) = \begin{pmatrix} c(\pi, \lambda, t) & s(\pi, \lambda, t) \\ c'(\pi, \lambda, t) & s'(\pi, \lambda, t) \end{pmatrix} \quad (1.1.6)$$

называется матрицей монодромии уравнения (1.1.4).

Лемма 1.1.1. Для любого решения $y(x)$ уравнения

$$-y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad (1.1.7)$$

выполняется равенство

$$y(x + \pi) = y(\pi)c(x, \lambda) + y'(\pi)s(x, \lambda), \quad (1.1.8)$$

где $c(x, \lambda)$ и $s(x, \lambda)$ решения уравнения (1.1.7) удовлетворяющие начальным условиям

$$c(0, \lambda) = 1, \quad c'(0, \lambda) = 0, \quad s(0, \lambda) = 0, \quad s'(0, \lambda) = 1. \quad (1.1.9)$$

Доказательство. Из π -периодичности коэффициентов уравнения (1.1.7) следует, что $y(x + \pi)$ также является решением уравнения (1.1.7). Значит,

$$y(x + \pi) = C_1 \cdot c(x, \lambda) + C_2 \cdot s(x, \lambda). \quad (1.1.10)$$

Если в равенстве (1.1.10) положить $x = 0$, то получим $C_1 = y(\pi)$, положив $x = 0$ после дифференцирования полученного равенства получим $C_2 = y'(\pi)$. Подставляя найденные выражения в (1.1.10) выводим формулу (1.1.8).

Лемма 1.1.1 доказана.

Следствие. Если в качестве решения $y(x)$ уравнения (1.1.7) возьмем $c(x, \lambda)$ и $s(x, \lambda)$, то получим следующие формулы

$$c(x + \pi, \lambda) = c(\pi, \lambda)c(x, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s(x, \lambda), \quad (1.1.11)$$

$$s(x + \pi, \lambda) = s(\pi, \lambda)c(x, \lambda) + s'(\pi, \lambda)s(x, \lambda). \quad (1.1.12)$$

Лемма 1.1.2. Для решений $c(x, \lambda, t)$ и $s(x, \lambda, t)$ уравнения (1.1.7) справедливы представления

$$c(x, \lambda, t) = s'(t, \lambda)c(x + t, \lambda) - c'(t, \lambda)s(x + t, \lambda), \quad (1.1.13)$$

$$s(x, \lambda, t) = -s(t, \lambda)c(x + t, \lambda) + c(t, \lambda)s(x + t, \lambda). \quad (1.1.14)$$

Доказательство. Ясно, что $c(x + t, \lambda)$ и $s(x + t, \lambda)$ удовлетворяют уравнению (1.1.7) и линейно независимы. В силу этого

$$c(x, \lambda, t) = A_1 c(x + t, \lambda) + A_2 s(x + t, \lambda), \quad (1.1.15)$$

$$s(x, \lambda, t) = B_1 c(x + t, \lambda) + B_2 s(x + t, \lambda). \quad (1.1.16)$$

Неизвестные коэффициенты A_1, A_2 равенства (1.1.15) найдем пользуясь начальными условиями (1.1.9):

$$\begin{cases} A_1 c(t, \lambda) + A_2 s(t, \lambda) = 1 \\ A_1 c'(t, \lambda) + A_2 s'(t, \lambda) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} c & s \\ c' & s' \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & s(t, \lambda) \\ 0 & s'(t, \lambda) \end{vmatrix} = s'(t, \lambda), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c(t, \lambda) & 1 \\ c'(t, \lambda) & 0 \end{vmatrix} = -c'(t, \lambda),$$

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = s'(t, \lambda), \quad A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -c'(t, \lambda). \quad (1.1.17)$$

Аналогичным образом выводим, что

$$B_1 = -s(t, \lambda), \quad B_2 = c(t, \lambda). \quad (1.1.18)$$

Подставляя выражения (1.1.17) и (1.1.18) в равенства (1.1.15) и (1.1.16) получим формулы (1.1.13) и (1.1.14). **Лемма 1.1.2 доказана.**

Теорема 1.1.5. Имеет место следующее равенство:

$$\dot{U}(\lambda, t) = U(\lambda, t)\Omega(\lambda, t) - \Omega(\lambda, t)U(\lambda, t), \quad (1.1.19)$$

где

$$\Omega(\lambda, t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \lambda^2 - 2\lambda p(t) - q(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.20)$$

и $\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial t}$.

Доказательство. В силу леммы 1 и леммы 2 выполняются следующие тождества:

$$c(\pi, \lambda, t) = s'(t, \lambda)[c(\pi, \lambda)c(t, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s(t, \lambda)] - c'(t, \lambda)[s(\pi, \lambda)c(t, \lambda) + s'(\pi, \lambda)s(t, \lambda)], \quad (1.1.21)$$

$$c'(\pi, \lambda, t) = s'(t, \lambda)[c(\pi, \lambda)c'(t, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s'(t, \lambda)] - c'(t, \lambda)[s(\pi, \lambda)c'(t, \lambda) + s'(\pi, \lambda)s'(t, \lambda)], \quad (1.1.22)$$

$$s(\pi, \lambda, t) = -s(t, \lambda)[c(\pi, \lambda)c(t, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s(t, \lambda)] + c(t, \lambda)[s(\pi, \lambda)c(t, \lambda) + s'(\pi, \lambda)s(t, \lambda)], \quad (1.1.23)$$

$$s'(\pi, \lambda, t) = -s(t, \lambda)[c(\pi, \lambda)c'(t, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s'(t, \lambda)] + c(t, \lambda)[s(\pi, \lambda)c'(t, \lambda) + s'(\pi, \lambda)s'(t, \lambda)]. \quad (1.1.24)$$

Дифференцируя эти тождества по t и пользуясь равенствами

$$c''(t, \lambda) = [q(t) + 2\lambda p(t) - \lambda^2]c(t, \lambda), \quad (1.1.25)$$

$$s''(t, \lambda) = [q(t) + 2\lambda p(t) - \lambda^2]s(t, \lambda) \quad (1.1.26)$$

выводим, что

$$\begin{aligned} \dot{c}(\pi, \lambda, t) &= [q(t) + 2\lambda p(t) - \lambda^2]s(t, \lambda)[c(\pi, \lambda)c(t, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s(t, \lambda)] + \\ &\quad + s'(t, \lambda)[c(\pi, \lambda)c'(t, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s'(t, \lambda)] - \\ &\quad - [q(t) + 2\lambda p(t) - \lambda^2]c(t, \lambda)[s(\pi, \lambda)c(t, \lambda) + s'(\pi, \lambda)s(t, \lambda)] - \\ &\quad - c'(t, \lambda)[s(\pi, \lambda)c'(t, \lambda) + s'(\pi, \lambda)s'(t, \lambda)] = \\ &= [\lambda^2 - 2\lambda p(t) - q(t)]s(\pi, \lambda, t) + c'(\pi, \lambda, t), \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

$$\begin{aligned}
\dot{c}'(\pi, \lambda, t) &= [q(t) + 2\lambda p(t) - \lambda^2]s(t, \lambda)[c(\pi, \lambda)c'(t, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s'(t, \lambda)] + \\
&+ s'(t, \lambda)[q(t) + 2\lambda p(t) - \lambda^2][c(\pi, \lambda)c(t, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s(t, \lambda)] - \\
&- c(t, \lambda)[q(t) + 2\lambda p(t) - \lambda^2][s(\pi, \lambda)c'(t, \lambda) + s'(\pi, \lambda)s'(t, \lambda)] - \\
&- c'(t, \lambda)[q(t) + 2\lambda p(t) - \lambda^2][s(\pi, \lambda)c(t, \lambda) + s'(\pi, \lambda)s(t, \lambda)] = \\
&= [\lambda^2 - 2\lambda p(t) - q(t)]\{-s(t, \lambda)[c(\pi, \lambda)c'(t, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s'(t, \lambda)] + \\
&+ c(t, \lambda)[s(\pi, \lambda)c'(t, \lambda) + s'(\pi, \lambda)s'(t, \lambda)]\} - \\
&- [\lambda^2 - 2\lambda p(t) - q(t)]\{s'(t, \lambda)[c(\pi, \lambda)c(t, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s(t, \lambda)] - \\
&- c'(t, \lambda)[s(\pi, \lambda)c(t, \lambda) + s'(\pi, \lambda)s(t, \lambda)]\} = \\
&= [\lambda^2 - 2\lambda p(t) - q(t)]\{s'(\pi, \lambda, t) - c(\pi, \lambda, t)\}, \tag{1.1.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{s}(\pi, \lambda, t) &= -s'(t, \lambda)[c(\pi, \lambda)c(t, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s(t, \lambda)] - \\
&- s(t, \lambda)[c(\pi, \lambda)c'(t, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s'(t, \lambda)] + \\
&+ c'(t, \lambda) \times [s(\pi, \lambda)c(t, \lambda) + s'(\pi, \lambda)s(t, \lambda)] + \\
&+ c(t, \lambda) \times [s(\pi, \lambda)c'(t, \lambda) + s'(\pi, \lambda)s'(t, \lambda)] = -c(\pi, \lambda, t) + s'(\pi, \lambda, t), \tag{1.1.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{s}'(\pi, \lambda, t) &= -s'(t, \lambda)[c(\pi, \lambda)c'(t, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s'(t, \lambda)] - \\
&- s(t, \lambda)[q(t) + 2\lambda p(t) - \lambda^2][c(\pi, \lambda)c(t, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s(t, \lambda)] + \\
&+ c'(t, \lambda)[s(\pi, \lambda)c'(t, \lambda) + s'(\pi, \lambda)s'(t, \lambda)] + \\
&+ c(t, \lambda)[q(t) + 2\lambda p(t) - \lambda^2][s(\pi, \lambda)c(t, \lambda) + s'(\pi, \lambda)s(t, \lambda)] = \\
&= -c'(\pi, \lambda, t) - [\lambda^2 - 2\lambda p(t) - q(t)]s(\pi, \lambda, t). \tag{1.1.30}
\end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали следующие равенства:

$$\dot{c}(\pi, \lambda, t) = [\lambda^2 - 2\lambda p(t) - q(t)]s(\pi, \lambda, t) + c'(\pi, \lambda, t), \tag{1.1.31}$$

$$\dot{c}'(\pi, \lambda, t) = [\lambda^2 - 2\lambda p(t) - q(t)]\{s'(\pi, \lambda, t) - c(\pi, \lambda, t)\}, \tag{1.1.32}$$

$$\dot{s}(\pi, \lambda, t) = -c(\pi, \lambda, t) + s'(\pi, \lambda, t), \tag{1.1.33}$$

$$\dot{s}'(\pi, \lambda, t) = -c'(\pi, \lambda, t) - [\lambda^2 - 2\lambda p(t) - q(t)]s(\pi, \lambda, t). \tag{1.1.34}$$

Эти равенства можно записать как одно матричное равенство, при этом получится тождество (1.1.19). **Теорема 1.1.5 доказана.**

Теорема 1.1.6. Функция Ляпунова $\Delta(\lambda, t)$ дифференциального уравнения (1.1.4) не зависит от t .

Доказательство. По определению функция Ляпунова уравнения (1.1.4) дается формулой $\Delta(\lambda, t) = s'(\pi, \lambda, t) + c(\pi, \lambda, t)$. Из (1.1.31) и (1.1.34) получим

$$\frac{d\Delta(\lambda, t)}{dt} = s'(\pi, \lambda, t) + \dot{c}(\pi, \lambda, t) = 0.$$

Значит, $\Delta(\lambda, t) \equiv \Delta(\lambda, 0) = \Delta(\lambda)$.

Следствие. Спектр задачи (1.1.4) не зависит от t , так как он совпадает с множеством $E = \{\lambda \in R^1 : -2 \leq \Delta(\lambda) \leq 2\}$.

Следствие. Собственные значения периодической и анти-периодической задачи для уравнения (1.1.4) не зависят от t .

Обозначим через $\xi_n(t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ собственные значения задачи Дирихле

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

для уравнения (1.1.4). Справедливы следующие оценки

$$\lambda_n^- \leq \xi_n(t) \leq \lambda_n^+, \quad n \in Z \setminus \{0\}. \quad (1.1.35)$$

Теорема 1.1.7. Выполняются следующие асимптотические формулы (см. [15]):

$$\lambda_n^-, \lambda_n^+ = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{\varepsilon_n^\pm}{n}, \quad (1.1.36)$$

$$\xi_n = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{\gamma_n^\pm}{n}, \quad (1.1.37)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[|\varepsilon_n^\pm|^2 + |\gamma_n^\pm|^2 \right] < \infty,$$

где

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx, \quad c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [q(x) + p^2(x)] dx. \quad (1.1.38)$$

Теорема 1.1.8. Выполняется следующее тождество

$$2\xi_n \int_0^\pi s^2(x, \xi_n) dx = s'(x, \xi_n) \frac{\partial s(x, \xi_n)}{\partial \lambda} + 2 \int_0^\pi p(x) s^2(x, \xi_n) dx. \quad (1.1.39)$$

Теорема 1.1.9. Справедливы следующие разложения (см. [15])

$$s(\pi, \lambda) = \pi \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{k}, \quad (1.1.40)$$

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = -4\pi^2 (\lambda - \lambda_0^-)(\lambda - \lambda_0^+) \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_k^-)(\lambda - \lambda_k^+)}{k^2}. \quad (1.1.41)$$

§ 1. 2. Решения Флоке и их свойства.

Теорема 1.2.1. (Флоке). 1) при $\Delta^2(\lambda) - 4 \neq 0$, уравнение (1.1.1) имеет два линейно независимых решения вида

$$\psi_-(x, \lambda) = \rho_-^{\frac{x}{\pi}} p_-(x), \quad \psi_+(x, \lambda) = \rho_+^{\frac{x}{\pi}} p_+(x), \quad (1.2.1)$$

где функции $p_-(x)$, $p_+(x)$ имеют период π и

$$\rho_{\pm}(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda) \pm \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2}; \quad (1.2.2)$$

2) при $\Delta(\lambda) = 2$, уравнение (1.1.1) имеет решение с периодом π ;

3) при $\Delta(\lambda) = -2$, уравнение (1.1.1) имеет решение с антипериодом π .

Здесь корень понимается в аналитическом смысле, и берется та ветвь, для которой выполняется асимптотика

$$\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4} - 2i \sin \lambda \pi \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow i\infty.$$

При этом получается функция аналитическая в области $C \setminus E$. Где E часть действительной прямой для которой выполняется неравенство $|\Delta(\lambda)| \leq 2$. На каждом отрезке множества E эта функция разрывна.

Решения $\psi_-(x, \lambda)$ и $\psi_+(x, \lambda)$ называются решениями Флоке.

Теорема 1.2.2. а) если $|\Delta(\lambda)| > 2$, то $|\rho_-(\lambda)| > 1$, $|\rho_+(\lambda)| < 1$;

б) если $|\Delta(\lambda)| \leq 2$, то $|\rho_-(\lambda)| = |\rho_+(\lambda)| = 1$.

Теорема 1.2.3. Решения Флоке пропорциональны решениям Вейля, а функции Вейля-Титчмарша задаются следующими формулами:

$$m_{\pm}(\lambda) = \frac{s'(\pi, \lambda) - c(\pi, \lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi, \lambda)}. \quad (1.2.3)$$

Замечание. Решения Флоке имеют вид:

$$\psi_{\pm}(x, \lambda) = c(x, \lambda) + \frac{s'(\pi, \lambda) - c(\pi, \lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi, \lambda)} s(x, \lambda). \quad (1.2.4)$$

Из (1.2.4) следует, что

$$\psi_{-}(x, \lambda) = c(x, \lambda) + \frac{s'(\pi, \lambda) - c(\pi, \lambda)}{2s(\pi, \lambda)} s(x, \lambda) + \frac{\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi, \lambda)} s(x, \lambda), \quad (1.2.5)$$

$$\psi_{+}(x, \lambda) = c(x, \lambda) + \frac{s'(\pi, \lambda) - c(\pi, \lambda)}{2s(\pi, \lambda)} s(x, \lambda) - \frac{\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi, \lambda)} s(x, \lambda). \quad (1.2.6)$$

Теорема 1.2.4. Для любой действительной гладкой финитной функции $f(x)$ имеет место разложение

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{E_n} c(x, \lambda) F(\lambda) \frac{s(\pi, \lambda)}{(-1)^n \cdot \pi \cdot |4 - \Delta^2(\lambda)|^{1/2}} d\lambda + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{E_n} [c(x, \lambda) G(\lambda) + s(x, \lambda) F(\lambda)] \frac{s'(\pi, \lambda) - c(\pi, \lambda)}{(-1)^n \cdot 2\pi \cdot |4 - \Delta^2(\lambda)|^{1/2}} d\lambda + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{E_n} s(x, \lambda) G(\lambda) \frac{-c'(\pi, \lambda)}{(-1)^n \cdot \pi \cdot |4 - \Delta^2(\lambda)|^{1/2}} d\lambda. \end{aligned}$$

Здесь

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t, \lambda) f(t) dt, \quad G(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t, \lambda) f(t) dt. \quad (1.2.7)$$

Замечание. Спектр уравнения (1.1.1) непрерывен и состоит из последовательности сегментов

$$\dots, [\lambda_{-3}^+, \lambda_{-2}^-], [\lambda_{-2}^+, \lambda_{-1}^-], [\lambda_{-1}^+, \lambda_0^-], [\lambda_0^+, \lambda_1^-], [\lambda_1^+, \lambda_2^-], \dots$$

разделенных лакунами

$$\dots, (\lambda_{-2}^-, \lambda_{-2}^+), (\lambda_{-1}^-, \lambda_{-1}^+), (\lambda_0^-, \lambda_0^+), (\lambda_1^-, \lambda_1^+), (\lambda_2^-, \lambda_2^+), \dots$$

§ 1. 3. Вывод формул следов.

