

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM  
VAZIRLIGI

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

Qo‘l yozma huquqida

UDK. .517. 55

Xaytbayev Sabirjon Xamzayevich

**Kuchsiz  $m$ —subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasi**

5A130101 - Matematika (Matematik analiz)

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan dissertatsiya

Ilmiy rahbar:

fizika – matematika fanlari doktori,

dotsent B.I.Abdullayev

URGANCH - 2017

## M U N D A R I J A

|      |                                                                                                 |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
|      | KIRISH                                                                                          | 3  |
| 0.1. | Dissertatsiya ishining umumiy tavsifi.....                                                      | 3  |
| 0.2. | Dissertatsiya ishining mazmuni.....                                                             | 4  |
|      | <b>I bob. Dirixle masalasi.....</b>                                                             | 7  |
| 1.1. | Subgarmonik funksiyalar va ularning xossalari.....                                              | 7  |
| 1.2. | Tekislikda Dirixle masalasi.....                                                                | 17 |
| 1.3. | Dirixle masalasini yechishning Perron usuli.....                                                | 22 |
|      | <b>II bob. <math>m</math>- subgarmonik va kuchsiz <math>m</math>- subgarmonik funksiyalar .</b> | 28 |
| 2.1. | $m$ - subgarmonik funksiyalar va ularning xossalari.....                                        | 28 |
| 2.2. | Kuchsiz $m$ - subgarmonik funksiyalar va ularning xossalari.....                                | 33 |
|      | <b>III bob. Kuchsiz <math>m</math>- subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasi.....</b>   | 36 |
| 3.1. | Kuchsiz $m$ - subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasi.....                             | 36 |
| 3.2. | Polidoirada plyurisubgarmonik funksiyalar sinfi uchun Dirixle masalasi.....                     | 39 |
| 3.3. | Polidoirada kuchsiz $m$ - subgarmonik funksiyalar sinfi uchun Dirixle masalasi.....             | 51 |
|      | XULOSA.....                                                                                     | 54 |
|      | ADABIYOTLAR.....                                                                                | 55 |

## KIRISH

### 1. Ishning umumiy tavsifi

**0.1.1. Mavzuning dolzarbligi.** Plyuripotensiallar nazariyasi yoki kompleks potentsiallar nazariyasi  $(dd^c u)^n$  – Monj-Amper operatoriga asoslangan va zamonaviy matematikaning asosiy yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi. Kuchsiz  $m - sh$  funksiyalar sinfida potentsiallar nazariyasi plyuripotensiallar nazariyasining keyingi rivojlanish bosqichida yuzaga keldi va A.Sadullayev hamda B.Abdullayevlar tomonidan o‘rganildi. Hozirda matematikaning bir qator yo‘nalishlarida muvaffaqiyat bilan qo‘llanilmoqda. Kuchsiz  $m - sh$  funksiyalar sinfi subgarmonik va plyurisubgarmonik funksiyalar sinflari orasidagi sinf bo‘lgani bois bu soha kompleks potentsiallar nazariyasida alohida obekt sifatida mutaxassislar e’tiborida bo‘lib kelmoqda. Bu sinfda Dirixle masalasini o‘rganish dolzarb hisoblanadi.

**1.2. Ishning maqsadi.** Kuchsiz  $m - sh$  funksiyalar sinfida Dirixle masalasining yechimga egaligini o‘rganish.

**1.3. Ishning vazifalari.** Polidoirada kuchsiz  $m - sh$  funksiyalar uchun Dirixle masalasini o‘rganish

**1.4. Tadqiqot obekti.** Kuchsiz  $m - sh$  funksiyalar, plyurisubgarmonik funksiyalar.

**1.5. Tadqiqot predmeti.** Dirixle masalasi.

**1.6. Tadqiqot usullari.** Ko‘p kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va kompleks potentsiallar nazariyasi usullari.

**1.7. Tadqiqot natijalarining ilmiy jihatdan yangilik darajasi.** Mazkur ishning asosiy natijalari yangi.

**1.8. Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati va tadbiqui.** Olingan natijalar va usullar funksiyalar nazariyasining keyingi rivojlanishida va kompleks analizning tadbiqularida qo'llanilishi mumkin.

**1.9. Ish tuzilishi va tarkibi.** Dissertatsiya ishi kirish, uchta bob hamda adabiyotlar ro'yhatidan iborat. Har bir bob bo'limlardan tuzilgan.

## **2. Ishning mazmuni**

Dissertatsiya ishining birinchi bobi tayanch ma'lumotlarga bag'ishlangan bo'lib, unda subgarmonik funksiyalar, tekislikda va fazoda Dirixle masalasi, Dirixle masalasini yechishning Perron usuli keltiriladi.

Dissertatsiya ishining ikkinchi bobida  $m$ - subgarmonik va kuchsiz  $m$ - subgarmonik funksiyalarning xossalari batafsil o'rganiladi.

Dissertatsiya ishining uchinchi bobi kuchsiz  $m$ - subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasi deb nomlanib, unda kuchsiz  $m$ - subgarmonik funksiyalar va plyurisubgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasi o'rganiladi. Ushbu bobning birinchi bo'limida kuchsiz  $m$ - subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasi o'rganilgan bo'lib, quyidagi asosiy teoremlar keltiriladi.

**3.1.1.-Ta'rif.** Agar  $u(z) \in m - wsh(D)$  funksiya uchun  $D \subset \mathbb{C}^n$  sohada  $m - wsh$  funksiyalar sinfida maksimum prinsipi bajarilsa, ya'ni agar  $v \in m - wsh(D) : \overline{\lim}_{z \rightarrow \partial D} (u(z) - v(z)) \geq 0$  munosabat bajarilishidan  $\forall z \in D$  uchun  $u(z) \geq v(z)$  tengsizlik kelib chiqsa,  $u$  holda  $u(z)$  funksiya  $D$  sohada maksimal funksiya deyiladi.

**3.1.1-teorema.** Agar  $D \subset \mathbb{C}^n$  - qat'iy  $m$ -qavariq soha bo'lsa,  $u$  holda bu sohada Dirixle masalasi istalgan chegaraviy  $\varphi \in C(\partial D)$  funksiya uchun yechimga

ega bo'ladi. Aniqrog'i,  $\omega(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D)\}$  funksiya maksimal, uzluksiz  $\omega \in m - wsh(D) \cap C(\overline{D})$  bo'lib,  $\lim_{z \rightarrow \xi} \omega(z) = \varphi(\xi), \xi \in \partial D$  tenglik bajariladi.

**3.1.2-teorema.** Agar  $D \subset \mathbb{C}^n$  –regulyar soha va  $\varphi \in C(\partial D)$  funksiya qandaydir  $\omega \in m - wsh(D) : \lim_{z \rightarrow \xi} \omega(z) = \varphi(\xi), \xi \in \partial D$  funksiyaning izidan iborat bo'lsa, u holda  $\omega(z)$  funksiya  $\omega(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D)\}$  maksimal, uzluksiz  $\omega \in m - wsh(D) \cap C(\overline{D})$  bo'lib,  $\omega|_{\partial D} \equiv \varphi$  tenglik bajariladi.

Uchinchi bobning ikkinchi bo'limida polidoirada plyurisubgarmonik funksiyalar uchun Dirixle masalasi o'rganilib, unda quyidagi asosiy natijalar isbotlanadi.

**3.2.2-teorema.**  $U \subset \mathbb{C}^n$  birlik polidoira va  $T \subset \overline{U}$  uning ostovi bo'lsin.  $U$  holda ixtiyoriy  $\varphi(\xi) \in C(T)$  uchun  $(dd^c u)^n = 0, u|_T = \varphi(\xi)$  Dirixle masalasi yagona  $u \in Psh(U) \cap C(U), u|_T = \varphi(\xi)$  yechimga ega.

**3.2.3 - teorema.**  $U \subset \mathbb{C}^n$  birlik polidoira va  $G = O \cap U$ , bu yerda  $O - \partial U$  ning yetarlicha kichik atrofi bo'lib,  $\varphi(z) \in C(\overline{G})$  bo'lsin.  $U$  holda ixtiyoriy  $\varphi(\xi) \in C(\partial U)$  uchun  $(dd^c u)^n = 0, u|_{\partial U} = \varphi(\xi)$  Dirixle masalasi yagona  $u \in Psh(U) \cap C(\overline{U}), u|_{\partial U} = \varphi(\xi)$  yechimga ega.

Uchinchi bobning uchinchi bo'limida polidoiradagi Dirixle masalasi kuchsiz  $m$  –subgarmonik funksiyalar sinfida ko'rib chiqiladi. Unda asosiy natija quyidagi teoremadir.

$$\mathcal{U}(\varphi, D) = \{u \in m - wsh(D) : \overline{\lim_{z \rightarrow \partial D} u(z)} \leq \varphi\},$$

sinfni qaraymiz.

**3.3.1 - teorema.**  $U \subset \mathbb{C}^n$  birlik polidoidira va  $G = O \cap U$ , bu yerda  $O = \partial U$  ning yetarlicha kichik atrofi bo'lib,  $\varphi(z) \in C(\bar{G})$  bo'lsin.  $U$  holda  $m - wsh$  funksiyalar sinfida Dirixle masalasi yechimga ega, ya'ni  $\omega(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathfrak{U}(\varphi, D)\}$  funksiya maksimal, uzluksiz  $\omega \in m - wsh(D) \cap C(\bar{D})$  bo'lib,  $\omega|_{\partial D} \equiv \varphi$  tenglik bajariladi.

## I bob. Dirixle masalasi

### 1.1. Subgarmonik funksiyalar va ularning xossalari.

Faraz qilaylik,  $D \subset \mathbf{R}^n$  sohada aniqlangan lokal integrallanuvchi

$$u : D \rightarrow [-\infty, +\infty)$$

funksiya berilgan bo'lsin,  $u \in L^1_{loc}(D)$ .

Agar bu funksiya quyidagi ikki shartni bajarsa:

1)  $u(x)$  yuqoridan yarim uzluksiz:

$$\forall x^o \in D \text{ uchun } \overline{\lim}_{x \rightarrow x^o} u(x) \leq u(x^o)$$

(bundan  $u(x)$  funksiyaning  $D$  ga tegishli ixtiyoriy kompaktda yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi);

2) har bir  $x^o \in D$  nuqta uchun shunday  $r(x^o) > 0$  topiladiki,  $r \leq r(x^o)$  uchun

$$u(x^o) \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^o, r)} u(x) d\sigma, \quad (1.1.1)$$

u holda  $u(x)$  funksiya  $D$  sohada *subgarmonik funksiya* deyiladi.

Subgarmonik funksiyalar sinfi  $Sh(D)$  kabi belgilanadi. Kelgusida qulaylik uchun biz trivial  $u(x) \equiv -\infty$  funksiyasi ham  $D$  da  $Sh(D)$  ga tegishli deb qaraymiz. Endi subgarmonik funksiyalarning xossalarini keltiramiz:

a) subgarmonik funksiyalarning musbat koeffitsientli chiziqli kombinatsiyasi subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$u_k(x) \in Sh(D), \quad a_k \in R_+ \quad (k = 1, 2, \dots, m) \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \dots + a_m u_m(x) \in Sh(D) ;$$

b) chekli sondagi subgarmonik funksiyalarning maksimumi subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x) \in Sh(D) \Rightarrow \\ \Rightarrow \max\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)\} \in Sh(D) ;$$

v) monoton kamayuvchi subgarmonik funksiyalar ketma – ketligining limiti subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$u_j(x) \in Sh(D) \quad , \quad u_j(x) \geq u_{j+1}(x) \quad (j = 1, 2, \dots) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \in Sh(D) ;$$

g) tekis yaqinlashuvchi subgarmonik funksiyalar ketma-ketligi subgarmonik funksiya yaqinlashadi:

$$u_j(x) \in Sh(D) \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad u_j(x) \xrightarrow{tekis} u(x) \Rightarrow u(x) \in Sh(D)$$

d) *Maksimum prinsipi.* Agar  $u(x) \in Sh(D)$  funksiya biror  $x^0 \in D$  nuqtada o'zining maksimumiga erishsa, ya'ni

$$u(x^0) = \sup_{x \in D} u(x) \quad (1.1.2)$$

bo'lsa, u holda  $u(x) \equiv const$  bo'ladi.