Рассмотрим уравнение

$$T(\lambda)y \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in R^1, \quad (1.3.1)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ действительные функции имеющие период π , а λ комплексный параметр. Справедливы следующие разложения (см. [15]):

$$4 - \Delta^2(\lambda) = 4\pi^2(\lambda - \lambda_0^-)(\lambda - \lambda_0^+) \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_k^-)(\lambda - \lambda_k^+)}{k^2}, \quad (1.3.2)$$

$$s(\pi, \lambda) = \pi \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{k}, \quad (1.3.3)$$

$$c'(\pi, \lambda) = -\pi(\lambda - \eta_0^-)(\lambda - \eta_0^+) \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\eta_k - \lambda}{k}. \quad (1.3.4)$$

Рассмотрим конечнозонный случай, это означает, что спектр задачи (1.3.1) имеет вид

$$E = R^1 \setminus \bigcup_{n=-m}^M (\lambda_n^-, \lambda_n^+).$$

Для удобства здесь введем новую нумерацию непустых лакун следующим образом

$$E = R^1 \setminus \bigcup_{k=0}^N (\lambda_k^-, \lambda_k^+), \quad (1.3.5)$$

где $(\lambda_{n_0}^-, \lambda_{n_0}^+)$ лакуна содержащая точку $\lambda = 0$, т.е. тривиальная лакуна.

В конечнозонном случае $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$ имеет только конечное число простых (некратных) корней.

Из разложений (1.3.2)-(1.3.4) и тождеств

$$c(\pi, \lambda)s'(\pi, \lambda) - c'(\pi, \lambda)s(\pi, \lambda) = 1, \quad (1.3.6)$$

$$[c(\pi, \lambda) - s'(\pi, \lambda)]^2 + 4c'(\pi, \lambda)s(\pi, \lambda) = \Delta^2(\lambda) - 4 \quad (1.3.7)$$

в конечнозонном случае выводим равенства

$$4 - \Delta^2(\lambda) = 4d^2(\lambda)R(\lambda), \quad (1.3.8)$$

$$s(\pi, \lambda) = d(\lambda)P(\lambda), \quad (1.3.9)$$

$$c'(\pi, \lambda) = -d(\lambda)S(\lambda), \quad (1.3.10)$$

$$c(\pi, \lambda) - s'(\pi, \lambda) = 2d(\lambda)Q(\lambda), \quad (1.3.11)$$

где

$$R(\lambda) = \prod_{k=0}^N (\lambda - \lambda_k^-)(\lambda - \lambda_k^+), \quad (1.3.12)$$

$$P(\lambda) = \prod_{n_0 \neq k=0}^N (\lambda - \xi_k), \quad (1.3.13)$$

$$S(\lambda) = (\lambda - \eta_{n_0}^-)(\lambda - \eta_{n_0}^+) \prod_{n_0 \neq k=0}^N (\lambda - \eta_k), \quad (1.3.14)$$

$Q(\lambda)$ - некоторый полином степени $\leq N - 2$. $d(\lambda)$ - целая функция, которая определяется только по кратным корням уравнения $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$.

Из равенства

$$-4c'(\pi, \lambda)s(\pi, \lambda) - [c(\pi, \lambda) - s'(\pi, \lambda)]^2 = 4 - \Delta^2(\lambda)$$

легко следует, что

$$P(\lambda)S(\lambda) - Q^2(\lambda) = R(\lambda). \quad (1.3.15)$$

Из результатов §2 известно, что в конечнозонном случае, следующая задача также является конечнозонной

$$-y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in R^1. \quad (1.3.16)$$

Для уравнения (1.3.16) равенства (1.3.8)-(1.3.15) примут вид:

$$s(\pi, \lambda, t) = d(\lambda)P(\lambda, t), \quad (1.3.17)$$

$$c'(\pi, \lambda, t) = -d(\lambda)S(\lambda, t), \quad (1.3.18)$$

$$c(\pi, \lambda, t) - s'(\pi, \lambda, t) = 2d(\lambda)Q(\lambda, t), \quad (1.3.19)$$

$$P(\lambda, t)S(\lambda, t) - Q^2(\lambda, t) = R(\lambda), \quad (1.3.20)$$

где

$$P(\lambda, t) = \prod_{n_0 \neq k=0}^N (\lambda - \xi_k(t)), \quad (1.3.21)$$

$$S(\lambda, t) = (\lambda - \eta_{n_0}^-(t))(\lambda - \eta_{n_0}^+(t)) \prod_{n_0 \neq k=0}^N (\lambda - \eta_k(t)), \quad (1.3.22)$$

$Q(\lambda, t)$ - некоторый полином степени $\leq N - 2$.

Теорема 1.3.1. Выполняются следующие равенства

$$\dot{S}(\lambda, t) = 2[\lambda^2 - 2\lambda p(t) - q(t)]Q(\lambda, t), \quad (1.3.23)$$

$$\dot{P}(\lambda, t) = -2Q(\lambda, t), \quad (1.3.24)$$

$$\dot{Q}(\lambda, t) = [\lambda^2 - 2\lambda p(t) - q(t)]P(\lambda, t) - S(\lambda, t). \quad (1.3.25)$$

Доказательство. Подставляя выражения (1.3.17)-(1.3.20) в тождества (1.1.31)-(1.1.33) выводим формулы (1.3.23)-(1.3.25).

Теорема 1.3.1 доказана.

Теорема 1.3.2. Справедливы следующие тождества:

$$p(t) = \frac{\lambda_{n_0}^- + \lambda_{n_0}^+}{2} + \sum_{n_0 \neq k=0}^N \left(\frac{\lambda_k^- + \lambda_k^+}{2} - \xi_k(t) \right), \quad (1.3.26)$$

$$q(t) + 2p^2(t) = \frac{(\lambda_{n_0}^-)^2 + (\lambda_{n_0}^+)^2}{2} + \sum_{n_0 \neq k=0}^N \left(\frac{(\lambda_k^-)^2 + (\lambda_k^+)^2}{2} - \xi_k^2(t) \right). \quad (1.3.27)$$

Доказательство. Приравнивая коэффициенты при λ^{2N+1} , λ^{2N} и λ^{N+1} , λ^N соответственно в равенствах

$$P(\lambda, t)S(\lambda, t) - Q^2(\lambda, t) = R(\lambda), \quad (1.3.28)$$

$$\dot{Q}(\lambda, t) = [\lambda^2 - 2\lambda p(t) - q(t)]P(\lambda, t) - S(\lambda, t) \quad (1.3.29)$$

выводим четыре тождества. Из полученных тождеств вытекают формулы (1.3.26)-(1.3.27). Ниже осуществим эту идею. Введем обозначения

$$P(\lambda, t) = \lambda^N + p_1 \lambda^{N-1} + p_2 \lambda^{N-2} + \dots, \quad (1.3.30)$$

$$S(\lambda, t) = \lambda^{N+2} + s_1 \lambda^{N+1} + s_2 \lambda^N + \dots, \quad (1.3.31)$$

$$Q(\lambda, t) = q_0 \lambda^{N-2} + q_1 \lambda^{N-3} + \dots, \quad (1.3.32)$$

$$R(\lambda) = \lambda^{2N+2} + r_1 \lambda^{2N+1} + r_2 \lambda^{2N} + \dots. \quad (1.3.33)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
P(\lambda, t)S(\lambda, t) &= [\lambda^N + p_1\lambda^{N-1} + p_2\lambda^{N-2} + \dots] \times \\
&\times [\lambda^{N+2} + s_1\lambda^{N+1} + s_2\lambda^N + \dots] = \lambda^{2N+2} + s_1\lambda^{2N+1} + \\
&+ s_2\lambda^{2N} + p_1\lambda^{2N+1} + s_1p_1\lambda^{2N} + p_2\lambda^{2N} + \dots = \\
&= \lambda^{2N+2} + (p_1 + s_1)\lambda^{2N+1} + (p_2 + s_2 + s_1p_1)\lambda^{2N} + \dots, \quad (1.3.34)
\end{aligned}$$

$$Q^2(\lambda, t) = [q_0\lambda^{N-2} + q_1\lambda^{N-3} + \dots]^2 = q_0^2\lambda^{2N-4} + \dots \quad (1.3.35)$$

Подставляя выражения (1.3.34)-(1.3.35) в (1.3.28) приравниваем коэффициенты при $\lambda^{2N+1}, \lambda^{2N}$:

$$p_1 + s_1 = r_1, \quad (1.3.36)$$

$$p_2 + s_2 + s_1p_1 = r_2. \quad (1.3.37)$$

Умножаем многочлены

$$\begin{aligned}
[\lambda^2 - 2\lambda p(t) - q(t)]P(\lambda, t) &= [\lambda^2 - 2\lambda p(t) - q(t)] \times \\
&\times [\lambda^N + p_1\lambda^{N-1} + p_2\lambda^{N-2} + \dots] = \lambda^{N+2} + p_1\lambda^{N+1} + p_2\lambda^N - \\
&- 2p(t)\lambda^{N+1} - 2p_1p(t)\lambda^N - q(t)\lambda^N + \dots = \\
&= \lambda^{N+2} + [p_1 - 2p(t)]\lambda^{N+1} + [p_2 - 2p_1p(t) - q(t)]\lambda^N + \dots \quad (1.3.38)
\end{aligned}$$

и подставим результат в тождество (1.3.29). Приравнивая коэффициенты при λ^{N+1}, λ^N в полученном равенстве получим

$$p_1 - 2p(t) - s_1 = 0, \quad (1.3.39)$$

$$p_2 - 2p_1p(t) - q(t) - s_2 = 0. \quad (1.3.40)$$

Из (1.3.36) находим что $s_1 = r_1 - p_1$, следовательно согласно (1.3.37) и (1.3.39) получим:

$$p_2 + s_2 + (r_1 - p_1)p_1 = r_2, \quad (1.3.41)$$

$$p_1 - 2p(t) - r_1 + p_1 = 0. \quad (1.3.42)$$

Таким образом

$$p(t) = p_1 - \frac{1}{2}r_1 \quad (1.3.43)$$

и

$$s_2 = r_2 - p_2 - r_1p_1 + p_1^2. \quad (1.3.44)$$

Подставляя (1.3.44) в (1.3.40) получим

$$p_2 - 2p_1 p(t) - q(t) - r_2 + p_2 + r_1 p_1 - p_1^2 = 0. \quad (1.3.45)$$

Подставляя $p_1 = p(t) + \frac{1}{2}r_1$ в (1.3.45) находим

$$2p_2 - p_1^2 - q(t) - 2p^2(t) - p(t)r_1 - r_2 + r_1 p(t) + \frac{1}{2}r_1^2 = 0,$$

$$q(t) + 2p^2(t) = \frac{1}{2}r_1^2 - r_2 + 2p_2 - p_1^2. \quad (1.3.46)$$

В силу теоремы Виета

$$p_1 = -\sum_{\substack{k=0, \\ k \neq n_0}}^N \xi_k(t), \quad (1.3.47)$$

$$p_2 = \sum_{\substack{0 \leq k < m \leq N \\ k \neq n_0, m \neq n_0}} \xi_k(t) \xi_m(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{n_0 \neq k=0}}^N \xi_k(t) \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{n_0 \neq k=0}^N \xi_k^2(t), \quad (1.3.48)$$

$$r_1 = -\sum_{k=0}^N (\lambda_k^+ + \lambda_k^-), \quad (1.3.49)$$

$$r_2 = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^N (\lambda_k^+ + \lambda_k^-) \right]^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [(\lambda_k^+)^2 + (\lambda_k^-)^2]. \quad (1.3.50)$$

Используя (1.3.47)-(1.3.50) и (1.3.43), (1.3.46) выводим формулы (1.3.26), (1.3.27). **Теорема 1.3.2 доказана.**

Замечание. В общем периодическом случае справедливы следующие формулы (см. [17]):

$$p(t) = \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} + \sum_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^-}{2} - \xi_k(t) \right), \quad (1.3.51)$$

$$q(t) + 2p^2(t) = \frac{(\lambda_0^+)^2 + (\lambda_0^-)^2}{2} + \sum_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{(\lambda_k^+)^2 + (\lambda_k^-)^2}{2} - \xi_k^2(t) \right). \quad (1.3.52)$$

Замечание. Формулы (1.3.51) и (1.3.52) используются в §3 второй главы, а формулы (1.3.26) и (1.3.27) в §3 третьей главы.

ГЛАВА 2.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА УРАВНЕНИЙ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ

§ 2.1. Вывод системы уравнений Дубровина-Трубовица для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на всей прямой.

В настоящем параграфе выводится аналог системы уравнений Дубровина-Трубовица в случае квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.

Рассмотрим уравнение

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y = \lambda^2 y, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.1.1)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ действительные функции имеющие период π , а λ комплексный параметр.

Замечание. Во всех параграфах этой главы будем считать, что действительные функции $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям а) и б) из §1.1., гл. 1.

Введём решения $c(x, \lambda)$ и $s(x, \lambda)$ уравнения (2.1.1) удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{cases} c(0, \lambda) = 1 \\ c'(0, \lambda) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} s(0, \lambda) = 0 \\ s'(0, \lambda) = 1. \end{cases}$$

Обозначим через ξ_n , $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, собственные значения задачи Дирихле

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (2.1.2)$$

для уравнения (2.1.1).

Теорема 2.1.1. Если $u(x) = q(x) - ip(x) \in C^1(\mathbb{R}^1)$ π -периодический потенциал уравнения (2.1.1), имеющий спектр

$$E = R^1 \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n^-, \lambda_n^+), \quad (2.1.3)$$

и спектральные параметры $\xi_n \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+]$, $\sigma_n = \pm 1$, $n \in Z \setminus \{0\}$, то для любого действительного параметра $t \in R^1$, уравнение

$$-y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in R^1, \quad (2.1.4)$$

имеет тот же спектр E , и спектральные параметры

$$\xi_n(t) \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+], \quad \sigma_n(t) = \pm 1, \quad n \in Z \setminus \{0\},$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_n(t)}{dt} = & -2\sigma_n(t) \sqrt{(\xi_n(t) - \lambda_n^-)(\lambda_n^+ - \xi_n(t))} \times \\ & \times \sqrt{(\xi_n(t) - \lambda_0^-)(\xi_n(t) - \lambda_0^+) \prod_{k \neq n, 0} \frac{(\xi_n(t) - \lambda_k^-)(\xi_n(t) - \lambda_k^+)}{(\xi_n(t) - \xi_k(t))^2}}, \quad n \in Z \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

а также начальным условиям

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n(0) = \xi_n, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n(0) = \sigma_n, \quad n \in Z \setminus \{0\},$$

где корни понимаются в арифметическом смысле и знак $\sigma_n(t)$ изменяется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами лакуны $[\lambda_n^-, \lambda_n^+]$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$-y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < \pi, \quad (2.1.6)$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (2.1.7)$$

Пусть $\xi_n(t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ собственные значения граничной задачи (2.1.6)+(2.1.7) соответствующие нормированным собственным функциям $y_n(x, t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$. Тогда дифференцируя по t равенство

$$-(y_n'', y_n) + (q(x+t)y_n, y_n) + 2\xi_n(t)(p(x+t)y_n, y_n) - \xi_n^2(t) = 0$$

имеем

$$-(\dot{y}_n'', y_n) - (y_n'', \dot{y}_n) + (q'(x+t)y_n + q(x+t)\dot{y}_n, y_n) + (q(x+t)y_n, \dot{y}_n) +$$

$$+ 2\dot{\xi}_n(t)(p(x+t)y_n, y_n) + 2\xi_n(t)(p'(x+t)y_n + p(x+t)\dot{y}_n, y_n) + \\ + 2\xi_n(t)(p(x+t)y_n, \dot{y}_n) - 2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t) = 0.$$

Здесь $\dot{\vartheta} \equiv \frac{d\vartheta}{dt}$, $\vartheta' \equiv \frac{d\vartheta}{dx}$ и (\cdot, \cdot) скалярное произведение пространства $L_2(0, \pi)$.