**Isboti.** Ushbu

$$M = \{x \in D : u(x) = u(x^0)\}$$

to'plamni qaraylik.  $u(x)$  funksiyaning yuqoridan yarim uzluksiz bo'lganligidan va (1.1.2) shartdan  $M$  to'plamning  $D$  da yopiqqligi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, ixtiyoriy  $p \in M$  uchun (1.1.1) formulaga ko'ra

$$u(x^o) = u(p) \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(p,r)} u(x) d\sigma \leq u(x^o), \quad r \leq r(p),$$

bo'ladi. Bu munosabatdan  $u|_{S(p,r)} \equiv u(x^o)$ , ya'ni  $p$  ning  $B(p, r(p))$  atrofida  $u(x) = u(x^o)$  bo'lishini ko'ramiz. Bu esa  $M$  to'plamning  $D$  da ochiq ekanligini ko'rsatadi. Demak,  $M = D$ .

e) Agar  $\vartheta(x) \in Sh(D)$ ,  $u(x) \in H(D)$  funksiyalar uchun  $S(x^o, r) \subset\subset D$  sferada

$$\vartheta|_S \leq u|_S$$

bo'lsa, u holda  $B(x^o, r)$  sharda  $\vartheta(x) \leq u(x)$  tengsizlik o'rinli bo'ladi.

e) – xossadan quyidagi muhim hulosaga kelamiz. Faraz qilaylik,

$$\vartheta(x) \in Sh(D) \cap C(D)$$

berilgan bo'lib,  $B(x^o, r) \subset\subset D$  bo'lsin. Ushbu

$$u(x) = \int_{S(x^o, r)} \vartheta(y) P(x, y) d\sigma(y), \quad x \in B(x^o, r),$$

Puasson integralini qaraylik.  $u(x) \in h(B)$ ,  $u|_S = \vartheta|_S$  bo'lib, e) – xossaga ko'ra

$B = B(x^o, r)$  da  $\vartheta(x) \leq u(x)$  bo'ladi. Uzluksiz funksiyalar uchun isbotlangan bu

xossa ixtiyoriy  $\vartheta \in Sh(D)$  uchun ham o‘rinlidir:  $\vartheta(x) \leq u(x)$  va deyarli barcha  $x \in S$  lar uchun  $\vartheta(x) = u(x)$  o‘rinlidir;

j) Aytaylik,  $u(x) \in Sh(D)$  funksiya va  $x^o \in D$  nuqta berilgan bo‘lsin. Ushbu

$$m(x^o, r) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^o, r)} u(x) d\sigma$$

va

$$n(x^o, r) = \frac{1}{V_n r^n} \int_{B(x^o, r)} u(x) dV,$$

bunda  $V_n r^n$  miqdor  $B(x^o, r)$  ning hajmi, integrallarni (o‘rta qiymatlarni) qaraylik.

**1.1.1-teorema.** Faraz qilaylik,  $u(x) \in Sh(D)$  va  $u(x) \not\equiv -\infty$  bo‘lsin. U holda ixtiyoriy  $x^o \in D$  uchun

$$u(x^o) \leq n(x^o, r) \leq m(x^o, r), \quad n(x^o, r) > -\infty, \quad 0 < r < \rho(x^o, \partial D),$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Bundan tashqari, agar  $r$  monoton kamayib nolga intilsa, unda  $n(x^o, r)$  va  $m(x^o, r)$  o‘rta qiymatlar monoton kamayib,  $u(x^o)$  ga intiladi.

1.1.1-teoremadan ushbu muhim natijaga ega bo‘lamiz:  $D \subset \mathbf{R}^n$  sohada subgarmonik  $u(x) \not\equiv -\infty$  funksiya  $D$  da lokal integrallanuvchidir, ya’ni ixtiyoriy  $B \subset\subset D$  uchun  $\int_B u(x) dV$  integral mavjuddir;

z) subgarmonik funksiya  $D$  sohaning har bir nuqtasida uzilishga ega bo‘lishi mumkin. Ayni paytda, quyidagi teorema o‘rinli bo‘ladi.

**1.1.2-teorema.** Agar  $u(x) \in Sh(D)$  bo‘lsa,  $u$  holda shunday monoton to‘plamlar

$$D_j \subset D_{j+1} \subset D, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j = D$$

*ketma – ketligi va shunday monoton kamayuvchi funksiyalar*

$$u_j(x) \in Sh(D_j) \cap C^\infty(D_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

*ketma – ketligi mavjudki,*

$$u(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \quad (x \in D)$$

*bo‘ladi.*

**Isboti.** Ushbu

$$K(x) = \begin{cases} -\frac{1}{ce^{1-|x|^2}} & \text{agar } |x| < 1 \text{ bo'lsa;} \\ 0 & \text{agar } |x| \geq 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya  $C^\infty(\mathbf{R}^n)$  sinfga tegishli bo‘lib, uning salmog‘i  $\text{supp } K(x) = B(0,1)$  dir. Endi  $K(x)$  ning ifodasidagi o‘zgarmas  $c$  ni shunday tanlab olamizki,

$$\int_{\mathbf{R}^n} K(x) dV = 1$$

bo‘lsin.  $u(x) \not\equiv -\infty$  deb, bu yadro yordamida ushbu

$$u_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \int_{|y-x| \leq \delta} u(y) K\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dV, \quad \delta > 0, \quad (1.1.3)$$

integralni qaraylik.  $u_\delta(x)$  funksiyasi

$$D_\delta = \{x \in D : \rho(x, \partial D) < \delta\}$$

ochiq to'plamda aniqlangan bo'lib,  $x \in D_\delta$  da

$$u_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \int_{\mathbf{R}^n} u(y) K\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dV = \int_{\mathbf{R}^n} u(x + \delta y) K(y) dV$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdagi birinchi integral  $C^\infty(D_\delta)$  sinfga, ikkinchi integral esa  $Sh(D_\delta)$  sinfga tegishli bo'ladi. Binobarin,

$$u_\delta(x) \in Sh(D_\delta) \cap C^\infty(D_\delta).$$

$u(x)$  ning subgarmonik funksiya ekanligidan,  $u_\delta$  ning  $\delta \downarrow 0$  da, monoton kamayuvchi bo'lishligi va

$$\int_{\mathbf{R}^n} K(x) dV = 1$$

tenglikdan,  $u_\delta(x)$  ning  $u(x)$  ga intilishini topamiz.

i) Subgarmonik funksiyalar umumiy holda  $C^2$  sinfga tegishli bo'lmasligidan,  $\Delta u$  - Laplas operatorini faqat umumlashgan funksiya sifatida qarash mumkin bo'ladi:

$$\Delta u(\phi) = \int u \Delta \phi, \quad \phi \in F(D).$$

**1.1.3-teorema.** Har qanday  $u(x) \in Sh(D)$ ,  $u \not\equiv -\infty$  subgarmonik funksiya uchun umumlashgan ma'noda  $\Delta u \geq 0$  tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy  $\phi \in F(D)$ ,  $\phi \geq 0$  uchun  $\int u \Delta \phi \geq 0$  munosabat o'rinlidir.

Jumladan,  $u(x)$  funksiya  $C^2$  sinfga tegishli bo'lib, u subgarmonik bo'lsa,

$$u \in Sh(D) \cap C^2(D), \text{ u holda } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \geq 0 \text{ dir.}$$

Yuqorida keltirilgan teoremaning aksi ham o‘rinli: agar umumlashgan funksiya  $u$  uchun

$$\Delta u(\phi) = \int u \Delta \phi \geq 0, \quad \phi \in F(D), \quad \phi \geq 0,$$

munosabat bajarilsa, u holda  $u$  subgarmonik funksiya bo‘ladi;

*k) F.Riss teoremasi.* Har qanday  $u(x) \in Sh(D)$ ,  $u \not\equiv -\infty$ , funksiya olinganda ham  $D$  sohada shunday musbat o‘lchov  $\mu$  mavjudki, ixtiyoriy  $D^0 \subset\subset D$  soha uchun

$$u(x) = \int_{D^0} K(x-y) d\mu_y + u_{D^0}(x) \quad (1.1.4)$$

bo‘ladi, bunda  $u_{D^0}(x) \in H(D^0)$  va

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & \text{agar } n = 2 \text{ bo'lsa} \\ -\frac{1}{(n-2)\sigma} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{agar } n > 2 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Eslatib o‘tamiz,  $K(x)$  funksiyasi Laplas tenglamasining fundamental yechimidir:  $\Delta K(x) = \delta(x)$  bo‘lib, bu yerda  $\delta(x)$  - Dirakning umumlashgan funksiyasi,  $\delta \circ \phi(x) = \phi(0)$ ,  $\phi \in F(\mathbf{R}^n)$ .  $\delta$  ga massasi  $x = 0$  da bo‘lgan birlik o‘lchov (zaryad) mos keladi.

F. Riss teoremasini isbotlashda  $\Delta u$  ning musbat funksionalligidan foydalaniladi. Ma’lumki, har bir musbat funksional biror  $\mu$  o‘lchovni aniqlaydi:

$$\Delta u \circ \phi = \int \phi d\mu, \quad \phi \in F(D). \quad \mu /_{D^0} \text{ chekli o'lchov bo'lib,}$$

$$\vartheta(x) = \int_{D^0} K(x-y) d\mu$$

integral mavjuddir. Ayni paytda,  $\Delta K(x-y) = \delta(x-y)$  ligidan,  $\Delta \vartheta = \mu$ , ya'ni

$$\int \vartheta \Delta \phi dV = \int \phi d\mu, \quad \forall \phi \in F(D^0),$$

bo'lishini ko'rish qiyin emas. Bundan ushbu

$$\Phi_{D^0}(x) = u(x) - \vartheta(x)$$

ayirma uchun  $\Delta u_{D^0} = 0$  bo'lishi, ya'ni  $u_{D^0}$  ning  $D^0$  sohada garmonik funksiya ekanligi kelib chiqadi.

l) Agar  $u(x) \in Sh(D)$  bo'lsa, u holda  $e^{u(x)} \in Sh(D)$  dir.

z) – xossaga ko'ra,  $u(x)$  funksiyasini  $Sh$  va  $C^\infty$  funksiyalar bilan yaqinlashtirish mumkin. Shundan kelib chiqib, qarayotgan xossani  $u(x) \in Sh(D) \cap C^\infty(D)$  funksiyalar uchun isbotlash yetarlidir. Bu holda

$$De^{u(x)} = e^{u(x)} \left[ \Delta u + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right] \geq 0 \text{ ekanligini ko'rish qiyin emas.}$$

Xuddi shunday quyidagi xossa ham o'rinlidir.

m). Agar  $u(x) \in Sh(D)$ ,  $u|_D < 0$  bo'lsa, u holda  $-\ln[-u(x)] \in Sh(D)$  dir.

*Polyar to'plamlar.* Aytaylik,  $D$  soha va undagi biror  $E$  to'plam berilgan bo'lsin:  $E \subset D$ .

Agar shunday  $u(x) \in Sh(D)$ ,  $u(x) \not\equiv -\infty$  funksiya mavjud bo'lsaki,  $\forall x \in E$  da  $u(x) = -\infty$  tenglik bajarilsa,  $E$  to'plam  $D$  sohada *polyar to'plam* deyiladi.

Polyar to'plamlar quyidagi xossalarga ega bo'ladi:

a) ixtiyoriy  $D \subset \mathbf{R}^n$  sohada polyar to'plam butun  $\mathbf{R}^n$  da ham polyar to'plam bo'ladi, ya'ni

$$u(x) \in Sh(D), \quad u(x) \not\equiv -\infty, \quad u|_E = -\infty$$

bo'lsa, u holda shunday  $\vartheta(x) \in Sh(\mathbf{R}^n)$  funksiya topiladiki,

$$\vartheta(x) \not\equiv -\infty, \quad \vartheta|_E = -\infty$$

bo'ladi;

b) sanoqli sondagi polyar to'plamlar yig'indisi polyar to'plam bo'ladi:  $E_1, E_2, \dots$

polyar to'plamlar bo'lsa,  $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$  ham polyar to'plam bo'ladi;

v)  $E$  ning polyar to'plam bo'lishi uchun, uning tashqi Nyuton sig'imi  $\text{cap} E = 0$  bo'lishi zarur va yetarli;

g) agar  $E$  polyar to'plam bo'lsa, uning Xausdorf o'lchovi  $H_{2n-2+\varepsilon}(E) = 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , bo'ladi va, aksincha, agar  $H_{2n-2}(E) < \infty$

bo'lsa,  $E$  polyar to'plam bo'ladi;

d) subgarmonik funksiyalar nazariyasida yuqoridan lokal tekis chegaralangan funksiyalar sinfi muhim rol o'ynaydi: agar har bir  $x^0 \in D$  nuqta uchun shunday atrof  $B(x^0, r) \subset\subset D$  va shunday  $M$  konstanta topilsaki,  $\{u_\alpha\} \subset Sh(D)$  sinfdan olingan har bir  $u_\alpha(x)$  funksiya ushbu

$$u_\alpha(x) \leq M \quad (x \in B(x^0, r))$$

tengsizlik bajarilsa,  $\{u_\alpha\}$  sinfga  $D$  da *yuqoridan lokal chegaralangan* subgarmonik funksiyalar sinfi deyiladi. Ravshanki, qarayotgan  $\{u_\alpha\}$  sinf uchun

$$u(x) = \sup_{\alpha} u_\alpha(x)$$

funksiya mavjud va u  $D$  dan olingan har bir kompakt  $K \subset\subset D$  da yuqoridan chegaralangandir. Agar bu funksiya yuqoridan yarim uzluksiz bo'lsa, uning subgarmonik bo'lishligini isbotlash qiyin emas.  $u(x)$  funksiya yuqoridan yarim uzluksiz bo'lmasa, unda, odatda quyidagi regulyarlash operatsiyasi qaraladi, ya'ni

$$u^*(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{y \in B(x,r)} u(y) = \overline{\lim_{y \rightarrow x}} u(y).$$

Bunda  $u^*(x)$  funksiya  $u(x)$  ning *regulyarlangan* funksiyasi deyiladi. Regulyarlangan  $u^*(x)$  funksiya yuqoridan yarim uzluksiz bo'ladi.

**1.1.4-teorema.** *Yuqoridan lokal chegaralangan subgarmonik funksiyalarning ixtiyoriy sinfi  $\{u_\alpha\}$  uchun*

$$u^*(x) \in Sh(D)$$

*bo'lib,  $N = \{x \in D : u(x) < u^*(x)\}$  to'plam  $D$  da polyar to'plam bo'ladi, bunda*

$$u(x) = \sup_{\alpha} u_{\alpha}(x).$$

Shuningdek, quyidagi teorema ham o'rinli.

**1.1.5-teorema.** *Faraz qilaylik,*

$$u_j(z) \in Sh(D) \quad , \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

*yuqoridan lokal chegaralangan subgarmonik funksiyalar ketma-ketligi bo'lib,*

$$u(x) = \overline{\lim_{j \rightarrow \infty}} u_j(x) \quad \text{bo'lsin.} \quad U \quad \text{holda} \quad u^*(x) \in Sh(D) \quad \text{bo'lib,}$$

*$N = \{x \in D : u(x) < u^*(x)\}$  to'plam  $D$  da polyar to'plam bo'ladi.*

## 1.2. Tekislikda doira uchun Dirixle masalasi.

Chegarasi Jordan chizig'idan iborat bir bog'lamli  $D \subset \mathbb{C}$  soha va  $\partial D$  chegara ustida uzluksiz  $u$  funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyani  $D$  ga garmonik davom qildirish talab qilinadi, ya'ni  $D$  da garmonik,  $\overline{D}$  da uzluksiz va  $\partial D$  da berilgan funksiya bilan ustma – ust tushuvchi funksiyani topish talab qilinadi.

**Masalani yechish:**

**a) Yagonaligi.** Dirixle masalasi ikkita turli yechimga ega emasligini ko'rsatamiz. O'z navbatida  $u_1$  va  $u_2$  ikkita yechim mavjud bo'lsin. U holda ularning  $u_1 - u_2 = v$  ayirmasi  $D$  da garmonik,  $\bar{D}$  da uzluksiz va  $\partial D$  da nolga teng. Agar  $v$   $\bar{D}$  da minimum va maksimumga  $D$  da erishsa, ekstremum prinsipiga ko'ra  $D$  da  $v = \text{const}$  bo'ladi, uzluksizligiga ko'ra  $\bar{D}$  da ham  $v = \text{const}$ .  $\partial D$  da  $v \equiv 0$  ekanligidan  $\bar{D}$  da  $v \equiv 0$  kelib chiqadi. Agar bu ikkita qiymatga  $\partial D$  chegarada erishsa, u holda yana  $\bar{D}$  da  $v \equiv 0$  kelib chiqadi.

**b) Doiragacha soddalashuv.** Dirixle masalasi  $U = \{z \mid |z| < 1\}$  birlik doira uchun yechilgan deb faraz qilamiz va bu holda  $U$  chegarasi Jordan chizig'idan iborat bo'lgan bir bog'lamli  $D$  soha uchun ham yechilishini ko'rsatamiz. O'z navbatida, Riman teoremasiga ko'ra va chegaralar mosligi prinsipiga ko'ra  $\bar{D}$  da uzluksiz davom qiluvchi  $f: D \rightarrow U$  konform akslantirish mavjud.  $\partial D$  chegarada  $u$  uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin.  $\partial U$  chegarada  $v = u \circ f^{-1}$  qiymatni beramiz va  $v$  orqali bu qiymatni  $U$  da garmonik davom qildiramiz (farazga ko'ra  $u$  mavjud). U holda  $v = u \circ f$  funksiya (garmonik funksiya va konform akslantirishning superpozitsiyasi sifatida) garmonik funksiyaning konform akslantirishiga nisbatan invariantligi xossasiga ko'ra  $D$  da garmonik bo'ladi.  $\bar{D}$  da uzluksiz va  $\partial D$  da  $u \circ f^{-1} \circ f = u$ , ya'ni  $D$  uchun Dirixle masalasi yechimga ega.

**v) Doira uchun yechim.** Dirixle masalasi birlik doirada  $u$  chegaraviy qiymat bilan yechimga ega bo'lsin. Birlik doirada haqiqiy qismi bu masala yechimini ifodalaydigan golomorf funksiyaning quramiz. Bu funksiya  $\bar{U}$  uzluksiz ham bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda istalgan  $z \in U$  nuqtada Koshi formulasiga ko'ra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (1.2.1)$$

o‘rinli, (1.2.1) ni o‘ng qismini shunday o‘zgartiramizki, uning haqiqiy qismi faqat  $\partial U$  da ma’lum  $\operatorname{Re} f = u$  qiymatni qabul qilsin. Buning uchun  $z^* = \frac{1}{z} - \partial U$  ga nisbatan simmetrik nuqtani olib Koshi teoremasidan foydalanamiz.

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(\xi)}{\xi - z^*} d\xi \quad (1.2.2)$$

va (1.2.2) dan (1.2.1) ni ayiramiz.  $|\xi| = 1$  ligidan  $\xi = e^{it}$  deb olish mumkin va  $d\xi = ie^{it} dt = i\xi dt$

va bundan tashqari

$$\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z^*} = \frac{\bar{\xi}}{1 - \bar{\xi}z} - \frac{\bar{z}}{\xi \bar{z} - 1} = \frac{\bar{\xi}(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{\xi}z|^2}$$

dan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \frac{(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{\xi}z|^2} dt$$

ga ega bo‘lamiz. Bu yerda haqiqiy qismini ajratib Puasson formulasi deb ataluvchi quyidagi formulani olamiz:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r \cos(t - \varphi) + 1} dt \quad (1.2.3)$$

bu yerda  $z = re^{i\varphi}$  Puasson formulasining o‘ng qismi  $\partial D$  chegarada  $u$  qiymat berilgan bo‘lsa ma’lum qiymat qabul qiladi.

$U$  da aniqlangan  $u$  funksiya doira uchun Dirixle masalasani yechimi bo‘lishini ko‘rsatamiz. Bundan oldin, Puasson integrali yadrosi

$$P(\xi, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \varphi) + r^2}$$

ni

$$P(\xi, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\xi + z}{\xi - z} \quad (1.2.4)$$

ko‘rinishda yozish mumkinligini ta’kidlaymiz. Haqiqatdan,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \frac{\xi + z}{\xi - z} &= \operatorname{Re} \frac{e^{it} + re^{i\varphi}}{e^{it} - re^{i\varphi}} = \operatorname{Re} \frac{e^{i\varphi}(e^{i(t-\varphi)} + r)}{e^{i\varphi}(e^{i(t-\varphi)} - r)} = \\
&= \operatorname{Re} \frac{\cos(t-\varphi) + i\sin(t-\varphi) + r}{\cos(t-\varphi) + i\sin(t-\varphi) - r} = \operatorname{Re} \frac{(e^{-i(t-\varphi)} + r)(e^{-i(t-\varphi)} - r)}{(e^{i(t-\varphi)} - r)(e^{-i(t-\varphi)} - r)} = \\
&= \operatorname{Re} \frac{1 - re^{i(t-\varphi)} + re^{-i(t-\varphi)} - r^2}{1 - re^{i(t-\varphi)} - re^{-i(t-\varphi)} + r^2} \\
&= \operatorname{Re} \frac{1 - (r\cos(t-\varphi) + ri\sin(t-\varphi)) + r\cos(t-\varphi) - ri\sin(t-\varphi) - r^2}{1 - 2r\cos(t-\varphi) + r^2} \\
&= \operatorname{Re} \frac{1 - r^2 - 2ri\sin(t-\varphi)}{1 - 2r\cos(t-\varphi) + r^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t-\varphi) + r^2}
\end{aligned}$$

Shuning uchun Puasson integrali bilan aniqlanuvchi funksiya  $U$  da golomorf

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{\xi + z}{\xi - z} dt \quad (1.2.5)$$

funksiyaning haqiqiy qismini ifodalaydi va  $U$  da garmonik bo'ladi. (1.2.5) ning golomorfligini integral ostida differensiallash orqali ko'rsatish mumkin.

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{\xi}{(\xi - z)^2} dt = \frac{\Delta z}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi u(\xi)}{(\xi - z)^2 (\xi - z - \Delta z)} dt$$

Bu yerdan  $\Delta z \rightarrow 0$  da chap qism nolga intiladi, ya'ni  $f'(z)$  mavjud.