Из последнего равенства находим

$$(-\dot{y}_n'' + q(x+t)\dot{y}_n + 2\xi_n(t)p(x+t)\dot{y}_n, y_n) + \\ + (q'(x+t)y_n + 2\xi_n(t)p'(x+t)y_n + 2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)y_n, y_n) - 2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t) = 0, \\ 2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t) = ([q'(x+t) + 2\xi_n(t)p'(x+t) + 2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)]y_n, y_n),$$

т.е.

$$2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t) = \int_0^\pi [q'(x+t) + 2\xi_n(t)p'(x+t) + 2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)]y_n^2(x, t)dx. \quad (2.1.8)$$

Интегрируя по частям в равенстве (2.1.8) и учитывая граничные условия (2.1.7) имеем

$$2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t) = -2\int_0^\pi \{q(x+t)y_n(x, t) + 2\xi_n(t)p(x+t)y_n(x, t)\}y_n'(x, t)dx + \\ + 2\dot{\xi}_n(t)\int_0^\pi p(x+t)y_n^2(x, t)dx. \quad (2.1.9)$$

Пользуясь уравнением (2.1.6) и граничными условиями (2.1.7) получим

$$2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t) = y_n'^2(0, t) - y_n'^2(\pi, t) + 2\dot{\xi}_n(t)\int_0^\pi p(x+t)y_n^2(x, t)dx. \quad (2.1.10)$$

Обозначим через $c(x, t, \lambda)$ и $s(x, t, \lambda)$ решения уравнения (2.1.6) удовлетворяющие начальным условиям

$$c(0, t, \lambda) = 1, c'(0, t, \lambda) = 0, s(0, t, \lambda) = 0, s'(0, t, \lambda) = 1.$$

Учитывая равенство

$$y_n(x, t) = \frac{1}{c_n(t)} s(x, t, \xi_n(t)),$$

преобразуем тождество (2.1.10):

$$2\xi_n(t)c_n^2(t)\dot{\xi}_n(t) = 1 - s'^2(\pi, t, \xi_n(t)) + 2\dot{\xi}_n(t)\int_0^\pi p(x+t)s^2(\pi, t, \xi_n(t))dx.$$

А теперь воспользуемся следующим тождеством

$$2\xi_n \int_0^\pi s^2(x, \xi_n) dx = s'(\pi, \xi_n) \frac{\partial s(\pi, \xi_n)}{\partial \lambda} + 2 \int_0^\pi p(x) s^2(x, \xi_n) dx.$$

Тогда

$$\dot{\xi}_n(t) = \frac{\frac{1}{s'(\pi, t, \xi_n(t))} - s'(\pi, t, \xi_n(t))}{\frac{\partial s(\pi, t, \xi_n(t))}{\partial \lambda}}. \quad (2.1.11)$$

По определению функции Ляпунова

$$\Delta(\lambda) = c(\pi, t, \lambda) + s'(\pi, t, \lambda). \quad (2.1.12)$$

Из постоянства Вронскиана решений $c(x, t, \lambda)$, $s(x, t, \lambda)$ получим:

$$c(x, t, \lambda) s'(x, t, \lambda) - c'(x, t, \lambda) s(x, t, \lambda) = 1. \quad (2.1.13)$$

В силу того, что $s(\pi, t, \lambda) = 0$ является характеристическим уравнением для граничной задачи (2.1.6) + (2.1.7) имеем:

$$s(\pi, t, \xi_n(t)) \equiv 0. \quad (2.1.14)$$

Из (2.1.13) и (2.1.14) находим:

$$c(\pi, t, \xi_n(t)) = \frac{1}{s'(\pi, t, \xi_n(t))}. \quad (2.1.15)$$

Подстановкой (2.1.15) в (2.1.12) получается тождество:

$$\Delta(\xi_n(t)) \equiv s'(\pi, t, \xi_n(t)) + \frac{1}{s'(\pi, t, \xi_n(t))}. \quad (2.1.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_n(t) &= \frac{1}{\frac{\partial s(\pi, t, \xi_n(t))}{\partial \lambda}} \cdot \sigma_n(t) \sqrt{\left(\frac{1}{s'(\pi, t, \xi_n(t))} + s'(\pi, t, \xi_n(t)) \right)^2 - 4} = \\ &= \frac{1}{\frac{\partial s(\pi, t, \xi_n(t))}{\partial \lambda}} \cdot \sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}, \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

здесь

$$\sigma_n(t) = \text{sign} \left(\frac{1}{s'(\pi, t, \xi_n(t))} - s'(\pi, t, \xi_n(t)) \right).$$

Дифференцируя равенство (см. [15])

$$s(\pi, t, \lambda) = \pi \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \lambda}{k}$$

по λ в точке $\lambda = \xi_n(t)$ находим:

$$\frac{\partial s(\pi, t, \xi_n)}{\partial \lambda} = -\frac{\pi}{n} \prod_{k \neq n, 0} \frac{\xi_k(t) - \xi_n(t)}{k}. \quad (2.1.19)$$

Подставляя (2.1.20) в тождество (2.1.19) имеем

$$\frac{d\xi_n(t)}{dt} = \frac{\sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{-\frac{\pi}{n} \prod_{k \neq n, 0} \frac{\xi_k(t) - \xi_n(t)}{k}}.$$

Из разложения (см. [15])

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = -4\pi^2 (\lambda - \lambda_0^-)(\lambda - \lambda_0^+) \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_k^-)(\lambda - \lambda_k^+)}{k^2}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_n(t)}{dt} &= -2\sigma_n(t) \sqrt{(\xi_n(t) - \lambda_n^-)(\lambda_n^+ - \xi_n(t))} \times \\ &\times \sqrt{(\xi_n(t) - \lambda_0^-)(\xi_n(t) - \lambda_0^+) \prod_{k \neq n, 0} \frac{(\xi_n(t) - \lambda_k^-)(\xi_n(t) - \lambda_k^+)}{(\xi_n(t) - \xi_k(t))^2}}, \quad n \in Z \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

В уравнениях (2.1.20) все корни понимаются в арифметическом смысле. Знак $\sigma_n(t)$ изменяется на обратный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами лакуны $[\lambda_n^-, \lambda_n^+]$.

Выполнения начальных условий очевидно.

Из того, что функция Ляпунова уравнения (2.1.6) не зависит от t следует независимость спектра уравнения (2.1.4) на всей прямой от параметра t .

Теорема 2.1.1 доказана.

**§ 2. 2. Исследование задачи Коши для системы уравнений
Дубровина-Трубовица.**

В этом параграфе доказывается разрешимость системы уравнений Дубровина-Трубовица.

В целях дальнейшего упрощения системы уравнений Дубровина-Трубовица (2.1.20) сделаем замену переменных

$$\xi_n(t) = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin^2 x_n(t), \quad n \in Z \setminus \{0\}. \quad (2.2.1)$$

Тогда она примет вид

$$\frac{dx_n}{dt} = -\sigma_n(0) h_n(\dots, \xi_{-1}, \xi_1, \dots), \quad n \in Z \setminus \{0\}, \quad (2.2.2)$$

где

$$h_n = \sqrt{(\xi_n - \lambda_0^-)(\xi_n - \lambda_0^+) \prod_{k \neq n, 0} \frac{(\xi_n - \lambda_k^-)(\xi_n - \lambda_k^+)}{(\xi_n - \xi_k)^2}}. \quad (2.2.3)$$

Начальные условия возьмём в виде

$$x_n(0) = \arcsin \sqrt{\frac{\xi_n(0) - \lambda_n^-}{\lambda_n^+ - \lambda_n^-}}, \quad n \in Z \setminus \{0\}. \quad (2.2.4)$$

Окончательно (2.2.2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{dx_n}{dt} = H_n(\dots, x_{-1}, x_1, \dots), \quad n \in Z \setminus \{0\}, \quad (2.2.5)$$

где

$$H_n(x) = -\sigma_n(0) h_n(\xi) \quad (2.2.6)$$

и

$$\xi_n = \xi_n(t) = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin^2 x_n(t), \quad n \in Z \setminus \{0\}. \quad (2.2.7)$$

Для изучения задачи Коши (2.2.5), (2.2.6), (2.2.7) введём действительное банахово пространство

$$K = \left\{ x = (\dots, x_{-1}, x_1, \dots) : \|x\| = \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) |x_n| < \infty \right\} \quad (2.2.8)$$

и обозначим $H = (\dots, H_{-1}, H_1, \dots)$.

Напишем систему Дубровина-Грубовица в виде одного уравнения в банаховом пространстве K :

$$\frac{dx}{dt} = H(x). \quad (2.2.9)$$

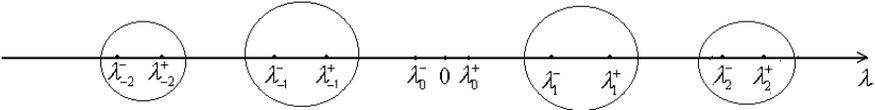
Известно, что (см. [45]), для того чтобы задача Коши $y' = F(y)$, $y(0) = y_0$ в банаховом пространстве K имела единственное решение достаточно выполнения условия Липшица, т.е. при всех $x, y \in K$

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \text{const} \cdot \|x - y\|.$$

Докажем, что $H(x)$ удовлетворяет условию Липшица в пространстве K .

Введём множество $D = \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} D_k$, где $D_k, k \in Z \setminus \{0\}$ непересекающиеся открытые круги (см. рис. 2). Круг D_k находится в λ -плоскости, содержит замкнутую лауну $[\lambda_k^-, \lambda_k^+]$, центр его находится в точке $\frac{\lambda_k^- + \lambda_k^+}{2}$ и радиусы r_k для достаточно больших $|k|$ определяются по формулам $r_k = \frac{\lambda_k^+ - \lambda_k^-}{2} + \frac{1}{k^2}$.

(Рис. 2)



Лемма 2.2.1. Пусть $\xi \in D$. Тогда выполняются оценки

$$h_n = \underline{O}(n), \quad n \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial h_n}{\partial \xi_k} = \underline{O}(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. На множестве D выполняются следующие оценки:

$$|h_n|^2 = |\xi_n - \lambda_0^-| \cdot |\xi_n - \lambda_0^+| \cdot \prod_{k \neq n, 0} \left| \frac{\xi_n - \lambda_k^-}{\xi_n - \xi_k} \right| \cdot \left| \frac{\xi_n - \lambda_k^+}{\xi_n - \xi_k} \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq (n+c)^2 \cdot \prod_{k \neq n, 0} \left(\left| 1 + \frac{\xi_k - \lambda_k^-}{\xi_n - \xi_k} \right| \left| 1 + \frac{\xi_k - \lambda_k^+}{\xi_n - \xi_k} \right| \right) \leq \\
&\leq (n+c)^2 \cdot \prod_{k \neq n, 0} \left| 1 + \frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^- - 2\xi_k}{\xi_k - \xi_n} + \frac{(\xi_k - \lambda_k^-)(\xi_k - \lambda_k^+)}{(\xi_n - \xi_k)^2} \right| \leq \\
&\leq (n+c)^2 \cdot \exp \left\{ \sum_{k \neq n, 0} \left| 1 + \frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^- - 2\xi_k}{\xi_k - \xi_n} \right| + \sum_{k \neq n, 0} \left| \frac{(\xi_k - \lambda_k^-)(\xi_k - \lambda_k^+)}{(\xi_n - \xi_k)^2} \right| \right\} \quad (2.2.10)
\end{aligned}$$

Используя асимптотику для λ_k^- и λ_k^+ , а также структуру D_k в (2.2.10) приходим к оценке $h_n = \underline{O}(n)$, $n \rightarrow \infty$.

Из интегральной формулы Коши имеем

$$\frac{\partial h_n}{\partial \xi_k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_n} \frac{h_n(\dots, \xi_{k-1}, s, \xi_{k+1}, \dots)}{(s - \xi_k)^2} ds,$$

отсюда следует, что $\frac{\partial h_n}{\partial \xi_k} = \underline{O}(1)$, $n \rightarrow \infty$. **Лемма 2.2.1 доказана.**

Если $x, y \in K$, то $\xi, \eta \in D$, где

$$\begin{aligned}
\xi &= (\dots, \xi_{-1}, \xi_1, \dots), & \eta &= (\dots, \eta_{-1}, \eta_1, \dots), \\
\xi_n &= \lambda_n + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin^2 x_n, & \eta_n &= \lambda_n + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin^2 y_n.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
|h_n(\xi) - h_n(\eta)| &\leq \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial h_n(\theta)}{\partial \xi_k} \right| \cdot |\xi_k - \eta_k| \leq \\
&\leq \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \left[c \cdot |\lambda_k^+ - \lambda_k^-| \times |\sin^2 x_k - \sin^2 y_k| \right] \leq \\
&\leq c \cdot \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} (\lambda_k^+ - \lambda_k^-) \cdot |x_k - y_k| = c \cdot \|x - y\|
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\|H(x) - H(y)\| &= \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) |H_n(x) - H_n(y)| = \\
&= \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) |h_n(\xi) - h_n(\eta)| \leq c_1 \cdot \|x - y\| \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} \frac{(\varepsilon_n^+ - \varepsilon_n^-)}{n} \leq \text{const} \cdot \|x - y\|,
\end{aligned}$$

т.е. условие Липшица выполняется.

Таким образом, бесконечная система уравнений (2.2.5) имеет единственное решение при любых начальных данных, и решение существует для всех $t \in R^1$.

§ 2. 3. Связь длины лакун с аналитичностью коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$.

В этом параграфе при помощи системы уравнений Дубровина-Трубовица изучается связь длины лакун с аналитичностью коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ уравнения

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y = \lambda^2 y, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.3.1)$$

Теорема 2.3.1. Если $p(x)$, $q(x)$ π -периодические действительные функции из класса $C^2(-\infty, \infty)$ и длины лакун $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$ экспоненциально убывают, т.е. если существуют постоянные числа $a > 0, b > 0$ для которых $\lambda_n^+ - \lambda_n^- < ae^{-b|n|}$, при любых целых n , то $p(x)$ и $q(x)$ являются действительными аналитическими функциями на всей прямой.

Доказательство. По условию теоремы $\lambda_n^+ - \lambda_n^- < ae^{-b|n|}$, ($a > 0, b > 0$).

Положим

$$\xi_n = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin^2 z_n,$$

где $z_n = x_n + iy_n$, $n \in Z \setminus \{0\}$.

Покажем, что при $|y_n| \leq \frac{b}{4}|n|$ значение ξ_n находится в круге D_n .

Действительно:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda_n^- + \lambda_n^+}{2} - \xi_n \right| &= \left| \frac{\lambda_n^+ - \lambda_n^-}{2} - (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin^2 z_n \right| = \\ &= (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \times \frac{1}{2} |\cos 2z_n| \leq ae^{-b|n|} \times \frac{1}{2} e^{2|y_n|} \leq \frac{a}{2} e^{\frac{b}{2}|n|} < r_n. \end{aligned}$$

Рассмотрим множество F комплексных последовательностей $z = (\dots, z_{-1}, z_1, \dots)$ с действительной частью $x = (\dots, x_{-1}, x_1, \dots)$ из пространства K и мнимой частью $|y_n| \leq \frac{b}{4}|n|$, $n \in Z \setminus \{0\}$.

Используя лемму 2.2.1 можно показать, что для $H(z)$ на множестве F выполняется условие Липшица.

Исследуем последовательность вектор-функций

$$z_n^{(0)}(t) = x_n(0) = \arcsin \sqrt{\frac{\xi_n(0) - \lambda_n^-}{\lambda_n^+ - \lambda_n^-}}, \quad n \in Z \setminus \{0\},$$

$$z_n^{(m+1)}(t) = x_n(0) + \int_0^t H_n(\dots, z_{-1}^{(m)}(s), z_1^{(m)}(s), \dots) ds, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где t комплексный аргумент. Из неравенства

$$|y_n^{(m+1)}(t)| \leq \left| \int_0^t H_n(\dots, z_{-1}^{(m)}(s), z_1^{(m)}(s), \dots) ds \right| \leq c \cdot |t| \cdot |n|,$$

при $|t| \leq \frac{b}{4c}$ получим оценки

$$|y_n^{(m)}(t)| \leq \frac{b}{4}|n|, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Значит, для $|t| \leq \frac{b}{4c}$ последовательность вектор-функций $z^{(m)}(t)$ принадлежит F . Используя условие Липшица можно показать равномерную сходимость последовательности вектор-функций $z^{(m)}(t)$ в круге $|t| \leq \frac{b}{4c}$.

Из того, что члены последовательности $z^{(m)}(t)$ являются голоморфными вектор-функциями в круге $|t| \leq \frac{b}{4c}$, в силу теоремы Вейерштрасса, следует голоморфность предельной вектор-функции $z(t)$ в этом круге. Отсюда получается голоморфность следующих функций

$$\xi_n(t) = \lambda_n^- + (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin^2 z_n(t),$$

в круге $|t| \leq \frac{b}{4c}$.

Из равномерной сходимости следующих рядов

$$\tilde{p}(t) = \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} + \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^-}{2} - \xi_k(t) \right), \quad (2.3.2)$$

$$\tilde{q}(t) + 2\tilde{p}^2(t) = \frac{(\lambda_0^+)^2 + (\lambda_0^-)^2}{2} + \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \left(\frac{(\lambda_k^+)^2 + (\lambda_k^-)^2}{2} - \xi_k^2(t) \right) \quad (2.3.3)$$

следует голоморфность их сумм $\tilde{p}(t)$, $\tilde{q}(t) + 2\tilde{p}^2(t)$.

При действительных t суммы рядов (2.3.2) и (2.3.3) в силу формул следов превращаются в функции $p(t)$ и $q(t) + 2p^2(t)$. Отсюда следует аналитичность в окрестности нуля коэффициентов $p(t)$ и $q(t)$.

Рассмотрев вместо уравнения (2.3.1) уравнение

$$-y'' + q(x+t_0)y + 2\lambda p(x+t_0)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in R^1,$$

где t_0 действительное фиксированное число, получим аналитичность функций $p(t+t_0)$ и $q(t+t_0)$ в точке $t=0$. Значит, функции $p(t)$ и $q(t)$ аналитичны в точке t_0 . **Теорема 2.3.1 доказана.**

Теорема 2.3.2. Если $p(x)$ и $q(x)$ действительные аналитические π -периодические функции, то длины лакун $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$ убывают экспоненциально.

Доказательство. Рассмотрим следующую граничную задачу

$$-y'' + q(x+it)y + 2\lambda p(x+it)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad (2.3.4)$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (2.3.5)$$

при действительных t . Из работы [16] следует, что собственные значения задачи (2.3.4), (2.3.5) имеют следующую асимптотику:

$$\xi_n(it) = n + \text{const} + \underline{O}\left(\frac{1}{n}\right), \quad |n| \rightarrow \infty. \quad (2.3.6)$$

Из непрерывности $\xi_n(it)$ по t получаем, что оценка (2.3.6) является равномерной для ограниченных промежутков.