Endi ixtiyoriy  $\xi_0 \in \partial U$  ga  $U$  ning nuqtalari bo'ylab intiluvchi  $z$  larda  $u(z)$  qiymat  $u(\xi_0)$  ga intilishini ko'rsatish kerak.  $u \equiv 1$  funksiya Dirixle masalasining  $u = 1$  chegaraviy qiymatga ega bo'lgan yagona yechimidir va u Puasson formulasi bilan kiritilgan xossani qanoatlantiradi. Bundan

$$\int_0^{2\pi} P(\xi, z) dt = 1 \quad (1.2.6)$$

Shu bilan birga  $\xi \neq \xi_0, z \in U$  da

$$\lim_{z \rightarrow \xi_0} P(\xi, z) = 0 \quad (1.2.7)$$

Bu yaqinlashish  $\xi$  bo'yicha  $\xi_0$  nuqtani biror atrofini o'z ichiga olmaydigan istalgan  $\gamma \in \partial U$  yoyda tekis bajariladi. Bu (1.2.4) dan ko'rinadi. (1.2.6) ga asosan  $u$  ning qiymati va uning

$$z \rightarrow \xi_0 = e^{it_0}$$

dagi faraz qilingan limiti orasidagi farq

$$\Delta = \int_0^{2\pi} u(\xi) P(\xi, t) dt - u(\xi_0) = \int_0^{2\pi} (u(\xi) - u(\xi_0)) P(\xi, z) dt \quad (1.2.8)$$

$\xi > 0$  ni tayinlaymiz va  $u(\xi)$  ning  $\xi_0$  nuqtada uzluksizligidan  $\delta > 0$  ni shunday tanlaymizki,  $|t - t_0| \leq 2\delta$  da

$$|u(\xi) - u(\xi_0)| < \varepsilon \quad (1.2.9)$$

bo'lsin

$$\gamma_1 = \{\xi \in \partial U : |t - t_0| \leq 2\delta\}$$

va

$$\gamma_2 = \partial U \setminus \gamma_1$$

deb belgilaymiz hamda (1.2.8) dagi integralni  $\gamma_1$  va  $\gamma_2$  yoylar bo'yicha integrallarga ajratamiz. Ulardan birinchisi uchun (1.2.9) ga ko'ra istalgan  $z \in U$  da

$$\int_{\gamma_1} [u(\xi) - u(\xi_0)] P(\xi, z) dt < \varepsilon \int_{\gamma_1} P(\xi, z) dt < \int_0^{2\pi} P(\xi, z) dt = \varepsilon \quad (1.2.10)$$

ni hosil qilamiz. Endi  $z = re^{i\varphi}$  deb olamiz va  $|\varphi - t_0| < \delta$  deb hisoblaymiz. (1.2.7) ga ko'ra shunday  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$  topiladiki  $P(\xi, z) > \varepsilon$  tengsizlik barcha  $\xi \in \gamma_2$  va  $|\varphi - t_0| < \delta, 1 > r > 1 - \rho$  ni qanoatlantiruvchi  $z$  lar uchun bajariladi. Shuning uchun rasmda shtrixlangan sohadagi barcha  $z$  lar uchun

$$\left| \int_{\gamma_2} (u(\xi) - u(\xi_0)) P(\xi, z) dt \right| < 2M \int_{\gamma_2} P(\xi, z) dt \leq 2M \varepsilon 2\pi \quad (1.2.11)$$

bu yerda

$$M = \max_{\xi \in \partial U} |u(\xi)|$$

(1.2.10) va (1.2.11) ni qo'shib barcha  $z \in G$  uchun  $|\Delta| < (1 + 4\pi M)\varepsilon$  ni olamiz.

Shunday qilib, quyidagi teoremani isbotladik.

**1.2.1-teorema.**  $D$  □ bir bog'lamli Jordan sohasining chegarasida uzluksiz ixtiyoriy funksiyani  $D$  ga yagona tarzda garmonik davom qildirish mumkin. Xususan, birlik doira uchun bu masala Puasson integrali bilan yechiladi

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2} dt$$

bu yerda

$$z = re^{i\varphi}, \xi = e^{it}$$

$\{|z| < R\}$  doira uchun Puasson integrali

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} dt$$

ko'rinishida bo'ladi, bu yerda

$$z = re^{i\varphi}, \xi = Re^{it};$$

### 1.3. Dirixle masalasini yechishning Perron usuli

$D \subset R^n$  - ixtiyoriy chegaralangan soha bo'lsin.  $u(x) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$  funksiya har bir  $x \in D$  uchun  $\Delta u(x) = 0$  Laplas tenglamasini va  $u|_{\partial D} = \varphi(x)$  chegaraviy shartni qanoatlantirsin. Bunday  $u = u(x)$  funksiya topish masalasi Laplas tenglamasi uchun qo'yilgan Dirixle masalasi deyiladi va  $u(x)$  funksiyaga Dirixle masalasining klassik yechimi deb aytiladi. Endi shu ixtiyoriy chegaralangan soha uchun Dirixle masalasining klassik yechimining mavjudligi haqidagi masalani qarab chiqamiz. Bunda biz shar uchun Dirixle masalasining yechilishi va maksimum prinsipiga asoslangan subgarmonik funksiyalarning Perron usulidan keng foydalanamiz. Bu usul bir qator qulayliklarga ega bo'lib, masala yechimining chegara atrofidagi xarakterni o'rganishdan ajralgan holda olib qaraladi. Hamda usul ikkinchi tartibli elliptik tenglamalarning umumiyroq sinflari uchun ham soddagina umumlashtiriladi.

$C^2(D)$  sinfga qarashli supergarmonik va subgarmonik funksiyalarning ta'rifini uzluksiz funksiyalar uchun quyidagicha ham umumlashtirish mumkin.  $B \subset\subset D$  shar va  $B$  da garmonik ixtiyoriy  $h(x)$  funksiya uchun  $\partial B$  da  $u(x) \leq h(x)$  ( $u(x) \geq h(x)$ ) tengsizlik o'rinli ekanligidan shu  $u(x) \leq h(x)$  ( $u(x) \geq h(x)$ ) tengsizlikni  $B$  da ham o'rinli ekanligi kelib chiqsa, u holda  $u(x)$  funksiya  $D$  sohada subgarmonik (supergarmonik) funksiya deyiladi. Uzluksiz subgarmonik funksiyalarning quyidagi xossalari ko'rsatish mumkin.

1)  $D$  sohada uzluksiz  $u(x)$  subgarmonik funksiya uchun maksimumning kuchli prinsipi o'rinlidir, ya'ni agar  $D$  chegaralangan sohada  $v(x)$  supergarmonik funksiya va  $\partial D$  da  $v(x) \geq u(x)$  bo'lsa, u holda butun  $D$  sohada  $v(x) > u(x)$  yoki  $v(x) \equiv u(x)$  bo'ladi. Bu yerda  $v(x)$  supergarmonik funksiya va  $u(x)$  subgarmonik funksiyalar  $\bar{D}$  da uzluksiz deb qaraladi.

Oxirgi xulosani isbot qilish uchun teskarisini faraz qilamiz. U holda biror  $x^0 \in D$  nuqta uchun  $(u - v)(x^0) = \sup_{x \in \Omega} (u(x) - v(x)) = M \geq 0$  va shunday bir  $B = B(x^0)$  shar topilib,  $\partial B$  da  $u$  va  $v$  larga mos ravishda teng bo'lsin. U holda

$$M \geq \sup_{x \in \partial B} (\bar{u}(x) - \bar{v}(x)) \geq (\bar{u} - \bar{v})(x^0) \geq (u - v)(x^0) = M$$

va shunga ko'ra bu formulada tengsizlik belgilarini tenglik belgisi bilan almashtirish mumkin. Garmonik funksiyalar uchun maksimumning kuchli prinsipiga ko'ra,  $B$  da  $\bar{u} - \bar{v} \equiv M$  bo'lgani uchun  $u - v \equiv M$  ekanligi  $\partial B$  kelib chiqadi. Bu esa  $B$  sharning tanlanishiga ziddir. Demak, 1) xossa o'rinli ekan.

2)  $D$  sohada  $u(x)$  funksiya subgarmonik va  $B$  shar shu  $D$  sohaning ichida qat'iy joylashgan (kompakt joylashgan), ya'ni  $B \subset\subset D$  bo'lsin.  $\bar{u}$  orqali  $B$  da garmonik bo'lgan va  $\partial B$  da  $u(x)$  funksiyaning qiymati ortadi. Puasson integrali bilan berilgan funksiyani belgilaymiz. Bu funksiya uchun  $\partial B$  da  $\bar{u} = u$  bo'ladi.  $D$  sohada  $B$  ga nisbatan  $u$  funksiyaning garmonik qirqimini

$$U(x) = \begin{cases} \bar{u}(x), & x \in B \\ u(x) & x \in D \setminus B \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlaymiz.  $U(x)$  funksiya  $D$  sohada subgarmonik funksiya bo'ladi. Haqiqatdan ham,  $D$  sohadagi ixtiyoriy  $B' \subset\subset D$  shar va  $B'$  harda  $h(x)$  garmonik funksiya bo'lib,  $x \in \partial B'$  da  $h(x) \geq U(x)$  tengsizlikni qanoatlantirsin.  $u(x) \leq U(x)$  tengsizlik  $B'$  da o'rinli bo'lgani uchun  $u(x) \leq h(x)$  tengsizlik ham,  $B'$  da o'rinli va shunga ko'ra  $U(x) \leq h(x)$  tengsizlik  $x \in B' \setminus B$  da ham o'rinli. Lekin  $U(x)$  funksiya  $B$  da garmonik. Shuning uchun, maksimum prinsipiga ko'ra,  $U(x) \leq h(x)$  tengsizlik  $B'$  da o'rinli bo'ladi, ya'ni  $D$  sohada  $U(x)$  subgarmonik funksiyadir.

3)  $D$  sohada  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x)$  subgarmonik funksiyalar bo'lsin. U holda  $u(x) = \max\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x)\}$  funksiya ham  $D$  sohada subgarmonik funksiyadir.

Bu xossa bevosita subgarmonik funksiyaning ta'rifidan kelib chiqadi. supergarmonik funksiyalar uchun shunga o'xshash xossalarni xosil qilish uchun 1), 2), 3) xossalarda  $u(x)$  funksiyani  $-u(x)$  funksiya bilan almashtirish kerak.

$D$  - chegaralangan soha,  $\phi(x)$  - esa  $\partial D$  da chegaralangan funksiya bo'lsin. Agar  $\bar{D}$  da uzluksiz bo'lgan  $u(x)$  - supergarmonik funksiya  $\partial D$  da  $u(x) \leq \phi(x)$  tengsizlikni qanoatlantirsa,  $\phi(x)$  ga nisbatan subfunksiya deyiladi. Xuddi shunga o'xshash  $\bar{D}$  da uzluksiz bo'lgan  $u(x)$  - supergarmonik funksiya  $\partial D$  da  $u(x) \geq \phi(x)$  tengsizlikni qanoatlantirsa,  $\phi(x)$  ga nisbatan superfunksiya deyiladi.

Maksimum prinsipiga ko'ra, har bir subfunksiya ixtiyoriy superfunksiyadan kichik yoki teng bo'ladi.

Xususan,  $\inf_{x \in \partial \Omega} \phi(x)$  dan oshmaydigan ( $\sup_{x \in \partial \Omega} \phi(x)$  dan kichik bo'lmagan) o'zgarmas funksiya subfunksiya (superfunksiya) bo'ladi.  $\phi(x)$  funksiya uchun barcha subfunksiyalar to'plami  $S_\phi$  orqali belgilaymiz.

Perron usulining asosiy natijasi quyidagi teoremda jamlangan.

**1.3.1-teorema.**  $u(x) = \sup_{v(x) \in S_\phi} v(x)$   $D$  sohada garmonikdir.

**Isbot:** maksimum prinsipiga ko'ra ixtiyoriy  $v(x) \in S_\phi$  funksiya  $v(x) \leq \sup_{x \in \Omega} \phi(x)$  tengsizlikni qanoatlantiradi. Shunga ko'ra,  $u(x)$  funksiya butun  $\bar{D}$  da

aniqlanadi.  $y \in D$  ixtiyoriy tayinlangan nuqta bo'lsin.  $U(x)$  funksiya aniqlanishi bo'yicha shunday bir  $\{v_n(x)\}_1^\infty \subset S_\phi$  ketma – ketlik mavjud bo'lib,  $v_n(y) \rightarrow u(y)$  bo'ladi.  $v_n(x)$  ni  $\max\left(v_n(x), \inf_{x \in \partial\Omega} \phi(x)\right)$  bilan almashtirib,  $\{v_n(x)\}$  ketma – ketlikni chegaralangan deb xisoblash mumkin. Endi  $R$  sonni  $B = B_R(y) \subset\subset D$  bo'ladigan qilib tanlaymiz va  $V_n(x)$  orqali  $B$  ga nisbatan  $V_n(x)$  funksiyaning garmonik qismini belgilaymiz. U holda  $V_n(x) \in S_\phi$ ,  $V_n(y) \rightarrow u(y)$  bo'ladi, hamda  $\{v_n(x)\}$  qisman ketma – ketligi topilib,  $\rho < R$  radiusli ixtiyoriy  $B_\rho(y)$  sharda  $v(x)$  garmonik funksiya tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.  $B$  da  $v(x) \leq u(x)$  va  $v(y) = u(y)$  tenglik o'rinli. Endi  $B$  da  $v(x) = u(x)$  ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, biror  $z \in B$  nuqtada  $v(z) < u(z)$  bo'lsin. U holda shunday bir  $\bar{u} \in S_\phi$  funksiya mavjud bo'lib,  $v(z) < \bar{u}(z)$  o'rinli bo'ladi.  $w_k(x) = \max(\bar{u}(x), V_{n_k}(x))$  deb belgilab, bu funksiyaning  $W_k$  garmonik qismini olsak, oldin xosil qilganimizdek  $\{W_k\}$  ketma – ketlikning biror qisman ketma – ketligi  $w$  garmonik funksiya yaqinlashib,  $B$  da  $v(x) \leq w(x) \leq u(x)$  tengsizlikni qanoatlantiradi. Bundan tashqari,  $v(y) = w(y) = u(y)$ . Lekin, u holda maksimum prinsipiga ko'ra,  $B$  da  $v(x) = w(x)$  tenglik bajarilishi kerak bo'ladi. Bu esa  $\bar{u}(x)$  ning tanlashiga ziddir. Shunday qilib,  $u(x)$  funksiya  $D$  sohada garmonikdir. Biz konstruktiv ravishda qurgan garmonik funksiya tabiiyki,  $\Delta u = 0$ ,  $x \in D$ ,  $u|_{\partial D} = \phi(x)$  klassik Dirixle masalasining yechimi (bu yechimga Perron yechimi deb aytiladi) deb xisoblash mumkin. Xaqiqatdan ham, agar Dirixle masalasi yechiladigan bo'lsa, u holda uning yechimi Perron yechimi bilan ustma – ust tushadi. Xaqiqatdan ham,  $w$  yechim bo'lsin. U holda,  $w \in S_\phi$  bo'lib, maksimum prinsipiga ko'ra,  $w \geq u$  tengsizlik barcha uchun o'rinli bo'ladi. bundan  $w = u$  hosil qilinadi.

Perron usulida yechimning chegara atrofidagi xarakteri shu yechimning mavjudligi masalasidan ajratilganligi muhimdir. Perron yechimi chegarada qiymatining berilishiga va soha chegarasining geometrik xossalriga bog'liq bo'lib, Barer funksiyasi yordamida o'rganiladi.  $\xi \in \partial D$  nuqta bo'lsin.

Agar  $C(\bar{D})$  sinfga qarashli  $W = W_\xi$  funksiya

1)  $D$  sohada  $W$  supergarmonik funksiya;

2)  $x \in \overline{D} \setminus \{\xi\}$  uchun  $W(x) > 0$ ,  $W(\xi) = 0$  bo'lsa,  $D$  uchun  $\xi$  nuqtada Barer funksiyasi deyiladi.

Barer funksiyasiga umumiyroq holda ham ta'rif berish mumkin bo'lib, unda  $W$  funksiya supergarmonik va  $D$  sohadagina uzluksiz, musbat hamda  $x \rightarrow \xi$  da  $W(x) \rightarrow 0$  shartlarni qanoatlantirishini talab qilamiz. Barer funksiyani qurishga asoslangan yo'nalishning muhimligi shundan iboratki, bunda  $\partial D$  chegaraning lokal xossalrigina zarur bo'ladi.

$W$  funksiya  $\xi \in \partial D$  nuqtada lokal barer bo'lsin, ya'ni  $\xi$  nuqtaning shunday bir  $N$  atrofi mavjud bo'lib,  $D \cap N$  da  $W$  funksiya yuqoridagi ta'rifni qanoatlantirsin. U holda  $D$  uchun  $\xi$  nuqtada barerni quyidagicha aniqlash mumkin.  $B$  shar bo'lib,  $\xi \in B \subset\subset N$  va  $m = \inf_{x \in N \setminus B} W(x) > 0$  shartlarni qanoatlantirsin.

$$\overline{W}(x) = \begin{cases} \min(m, W(x)), & x \in \overline{D} \cap B, \\ m, & x \in \overline{D} \setminus B \end{cases}$$

Funksiya uchun  $\xi$  nuqtada bar'er bo'ladi. Bunga 1) va 2) xossalarning bajarilishini tekshirish bilan ishonch xosil qilish mumkin. Xaqiqatdan ham,  $\overline{D}$  sohada uzluksiz va  $D$  sohada supergarmonik ekanligi subgarmonik funksiyalarning 3) xossasidan kelib chiqadi. 2) xossa bevosita ko'rsatiladi.

Agar chegara nuqtasidan Barer mavjud bo'lsa, u holda bu nuqta (Laplas tenglamasi uchun) regulyar nuqta deyiladi.

Barer mavjudligi va yechimning chegara atrofidagi xarakteri orasidagi bog'liqlik quyidagi lemmada ifodalanadi.

**1.3.1-lemma.**  $D$  sohada  $u(x) = \sup_{v(x) \in S_\phi} v(x)$  tenglik bilan aniqlangan garmonik funksiya bo'lsin. Agar  $\xi$  - nuqta  $D$  sohaning chegarasidagi regulyar nuqta va  $\xi$  nuqtada  $\phi(\xi)$  uzluksiz bo'lsa, u holda  $x \rightarrow \xi$  da  $u(x) \rightarrow \phi(\xi)$  bo'ladi.

**1.3.2-teorema.** Chegaralangan sohada klassik Dirixle masalasi ixtiyoriy uzluksiz chegaraviy qiymatda yechilishi uchun sohaning barcha chegara nuqtalari regulyar bo'lishi zarur va yetarlidir.

Endi quyidagi savol muhimdir: qanday sohalar uchun barcha chegara nuqtalari regulyar bo‘ladi? Umumiy holda yetarli shartlarni chegaraning lokal geometrik xossalari terminida berish mumkin. Bunday shartlardan ayrimlarini keltiramiz.  $n = 2$  bo‘lgan holda chegaralangan  $D$  sohani qaraymiz.  $Z_0$ –nuqta  $D$  sohaning chegara nuqtasi bo‘lsin.  $r, \theta$ - orqali koordinata boshi  $z_0$  nuqtada bo‘lgan qutb koordinatalarini belgilaymiz.  $Z_0$  nuqtaning shunday bir  $N$  atrofi mavjud bo‘lib,  $D \cap N$  da yoki  $z_0$  nuqtani o‘z chegarasida saqlovchi  $D \cap N$  ning komponentasida aniqlangan  $\theta$  funksiyaning bir qiymatli varag‘ini ajratish mumkin bo‘lsin. U holda

$$W = -\operatorname{Re} \frac{1}{\log(z - z_0)} = -\frac{\log r}{\log^2 r + \theta^2}$$

funksiya  $z_0$  nuqta uchun (sust) lokal Barer funksiya bo‘ladi va shunga ko‘ra  $z_0$  nuqta regulyar nuqtadir. Xususan, agar  $z_0$  nuqta  $D$  sohaning tashqarisida yotuvchi sodda yoyning nuqtasi bo‘lsa, u holda bu  $z_0$  nuqta chegaraning regulyar nuqtasi bo‘ladi. Shunday qilib, tekislikda Dirixle masalasining chegaralangan sohada uzluksiz chegaraviy qiymatlar uchun yechilishi sohaning barcha chegara nuqtalariga tashqaridan o‘tuvchi sodda yoyning chekka nuqtasi bo‘lishi mumkin bo‘lgan holda o‘rinli bo‘ladi. Biroz umumiyroq holda, shu Barer ko‘rsatadiki, agar soha to‘ldiruvchisining ixtiyoriy komponentasi bittadan ortiq nuqtani saqlasa, chegaraviy masala yechiladi. Bunday sohaga misol sifatida chekli sondagi sodda yopiq egri chiziqlar bilan chegaralangan sohani keltirish mumkin. Boshqa bir misol – birlik doiradan qandaydir yoyni qirqib tashlash bilan hosil qilish mumkin. Bu xolda chegaraviy qiymat qirqilgan qismining har ikkala qirg‘og‘ida ham berilishi mumkin.

Yuqori o‘lchamli sohalar uchun bu masala qaralgan masaladan muhim farqi bo‘lib, umumiy holda Dirixle masalasi yechilmasligi ham mumkin. Uch o‘lchovli fazo bo‘lgan holda yopiq sirt bilan chegaralangan va soha ichiga yo‘nalgan yetarlicha o‘tkir bigizli Lebeg tomonidan qurilgan sohani misol sifatida keltirish mumkin: bu bigizning o‘tkir uchi shu sirt bilan chegaralangan soha chegarasining regulyar bo‘lmagan nuqtasi bo‘ladi.

Dirixle masalasi yechilishining sodda yetarli sharti chegaralangan  $D$  soha uchun tashqi sfera shartidir:

Har bir  $\xi \in \partial D$  nuqta uchun  $B = B_R(y)$  shar mavjud bo‘lib,  $\overline{B} \cap \overline{D} = \xi$  shartni qanoatlantirsin.

Agar bu shart bajarilsa, u holda

$$W(x) = \begin{cases} R^{2-n} - |x-y|^{2-n}, & n \geq 3 \\ \log \frac{|x-y|}{R}, & n = 2 \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlangan  $W$  funksiya  $\xi$  nuqtada barer bo'ladi. Xususan, chegarasi  $C^2$  sinfga tegishli sohalarning barcha chegara nuqtalari regulyardir.

## II bob. $m$ - subgarmonik va kuchsiz $m$ - subgarmonik funksiyalar

### 2.1. $m$ - subgarmonik funksiyalar va ularning xossalari

**2.1.1-ta'rif.** Ikki marta silliq  $u \in C^2(D)$  ( $D \subset \mathbb{C}^n$ ) funksiya  $z^0 \in D$  nuqtada  $m$ -sh ( $1 \leq m \leq n$ ) deyiladi, agar  $\left(u_{j\bar{k}}\right) \big|_{z=z^0}$  matrisaning  $\lambda(u) = (\lambda_1(u), \lambda_2(u), \dots, \lambda_n(u))$  xos qiymatlari  $\Gamma_m$  ga tegishli bo'lsa yoki  $dd^c u \in \overset{\wedge}{\Gamma}_m$  bo'lsa.  $u \in C^2(D)$  funksiya  $D \subset \mathbb{C}^n$  sohada  $m$ -sh, ( $1 \leq m \leq n$ ) deyiladi, agar u har bir  $z^0 \in D$  nuqtada  $m$ -sh bo'lsa.

Boshqacha aytganda,  $u \in C^2(D)$  funksiya  $m - sh$  ( $1 \leq m \leq n$ ) deyiladi, agar

$dd^c u \in \overset{\wedge}{\Gamma}_m$  bo'lsa yoki unga quyidagi tengsizlik teng kuchli:

$$(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \geq 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, m \quad (2.1.1)$$

(2.1.1) ga quyidagi tengsizlik ham ekvivalent:

$$\left[ \left( dd^c u + t_1 dd^c |z_1|^2 + \dots + t_n dd^c |z_n|^2 \right)^m \wedge \beta^{n-m} \geq 0, \forall t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n \right]$$

Undan tashqari quyidagi tasdiq ham o'rinli:

$$dd^c u \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{k-1} \wedge \beta^{n-m} \geq 0 \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \overset{\wedge}{\Gamma}_m, 1 \leq k \leq m \quad (2.1.2)$$

Bu tasdiq ikki xil xarakterga ega: agar u ikki marta silliq bo'lib,

$\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in \overset{\wedge}{\Gamma}_m$  uchun (2.1.2) shartni qanoatlantirsa, u holda u funksiya  $m - sh$  bo'ladi.

$u$  funksiyaning  $m - sh$  ligini tekshirish uchun (2.1.2) da faqat  $\alpha_j = dd^c u_j$ ,  $u_j \in C^2(D)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m - 1$  differensial formani chegaralangan bo'lishi yoki  $m - sh$  ko'phad bo'lishi yetarli.

Bu esa bizga  $L_{loc}^1$  funksiyalar sinfida  $m - sh$  funksiyalarni aniqlashga yordam beradi.