Лемма 2.3.1. Для достаточно больших $|n|$ и для некоторой положительной постоянной c на множестве D выполняется оценка

$$|\operatorname{Re} h_n| > c \cdot |n|.$$

Доказательство. Пусть

$$A_n = \prod_{k \neq n, 0} \frac{(\xi_n - \lambda_k^-)(\xi_n - \lambda_k^+)}{(\xi_n - \xi_k)^2}, \quad \xi \in D.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_n &= \prod_{k \neq n, 0} \left(1 + \frac{\lambda_k^+ \lambda_k^- - \xi_k^2 - \xi_n \cdot (\lambda_k^+ + \lambda_k^- - 2\xi_k)}{(\xi_n - \xi_k)^2} \right) = \\ &= \exp \left\{ \sum_{k \neq n, 0} \ln \left(1 + \frac{\lambda_k^+ \lambda_k^- - \xi_k^2 - \xi_n \cdot (\lambda_k^+ + \lambda_k^- - 2\xi_k)}{(\xi_n - \xi_k)^2} \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{k \neq n, 0} \ln \left(1 - \frac{1}{\xi_n} \cdot (\lambda_k^+ + \lambda_k^- - 2\xi_k) + \underline{O} \left(\frac{1}{\xi_n^2} \right) \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{\xi_n} \cdot \sum_{k \neq n, 0} (\lambda_k^+ + \lambda_k^- - 2\xi_k) + \underline{O} \left(\frac{1}{\xi_n^2} \right) \right\} = 1 + \underline{O} \left(\frac{1}{n} \right), \quad |n| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

поэтому для достаточно больших $|n|$ выполняется неравенство $\operatorname{Re} A_n > \frac{1}{2}$.

Отсюда, для достаточно больших $|n|$ получим

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} h_n|^2 &\geq \operatorname{Re} h_n^2 = \operatorname{Re}((\xi_n - \lambda_0^-)(\xi_n - \lambda_0^+)A_n) = \\ &= \operatorname{Re}((\xi_n - \lambda_0^-)(\xi_n - \lambda_0^+)) \operatorname{Re} A_n - \operatorname{Im}((\xi_n - \lambda_0^-)(\xi_n - \lambda_0^+)) \operatorname{Im} A_n \geq c^2 \cdot n^2. \end{aligned}$$

Лемма 2.3.1 доказана.

Воспользовавшись уравнением (2.3.6), нетрудно показать аналитичность спектральных параметров $\xi_n(t)$. Из (2.2.1) и (2.2.4) следует аналитичность $x_n(t)$. Продолжим решение $x_n(t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ на мнимые аргументы.

Из уравнений Дубровина-Трубовица следует

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t H_n(\dots, x_{-1}(\tau), x_1(\tau), \dots) d\tau. \quad (2.3.7)$$

Тождество (2.3.7) выполняется и при достаточно малых комплексных t .
 В частности при $t = is$, $s \in R^1$ достаточно малое число:

$$x_n(is) = x_n(0) + \int_0^{is} H_n(\dots, x_{-1}(\tau), x_1(\tau), \dots) d\tau. \quad (2.3.8)$$

В равенстве (2.3.8) сделаем замену переменных $\tau = i\omega$, тогда она примет вид

$$x_n(is) = x_n(0) + \int_0^s i \cdot H_n(\dots, x_{-1}(i\omega), x_1(i\omega), \dots) d\omega. \quad (2.3.9)$$

Из (2.3.9) выводим:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} x_n(is)| &= \left| \int_0^s \operatorname{Re} H_n(\dots, x_{-1}(i\omega), x_1(i\omega), \dots) d\omega \right| = \\ &= |s \cdot \operatorname{Re} H_n(\dots, x_{-1}(i\omega_0), x_1(i\omega_0), \dots)| \geq c_1 \cdot |n|, \end{aligned}$$

для малых s и достаточно больших $|n|$. Из асимптотики для $\xi_n(is)$ и последнего неравенства получим

$$\begin{aligned} \overline{o(1)} &= |\xi_n(is) - \lambda_n^-| = (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) |\sin x_n(is)|^2 \geq \\ &\geq (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \operatorname{sh}^2(\operatorname{Im} x_n(is)) \geq (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \operatorname{sh}^2(c_1 \cdot |n|). \end{aligned}$$

Таким образом, для некоторых $a > 0$, $b > 0$ начиная с некоторого значения $|n|$ выполняется неравенство $\lambda_n^+ - \lambda_n^- \leq ae^{-b|n|}$.

Теорема 2.3.2 доказана.

**§ 2. 4. Тождество для квадратов собственных функций
квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим
потенциалом.**

В этой части работы получены некоторые тождества для квадратов собственных функций квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.

Рассмотрим уравнение

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y = \lambda^2 y, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.4.1)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ действительные функции имеющие период π . Введём решения $c(x, \lambda)$ и $s(x, \lambda)$ уравнения (2.4.1) определяемые начальными условиями

$$\begin{cases} c(0, \lambda) = 1 \\ c'(0, \lambda) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} s(0, \lambda) = 0 \\ s'(0, \lambda) = 1. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Обозначим через

$$\dots, y_{-1}^-(x), y_{-1}^+(x), y_0^-(x), y_0^+(x), y_1^-(x), y_1^+(x), \dots \quad (2.4.3)$$

нормированные собственные функции соответствующие собственным значениям

$$\dots < \lambda_{-1}^- \leq \lambda_{-1}^+ < \lambda_0^- < \lambda_0^+ < \lambda_1^- \leq \lambda_1^+ < \dots$$

периодической или антипериодической задачи для уравнения (2.4.1) на отрезке $[0, \pi]$.

Теорема 2.4.1. Для функций (2.4.3) выполняются следующие тождества:

$$\sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{1}{f'(\lambda_k^-)} \left\{ -\frac{\Delta'(\lambda_k^-)}{2\lambda_k^-} + \frac{1}{\lambda_k^-} \int_0^{\pi} p(t)s(\pi, \lambda_k^-, t)dt \right\} (y_k^-(t))^2 = p(t) - \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} - \frac{c}{2}, \quad (2.4.4)$$

$$\sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{1}{g'(\lambda_k^+)} \left\{ -\frac{\Delta'(\lambda_k^+)}{2\lambda_k^+} + \frac{1}{\lambda_k^+} \int_0^{\pi} p(t)s(\pi, \lambda_k^+, t)dt \right\} (y_k^+(t))^2 = p(t) - \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} + \frac{c}{2}, \quad (2.4.5)$$

где

$$f(\lambda) = \pi \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_k^-}{k}, \quad g(\lambda) = \pi \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_k^+}{k}, \quad c = \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} (\lambda_k^+ - \lambda_k^-),$$

(2.4.6)

и $s(x, \lambda, t)$ решение уравнения

$$-y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

удовлетворяющее начальным условиям $s(0, \lambda, t) = 0, \quad s'(0, \lambda, t) = 1,$ (

t действительный параметр).

Доказательство. Используя разложение

$$s(\pi, \lambda, t) = \pi \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \xi_k(t)}{k},$$

изучим при $|\lambda| \rightarrow \infty, (\lambda \in \mathbb{C})$ асимптотику функции $\frac{s(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)}$.

$$\begin{aligned} \frac{s(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)} &= \sqrt{\prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_k^+}{\lambda - \lambda_k^-}} \times \sqrt{\prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_k^-} \cdot \frac{\lambda - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_k^+}} = \\ &= \sqrt{\prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_k^- - \lambda_k^+}{\lambda - \lambda_k^-}\right)} \times \sqrt{\prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_k^- - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_k^-}\right) \cdot \left(1 + \frac{\lambda_k^+ - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_k^+}\right)} = \\ &= \sqrt{\exp\left\{\sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\lambda_k^- - \lambda_k^+}{\lambda - \lambda_k^-}\right)\right\}} \times \\ &\times \sqrt{\exp\left\{\sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{\lambda_k^- - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_k^-} + \frac{\lambda_k^+ - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_k^+} + \frac{\lambda_k^- - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_k^-} \cdot \frac{\lambda_k^+ - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_k^+}\right]\right\}} = \\ &= \sqrt{\exp\left\{\frac{1}{\lambda} \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} (\lambda_k^- - \lambda_k^+) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\}} \times \\ &\times \sqrt{\exp\left\{\frac{1}{\lambda} \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} (\lambda_k^- + \lambda_k^+ - 2\xi_k(t)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\}} = \\ &= 1 + \frac{1}{\lambda} \left(p(t) - \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} - \frac{c}{2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

(2.4.7)

При выводе асимптотики (2.4.7) мы воспользовались обозначениями (2.4.6) и формулами следов:

$$\lambda_0^- + \lambda_0^+ + \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} (\lambda_k^- + \lambda_k^+ - 2\xi_k(t)) = 2p(t).$$

Согласно теореме Миттаг-Леффлера

$$\frac{s(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)} = 1 + \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{s(\pi, \lambda_k^-, t)}{f'(\lambda_k^-)} \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda_k^-},$$

следовательно

$$\frac{s(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)} = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{s(\pi, \lambda_k^-, t)}{f'(\lambda_k^-)} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, (\lambda \in \mathbb{C}). \quad (2.4.8)$$

Приравнявая асимптотики (2.4.7) и (2.4.8) имеем

$$\sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{s(\pi, \lambda_k^-, t)}{f'(\lambda_k^-)} = p(t) - \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} - \frac{c}{2}. \quad (2.4.9)$$

Используя следующую лемму из (2.4.9) выводим тождество (2.4.4).

Лемма 2.4.1. Выполняется следующее равенство

$$s(\pi, \lambda_k^-, t) = \left\{ -\frac{\Delta'(\lambda_k^-)}{2\lambda_k^-} + \frac{1}{\lambda_k^-} \int_0^{\pi} p(t) s(\pi, \lambda_k^-, t) dt \right\} (y_k^-(t))^2. \quad (2.4.10)$$

Доказательство леммы 2.4.1. Для простоты вместо λ_k^- будем писать λ_k . Случай, когда λ_k двукратен очевиден. Будем считать, что λ_k не является двукратным. Из равенств

$$\begin{aligned} s(x, \lambda, t) &= c(t, \lambda) s(x+t, \lambda) - s(t, \lambda) c(x+t, \lambda), \\ c(t+\pi, \lambda) &= c(\pi, \lambda) c(t, \lambda) + c'(\pi, \lambda) s(t, \lambda), \\ s(t+\pi, \lambda) &= s(\pi, \lambda) c(t, \lambda) + s'(\pi, \lambda) s(t, \lambda) \end{aligned}$$

выводим тождество

$$s(\pi, \lambda, t) = s(\pi, \lambda) c^2(t, \lambda) + [s'(\pi, \lambda) - c(\pi, \lambda)] c(t, \lambda) s(t, \lambda) - c'(\pi, \lambda) s^2(t, \lambda). \quad (2.4.11)$$

Пусть $\psi_{\pm}(x, \lambda)$ решение Флоке для уравнения (2.4.1). Используя выражение для решения Флоке

$$\psi_{\pm}(x, \lambda) = c(x, \lambda) + \frac{s'(\pi, \lambda) - c(\pi, \lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi, \lambda)} s(x, \lambda), \quad (2.4.12)$$

и формулу

$$\begin{aligned} \Delta'(\lambda) = & -2s(\pi, \lambda) \int_0^{\pi} \left\{ c(t, \lambda) + \frac{s'(\pi, \lambda) - c(\pi, \lambda)}{2s(\pi, \lambda)} s(t, \lambda) \right\}^2 \times [\lambda - p(t)] dt + \\ & + \int_0^{\pi} \frac{\Delta^2(\lambda) - 4}{2s(\pi, \lambda)} s^2(t, \lambda) [\lambda - p(t)] dt \end{aligned}$$

находим

$$\Delta'(\lambda_k) = -2s(\pi, \lambda_k) \int_0^{\pi} \psi_{\pm}^2(t, \lambda_k) [\lambda_k - p(t)] dt.$$

Используя (2.4.11) и (2.4.12) легко выводится равенство

$$s(\pi, \lambda_k) \psi_{\pm}^2(t, \lambda_k) = s(\pi, \lambda_k, t). \quad (2.4.13)$$

Подставляя в (2.4.13) выражения $\psi_{\pm}(t, \lambda_k) = \alpha_k y_k(t)$ и

$$\alpha_k^2 = \frac{1}{s(\pi, \lambda_k)} \left\{ -\frac{\Delta'(\lambda_k)}{2\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^{\pi} p(t) s(\pi, \lambda_k, t) dt \right\}$$

Получим равенство (2.4.10). **Лемма 2.4.1 доказана.**

Нетрудно заметить, что тождество (2.4.4) вытекает из (2.4.9) и (2.4.10).

Тождество (2.4.5) выводится аналогично.

Теорема 2.4.1 доказана.

Г Л А В А 3.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С КОНЕЧНОЗОННЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ПОЛУОСИ

Обратные задачи на полупрямой для оператора Штурма-Лиувилля в случае конечнозонных периодических и непериодических потенциалов изучены в работах Н.И.Ахиезера [3], Х.Хохштадта, В.Г.Гольдберга [84] и Б.М.Левитана, А.В.Савина [48], а для оператора Дирака хорошо исследованы в работах А.Э.Мамадова [54], А.М.Ибрагимова, А.Б.Яхшимуратова [35] и др.

В настоящей главе изучается обратная задача на полуоси для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с конечнозонным периодическим потенциалом, а именно выводятся формула нахождения граничного условия через спектральные данные, система дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица и формулы следов.

§ 3. 1. Вывод граничного условия через спектральные данные.

1. Рассмотрим в пространстве $L_2(0, \infty)$ следующий пучок

$$T(\lambda)y \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0, \quad (0 < x < \infty) \quad (3.1.1)$$

операторов Штурма-Лиувилля с граничным условием

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi), \quad (3.1.2)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ действительные функции, имеющие период π , а λ комплексный параметр.

Замечание. Во всех параграфах этой главы будем считать, что действительные функции $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям а) и б) из §1.1., гл. 1.

Обозначим через $c(x, \lambda)$, $s(x, \lambda)$, $\theta(x, \lambda)$ и $\varphi(x, \lambda)$ решения уравнения (3.1.1) удовлетворяющие начальным условиям

$$c(0, \lambda) = 1, \quad c'(0, \lambda) = 0, \quad s(0, \lambda) = 0, \quad s'(0, \lambda) = 1,$$

$$\theta(0, \lambda) = \cos \alpha, \quad \theta'(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad \varphi(0, \lambda) = -\sin \alpha, \quad \varphi'(0, \lambda) = \cos \alpha.$$

Найдем функцию Вейля-Титчмарша для задачи (3.1.1)+(3.1.2). Она однозначно определяется условием

$$\theta(x, \lambda) + m_\alpha(\lambda)\varphi(x, \lambda) \in L_2(0, \infty), \quad (3.1.3)$$

где $\lambda \in C \setminus R^1$ любое число. Известно (см. [17]), что

$$c(x, \lambda) + m^+(\lambda)s(x, \lambda) \in L_2(0, \infty) \quad (3.1.4)$$

где

$$m^+(\lambda) = \frac{s'(\pi, \lambda) - c(\pi, \lambda) - \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi, \lambda)}, \quad (3.1.5)$$

$$\Delta(\lambda) = s'(\pi, \lambda) + c(\pi, \lambda).$$

Из тождеств

$$c(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) \cos \alpha - \varphi(x, \lambda) \sin \alpha,$$

$$s(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) \sin \alpha + \varphi(x, \lambda) \cos \alpha$$

и условия (3.1.4) получим, что

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{-\sin \alpha + m^+(\lambda) \cos \alpha}{\cos \alpha + m^+(\lambda) \sin \alpha}. \quad (3.1.6)$$

Для удобства выкладок введём обозначения

$$c = c(\pi, \lambda), \quad c' = c'(\pi, \lambda), \quad s = s(\pi, \lambda), \quad s' = s'(\pi, \lambda), \quad \Delta = \Delta(\lambda).$$

Подставляем в (3.1.6) выражение (3.1.5) и освобождаем от иррациональности знаменатель. Для этого сначала рассмотрим числитель получающегося дроби:

$$\begin{aligned} & \left[-2s \sin \alpha + s' \cos \alpha - c \cos \alpha - \sqrt{\Delta^2 - 4} \cos \alpha \right] \times \\ & \times \left[2s \cos \alpha + s' \sin \alpha - c \sin \alpha + \sqrt{\Delta^2 - 4} \sin \alpha \right] = \\ & = -4s^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2ss' \sin^2 \alpha + 2sc \sin^2 \alpha - 2s \sin^2 \alpha \sqrt{\Delta^2 - 4} + \\ & + 2ss' \cos^2 \alpha + s'^2 \sin \alpha \cos \alpha - s'c \sin \alpha \cos \alpha + s' \sin \alpha \cos \alpha \sqrt{\Delta^2 - 4} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2sc \cos^2 \alpha + s'c \sin \alpha \cos \alpha + c^2 \sin \alpha \cos \alpha - c \sin \alpha \cos \alpha \sqrt{\Delta^2 - 4} - \\
& \quad - 2s\sqrt{\Delta^2 - 4} \cos^2 \alpha + s'\sqrt{\Delta^2 - 4} \sin \alpha \cos \alpha + \\
& \quad + c\sqrt{\Delta^2 - 4} \sin \alpha \cos \alpha - (\Delta^2 - 4) \sin \alpha \cos \alpha = \\
& = [-4s^2 + (s' - c)^2 + (s' + c)^2 + 4] \cos \alpha \sin \alpha + \\
& \quad + [2sc - 2ss'] \sin^2 \alpha + [2ss' - 2sc] \cos^2 \alpha - 2s\sqrt{\Delta^2 - 4} = \\
& = 2s[s' - c](\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 4s[s + c'] \sin \alpha \cos \alpha - 2s\sqrt{\Delta^2 - 4} = \\
& \quad = 2s[(s' - c) \cos^2 \alpha - (s + c') \sin 2\alpha - \sqrt{\Delta^2 - 4}],
\end{aligned}$$

теперь рассмотрим знаменатель получающегося дроби:

$$\begin{aligned}
& [2s \cos \alpha + s' \sin \alpha - c \sin \alpha - \sqrt{\Delta^2 - 4} \sin \alpha] \times \\
& \times [2s \cos \alpha + s' \sin \alpha - c \sin \alpha - \sqrt{\Delta^2 - 4} \sin \alpha] = \\
& = [2s \cos \alpha + s' \sin \alpha - c \sin \alpha]^2 - [\sqrt{\Delta^2 - 4} \sin \alpha]^2 = \\
& \quad = 4s^2 \cos^2 \alpha + 4s(s' - c) \sin \alpha \cos \alpha + \\
& \quad + (s' - c)^2 \sin^2 \alpha - (s' + c)^2 \sin^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha = \\
& = 4s^2 \cos^2 \alpha + 4s(s' - c) \sin \alpha \cos \alpha - 4s'c \sin^2 \alpha = \\
& = 2s[2s \cos^2 \alpha + 2(s' - c) \sin \alpha \cos \alpha - 2c' \sin^2 \alpha]
\end{aligned}$$

в итоге находим

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{[s' - c] \cos 2\alpha - [s + c'] \sin 2\alpha - \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s \cos^2 \alpha + 2[s' - c] \cos \alpha \sin \alpha - 2c' \sin^2 \alpha}. \quad (3.1.7)$$

Выражение (3.1.7) в терминах $\theta(x, \lambda)$ и $\varphi(x, \lambda)$ выглядит следующим образом:

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{-\theta(\pi, \lambda) \cos \alpha - \theta'(\pi, \lambda) \sin \alpha + \varphi'(\pi, \lambda) \cos \alpha - \varphi(\pi, \lambda) \sin \alpha - \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2(\varphi(\pi, \lambda) \cos \alpha + \varphi'(\pi, \lambda) \sin \alpha)}. \quad (3.1.8)$$

Функция $\Delta(\lambda) = s'(\pi, \lambda) + c(\pi, \lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла задачи (3.1.1)+(3.1.2), отметим, что она не зависит от α .