**3.1.2-ta'rif.**  $u \in L_{loc}^1(D)$  funksiya  $D \subset \mathbb{C}^n$  sohada  $m - sh$  deyiladi, agar u yuqoridan yarim uzluksiz va ixtiyoriy ikki marta silliq  $v_1, \dots, v_{m-1}$   $m - sh$  funksiyalar uchun  $dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m}$  oqim

$$\left[ dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \right](\omega) = \\ u dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \wedge dd^c \omega, \omega \in F^{0,0} \quad (2.1.3)$$

musbat aniqlangan bo'lsa.

Biz bilamizki,  $(p, p)$  – finit differensial formalar fazosidagi chiziqli, uzluksiz  $T$  funksional (kompleks qiymatli)

$$F^{p,p} = F^{p,p}(D) = \{\omega \in {}^{p,p}(D) \cap C^\infty(D) : \text{supp } \omega \subset\subset D\}, (n-p, n-p) = (q, q)$$

bidarajali oqim deyilar edi.

**$m - sh$  funksiyalarning xossalari:**

1)  $u \in C^2(D)$  funksiya  $m - sh$  ( $1 \leq m \leq n$ ) bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, qachonki  $dd^c u \in \overset{\wedge}{\Gamma}, \forall z^0 \in D$  bo'lsa.

2) agar  $u \in m - sh(D)$  bo'lsa,  $u$  holda  $u_j(z) = u * K_j(z - \omega)$  standart approksimatsiya (o'rama) ham  $m - sh$  bo'ladi, ( $j \rightarrow \infty$  da  $u_j \downarrow u$  bo'ladi)

3) agar  $u, v \in m - sh$  bo'lsa,  $u$  holda ixtiyoriy  $a, b \geq 0$  uchun  $au + bv \in m - sh(D),$

$$au + bv \in m - sh(D) \Rightarrow \lambda(u), \lambda(v) \in \Gamma_m, a, b \geq 0$$

ekanligidan

$$a\lambda(u) + b\lambda(v) \in \Gamma_m \Rightarrow au + bv \in m - sh(D)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

$$4) psh = n - sh \subset \dots \subset 1 - sh = sh$$

5) agar  $\gamma(t) - t \in \mathbb{R}_+$  parametrning o'suvchi qavariq funksiyasi va  $u \in m - sh$  bo'lsa, u holda  $\gamma \circ u \in m - sh$  bo'ladi.

6) tekis yaqinlashuvchi yoki kamayuvchi  $m - sh$  funksiyalar ketma-ketligining limiti yana  $m - sh$  bo'ladi.

7) chekli sondagi  $m - sh$  funksiyalarning maksimumi  $m - sh$  funksiyadan iborat bo'ladi; ixtiyoriy lokal tekis chegaralangan  $\{u_\theta\} \subset m - sh$

$m$ -subgarmonik funksiyalar oilasining supremumi  $u(z) = \{\sup_\theta u_\theta(z)\}$  regularizatsiyasi  $u^*(z)$  ham  $m - sh$  bo'ladi.  $m - sh \subset sh$  ekanligidan  $\{u(z) < u^*(z)\} - \text{to'plam}$   $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$  da polyar to'plam bo'ladi. Qisqacha aytganda uning Lebeg o'lchovi nolga teng. Ixtiyoriy lokal tekis chegaralangan  $\{u_j\} \subset m - sh$  funksiyalar ketma-ketligining limiti  $u(z) = \overline{\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(z)}$  regularizatsiyasi  $u^*(z)$  ham  $m - sh$  va  $\{u(z) < u^*(z)\} - \text{polyar to'plam}$  bo'ladi.

8) agar  $u \in m - sh$  bo'lsa, u holda ixtiyoriy  $P \subset \mathbb{C}^n$  kompleks gipertekislik uchun  $u|_P \in sh_{m-1}$  bo'ladi.

Haqiqatdan, gessianning 4-xossasidan foydalanib,  $\lambda, \mu \in \Gamma_m$  vektor uchun

$$\sum_j \mu_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j} H_m(\lambda) \geq m H_m^{1/m}(\mu) H_m^{1-1/m}(\lambda)$$

$\mu = (0, \dots, 0, 1)$  deb oladigan bo'lsak,  $\frac{\partial}{\partial \lambda_n} H_m(\lambda) = H_{m-1}(' \lambda) \geq 0$ . Bu shuni

anglatadiki, agar  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \in \Gamma_m$  bo'lsa, u holda  $'\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \Gamma_{m-1}$

bo‘ladi. Endi  $u \in m - sh(D)$  va  $P \subset \mathbb{C}^n$  gipertekislik bo‘lsin. Umumiylikka zid ish qilmagan holda biz  $u \in C^2(D)$ ,  $P = \{z_n = 0\}$  deb faraz qilamiz va  $u|_P = u(z, 0) \in sh_m$  ekanini isbotlaymiz.

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) - U = (u_{jk}^-)$ ,  $j, k = 1, 2, \dots, n$  matrisani xos qiymatlari bo‘lsin.  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) -$  esa  $U = (u_{jk}^-)$ ,  $j, k = 1, 2, \dots, n-1$  matrisani xos qiymatlari bo‘lsin. Unitar almashtirishlardan keyin (tayinlangan  $(z^0, 0) \in D$  nuqtada)  $U$  quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$U = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 & u_{1n}^- \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{n-1} & u_{n-1n}^- \\ u_{n1}^- & u_{n2}^- & \dots & u_{nn-1}^- & u_{nn}^- \end{pmatrix}$$

$u(z) \in m - sh$  ekan,  $u$  holda (ixtiyoriy tayinlangan  $t \in \mathbb{R}_+$  parametr uchun)

$$u_t(z) = u(z) + t|z_n|^2 \in m - sh \text{ bo‘ladi.}$$

Natijada  $\lambda(t) = \lambda(u_t) \in \Gamma_m$  vektor yuqorida isbotlanganiga ko‘ra

$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_{n-1}(t)) \in \Gamma_{m-1}$ . Boshqa tomondan  $\lambda(t)$  quyidagi

$$\begin{vmatrix} \lambda - \mu_1 & 0 & \dots & 0 & u_{1n}^- \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - \mu_{n-1} & u_{n-1n}^- \\ u_{n1}^- & u_{n2}^- & \dots & u_{nn-1}^- & \lambda - t - u_{nn}^- \end{vmatrix} = 0$$

tenglamaning ildizi. Yana almashtirishlar bajarsak,

$$\begin{vmatrix} \lambda - \mu_1 & 0 & \dots & 0 & \frac{u_{1n}^-}{t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - \mu_{n-1} & \frac{u_{n-1n}^-}{t} \\ u_{n1}^- & u_{n2}^- & \dots & u_{nn-1}^- & \frac{\lambda - u_{nn}^-}{t} - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$t \rightarrow \infty$  da  $\lambda_j(t) \rightarrow \mu_j$ ,  $\lambda(t) \in \Gamma_{m-1}$  ekan, u holda  $\Gamma_{m-1}$  ning yopiqligidan  $\mu \in \Gamma_{m-1}$  ya'ni  $u|_P = u(z, 0) \in m - sh$  ekanligi kelib chiqadi. 8-xossa isbotlandi.

(2.1.1) tengsizlikdan foydalanib quyidagi teoremani osongina isbotlash mumkin:

**2.1.1-teorema.** Agar  $u(z)$  funksiya bir vaqtda garmonik va  $m - subgarmonik$  bo'lsa, u holda bu funksiya plyurigarmonik bo'ladi.

**Isboti.** Teoremani  $k = 1, 2$  holda ko'ramiz

$$\begin{cases} (dd^c u) \wedge \left( dd^c |z|^2 \right)^{n-1} = 0 \Rightarrow H_1(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 \\ (dd^c u)^2 \wedge \left( dd^c |z|^2 \right)^{n-2} \geq 0 \Rightarrow H_2(\lambda) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n \geq 0 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu yerda oddiy arifmetik va mantiqiy mulohazalardan

$$\begin{cases} H_1^2(\lambda) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2 = 0 \\ H_2(\lambda) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n \geq 0 \end{cases}$$

ni hosil qilamiz.  $H_2(\lambda) \geq 0$  ligidan foydalanib sistemaning 1-tenglamasini quyidagicha yozib olamiz

$$\{H_1^2(\lambda) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 + 2H_2(\lambda) = 0$$

Bundan esa

$$\{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = -2H_2(\lambda) \leq 0$$

tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlik faqat  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0$  yechimlarga ega.

Demak  $u(z)$   $D$  sohada plyurigarmonik funksiya bo'ladi.

Teorema isbotlandi.

## 2.2. Kuchsiz $m$ -subgarmonik funksiyalar va ularning xossalari

**2.2.1-ta'rif.** Agarda  $D \subset \mathbb{C}^n$  sohada aniqlangan  $u(z) \in L_{loc}^1(D)$  funksiya:

1)  $D$  sohada yuqoridan yarim uzluksiz, ya'ni

$$\overline{\lim_{z \rightarrow z^0}} u(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{B(z^0, \varepsilon)} u(z) \leq u(z^0);$$

2)  $D$  sohada  $dd^c u \wedge \left( dd^c |z|^2 \right)^{n-m} \geq 0$ , ya'ni  $\forall \omega \in F^{(m-1, m-1)}, \omega \geq 0$

uchun  $D \subset \mathbb{R}^{2n}$

$$dd^c u \wedge \left( dd^c |z|^2 \right)^{n-m}(\omega) = \int u \left( dd^c |z|^2 \right)^{n-m} \wedge dd^c \omega \geq 0 \quad (2.2.1)$$

bo'lsa, bu funksiyaga  $D$  sohada kuchsiz  $m$ -subgarmonik funksiya  $1 \leq m \leq n$  ( $(n - m + 1)$  o'lchamli kompleks tekisliklarda subgarmonik funksiya) deyiladi.

Bunday funksiyalar sinfini  $m - wsh(D)$  orqali belgilaymiz. Bu yerda " $w$ " xarfi bu sinfni  $m - sh$  funksiyalar sinfidan farqlash uchun ishlatilgan.

$D \subset \mathbb{C}^n$  sohada  $m - wsh$  funksiyalar ham ayni paytda  $D \subset \mathbb{R}^{2n}$  da ham subgarmonik bo'ladi.

Binobarin subgarmonik funksiyalarning barcha xossalari  $m - wsh$  funksiyalar uchun ham o'rinli

Quyida  $m - wsh$  funksiyalarni ba'zi muhim xossalarini keltiramiz.

1)  $m - wsh$  funksiyalarning nomanfiy koeffitsiyentli chiziqli kombinatsiyani  $m - wsh$  funksiya bo'ladi, ya'ni

$$u_j(z) \in m - wsh(D) \quad a_j \in R_+ \quad (j = 1, 2, \dots, N) \Rightarrow$$

$$a_1 u_1(z) + a_2 u_2(z) + \dots + a_N u_N(z) \in m - wsh(D);$$

2) Monoton kamayuvchi  $m - wsh$  funksiyalar ketma-ketligining limiti  $m - wsh$  funksiya bo'ladi, ya'ni  $u_j(z) \in m - wsh(D)$

$$u_j(z) \geq u_{j+1}(z) \quad (j = 1, 2, \dots) \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(z) \in m - wsh(D)$$

3) Tekis yaqinlashuvchi  $m - wsh$  funksiyalar ketma-ketligi  $m - wsh$  funksiyaga yaqinlashadi, ya'ni agar

$$u_j(z) \in m - wsh(D), \quad (j = 1, 2, \dots) \quad u_j(z) = u(z)$$

bo'lsa, u holda  $u(z) \in m - wsh(D)$  bo'ladi.

4) *Maximum prinsipi.* Agar  $u(z) \in m - wsh(D)$  funksiya biror  $z^0 \in D$  nuqtada o'zining maximumiga erishsa, ya'ni

$$u(z^0) = \sup_{z \in D} u(z) \quad (2.2.2)$$

bo'lsa, u holda  $u(z) \equiv const$  bo'ladi.