Как известно, полюсы функции Вейля-Титчмарша $m_\alpha(\lambda)$ являются собственными значениями задачи (3.1.1)+(3.1.2), а множество остальных разрывов составляет непрерывный спектр.

Из выражения (3.1.8) следует, что непрерывный спектр задачи (3.1.1)+(3.1.2) имеет вид

$$E_{\text{ess}} = \mathbb{R}^1 \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n^-, \lambda_n^+). \quad (3.1.9)$$

Непересекающиеся интервалы $(\lambda_n^-, \lambda_n^+)$, $n \in Z$ принято называть лакунами пучка (3.1.1). Отметим, что лакуна $(\lambda_0^-, \lambda_0^+)$, которая содержит точку $\lambda = 0$, всегда является невырожденной: $\lambda_0^- < \lambda_0^+$.

Последовательность отрезков прямой между соседними лакунами суть множество точек в которых функция $\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}$ разрывна.

Обозначим через $\xi_0^-, \xi_0^+, \xi_n, n \in Z \setminus \{0\}$ корни уравнения

$$\varphi(\pi, \lambda) \cos \alpha + \varphi'(\pi, \lambda) \sin \alpha = 0.$$

Отметим, что $\xi_0^-, \xi_0^+, \xi_n, n \in Z \setminus \{0\}$ совпадают с собственными значениями регулярной задачи для уравнения (3.1.1) с граничными условиями

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0,$$

$$y(\pi) \cos \alpha + y'(\pi) \sin \alpha = 0$$

и выполняются включения

$$\xi_0^- \in [\lambda_0^-, 0), \quad \xi_0^+ \in (0, \lambda_0^+], \quad \xi_n \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+], \quad n \in Z \setminus \{0\}.$$

Определение 3.1.1. Числа $\xi_0^-, \xi_0^+, \xi_n, n \in Z \setminus \{0\}$ и знаки

$$\sigma_0^\pm = \text{sign} \left\{ \frac{\varphi(\pi, \xi_0^\pm)}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\varphi(\pi, \xi_0^\pm)} \right\}, \quad \sigma_n = \text{sign} \left\{ \frac{\varphi(\pi, \xi_n)}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\varphi(\pi, \xi_n)} \right\}, \quad n \in Z \setminus \{0\}$$

называются спектральными параметрами задачи (3.1.1)+(3.1.2).

Определение 3.1.2. Спектральные параметры и границы $\lambda_n^-, \lambda_n^+, n \in Z$ непрерывного спектра назовём спектральными данными задачи (3.1.1)+(3.1.2).

2. Конечнозонность уравнения (3.1.1) означает, что уравнение $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$ имеет лишь конечное число простых корней. Изменя нумерацию обозначим их через

$$\lambda_0^- < \lambda_0^+ < \lambda_1^- < \lambda_1^+ < \dots < \lambda_{n_0}^- < \lambda_{n_0}^+ < \dots < \lambda_N^- < \lambda_N^+,$$

где $(\lambda_{n_0}^-, \lambda_{n_0}^+)$ лагуна, содержащая точку $\lambda = 0$.

В конечнозонном случае (см.[15]) справедливы представления

$$\begin{aligned} 4 - \Delta^2(\lambda) &= 4d^2(\lambda)R(\lambda), \\ s(\pi, \lambda) &= d(\lambda)P(\lambda), \\ c'(\pi, \lambda) &= -d(\lambda)S(\lambda), \\ c(\pi, \lambda) - s'(\pi, \lambda) &= -2d(\lambda)Q(\lambda), \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

где

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \prod_{n=0}^N (\lambda - \lambda_n^-)(\lambda - \lambda_n^+), \\ P(\lambda) &= \prod_{n_0 \neq n=0}^N (\lambda - \tilde{\xi}_n), \\ S(\lambda) &= \prod_{n=0}^{N+1} (\lambda - \eta_n), \quad (\eta_{n_0} \in [\lambda_{n_0}^-, 0), \quad \eta_{n_0+1} \in (0, \lambda_{n_0}^+]), \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

$Q(\lambda)$ - некоторый полином степени $\leq N - 2$. $d(\lambda)$ - целая функция, которая определяется только по кратным корням уравнения $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$.

Из равенства

$$-4c'(\pi, \lambda)s(\pi, \lambda) - [c(\pi, \lambda) - s'(\pi, \lambda)]^2 = 4 - \Delta^2(\lambda)$$

легко следует, что

$$P(\lambda)S(\lambda) - Q^2(\lambda) = R(\lambda). \quad (3.1.12)$$

3. Выводим формулу для $ctg \alpha$ через спектральные данные.

Подставляя (3.1.10) в (3.1.7) имеем

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{Q(\lambda) \cos 2\alpha - [P(\lambda) - S(\lambda)] \sin \alpha \cos \alpha - i\sqrt{R(\lambda)}}{P(\lambda) \cos^2 \alpha + 2Q(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha + S(\lambda) \sin^2 \alpha}. \quad (3.1.13)$$

Исходя из вида (3.1.13) функции Вейля-Титчмарша введём следующие функции:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= P(\lambda) \cos^2 \alpha + 2Q(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha + S(\lambda) \sin^2 \alpha, \\ C(\lambda) &= Q(\lambda) \cos 2\alpha - [P(\lambda) - S(\lambda)] \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Если дополнительно ввести функцию

$$B(\lambda) = P(\lambda) \sin^2 \alpha - 2Q(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha + S(\lambda) \cos^2 \alpha, \quad (3.1.15)$$

то равенства (3.1.14) и (3.1.15) можно задать одним матричным тождеством:

$$\begin{pmatrix} A(\lambda) & C(\lambda) \\ C(\lambda) & B(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(\lambda) & Q(\lambda) \\ Q(\lambda) & S(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.1.16)$$

Переходя в тождестве (3.1.16) к определителям, получим

$$A(\lambda)B(\lambda) - C^2(\lambda) = R(\lambda). \quad (3.1.17)$$

Из (3.1.16) следует, что

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= A(\lambda) \cos^2 \alpha - 2C(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha + B(\lambda) \sin^2 \alpha, \\ Q(\lambda) &= C(\lambda) \cos 2\alpha + [A(\lambda) - B(\lambda)] \sin \alpha \cos \alpha, \\ S(\lambda) &= A(\lambda) \sin^2 \alpha + 2C(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha + B(\lambda) \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Рассмотрим случай $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \sin^2 \alpha (\lambda - \xi_{n_0}^-)(\lambda - \xi_{n_0}^+) \prod_{n_0 \neq n=0}^N (\lambda - \xi_n), \quad (\xi_{n_0}^- \in [\lambda_{n_0}^-, 0), \quad \xi_{n_0}^+ \in (0, \lambda_{n_0}^+]), \\ C(\lambda) &= \sin \alpha \cos \alpha (\lambda^{N+2} + \tilde{C}(\lambda)), \end{aligned}$$

где $\tilde{C}(\lambda)$ — полином степени $\leq N+1$. Для удобства дальнейших выкладок введём следующие переобозначения

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \xi_0, \dots, \beta_{n_0-1} = \xi_{n_0-1}, \beta_{n_0} = \xi_{n_0}^-, \beta_{n_0+1} = \xi_{n_0}^+, \beta_{n_0+2} = \xi_{n_0+1}, \dots, \beta_{N+1} = \xi_N, \\ \varepsilon_0 &= \sigma_0, \dots, \varepsilon_{n_0-1} = \sigma_{n_0-1}, \varepsilon_{n_0} = \sigma_{n_0}^-, \varepsilon_{n_0+1} = \sigma_{n_0}^+, \varepsilon_{n_0+2} = \sigma_{n_0+1}, \dots, \varepsilon_{N+1} = \sigma_N. \end{aligned}$$

Тогда получим, что

$$A(\lambda) = \sin^2 \alpha \prod_{n=0}^{N+1} (\lambda - \beta_n), \quad (\beta_{n_0} \in [\lambda_{n_0}^-, 0), \quad \beta_{n_0+1} \in (0, \lambda_{n_0}^+]). \quad (3.1.19)$$

Отсюда выводим следующую асимптотику

$$\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)} = \operatorname{ctg} \alpha + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (|\lambda| \rightarrow \infty). \quad (3.1.20)$$

Пользуясь равенством (3.1.20) и теоремой Миттаг-Леффлера имеем

$$\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)} = \operatorname{ctg} \alpha + \sum_{n=0}^{N+1} \frac{C(\beta_n)}{A'(\beta_n)(\lambda - \beta_n)}. \quad (3.1.21)$$

Из (3.1.17) вытекают равенства

$$C(\beta_n) = \varepsilon_n \sqrt{-R(\beta_n)}, \quad n = 0, 1, \dots, N+1. \quad (3.1.22)$$

В силу (3.1.21) имеет место следующая асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \frac{C(\lambda)}{A(\lambda)} &= \operatorname{ctg} \alpha + \sum_{n=0}^{N+1} \frac{C(\beta_n)}{\sin^2 \alpha \cdot \tilde{A}'(\beta_n)} \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \beta_n + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \right] = \\ &= \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\lambda \sin^2 \alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{N+1} \frac{C(\beta_n)}{\tilde{A}'(\beta_n)} \right\} + \frac{1}{\lambda^2 \sin^2 \alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{N+1} \beta_n \frac{C(\beta_n)}{\tilde{A}'(\beta_n)} \right\} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) = \\ &= \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\lambda \sin^2 \alpha} \cdot d_1 + \frac{1}{\lambda^2 \sin^2 \alpha} \cdot d_2 + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \quad (|\lambda| \rightarrow \infty), \quad (3.1.23) \end{aligned}$$

где

$$d_1 = \sum_{n=0}^{N+1} \frac{C(\beta_n)}{\tilde{A}'(\beta_n)}, \quad d_2 = \sum_{n=0}^{N+1} \beta_n \frac{C(\beta_n)}{\tilde{A}'(\beta_n)}, \quad \tilde{A}(\lambda) = \prod_{k=0}^{N+1} (\lambda - \beta_k).$$

Из (3.1.23) и

$$A(\lambda) = \sin^2 \alpha \cdot [\lambda^{N+2} + a_1 \lambda^{N+1} + a_2 \lambda^N + a_3 \lambda^{N-1} + a_4 \lambda^{N-2} + \dots]$$

следует, что

$$\begin{aligned} C(\lambda) &= \lambda^{N+2} \sin \alpha \cos \alpha + \lambda^{N+1} (d_1 + a_1 \sin \alpha \cos \alpha) + \\ &+ \lambda^N (d_2 + a_1 d_1 + a_2 \sin \alpha \cos \alpha) + \underline{O}(\lambda^{N-1}), \quad (|\lambda| \rightarrow \infty). \quad (3.1.24) \end{aligned}$$

В тождестве (3.1.17) приравниваем коэффициенты при λ^{2N+3} и λ^{2N+2} :

$$\begin{aligned} A(\lambda)B(\lambda) - C^2(\lambda) &= \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha [\lambda^{N+2} + a_1 \lambda^{N+1} + a_2 \lambda^N + \underline{O}(\lambda^{N-1})] \times \\ &\times [\lambda^{N+2} + b_1 \lambda^{N+1} + b_2 \lambda^N + \underline{O}(\lambda^{N-1})] - \\ &- [\lambda^{N+2} \sin \alpha \cos \alpha + \lambda^{N+1} (d_1 + a_1 \sin \alpha \cos \alpha) + \lambda^N (d_2 + a_1 d_1 + a_2 \sin \alpha \cos \alpha)]^2 = \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \{ \lambda^{2N+4} + b_1 \lambda^{2N+3} + b_2 \lambda^{2N+2} + \underline{O}(\lambda^{2N+1}) \} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_1 \lambda^{2N+3} + a_1 b_1 \lambda^{2N+2} + \underline{\underline{O}}(\lambda^{2N+1}) + a_2 \lambda^{2N+2} + \underline{\underline{O}}(\lambda^{2N+1}) \Big\} - \\
& - \{ \lambda^{2N+4} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \lambda^{2N+2} (d_1 + a_1 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + \\
& + 2 \lambda^{2N+3} \sin \alpha \cos \alpha (d_1 + a_1 \sin \alpha \cos \alpha) + \\
& + 2 \lambda^{2N+2} \sin \alpha \cos \alpha (d_2 + a_1 d_1 + a_2 \sin \alpha \cos \alpha) + \underline{\underline{O}}(\lambda^{2N+1}) \Big\} = \\
& = \lambda^{2N+3} \{ b_1 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - a_1 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 2d_1 \sin \alpha \cos \alpha \} + \\
& + \lambda^{2N+2} \{ b_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a_1 b_1 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - a_1^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \\
& - a_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 4a_1 d_1 \sin \alpha \cos \alpha - 2d_2 \sin \alpha \cos \alpha - d_1^2 \} + \underline{\underline{O}}(\lambda^{2N+1}).
\end{aligned} \tag{3.1.25}$$

Отсюда получим следующие тождества

$$b_1 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - a_1 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 2d_1 \sin \alpha \cos \alpha = 0, \tag{3.1.26}$$

$$\begin{aligned}
& b_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a_1 b_1 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - a_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - a_1^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \\
& - 4a_1 d_1 \sin \alpha \cos \alpha - 2d_2 \sin \alpha \cos \alpha - d_1^2 = 1.
\end{aligned} \tag{3.1.27}$$

Умножая тождество (3.1.26) на $(-a_1)$ прибавим к (3.1.27):

$$\begin{aligned}
& b_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - a_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \\
& - 2a_1 d_1 \sin \alpha \cos \alpha - 2d_2 \sin \alpha \cos \alpha - d_1^2 = 1.
\end{aligned} \tag{3.1.28}$$

Теперь приравниваем коэффициенты при λ^{N+1} , λ^N в равенстве (3.1.18).

$$\begin{aligned}
Q(\lambda) & = \{ \lambda^{N+2} \sin \alpha \cos \alpha + \lambda^{N+1} (d_1 + a_1 \sin \alpha \cos \alpha) + \\
& + \lambda^N (d_2 + a_1 d_1 + a_2 \sin \alpha \cos \alpha) + \underline{\underline{O}}(\lambda^{N-1}) \} \cos 2\alpha + \\
& + \{ \sin^2 \alpha \cdot [\lambda^{N+2} + a_1 \lambda^{N+1} + a_2 \lambda^N + \underline{\underline{O}}(\lambda^{N-1})] - \\
& - \cos^2 \alpha \cdot [\lambda^{N+2} + b_1 \lambda^{N+1} + b_2 \lambda^N + \underline{\underline{O}}(\lambda^{N-1})] \} \sin \alpha \cos \alpha = \\
& = \lambda^{N+1} \{ d_1 \cos 2\alpha + a_1 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha + a_1 \sin^3 \alpha \cos \alpha - b_1 \sin \alpha \cos^3 \alpha \} + \\
& + \lambda^N \{ d_2 \cos 2\alpha + a_1 d_1 \cos 2\alpha + a_2 \cos \alpha \sin \alpha \cos 2\alpha + \\
& + a_2 \sin^3 \alpha \cos \alpha - b_2 \sin \alpha \cos^3 \alpha \} + \underline{\underline{O}}(\lambda^{N-1}), \quad (|\lambda| \rightarrow \infty).
\end{aligned} \tag{3.1.29}$$

Отсюда получим следующие тождества

$$d_1 \cos 2\alpha + a_1 \sin \alpha \cos^3 \alpha - b_1 \sin \alpha \cos^3 \alpha = 0, \tag{3.1.30}$$

$$d_2 \cos 2\alpha + a_1 d_1 \cos 2\alpha + a_2 \cos^3 \alpha \sin \alpha - b_2 \sin \alpha \cos^3 \alpha = 0. \quad (3.1.31)$$

Умножая (3.1.26) на $\operatorname{ctg} \alpha$ и прибавляя к (3.1.30) получим $d_1 = 0$.

Учитывая это равенство, перепишем (3.1.28) и (3.1.31) в следующем виде:

$$b_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - a_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 2d_2 \sin \alpha \cos \alpha = 1, \quad (3.1.32)$$

$$d_2 \cos 2\alpha + a_2 \cos^3 \alpha \sin \alpha - b_2 \sin \alpha \cos^3 \alpha = 0. \quad (3.1.33)$$

Умножим равенства (3.1.32), (3.1.33) соответственно на $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ и сложим:

$$\begin{aligned} d_2 \sin \alpha \cos 2\alpha - d_2 \sin 2\alpha \cos \alpha &= \cos \alpha, \\ d_2 \sin(\alpha - 2\alpha) &= \cos \alpha, \\ -d_2 \sin \alpha &= \cos \alpha, \\ \operatorname{ctg} \alpha &= -d_2. \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

Значит,

$$\operatorname{ctg} \alpha = -\sum_{n=0}^{N+1} \beta_n \frac{\varepsilon_n \sqrt{-R(\beta_n)}}{\tilde{A}'(\beta_n)}, \quad (3.1.35)$$

где

$$\tilde{A}(\lambda) = \prod_{n=0}^{N+1} (\lambda - \beta_n), \quad R(\lambda) = \prod_{n=0}^N (\lambda - \lambda_n^-)(\lambda - \lambda_n^+).$$

В случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$ получим $A(\lambda) = S(\lambda)$, $C(\lambda) = -Q(\lambda)$, $B(\lambda) = P(\lambda)$. Так,

как

$$Q(\lambda) = q_0 \lambda^{N-2} + \underline{\underline{O}}(\lambda^{N-3}),$$

то

$$\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)} = \frac{-q_0 \lambda^{N-2} + \underline{\underline{O}}(\lambda^{N-3})}{\lambda^{N+2} + \underline{\underline{O}}(\lambda^{N+1})} = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^4}\right). \quad (3.1.36)$$

Нетрудно видеть справедливость асимптотики (3.1.23) и в этом случае. Сравнивая асимптотики (3.1.23) и (3.1.36) получим, что $d_1 = 0$, $d_2 = 0$. Это

показывает верность равенства (3.1.35) и при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Т Е О Р Е М А 3.1.1. Если задаче (3.1.1)+(3.1.2) соответствуют лакуны $(\lambda_0^-, \lambda_0^+), \dots, (\lambda_{n_0}^-, \lambda_{n_0}^+), \dots, (\lambda_N^-, \lambda_N^+)$ и спектральные параметры $\xi_0 \in [\lambda_0^-, \lambda_0^+], \dots, \xi_{n_0-1} \in [\lambda_{n_0-1}^-, \lambda_{n_0-1}^+], \xi_{n_0}^-, \xi_{n_0}^+ \in [\lambda_{n_0}^-, \lambda_{n_0}^+], \xi_{n_0+1} \in [\lambda_{n_0+1}^-, \lambda_{n_0+1}^+], \dots, \xi_N \in [\lambda_N^-, \lambda_N^+], \sigma_0 = \pm 1, \dots, \sigma_{n_0}^- = \pm 1, \sigma_{n_0}^+ = \pm 1, \dots, \sigma_N = \pm 1$, (где $(\lambda_{n_0}^-, \lambda_{n_0}^+)$ лакуна, содержащая точку $\lambda = 0$), то имеет место следующая формула:

$$\operatorname{ctg} \alpha = -\xi_{n_0}^- \frac{\sigma_{n_0}^- \sqrt{-R(\xi_{n_0}^-)}}{\tilde{A}'(\xi_{n_0}^-)} - \xi_{n_0}^+ \frac{\sigma_{n_0}^+ \sqrt{-R(\xi_{n_0}^+)}}{\tilde{A}'(\xi_{n_0}^+)} - \sum_{n_0 \neq n=0}^N \xi_n \frac{\sigma_n \sqrt{-R(\xi_n)}}{\tilde{A}'(\xi_n)}, \quad (3.1.37)$$

где

$$\tilde{A}(\lambda) = (\lambda - \xi_{n_0}^-)(\lambda - \xi_{n_0}^+) \prod_{n_0 \neq n=0}^N (\lambda - \xi_n), \quad R(\lambda) = \prod_{n=0}^N (\lambda - \lambda_n^-)(\lambda - \lambda_n^+).$$

Замечание 3.1.1. Если задаются спектральные данные и при этом отсутствуют спектральные параметры в тривиальной лакуне, то это означает, что $\alpha = 0$, т.е. граничное условие имеет вид $y(0) = 0$.

Замечание 3.1.2. При решении обратной задачи для задачи (3.1.1)+(3.1.2), по формуле (3.1.37) восстанавливается граничное условие.

§ 3.2. Вывод системы уравнений Дубровина-Трубовица для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на полупрямой.

Рассмотрим в пространстве $L_2(0, \infty)$ следующий пучок

$$T(\lambda)y \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0, \quad (0 < x < \infty) \quad (3.2.1)$$

операторов Штурма-Лиувилля с граничным условием

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi), \quad (3.2.2)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ действительные функции, имеющие период π , а λ комплексный параметр.

Известно, что спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$, $\xi_0^-(t)$, $\xi_0^+(t)$ задачи

$$-y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y - \lambda^2 y = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (3.2.3)$$

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi), \quad (3.2.4)$$

являются собственными значениями следующей регулярной задачи

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < \pi \quad (3.2.5)$$

$$\begin{cases} y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0 \\ y(\pi) \cos \alpha + y'(\pi) \sin \alpha = 0, \end{cases} \quad (3.2.6)$$

где параметр $t \in (-\infty, \infty)$. Пусть собственным значениям $\xi_n(t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ соответствуют нормированные собственные функции $\{y_n(x, t)\}$, $n \in Z \setminus \{0\}$. Тогда

$$L(t)y_n = \xi_n^2(t)y_n, \quad (L(t)y_n, y_n) = \xi_n^2(t).$$

Дифференцируя по t последнее равенство имеем:

$$\begin{aligned} 2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t) &= (L(t)y_n, \dot{y}_n) = ((L(t)y_n)', y_n) + ((L(t)y_n), \dot{y}_n) = \\ &= (-\dot{y}_n'' + \dot{q}(x+t)y_n + q(x+t)\dot{y}_n + 2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)y_n + \\ &+ 2\xi_n(t)\dot{p}(x+t)y_n + 2\xi_n(t)p(x+t)\dot{y}_n, y_n) + (\xi_n^2(t)y_n, \dot{y}_n) = \\ &= (L(t)\dot{y}_n + [q'(x+t)y_n + 2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)y_n + 2\xi_n(t)p'(x+t)y_n], y_n) + \\ &\quad + \xi_n^2(t) \cdot (y_n, \dot{y}_n) = \\ &= (L(t)\dot{y}_n, y_n) + ([q'(x+t)y_n + 2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)y_n + 2\xi_n(t)p'(x+t)y_n], y_n) + \\ &\quad + \xi_n^2(t) \cdot (y_n, \dot{y}_n) = \\ &= (\dot{y}_n, \xi_n^2(t)y_n) + ([q'(x+t)y_n + 2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)y_n + 2\xi_n(t)p'(x+t)y_n], y_n) + \\ &\quad + \xi_n^2(t) \cdot (y_n, \dot{y}_n). \end{aligned}$$

Используя нормированность собственных функций получим равенство

$$2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t) = \int_0^\pi [q'(x+t) + 2\dot{\xi}_n(t)p'(x+t) + 2\xi_n(t)p(x+t)]y_n^2(x, t)dx. \quad (3.2.7)$$

Интегрируя по частям в равенстве (3.2.7) имеем

$$\begin{aligned}
& 2\dot{\xi}_n(t)\dot{\xi}_n(t) = [q(x+t) + 2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)]y_n^2(x,t)\Big|_0^\pi - \\
& - 2\int_0^\pi [q(x+t)y_n(x,t) + 2\dot{\xi}_n(t)p(x+t)y_n(x,t)]y_n'(x,t)dx + \\
& \quad + 2\dot{\xi}_n(t)\int_0^\pi p(x+t)y_n^2(x,t)dx = \\
& = [q(t+\pi) + 2\dot{\xi}_n(t)p(t+\pi)]y_n^2(\pi,t) - [q(t) + 2\dot{\xi}_n(t)p(t)]y_n^2(0,t) - \\
& - 2\int_0^\pi [\dot{\xi}_n^2(t)y_n(x,t) + y_n''(x,t)]y_n'(x,t)dt + 2\dot{\xi}_n(t)\int_0^\pi p(x+t)y_n^2(x,t)dx = \\
& = (q(t) + 2\dot{\xi}_n(t)p(t))[y_n^2(\pi,t) - y_n^2(0,t)] - 2\int_0^\pi \dot{\xi}_n^2(t)y_n(x,t)dy_n(x,t) - \\
& \quad - 2\int_0^\pi y_n'(x,t)d(y_n'(x,t)) + 2\dot{\xi}_n(t)\int_0^\pi p(x+t)y_n^2(x,t)dx = \\
& = (q(t) + 2\dot{\xi}_n(t)p(t))[y_n^2(\pi,t) - y_n^2(0,t)] - \dot{\xi}_n^2(t)y_n^2(x,t)\Big|_0^\pi - \\
& \quad - y_n'^2(x,t)\Big|_0^\pi + 2\dot{\xi}_n(t)\int_0^\pi p(x+t)y_n^2(x,t)dx = \\
& = (q(t) + 2\dot{\xi}_n(t)p(t))[y_n^2(\pi,t) - y_n^2(0,t)] - \dot{\xi}_n^2(t)[y_n^2(\pi,t) - y_n^2(0,t)] - \\
& \quad - [y_n'^2(\pi,t) - y_n'^2(0,t)] + 2\dot{\xi}_n(t)\int_0^\pi p(x+t)y_n^2(x,t)dx = \\
& = [q(t) + 2\dot{\xi}_n(t)p(t) - \dot{\xi}_n^2(t)](y_n^2(\pi,t) - y_n^2(0,t)) - \\
& \quad - (y_n'^2(\pi,t) - y_n'^2(0,t)) + 2\dot{\xi}_n(t)\int_0^\pi p(x+t)y_n^2(x,t)dx,
\end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned}
2\dot{\xi}_n(t)\dot{\xi}_n(t) &= [q(t) + 2\dot{\xi}_n(t)p(t) - \dot{\xi}_n^2(t)](y_n^2(\pi,t) - y_n^2(0,t)) - \\
& - (y_n'^2(\pi,t) - y_n'^2(0,t)) + 2\dot{\xi}_n(t)\int_0^\pi p(x+t)y_n^2(x,t)dx. \quad (3.2.8)
\end{aligned}$$

Пусть $\theta(x, \lambda, t)$ и $\varphi(x, \lambda, t)$ решения уравнение (3.2.5) удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{cases} \theta(0, t, \lambda) = \cos \alpha \\ \theta'(0, t, \lambda) = \sin \alpha \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \varphi(0, t, \lambda) = -\sin \alpha \\ \varphi'(0, t, \lambda) = \cos \alpha. \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Тогда

$$y_n(x, t) = \frac{1}{c_n(t)} \varphi(x, t, \xi_n(t)), \quad (3.2.10)$$

где

$$c_n^2(t) = \int_0^\pi \varphi^2(x, t, \xi_n(t)) dx. \quad (3.2.11)$$

В силу (3.2.8) и (3.2.10) имеем

$$\begin{aligned} 2\xi_n(t)\dot{\xi}_n(t)c_n^2(t) &= (q(t) + 2\xi_n(t)p(t) - \xi_n^2(t))[\varphi^2(\pi, t, \xi_n(t)) - \varphi^2(0, t, \xi_n(t))] - \\ &- [\varphi'^2(\pi, t, \xi_n(t)) - \varphi'^2(0, t, \xi_n(t))] + 2\dot{\xi}_n(t) \int_0^\pi p(x+t)\varphi^2(x, t, \xi_n(t)) dx. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Учитывая начальные условия (3.2.9) перепишем (3.2.12) в следующем виде

$$\begin{aligned} &\left[2\xi_n(t)c_n^2(t) - 2 \int_0^\pi p(x+t)\varphi^2(x, t, \xi_n(t)) dx \right] \dot{\xi}_n(t) = \\ &= (q(t) + 2\xi_n(t)p(t) - \xi_n^2(t))[\varphi^2(\pi, t, \xi_n(t)) - \sin^2 \alpha] - \\ &- [\varphi'^2(\pi, t, \xi_n(t)) - \cos^2 \alpha]. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Из тождества

$$\begin{aligned} 2\lambda \int_0^\pi \varphi^2(x, t, \lambda) dx &= \left(\varphi'(x, t, \lambda) \frac{\partial \varphi(x, t, \lambda)}{\partial \lambda} - \varphi(x, t, \lambda) \frac{\partial \varphi'(x, t, \lambda)}{\partial \lambda} \right) \Big|_0^\pi + \\ &+ 2 \int_0^\pi p(x+t)\varphi^2(x, t, \lambda) dx \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

находим

$$\begin{aligned} &2c_n^2(t)\dot{\xi}_n(t) - 2 \int_0^\pi p(x+t)\varphi^2(x, t, \xi_n(t)) dx = \\ &= \varphi'(\pi, t, \xi_n(t)) \frac{\partial \varphi(\pi, t, \xi_n(t))}{\partial \lambda} - \varphi(\pi, t, \xi_n(t)) \frac{\partial \varphi'(\pi, t, \xi_n(t))}{\partial \lambda}. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Из (3.2.13), (3.2.15) и тождества $\varphi(\pi, t, \xi_n(t)) \cos \alpha + \varphi'(\pi, t, \xi_n(t)) \sin \alpha = 0$,

получим

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_n(t) &= \frac{(q(t) + 2\xi_n(t)p(t) - \xi_n^2(t))[\varphi^2(\pi, t, \xi_n(t)) - \sin^2 \alpha]}{-\frac{\varphi(\pi, t, \xi_n(t))}{\sin \alpha} \left[\frac{\partial \varphi(\pi, t, \xi_n(t))}{\partial \lambda} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi'(\pi, t, \xi_n(t))}{\partial \lambda} \sin \alpha \right]} - \\
&= \frac{[\varphi'^2(\pi, t, \xi_n(t)) - \cos^2 \alpha]}{\frac{\varphi'(\pi, t, \xi_n(t))}{\cos \alpha} \left[\frac{\partial \varphi(\pi, t, \xi_n(t))}{\partial \lambda} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi'(\pi, t, \xi_n(t))}{\partial \lambda} \sin \alpha \right]} = \\
&= \frac{(\xi_n^2(t) - 2\xi_n(t)p(t) - q(t)) \left[\frac{\varphi(\pi, t, \xi_n(t))}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\varphi(\pi, t, \xi_n(t))} \right] \sin^2 \alpha}{\frac{\partial \varphi(\pi, t, \xi_n(t))}{\partial \lambda} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi'(\pi, t, \xi_n(t))}{\partial \lambda} \sin \alpha} + \\
&+ \frac{\left[\frac{\cos \alpha}{\varphi'(\pi, t, \xi_n(t))} - \frac{\varphi'(\pi, t, \xi_n(t))}{\cos \alpha} \right] \cos^2 \alpha}{\frac{\partial \varphi(\pi, t, \xi_n(t))}{\partial \lambda} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi'(\pi, t, \xi_n(t))}{\partial \lambda} \sin \alpha}. \tag{3.2.16}
\end{aligned}$$

Из равенств

$$\begin{aligned}
\theta(\pi, t, \xi_n(t))\varphi'(\pi, t, \xi_n(t)) - \theta'(\pi, t, \xi_n(t))\varphi(\pi, t, \xi_n(t)) &= 1, \\
\varphi(\pi, t, \xi_n(t)) \cos \alpha + \varphi'(\pi, t, \xi_n(t)) \sin \alpha &= 0 \tag{3.2.17}
\end{aligned}$$

следует, что

$$\varphi(\pi, t, \xi_n(t))[\theta(\pi, t, \xi_n(t)) \cos \alpha + \theta'(\pi, t, \xi_n(t)) \sin \alpha] = -\sin \alpha, \tag{3.2.18}$$

$$\varphi'(\pi, t, \xi_n(t))[\theta(\pi, t, \xi_n(t)) \cos \alpha + \theta'(\pi, t, \xi_n(t)) \sin \alpha] = \cos \alpha. \tag{3.2.19}$$

Выразим функцию Ляпунова $\Delta(\lambda) = s'(\pi, t, \lambda) + c(\pi, t, \lambda)$ через решения $\theta(x, t, \lambda)$ и $\varphi(x, t, \lambda)$:

$$c(x, t, \lambda) = \theta(x, t, \lambda) \cos \alpha - \varphi(x, t, \lambda) \sin \alpha,$$

$$s'(x, t, \lambda) = \theta'(x, t, \lambda) \sin \alpha + \varphi'(x, t, \lambda) \cos \alpha,$$

$$\Delta(\lambda) = \theta(\pi, t, \lambda) \cos \alpha + \theta'(\pi, t, \lambda) \sin \alpha - \varphi(\pi, t, \lambda) \sin \alpha + \varphi'(\pi, t, \lambda) \cos \alpha. \tag{3.2.20}$$

В силу (3.2.17), (3.2.18), (3.2.19), (3.2.20) находим

$$\Delta(\xi_n(t)) = -\frac{\sin \alpha}{\varphi(\pi, t, \xi_n(t))} - \frac{\varphi(\pi, t, \xi_n(t))}{\sin \alpha},$$

$$\Delta(\xi_n(t)) = \frac{\cos \alpha}{\varphi'(\pi, t, \xi_n(t))} + \frac{\varphi'(\pi, t, \xi_n(t))}{\cos \alpha}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\varphi(\pi, t, \xi_n(t))}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\varphi(\pi, t, \xi_n(t))} = \sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}, \quad (3.2.21)$$

$$\frac{\cos \alpha}{\varphi'(\pi, t, \xi_n(t))} - \frac{\varphi'(\pi, t, \xi_n(t))}{\cos \alpha} = \sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}. \quad (3.2.22)$$