5) Agar  $u(z) \in m - wsh(D)$  bo'lsa, u holda  $u_j(z) = u_{\frac{1}{j}}^*(z - \omega)$  o'rama

ham  $m - wsh(D)$  ga tegishli bo'ladi, hamda  $j \rightarrow \infty$  da  $u_j(z) \downarrow u(z)$ , bu yerda

$$K_{\frac{1}{j}}(x) = j^n K(jx), \text{ bu yerda } K - \text{ standart silliq yadro}$$

$$\operatorname{supp} K \subset B(0;1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} k(x)dx = \int_{B(0;1)} k(x)dx = 1$$

6)  $D \subset \mathbb{C}^n$  sohada aniqlangan va yuqoridan yarim uzluksiz  $u$  funksiya  $m - wsh$  bo'lishi uchun, ixtiyoriy  $(n - m + 1)$ -o'lchamli  $\Pi \subset \mathbb{C}^n$  kompleks tekislikda  $u|_{\Pi} \in sh(\Pi) \cap D$  bo'lishi zarur va yetarli.

### III bob. Kuchsiz $m$ - subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasi

#### 3.1. Kuchsiz $m$ - subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasi

**3.1.1.-Ta'rif.** Agar  $u(z) \in m - wsh(D)$  funksiya uchun  $D \subset \mathbb{C}^n$  sohada  $m - wsh$  funksiyalar sinfida maksimum printsipli bajarilsa, ya'ni agar  $v \in m - wsh(D) : \overline{\lim_{z \rightarrow \partial D}} (u(z) - v(z)) \geq 0$  munosabat bajarilishidan  $\forall z \in D$  uchun  $u(z) \geq v(z)$  tengsizlik kelib chiqsa, u holda  $u(z)$  funksiya  $D$  sohada maksimal funksiya deyiladi.

$u(z) \in m - wsh(D)$  funksiya maksimal bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, istalgan  $G \Subset D$  sohada barcha  $v \in m - wsh(D) : u|_{\partial D} \geq v|_{\partial G}$  funksiyalar uchun  $D$  da  $u(z) \geq v(z)$  tengsizlik bajarilsa.

Maksimal funksiyalarni o'rganish uchun  $mw$  -subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasini qaraymiz. Plyurisubgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasiga o'xshash tarzda  $mw$  -subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasi quyidagicha aniqlanadi: faraz qilaylik  $D \subset \mathbb{C}^n$  - chegaralangan soha va  $\varphi(\xi) \in C(\partial D)$  - tayinlangan funksiya bo'lsin. Shunday uzluksiz  $u(z)$  maksimal  $m - wsh$  funksiyaning aniqlash kerakki,  $u|_{\partial D} = \varphi$ . Odatdagidek, yechim Perron usulida izlanadi:

$$U(\varphi, D) = \{u \in m - wsh(D) : \overline{\lim_{z \rightarrow \partial D}} u(z) \leq \varphi\},$$

$$\omega(z) = \sup\{u(z) : u \in U(\varphi, D)\}. \quad (3.1.1)$$

Klassik  $m = 1$  holda, agar  $D$  - kuchli 1 - qavariq (regulyar), masalan, silliq  $\partial D$  chegaraga ega bo'lsa, u holda  $\omega$  funksiya Dirixle masalasining yechimi bo'lishi isbotlangan, ya'ni u  $D$  sohada garmonik, chegaragacha uzluksiz va  $\omega|_{\partial D} = \varphi$ . Biroq  $psh$  funksiya sinfidagidek,  $m > 1$  bo'lganda, masala ancha murakkab va yechimning mavjudligi uchun  $D$  sohaning qavariqligiga va chegaraviy  $\varphi$  funksiyaga qo'shimcha shartlar qo'yishga to'g'ri keladi.

**3.1.2-ta'rif.** Agar  $\forall \xi^0 \in \partial D$  nuqta chegarasida  $b(z) \in m - wsh(D) \cap C(\overline{D})$   $b(\xi^0) = 0$ ,  $b|_{\overline{D} \setminus \{\xi^0\}} < 0$  pik funksiya mavjud bo'lsa,  $D \subset \mathbb{C}^n$  soha  $mw$ -regulyar soha deyiladi.

Shuni takidlaymizki, agar  $m > 1$  da  $\partial D$  chegara silliqqligi, ya'ni  $m - wsh$  funksiya uchun pik mavjud bo'lishi  $mw$ -regulyar soha uchun yetarli bo'lmaydi. Lekin, agar  $D = \{\rho(z) < 0\}$  qat'iy  $mw$ -qavariq soha bo'lsa, u holda u  $mw$ -regulyar bo'ladi, ya'ni istalgan  $\xi^0 \in \partial D$  nuqta chegarasida  $b(z)$  pik funksiya mavjud. Boshqacha aytganda  $\rho(z)$ - qandaydir  $G \supset \overline{D}$  atrofida qat'iy  $m - wsh$  funksiya bo'lsa, u holda fiksirlangan  $\xi^0 \in \partial D$  nuqta uchun  $\sigma > 0$  mavjudki,  $b(z) = \rho(z) - \sigma|z - \xi^0|^2 \in m - wsh(G)$  bo'ladi.

**3.1.1-teorema.** Agar  $D \subset \mathbb{C}^n$  – qat'iy  $mw$ -qavariq soha bo'lsa, u holda bu sohada Dirixle masalasi istalgan chegaraviy  $\varphi \in C(\partial D)$  funksiya uchun yechimga ega bo'ladi. Aniqrog'i,  $\omega(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D)\}$  funksiya maksimal, uzluksiz  $\omega \in m - wsh(D) \cap C(\overline{D})$  bo'lib,  $\lim_{z \rightarrow \xi} \omega(z) = \varphi(\xi)$ ,  $\xi \in \partial D$  tenglik bajariladi.

$psh$  funksiyalar ( $m = n$ ) uchun  $\lim_{z \rightarrow \xi} \omega(z) = \varphi(\xi)$ ,  $\forall \xi \in \partial D$  munosabat Bremerman tomonidan, uzluksizligi,  $\omega \in C(\overline{D})$  – Uolsh tomonidan isbotlangan.

**Natija.** Agar  $D \subset \mathbb{C}^n$  qat'iy  $mw$ -qavariq soha bo'lsa, u holda istalgan uzluksiz  $\varphi$  funksiya  $\partial D$  chegarasida  $m - wsh(D)$  funksiya izi hisoblanadi. Boshqacha aytganda,  $\varphi \in C^2(\partial D)$  bo'lsa, u holda u  $w \in m - wsh(D_\epsilon) \cap C(D_\epsilon) : w|_{\partial D} = \varphi$  funksiyaning izi hisoblanadi. Bu yerda  $D_\epsilon = \overline{D}$  yopilma atrofi.

Bundan ko'rinadiki, natijaning birinchi qismi ravshan, lekin  $w$  yechimning o'zi  $\varphi$  funksiya ichkarisiga davom qildirilgan  $m - wsh(D)$  ni beradi.

Dirixle masalasi yechimi faqat qat'iy  $mw$ -qavariq soha uchun emas, balki  $mw$ -regulyar  $D \subset \mathbb{C}^n$  soha uchun ham yechiladi.

Endi Dirixle masalani ixtiyoriy  $D \subset \mathbb{C}^n$  sohada qaraymiz, unga minimal talab u  $D \subset \mathbb{C}^n$  soha regulyar sohadan iborat bo'lishi kerak. Masalan,  $D \subset \mathbb{C}^n$  soha

chegarasi silliq yoki istalgan  $\xi \in \partial D$  chegaraviy nuqtada ichki konus mavjudki, klassik potentsiallar nazariyasi ma'nosida regulyar sohadan iborat bo'ladi. Ravshanki, bunday sohalar uchun, umuman aytganda, qandaydir  $m - wsh(D)$  funksiyaning izidan iborat bo'lmagan  $\varphi \in C(\partial D)$  funksiya mavjud bo'ladi. Masalan,  $U^2 = U^2(0,1) = \{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$  polidoira uchun  $\varphi(\xi_1, \xi_2) \in C(\partial U^2)$  funksiya,  $(0,1) \in \partial U^2$  nuqtada pik nuqtaga ega, lekin ichkariga  $2 - wsh = psh$  davom qilmaydi. Binobarin, Dirixle masalasi  $\omega|_{\partial U^2} = \varphi$  chegaraviy shartda mavjud emas.

**3.1.2-Teorema.** Agar  $D \subset \mathbb{C}^n$  – regulyar soha va  $\varphi \in C(\partial D)$  funksiya qandaydir  $w \in m - wsh(D) : \lim_{z \rightarrow \xi} w(z) = \varphi(\xi), \xi \in \partial D$  funksiyaning izidan iborat bo'lsa, u holda  $\omega(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D)\}$  funksiya maksimal, uzluksiz  $\omega \in m - wsh(D) \cap C(\overline{D})$  bo'lib,  $\omega|_{\partial D} \equiv \varphi$  tenglik bajariladi.

**Isbot.**  $\omega(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D)\}$  lar uchun  $m - wsh$  funksiyalar xossasiga ko'ra  $\omega^*(z)$  regularizatsiya ham  $m - wsh$  funksiya bo'ladi. Shuningdek,  $D$  – regulyar soha va  $\varphi \in C(\partial D)$  funksiya, hamda  $m - wsh$  funksiyaning 6)-xossasiga ko'ra

$$\overline{\lim_{z \rightarrow \xi}} \omega^*(z) \leq \varphi(\xi), \forall \xi \in \partial D \quad (3.1.2)$$

ega bo'lamiz.

Teskari tengsizlikni isbotlash uchun  $w \in m - wsh(D)$ ,  $\lim_{z \rightarrow \xi} w(z) = \varphi(\xi), \xi \in \partial D$  funksiyadan foydalanamiz.  $\mathcal{U}(\varphi, D)$  sinf ta'rifiga ko'ra  $w \in \mathcal{U}(\varphi, D)$  bo'lishi ravshan. Bundan  $w(z) \leq \omega(z)$ , ya'ni  $\underline{\lim_{z \rightarrow \xi}} \omega^*(z) \geq \underline{\lim_{z \rightarrow \xi}} w(z) = \varphi(\xi), \xi \in \partial D$  va  $\overline{\lim_{z \rightarrow \xi}} \omega^*(z) \leq \varphi(\xi), \forall \xi \in \partial D$  lar birgalikda bizga  $\lim_{z \rightarrow \xi} \omega^*(z) = \varphi(\xi), \xi \in \partial D$  ekanligini beradi.

Bundan xususan quyidagi  $\omega^* \in \mathcal{U}(\varphi, D)$  kelib chiqadi va shu sababli  $\omega^* \equiv \omega$  bo'ladi.  $\omega(z)$  funksiyaning maksimal ekanligi 3.2.1-teoremadan kelib chiqadi.

Endi  $\omega$  funksiyani  $\overline{D}$  da uzluksiz ekanini ko'rsatish qoldi. Buning uchun  $z \rightarrow \xi \in \partial D$  da  $|u(z) - u(\xi)|$  ayirma nolga tekis yaqinlashadi, ya'ni  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |u(z) - u(\xi)| < \varepsilon, \forall \xi \in \partial D, z \in D, |z - \xi| < \delta$ . Shu sababli, agar biz standart  $C^\infty$  -approximatsiya olsak

$$u_j(z) = u \circ K_{1/j}(z - w), \quad u_j \in C^\infty(D_j) \cap m\text{-}wsh(D_j),$$

bu yerda  $D_j = \{z \in D: \text{dist}(z, \partial D) > 1/j\}$ , unda  $j \rightarrow \infty$  da  $\max_{\partial D_j} [u_j(z) - u(z)] \rightarrow 0$  bo'lishini ko'ramiz. U holda  $D$  da  $u$  funksiyaning maksimaligidan  $\max_{D_j} [u_j(z) - u(z)] \rightarrow 0$  ekanligi kelib chiqadi, ya'ni  $D$  soha ichkarisida  $u_j \downarrow u$  teng. Bundan,  $u \in C(D)$  bo'lishi kelib chiqadi.