Подставляя (3.2.21) и (3.2.22) в (3.2.16) получим

$$\dot{\xi}_n(t) = \frac{[(\xi_n^2(t) - 2\xi_n(t)p(t) - q(t)) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha] \sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{\frac{\partial}{\partial \lambda} (\varphi(\pi, t, \xi_n(t)) \cos \alpha + \varphi'(\pi, t, \xi_n(t)) \sin \alpha)}. \quad (3.2.23)$$

Принимая во внимание разложение

$$\varphi(\pi, t, \lambda) \cos \alpha + \varphi'(\pi, t, \lambda) \sin \alpha = \pi \sin^2 \alpha (\lambda - \xi_0^-)(\lambda - \xi_0^+) \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \xi_k}{k}$$

преобразуем уравнение (3.2.23):

$$\dot{\xi}_n(t) = \frac{[\xi_n^2(t) - 2\xi_n(t)p(t) - q(t) + ctg^2 \alpha] \sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{\Phi'(\xi_n(t))}, \quad n \in Z \setminus \{0\}, \quad (3.2.24)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \pi (\lambda - \xi_0^-)(\lambda - \xi_0^+) \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \xi_k}{k}, \\ \Delta^2(\lambda) - 4 &= -4\pi^2 (\lambda - \lambda_0^-)(\lambda - \lambda_0^+) \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_k^-)(\lambda - \lambda_k^+)}{k^2}, \\ \sigma_n(t) &= \text{sign} \left\{ \frac{\varphi(\pi, t, \xi_n(t))}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\varphi(\pi, t, \xi_n(t))} \right\}. \end{aligned}$$

Точно также выводим, что

$$\dot{\xi}_0^\pm(t) = \frac{[(\xi_0^\pm(t))^2 - 2\xi_0^\pm(t)p(t) - q(t) + ctg^2 \alpha] \sigma_0^\pm(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_0^\pm(t)) - 4}}{\Phi'(\xi_0^\pm(t))}, \quad (3.2.25)$$

где

$$\sigma_0^\pm(t) = \text{sign} \left\{ \frac{\varphi(\pi, t, \xi_0^\pm(t))}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\varphi(\pi, t, \xi_0^\pm(t))} \right\}.$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

Т Е О Р Е М А 3.2.1. Пусть задача (3.2.1)+(3.2.2) имеет непрерывный спектр

$$E_{\text{ess}} = R^1 \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n^-, \lambda_n^+) \quad (3.2.26)$$

и спектральные параметры $\xi_n, \sigma_n, n \in Z \setminus \{0\}, \xi_0^\pm, \sigma_0^\pm$. Тогда при всех действительных значениях параметра $t \in (-\infty, \infty)$, следующая задача

$$\begin{aligned} -y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y - \lambda^2 y &= 0, \quad 0 < x < \infty \\ y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha &= 0, \quad \alpha \in (0, \pi), \end{aligned}$$

имеет тот же непрерывный спектр (3.2.26) и спектральные параметры $\xi_n(t), \sigma_n(t), n \in Z \setminus \{0\}, \xi_0^\pm(t), \sigma_0^\pm(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0^\pm(t) &= \frac{[(\xi_0^\pm(t))^2 - 2\xi_0^\pm(t)p(t) - q(t) + ctg^2 \alpha] \sigma_0^\pm(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_0^\pm(t)) - 4}}{\Phi'(\xi_0^\pm(t))}, \\ \dot{\xi}_n(t) &= \frac{[\xi_n^2(t) - 2\xi_n(t)p(t) - q(t) + ctg^2 \alpha] \sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{\Phi'(\xi_n(t))}, \quad n \in Z \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \pi(\lambda - \xi_0^-)(\lambda - \xi_0^+) \prod_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \xi_k}{k}, \\ \Delta^2(\lambda) - 4 &= -4\pi^2(\lambda - \lambda_0^-)(\lambda - \lambda_0^+) \prod_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_k^-)(\lambda - \lambda_k^+)}{k^2}, \end{aligned}$$

а также начальным условиям

$$\begin{aligned} \xi_n(t) = \xi_n(0) = \xi_n, \quad \sigma_n(t) = \sigma_n(0) = \sigma_n, \quad n \in Z \setminus \{0\}, \\ \xi_0^\pm(t) = \xi_0^\pm(0) = \xi_0^\pm, \quad \sigma_0^\pm(t) = \sigma_0^\pm(0) = \sigma_0^\pm. \end{aligned}$$

Знак $\sigma_n(t)$, $(\sigma_0^\pm(t))$ меняются на противоположный при каждом столкновении спектрального параметра $\xi_n(t)$, $(\xi_0^\pm(t))$ с границами своей лакуны.

§ 3.3. Формулы следов для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим конечнозонным потенциалом на полупрямой.

Рассмотрим уравнение

$$-y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (3.3.1)$$

с граничным условием

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi). \quad (3.3.2)$$

Всюду в дальнейшем (см. [13]) будем предполагать, что выполняются условия (а) и (б) из § 1.1., гл. 1., а также уравнение (3.3.1) конечнозонное (см. §1.1., гл. 3).

В § 1, гл. III были введены многочлены

$$R(\lambda) = \lambda^{2N+2} + r_1 \lambda^{2N+1} + r_2 \lambda^{2N} + \dots, \quad (3.3.3)$$

$$P(\lambda) = \lambda^N + p_1 \lambda^{N-1} + p_2 \lambda^{N-2} + \dots, \quad (3.3.4)$$

$$S(\lambda) = \lambda^{N+2} + s_1 \lambda^{N+1} + s_2 \lambda^N + s_3 \lambda^{N-1} + s_4 \lambda^{N-2} + \dots, \quad (3.3.5)$$

$$Q(\lambda) = q_0 \lambda^{N-2} + q_1 \lambda^{N-3} + \dots \quad (3.3.6)$$

и с помощью них были определены следующие полиномы

$$A(\lambda) = S(\lambda) \sin^2 \alpha + P(\lambda) \cos^2 \alpha + 2Q(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (3.3.7)$$

$$B(\lambda) = S(\lambda) \cos^2 \alpha + P(\lambda) \sin^2 \alpha - 2Q(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (3.3.8)$$

$$C(\lambda) = S(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha - P(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha + Q(\lambda) \cos 2\alpha, \quad (3.3.9)$$

а также была показана, что

$$A(\lambda)B(\lambda) - C^2(\lambda) = R(\lambda). \quad (3.3.10)$$

Подставляя (3.3.4)-(3.3.6) в (3.3.7)-(3.3.9) имеем

$$A(\lambda) = \sin^2 \alpha \cdot \lambda^{N+2} + s_1 \sin^2 \alpha \cdot \lambda^{N+1} + (s_2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \lambda^N +$$

$$\begin{aligned}
& + (s_3 \sin^2 \alpha + p_1 \cos^2 \alpha + 2q_0 \sin \alpha \cos \alpha) \lambda^{N-1} + \\
& + (s_4 \sin^2 \alpha + p_2 \cos^2 \alpha + 2q_1 \sin \alpha \cos \alpha) \lambda^{N-2} + \dots, \quad (3.3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(\lambda) = & \cos^2 \alpha \cdot \lambda^{N+2} + s_1 \cos^2 \alpha \cdot \lambda^{N+1} + (s_2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \lambda^N + \\
& + (s_3 \cos^2 \alpha + p_1 \sin^2 \alpha - 2q_0 \sin \alpha \cos \alpha) \lambda^{N-1} + \\
& + (s_4 \cos^2 \alpha + p_2 \sin^2 \alpha - 2q_1 \sin \alpha \cos \alpha) \lambda^{N-2} + \dots, \quad (3.3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\lambda) = & \sin \alpha \cos \alpha \cdot \lambda^{N+2} + s_1 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \lambda^{N+1} + (s_2 - 1) \sin \alpha \cos \alpha \cdot \lambda^N + \\
& + (s_3 \sin \alpha \cos \alpha - p_1 \sin \alpha \cos \alpha + q_0 \cos 2\alpha) \lambda^{N-1} + \\
& + (s_4 \sin \alpha \cos \alpha - p_2 \sin \alpha \cos \alpha + q_1 \cos 2\alpha) \lambda^{N-2} + \dots. \quad (3.3.13)
\end{aligned}$$

Если ввести следующие обозначения

$$A(\lambda) = \sin^2 \alpha \cdot [\lambda^{N+2} + a_1 \lambda^{N+1} + a_2 \lambda^N + a_3 \lambda^{N-1} + a_4 \lambda^{N-2} + \dots], \quad (3.3.14)$$

$$B(\lambda) = \cos^2 \alpha \cdot [\lambda^{N+2} + b_1 \lambda^{N+1} + b_2 \lambda^N + b_3 \lambda^{N-1} + b_4 \lambda^{N-2} + \dots], \quad (3.3.15)$$

$$C(\lambda) = \sin \alpha \cos \alpha \cdot [\lambda^{N+2} + c_1 \lambda^{N+1} + c_2 \lambda^N + c_3 \lambda^{N-1} + c_4 \lambda^{N-2} + \dots], \quad (3.3.16)$$

то для коэффициентов $a_k, b_k, c_k, k = \overline{1,4}$ получим равенства

$$\begin{cases} a_1 = s_1, \\ a_2 = s_2 + ctg^2 \alpha, \\ a_3 = s_3 + p_1 ctg^2 \alpha + 2q_0 ctg \alpha, \\ a_4 = s_4 + p_2 ctg^2 \alpha + 2q_1 ctg \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = s_1, \\ b_2 = s_2 + tg^2 \alpha, \\ b_3 = s_3 + p_1 tg^2 \alpha - 2q_0 tg \alpha, \\ b_4 = s_4 + p_2 tg^2 \alpha - 2q_1 tg \alpha, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = s_1, \\ c_2 = s_2 - 1, \\ c_3 = s_3 - p_1 + q_0 \cdot (ctg \alpha - tg \alpha), \\ c_4 = s_4 - p_2 + q_1 \cdot (ctg \alpha - tg \alpha). \end{cases}$$

Отсюда находим, что

$$a_1 = b_1 = c_1, \quad (3.3.17)$$

$$a_2 = c_2 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad (3.3.18)$$

$$b_2 = c_2 + \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad (3.3.19)$$

$$a_3 = c_3 + \frac{p_1}{\sin^2 \alpha} + \frac{q_0}{\sin \alpha \cos \alpha}, \quad (3.3.20)$$

$$b_3 = c_3 + \frac{p_1}{\cos^2 \alpha} - \frac{q_0}{\sin \alpha \cos \alpha}, \quad (3.3.21)$$

$$a_4 = c_4 + \frac{p_2}{\sin^2 \alpha} + \frac{q_1}{\sin \alpha \cos \alpha}, \quad (3.3.22)$$

$$b_4 = c_4 + \frac{p_2}{\cos^2 \alpha} - \frac{q_1}{\sin \alpha \cos \alpha}. \quad (3.3.23)$$

Подставляем (3.3.14)-(3.3.16) в (3.3.10) и приравняем коэффициенты при степенях λ^{2N+3} , λ^{2N+2} , λ^{2N+1} , λ^{2N} . Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \cdot R(\lambda) &= [\lambda^{N+2} + a_1 \lambda^{N+1} + a_2 \lambda^N + a_3 \lambda^{N-1} + a_4 \lambda^{N-2} + \dots] \times \\ &\times [\lambda^{N+2} + b_1 \lambda^{N+1} + b_2 \lambda^N + b_3 \lambda^{N-1} + b_4 \lambda^{N-2} + \dots] - \\ &- [\lambda^{N+2} + c_1 \lambda^{N+1} + c_2 \lambda^N + c_3 \lambda^{N-1} + c_4 \lambda^{N-2} + \dots] \times \\ &\times [\lambda^{N+2} + c_1 \lambda^{N+1} + c_2 \lambda^N + c_3 \lambda^{N-1} + c_4 \lambda^{N-2} + \dots] = \\ &= (a_1 + b_1 - 2c_1) \cdot \lambda^{2N+3} + (a_2 + a_1 b_1 + b_2 - c_1^2 - c_2) \cdot \lambda^{2N+2} + \\ &+ (a_3 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + b_3 - 2c_1 c_2 - 2c_3) \cdot \lambda^{2N+1} + \\ &+ (a_4 + a_3 b_1 - a_2 b_2 + a_1 b_3 + b_4 - c_2^2 - 2c_1 c_3 - 2c_4) \cdot \lambda^{2N} + \dots, \end{aligned}$$

то отсюда имеем

$$a_1 + b_1 - 2c_1 = 0,$$

$$(a_2 + b_2 - 2c_2) + a_1 b_1 - c_1^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha},$$

$$(a_3 + b_3 - 2c_3) + (a_2 b_1 + a_1 b_2 - 2c_1 c_2) = \frac{r_1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}, \quad (3.3.24)$$

$$(a_4 + b_4 - 2c_4) + (a_3 b_1 + a_1 b_3 - 2c_1 c_3) + (a_1 b_2 - c_2^2) = \frac{r_2}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}. \quad (3.3.25)$$

Из (3.3.17)- (3.3.23) и (3.3.24), (3.3.25) выводим равенства

$$\frac{p_1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} + \frac{a_1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{r_1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha},$$

и

$$\frac{p_1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} + a_1 \cdot \frac{p_1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} + \frac{a_2 - ctg^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{r_2}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha},$$

т.е

$$p_1 = r_1 - a_1 \quad (3.3.26)$$

и

$$p_2 + a_1 p_1 + a_2 - ctg^2 \alpha = r_2. \quad (3.3.27)$$

Из формул (19) и (20) работы [15] Г.Ш.Гусейнова ("О квадратичном пучке операторов Штурма-Лиувилля с периодическими коэффициентами", Вестн. МГУ, сер.1, мат.-мех., 1984, №3, стр. 14-21.) легко получаются равенства

$$p(0) = p_1 - \frac{1}{2} r_1, \quad (3.3.28)$$

$$q(0) + 2p^2(0) = \frac{1}{2} r_1^2 - r_2 + 2p_2 - p_1^2. \quad (3.3.29)$$

Учитывая (3.3.26) перепишем (3.3.28) в виде

$$p(0) = \frac{1}{2} r_1 - a_1. \quad (3.3.30)$$

Из (3.3.26) и (3.3.27) вытекает, что

$$p_2 = r_2 - a_1 r_1 + a_1^2 - a_2 + ctg^2 \alpha. \quad (3.3.31)$$

Подставляя в (3.3.29) выражения из (3.3.26) и (3.3.31) выводим равенство

$$q(0) + 2p^2(0) = 2ctg^2 \alpha - \frac{1}{2} r_1^2 + r_2 + a_1^2 - 2a_2. \quad (3.3.32)$$

Пользуясь теоремой Виета находим, что

$$\begin{aligned} a_1 &= -\xi_{n_0}^+ - \xi_{n_0}^- - \sum_{n_0 \neq k=0}^N \xi_k, \\ a_2 &= \xi_{n_0}^+ \xi_{n_0}^- + \sum_{n_0 \neq m=0}^N \xi_{n_0}^+ \xi_m + \sum_{n_0 \neq m=0}^N \xi_{n_0}^- \xi_m + \sum_{\substack{0 \leq k < m \leq N, \\ k, m \neq n_0}} \xi_k \xi_m = \\ &= \frac{1}{2} (\xi_{n_0}^+ + \xi_{n_0}^- + \sum_{n_0 \neq k=0}^N \xi_k)^2 - \frac{1}{2} \left\{ (\xi_{n_0}^+)^2 + (\xi_{n_0}^-)^2 + \sum_{n_0 \neq k=0}^N \xi_k^2 \right\}, \\ r_1 &= -\sum_{k=0}^N (\lambda_k^+ + \lambda_k^-), \end{aligned}$$

$$r_2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^N (\lambda_k^+ + \lambda_k^-) \right\}^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [(\lambda_k^+)^2 + (\lambda_k^-)^2].$$

Используя эти равенства из (3.3.30) и (3.3.32) получим

$$p(0) = - \left(\frac{\lambda_{n_0}^+ + \lambda_{n_0}^-}{2} - \xi_{n_0}^+ - \xi_{n_0}^- \right) - \sum_{n_0 \neq k=0}^N \left(\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^-}{2} - \xi_k \right), \quad (3.3.33)$$

$$q(0) + 2p^2(0) = 2ctg^2 \alpha - \left(\frac{(\lambda_{n_0}^+)^2 + (\lambda_{n_0}^-)^2}{2} - (\xi_{n_0}^+)^2 - (\xi_{n_0}^-)^2 \right) - \sum_{n_0 \neq k=0}^N \left(\frac{(\lambda_k^+)^2 + (\lambda_k^-)^2}{2} - \xi_k^2 \right). \quad (3.3.34)$$

Если в уравнении (3.3.1) вместо функций $p(x)$ и $q(x)$ рассмотреть $p(x+t)$ и $q(x+t)$, то из (3.3.33) и (3.3.34) получаются формулы

$$p(t) = - \left(\frac{\lambda_{n_0}^+ + \lambda_{n_0}^-}{2} - \xi_{n_0}^+(t) - \xi_{n_0}^-(t) \right) - \sum_{n_0 \neq k=0}^N \left(\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^-}{2} - \xi_k(t) \right), \quad (3.3.35)$$

$$q(t) + 2p^2(t) = 2ctg^2 \alpha - \left(\frac{(\lambda_{n_0}^+)^2 + (\lambda_{n_0}^-)^2}{2} - (\xi_{n_0}^+(t))^2 - (\xi_{n_0}^-(t))^2 \right) - \sum_{n_0 \neq k=0}^N \left(\frac{(\lambda_k^+)^2 + (\lambda_k^-)^2}{2} - \xi_k^2(t) \right). \quad (3.3.36)$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

Т Е О Р Е М А 3.3.1. Если задаче (3.3.1)+(3.3.2) соответствуют лакуны $(\lambda_0^-, \lambda_0^+)$, \dots , $(\lambda_{n_0}^-, \lambda_{n_0}^+)$, \dots , $(\lambda_N^-, \lambda_N^+)$ и спектральные параметры $\xi_0 \in [\lambda_0^-, \lambda_0^+], \dots$, $\xi_{n_0}^+, \xi_{n_0}^- \in [\lambda_{n_0}^-, \lambda_{n_0}^+], \dots$, $\xi_N \in [\lambda_N^-, \lambda_N^+]$, $\sigma_0 = \pm 1, \dots$, $\sigma_{n_0}^+ = \pm 1$, $\sigma_{n_0}^- = \pm 1, \dots$, $\sigma_N = \pm 1$, (где $(\lambda_{n_0}^-, \lambda_{n_0}^+)$ лакуна, содержащая точку $\lambda = 0$), то имеют место следующие формулы:

$$p(t) = - \left(\frac{\lambda_{n_0}^+ + \lambda_{n_0}^-}{2} - \xi_{n_0}^+(t) - \xi_{n_0}^-(t) \right) - \sum_{n_0 \neq k=0}^N \left(\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^-}{2} - \xi_k(t) \right), \quad (3.3.37)$$

$$q(t) + 2p^2(t) = 2ctg^2 \alpha - \left(\frac{(\lambda_{n_0}^+)^2 + (\lambda_{n_0}^-)^2}{2} - (\xi_{n_0}^+(t))^2 - (\xi_{n_0}^-(t))^2 \right) -$$

$$- \sum_{n_0 \neq k=0}^N \left(\frac{(\lambda_k^+)^2 + (\lambda_k^-)^2}{2} - \xi_k^2(t) \right). \quad (3.3.38)$$

где $\xi_{n_0}^+(t)$, $\xi_{n_0}^-(t)$, $\xi_k(t)$, $k = \overline{0, N}$, $k \neq n_0$ спектральные параметры соответствующие коэффициентам $p(x+t)$ и $q(x+t)$.

Замечание 3.3.1. При решении обратной задачи для задачи (3.3.1)+(3.3.2) по формулам (3.3.37), (3.3.38) восстанавливаются коэффициенты уравнения (3.3.1) $p(x)$ и $q(x)$. А спектральные параметры $\xi_{n_0}^+(t)$, $\xi_{n_0}^-(t)$, $\xi_k(t)$, $k = \overline{0, N}$, $k \neq n_0$ находятся решая систему дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алимов Ш.А. О работах А.Н.Тихонова по обратным задачам для уравнения Штурма-Лиувилля.- УМН, 1976, т. 31, № 6.
2. Амбарцумян В.А. Über eine Frage der Eigenwerttheorie. //Zeitschr. Für physik. 1929, Bd. 53. s. 690-695.
3. Ахиезер Н.И. Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов.// ДАН СССР, 1961, т.141, № 2, с. 262-266.
4. Бабажанов Б.А. Вычисление регуляризованного следа оператора Дирака с особенностями в потенциале. // Тезисы докл. международной научн. конференции "Ill - posed and non-classical problems of mathematical physics and analysis". September 11-15, 2000, Samarkand, стр. 21-22.
5. Бабажанов Б.А. Некоторые тождества для квадратов собственных функций квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.// Тезисы докладов второй международной конференции посвященной 80-летию члена-корреспондента РАН, проф. Л.Д.Кудрявцева. г. Москва 24-26 марта 2003 г. стр. 140-142.
6. Бабажанов Б.А. Тождества для квадратов собственных функций квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом. // ДАН РУз, 2003 г., № 2, стр.17-20.
7. Бабажанов Б.А., Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.// Журнал "Дифференциальные уравнения", (Россия), 2004 г., т. 40, № 12, стр. 1-8.
8. Блох А.Ш. Об определения дифференциального уравнения по его спектральной матрице-функции. -ДАН СССР, 1953, 42, № 2, с. 209-213.
9. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillschen Eigenwertaufgabe, Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte.// Acta Math. 78. (1946), 1-96.
10. Велиев С.Г. Обратная задача для системы Дирака на всей оси. Рукопись депонирована в ВИНТИ, № 4917-72.

11. Веселов А.П. Конечнозонные потенциалы и интегрируемые системы на сфере с квадратичным потенциалом.// Функционал анализ и его приложение. 1980 г., т. 14, № 1, стр. 48-50 .
12. Gardner G., Creen I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteweg-de Vries equation.// Phys. Rev. Lett., 1967 , v.19, p.1095-1098.
13. Гасымов М.Г., Гусейнов Г.Ш. Определение оператора диффузии по спектральным данным. – Докл. АН АзССР, 1981, 37, № 2, с. 19-23.
14. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. Докл. АН СССР, 1953, 88, № 4 с. 953-956.
15. Гусейнов Г.Ш. О квадратичном пучке операторов Штурма-Лиувилля с периодическими коэффициентами. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, мат., мех., 1984, № 3, стр. 14-21.
16. Гусейнов Г.Ш. Асимптотические формулы для решений и собственных значений квадратичного пучка уравнений Штурма-Лиувилля. Препринт № 113, Институт физики АН Азерб. ССР, Баку-1984, 49 с.
17. Гусейнов Г.Ш. Спектр и разложения по собственным функциям квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическими коэффициентами. Сб. Спектральная теория операторов и ее приложения, вып. 6, с. 56-97, Изд-во «Элм», Баку-1985.
18. Гусейнов И.М., Набиев И.М. Об одном классе обратных задач для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля.// Журнал "Дифференциальные уравнения", (Россия), 2000 г., т. 36, № 3, стр. 418-420.
19. Daskalov V., Khristov E. Explicit formulae for the inverse problem for the regular Dirac operator. Inv.probl. 16 (2000) 247-258.
20. Djeft P., Trubowitr E. An identity Among squares of eigenfunctions. //Comm. On Pure and Appl. Math., 1981, V. 34., p. 713-717 .
21. Динабург Е.И., Синай Я.Г. Об одномерном уравнении Шредингера с квазипериодическим потенциалом.// Функционал анализ. 1975 т. 9, № 4, с. 8-21.

22. Дубровин Б.А. Периодическая задача Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов.// Функц. анализ., 1975, т. 9, № 3, с. 41-51.
23. Дубровин Б. А. и Новиков С. П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза.// ЖЭТФ, 1974, т. 67, № 12, с. 2131-2143.
24. Eastham M.S. The spectral Theory of Periodic differential equations. – Edinburgh and London: sc. Acad. Press, 1973.
25. Jaulent M., Miodek I. Nonlinear evolution equation associated with energy-dependent Schrodinger potentials.// Letters in Math. Phys., 1976, 1, № 3, p.243-250.
26. Желудев В.А. О возмущении спектра одномерного самосопряженного оператора Шредингера с периодическим потенциалом.// В.кн.: Проблемы матем. Физики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1970, с. 61-82.
27. Желудев В.А. О собственных значениях возмущенного одномерного оператора Шредингера с периодическим потенциалом. -В.кн.: Проблемы матем. физики. Изд-во ЛГУ, 1967, вып 2, с. 108-123.
28. Жидков Е.П., Христов Е.Х. О спектральных задачах математической физики, связанных с нелинейными уравнениями типа КдФ. Физика элементарных частиц и атомного ядра., 1981, т. 22, вып. I, стр. 204-264.
29. Замонов М.З. Бесконечнозонные потенциалы одномерного оператора Дирака и их почти периодичность. – Деп. в ВИНТИ 19 июля 1985 г., № 5273-85, 66 с.
30. Замонов М.З. Бесконечнозонные потенциалы одномерного оператора Дирака.// Дан.Тадж. ССР, 1985, № 11, с. 615-619.
31. Замонов М.З., Хасанов А.Б. О разрешимости обратной задачи для системы Дирака на всей оси.// Вестник МГУ, сер. 1, 1985, № 6, стр. 3-7.
32. Захаров В.Е., Манаков С.В., С.П.Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: «Наука», 1980.
33. Ибрагимов А.М. Обратная задача для оператора Дирака с периодическим потенциалом на полуоси. Тезисы докладов Международной конференции

по функциональному анализу, Киев (Украина), 22-26 август 2001 г., стр.38-39.

34. Ибрагимов А.М. Аналог теоремы единственности Г. Борга для оператора Дирака с периодическим потенциалом на полупрямой. // ДАН РУз., 2002, № 1, стр. 11-14.
35. Ибрагимов А.М., Яхшимуратов А.Б. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом на полуоси. Узбекский математический журнал, 2001, № 5-6, стр. 20-24.
36. Итс А.Р. Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений.// Вестн. Ленингр. ун-та, 1976, № 7, вып. 2, с. 39-46.
37. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N -солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза. Теор. и мат. физика, 1975, т. 23, № 1, с. 51-68.
38. Канторович Л.В. Акилов Г.П. Функциональный анализ. М: Наука, 1974, 744 с.
39. Лазуткин В.Ф., Панкратова Т.Ф. Асимптотика ширины лакун в спектре оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом. Докл. АН СССР, 215, № 5, 1048-1051.
40. Lax P. D. Trace Formulas for the schroedinger operator.//Comm. Pure and Appl. Math. 1994. Vol. XLVII, 503-512.
41. Левитан Б.М. Почти-периодичность бесконечнозонных потенциалов.// Изв. АН СССР, сер. Матем. 1981, т. 45, № 2, с. 291-320.
42. Левитан Б.М. Обратная задача Штурма-Лиувилля для конечнозонных и бесконечнозонных потенциалов.// Труды Москов. Мат. Общества, 1982, т. 45, с. 3-36.
43. Левитан Б.М. О замыкании множества конечнозонных потенциалов.// Мат. сб., 1984, 123. (165), № 1, с. 69-91.
44. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953, 396 с.

45. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. Изв. "Наука", 1984, 239 с.
46. Левитан Б.М., Гусейнов Г.Ш. Вычисление главного члена асимптотики длины лакуны периодической задачи Штурма-Лиувилля. СЕРДИКА Българско математическо списание. Том № 3, 1977, с. 273-280.
47. Левитан Б.М., Маматов А.Э. Оценка матрицы-функции Коши для системы Дирака в случае конечнозонных непериодических потенциалов.// Мат. заметки., 1993, т. 53, вып. 4., стр. 62-76.
48. Левитан Б.М., Савин А.В. Обратная задача на полупрямой для конечнозонных потенциалов.// Вестн. Моск. Ун-та, сер. 1, математика, механика, 1988, № 1, стр. 21-28.
49. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: "Наука" 1988 г.
50. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. Москва, "Наука", 1970, 672 с.
51. Левитан Б.М., Хасанов А.Б. Оценка функции Коши в случае конечнозонных непериодических потенциалов.// Функци. анализ и его прил., 1992, т. 26, № 2, стр. 18-28.
52. Magnus W., Winkler W. Hill's equation. - New.York: Interscience wiley, 1966.
53. Максудов Ф.Г., Гусейнов Г.Ш. К решению обратной задачи рассеяния для квадратичного пучка одномерных операторов Шредингера на всей оси. // ДАН АзССР, 1985, стр.42-46.
54. Маматов А.Э. Обратная задача на полупрямой для оператора Дирака в случае конечнозонных потенциалов. // УзМЖ, 1991, № 5, с. 44-49.
55. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977, с. 332.
56. Марченко В.А., Островский И.В. Характеристика спектра оператора Хилла.// Мат.сб., 1975, 97, вып. 4, с. 540-606.
57. Мисюра Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I, II.//

- сб. “Теория функций, функц. анализ и их приложения”, Харьков, 1978, вып. 30, с.90-101, 1979, вып. 31 стр. 102-109.
58. McKean H.P. and van Moerbeke P. The spectrum of Hill’s equations, *Invent. Math.* 30, 1975, p. 217 – 274.
59. McKean H.P., Trubowitz E. Hill’s operator and Hyperelliptic Function Theory in the presence of infinitely Many Branch Points.// *Comm. Pure Appl. Math.*, 1976, v.29, p.143-226.
60. Moser J. An example of a Schroedinger equation with almost periodic potential and nowhere dense spectrum.// *Comm. Math. Helvetici*, 1981, v. 56, p. 198-224.
61. Мозер Ю. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем.// *УМН*, т. 36, вып. 5 (221), 1981, стр. 109-151.
62. Новиков С.П. Периодическая задача Кортевега-де Фриза I.// *Функц. анализ*, 1974, т. 8, № 3, с. 54 – 66.
63. Панахов Э.С. Обратная задача для системы Дирака по двум частично заданным спектрам. *ВИНИТИ АН СССР* , 1981, № 3354-81, 29 стр.
64. Панахов Э.С. Об обратной задаче по двум спектрам для дифференциального оператора с особенностью в нуле. *ДАН Азерб.ССР* , т. XXXVI, № 10, (1980), стр. 6-10.
65. Рофе-Бекетов Ф.С. Признак конечности числа дискретных уровней, вносимых в лакуны непрерывного спектра возмущениями периодического потенциала. - *ДАН СССР*, 1964, № 3, с. 515-518.
66. Рофе-Бекетов Ф.С. Спектральная матрица и обратная задача Штурма-Лиувилля на всей оси. *Теория функций, функц. анализ и их прил.*, 1967, № 4, с. 189-197.
67. Рофе-Бекетов Ф.С. Возмущение оператора Хилла, имеющее первый момент и отличный от нуля интеграл, вносит в далекие спектральные лакуны по одному дискретному уровню.// *Матем. физика и функционал. анализ*, вып. 4, Харьков, 1973, с. 158-159.

68. Рофе-Бекетов Ф.С., Холькин А.М. Спектральный анализ дифференциальных операторов. Связь спектральных и осцилляционных свойств. // г. Мариуполь, 2001 г., 331 с.
69. Савин А.В. Тождество для квадратов собственных функций бесконечнозонного оператора Штурма-Лиувилля. // Вестн. Моск. ун-та. сер. 1. мат. мех., 1984, № 6, стр. 83-85.
70. Станкевич И.В. Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла.// ДАН СССР, 1970, т. 192, № 1, стр. 34-37.
71. Титчмарш Э.Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка: В 2-х т. - М.: ИЛ, 1961, - т. 2.
72. Тихонов А. Н. О единственности решения задачи электроразведки. // ДАН. 1949, т. 69, № 6, с. 797-800.
73. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials.// Comm. Pure. Appl. Math., 1977, V. 30, p. 321-337.
74. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния.// УМН, 1959, т. 14, № 4, с. 57-119.
75. Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом. Узбекский математический журнал, 2001 г., № 3-4, стр. 48-55.
76. Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М. Вложенные собственные значения на фоне конечнозонных потенциалов оператора Дирака.// ДАН РУз., 2000, № 3, стр. 10-13.
77. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об одном способе вычисления регуляризованного следа для оператора Дирака.// Узбекский математический журнал, № 4, 1999 г., стр. 77-82.
78. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б., Бабажанов Б.А. Об обратной задаче для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на полуоси. //Труды международной научной конференции. "Современные проблемы

- математической физики и информационной технологии”. Ташкент. 2003 г., стр.261-262.
79. Hochstadt H. On a Hill's equation with double eigenvalues.// Proc. Amer. Math. Soc. 65 (1977), 343-374.
80. Hochstadt H. A Generalization of Borg's Inverse Theorem for Hill's Equations.// Journal of mathematical analysis and applications 102 (1984), 599-605.
81. Hochstadt H. On the determination of Hill's equation from its spectrum.// Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. V.19. P. 353-362.
82. Hochstadt H. The inverse Sturm-Liouville Problem.// Comm. On Pure and appl.math. vol. XXVI, 1973, 715-729.
83. Hochstadt H., Cazes A. Inverse Sturm-Liouville Problem and Hill's Equation.// Journal of mathematical analysis and applications 111, 606-621 , (1985).
84. Hochstadt H., Goldberg W. An inverse problem for a differential operator with a mixed spectrum. // J. Math. Anal. And Appl., 1985, 105, 206 – 221.
85. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: “Наука”, 1969.
86. Watson B.A. Inverse spectral problems for weighted Dirac systems. Inv.probl. 15 (1999) 793-805.
87. Юрко В.А. О восстановлении пучков дифференциальных операторов на полуоси.// Мат. заметки., 2000 г., № , стр. 316-320.
88. Яхшимуратов А.Б., Бабажанов Б.А. Вычисление регуляризованного следа оператора Дирака с особенностями в потенциале.// УзМЖ, 2000 г., № 5-6, стр. 82-87.
89. Яхшимуратов А.Б., Бабажанов Б.А. Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.// УзМЖ, 2003 г., № 2, стр. 69-74.
90. A. Cabada, A. Yakhshimuratov. The System of Kaup Equations with a Self-Consistent Source in the Class of Periodic Functions. J.Math. Phys., Anal., Geom., 2013, vol. 9, No. 3, pp. 287-303.

91. V. V. Kravchenko, S. M. Torba and U. Velasco-Garcia. Spectral parameter power series for polynomial pencils of Sturm-Liouville operators and Zakharov-Shabat systems.// J. Math. Phys. 56(2015), 073508(20pp).
92. N. Pronska, Reconstruction of energy-dependent Sturm-Liouville equations from two spectra, Integr. Equ. Oper.Theory 76 (2013) 403-419.

Люблю **книги**
ljubljuknigi.ru



yes
I want morebooks!

Покупайте Ваши книги быстро и без посредников он-лайн - в одном из самых быстрорастущих книжных он-лайн магазинов!
Мы используем экологически безопасную технологию "Печать-на-Заказ".

Покупайте Ваши книги на
www.ljubljuknigi.ru

Buy your books fast and straightforward online - at one of the world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at
www.ljubljuknigi.ru

OmniScriptum Marketing DEU GmbH
Heinrich-Böcking-Str. 6-8
D - 66121 Saarbrücken
Telefax: +49 681 93 81 567-9

info@omniscrptum.com
www.omniscrptum.com

OMNIScriptum