### 3.2. Polidoirada plyurisubgarmonik funksiyalar uchun Dirixle masalasi

**3.2.1-ta'rif.** Agar  $D \subset \mathbb{C}^n$  sohada aniqlangan  $u(z): D \rightarrow [-\infty; \infty)$  funksiya quyidagi ikki shartni bajarsa:

- 1)  $u(z)$  yuqoridan yarim uzluksiz;
- 2) ixtiyoriy  $l$  kompleks to'g'ri chiziq uchun  $u/l$  funksiya  $l \cap D$  da subgarmonik bo'lsa,  $u(z)$  funksiya  $D$  sohada plyurisubgarmonik funksiya deyiladi.

Plyurisubgarmonik funksiyalar to'plami  $Psh(D)$  kabi belgilanadi.

$\mathbb{C}^n$  da plyurisubgarmonik funksiyalar sinfiga Dirixle masalasi quyidagicha ifodalanadi:

$D \subset \mathbb{C}^n$  soha chegarasi  $\partial D$  da berilgan  $\varphi \in C(\partial D)$  funksiya uchun

$$u^*(\xi) = \varphi(\xi), \xi \in \partial D$$

chegaraviy qiymatli shunday  $u \in Psh(D)$  funksiyani topish kerakki, u bu shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar orasida ekstremal, ya'ni boshqa istalgan

$$v \in Psh(D), \quad v|_{\partial D} \equiv \varphi(\xi)$$

funksiya uchun  $D$  da  $v(z) \leq u(z)$  tengsizlikni qanoatlantirishi kerak.

1959 yilda Bremerman (q. [1]) Perron metodi yordamida bu masala  $D \subset \mathbb{C}^n$  dagi qat'iy psevdoqavariq soha bo'lsa yechimga ega bo'lishini, 1968 yilda Uolsh (q. [2]) bu yechimning  $D$  da uzluksizligini ko'rsatgan. 1976 yilda YE.Bedford va B.A.Teylorlar (q. [3]) qat'iy psevdoqavariq sohada  $\varphi \in C(\partial D)$  funksiya uchun umumlashgan Dirixle masalasi yagona  $u \in C(\overline{D})$  yechimga ega va bu yechim  $D$  da  $(dd^c u)^n = 0$  tenglamani qanoatlantirishini isbotlaganlar.

Agar qaralayotgan soha qat'iy psevdoqavariq bo'lmasa, u holda  $\varphi$  funksiyaga qo'shimcha shartlar qo'yish kerak bo'ladi. Masalan  $U \subset \mathbb{C}^n$  birlik polidoirada quyidagi Dirixle masalasi:

$$(dd^c u)^n = 0, \quad u|_{\partial U} = \varphi(\xi), \quad (3.2.1)$$

bu yerda  $\varphi(\xi)$  funksiya  $\partial U$  chegarada berilgan uzluksiz funksiya,  $u \in Psh(U)$  funksiya  $\lim_{z \rightarrow \xi, z \in U} u(z) = \varphi(\xi), \xi \in \partial U$  shartni qanoatlantirgan holda yagona uzluksiz yechimga ega bo'ladi (q. [9]). B. Abdullayev ishida hozirda jadal tadqiq qilinayotgan  $m$ -subgarmonik va kuchsiz  $m$ -subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasi ayrim shartlar ostida yechimga egaligi o'rganildi (q. [15-16]). Keyingi yillarda polidoirada Dirixle masalasi chegaraviy funksiya qiymatlari butun chegarada emas, balki faqat polidoira ostovida berilgan holatda ham yechimga ega bo'lishi ko'rsatildi (q. [20]). Quyida polidoirada Dirixle masalasi berilgan chegaraviy funksiya soha chegarasining biror kichik atrofiga plyurisubgarmonik davom qildirilgan shartda yechimga ega bo'lishini ko'rsatamiz. Oldin ikki o'zgaruvchi bo'lgan holni qaraymiz.

Birlik polidaira  $U^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\} = U_1 \times U_2$  da Monj-Amper tenglamasi uchun Dirixle masalasini  $\varphi(\xi)$  ning qiymatlari chegaraning barcha joyida emas, balki faqat uning ostovida berilgan holni qaraymiz:

$$(dd^c u)^2 = 0, \quad u|_{T^2} \equiv \varphi(\xi)$$

bu yerda  $\varphi(\xi) \in C(T^2)$ ,  $T^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = 1, |z_2| = 1\}$  – polidaira ostovi.

**3.2.1-teorema.**  $U^2 \subset \mathbb{C}^2$  birlik polidaira va  $T^2 \subset \overline{U^2}$  uning ostovi bo'lsin. U holda ixtiyoriy  $\varphi(\xi) \in C(R^2)$  uchun  $(dd^c u)^2 = 0$ ,  $u|_{T^2} = \varphi(\xi)$  Dirixle masalasi yagona  $u \in Psh(U^2) \cap C(U^2)$ ,  $u|_{T^2} = \varphi(\xi)$  yechimga ega.

**Isbot.**  $\varphi(\xi) \in C(T^2)$  bo'lgani uchun Puasson integralidan foydalanib  $U^2$  da quyidagi funktsiyani quramiz

$$h(z_1, z_2) = \iint_T \varphi(\xi_1, \xi_2) P_1(\xi_1, z_1) P_2(\xi_2, z_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (3.2.2)$$

Bu funktsiya quyidagi xossalarga ega:

1)  $h(z_1, z_2)$  funktsiya 2-garmonik funktsiya, ya'ni har bir tayinlangan  $z_1 = z_1^0 \in U_1$  nuqtada  $h(z_1^0, z_2)$  funktsiya  $z_2$  o'zgaruvchi bo'yicha garmonik va har bir tayinlangan  $z_2 = z_2^0 \in U_2$  nuqtada  $h(z_1, z_2^0)$  funktsiya  $z_1$  o'zgaruvchi bo'yicha garmonik.

2)  $h(z_1, z_2) \in C(\overline{U^2})$  ekanini ko'rsatamiz. Dastlab  $\varphi(\xi)$  funktsiyani butun  $\partial U$  chegarada aniqlaymiz. Buning uchun oldin  $\partial U$  chegarada  $|z_1^0| = 1$  bo'lgan  $z_1^0$  nuqtani tayinlab,

$$\phi(z_1^0, z_2) = \int_{|\xi_2|=1} \varphi(z_1^0, \xi_2) P_2(\xi_2, z_2) d\xi_2$$

ni quramiz, bu funksiya  $z_2$  o'zgaruvchisi bo'yicha garmonik funksiyani ifodalaydi va uzluksiz, shu bilan birga  $\phi(z_1^0, z_2) \Big|_{|z_2|=1} = \varphi(z_1^0, \xi_2)$  ga teng. Xuddi shunday  $|z_2^0| = 1$

bo'lgan  $z_2^0$  nuqtani tayinlasak, hosil bo'lgan  $\phi(z_1, z_2^0) = \int_{|\xi_1|=1} \varphi(\xi_1, z_2^0) P_1(\xi_1, z_1) d\xi_1$

funksiya  $z_1$  o'zgaruvchisi bo'yicha garmonik funksiyani ifodalaydi va uzluksiz, shu bilan birga  $\phi(z_1, z_2^0) \Big|_{|z_1|=1} = \varphi(\xi_1, z_2^0)$  ga teng. Natijada hosil bo'lgan

$$\phi(z_1, z_2) = \begin{cases} \int_{|\xi_1|=1} \varphi(\xi_1, z_2) P_1(\xi_1, z_1) d\xi_1, & |z_2| = 1 \\ \int_{|\xi_2|=1} \varphi(z_1, \xi_2) P_2(\xi_2, z_2) d\xi_2, & |z_1| = 1 \end{cases}$$

funksiya butun  $\partial U$  chegarada aniqlangan. Uni chegarada uzluksizligini ko'rsatish uchun  $\partial U$  chegarada  $\{|z_1| = 1, |z_2| \leq 1\}$  dagi istalgan  $(z_1^0, z_2^0)$  nuqtada uzluksizligini ko'rsatamiz. Buning uchun funksiya orttirmasini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\left| \phi(z_1, z_2) - \phi(z_1^0, z_2^0) \right| \leq \left| \phi(z_1, z_2) - \phi(z_1^0, z_2) \right| + \left| \phi(z_1^0, z_2) - \phi(z_1^0, z_2^0) \right|.$$

$\varphi(\xi)$  ning  $T$  da uzluksizligidan  $\forall \varepsilon > 0$  uchun  $\exists \delta_1 > 0$  mavjudki,  $|\xi_2| = 1$  va  $|z_1 - z_1^0| < \delta_1$  ni qanoatlantiruvchi  $(z_1, \xi_2) \in T$  nuqtalarda

$$\left| \varphi(z_1, \xi_2) - \varphi(z_1^0, \xi_2) \right| < \varepsilon \quad (3.2.3)$$

bajariladi va unga asosan

$$\begin{aligned} \left| \phi(z_1, z_2) - \phi(z_1^0, z_2) \right| &= \left| \int_{|\xi_2|=1} \varphi(z_1, \xi_2) P_2(\xi_2, z_2) d\xi_2 - \int_{|\xi_2|=1} \varphi(z_1^0, \xi_2) P_2(\xi_2, z_2) d\xi_2 \right| \\ &= \int_{|\xi_2|=1} P_2(\xi_2, z_2) \left[ \varphi(z_1, \xi_2) - \varphi(z_1^0, \xi_2) \right] d\xi_2 < 2\pi\varepsilon \text{ o'rinli.} \end{aligned}$$

Puasson yadrosining  $z_2$  bo'yicha uzluksizligidan  $\exists \delta_2 > 0$  topilib,  
 $|z_2 - z_2^0| < \delta_2$  ni qanoatlantiruvchi  $z_2 \in \{|z_2| \leq 1\}$  lar uchun

$$\begin{aligned} |\phi(z_1^0, z_2) - \phi(z_1^0, z_2^0)| &= \left| \int_{|\xi_2|=1} \varphi(z_1^0, \xi_2) P_2(\xi_2, z_2) d\xi_2 - \int_{|\xi_2|=1} \varphi(z_1^0, \xi_2) P_2(\xi_2, z_2^0) d\xi_2 \right| \\ &= \left| \int_{|\xi_2|=1} \varphi(z_1^0, \xi_2) [P_2(\xi_2, z_2) - P_2(\xi_2, z_2^0)] d\xi_2 \right| < 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

baholashlarni hosil qilamiz. Demak,  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  deb olsak  $|z_1 - z_1^0| < \delta_1$  va  
 $|z_2 - z_2^0| < \delta_2$  ni qanoatlantiruvchi istalgan  $(z_1^0, z_2^0) \in \{|z_1| = 1, |z_2| \leq 1\}$   
 nuqtalarda

$$|\phi(z_1, z_2) - \phi(z_1^0, z_2^0)| < 2(\pi + M)\varepsilon.$$

Endi  $\phi(z_1, z_2)$  funksiya  $h(z_1, z_2)$  ning chegaradagi limiti ekanini ko'rsatamiz.

Buning uchun masalan,  $z_2 \rightarrow \eta_2$ ,  $\eta_2 \in \{|z_2| = 1\}$  da  $|h(z_1, z_2) - \phi(z_1, \eta_2)|$  ni tekis 0  
 ga intilishini ko'rsatamiz. (3.2.2) ga asosan

$$\begin{aligned} |h(z_1, z_2) - \phi(z_1, \eta_2)| &= \left| \int_{|\xi_1|=1} \int_{|\xi_2|=1} \varphi(\xi_1, \xi_2) P_1(\xi_1, z_1) P_2(\xi_2, z_2) d\xi_1 d\xi_2 - \right. \\ &\quad \left. - \int_{|\xi_1|=1} \varphi(\xi_1, \eta_2) P_1(\xi_1, z_1) d\xi_1 \right| = \\ &= \left| \int_{|\xi_1|=1} P_1(\xi_1, z_1) \left[ \int_{|\xi_2|=1} \varphi(\xi_1, \xi_2) P_2(\xi_2, z_2) d\xi_2 - \varphi(\xi_1, \eta_2) \right] d\xi_1 \right| \end{aligned}$$

ni baxolash uchun ichkaridagi integralni quyidagicha ifodalab olamiz:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{|\xi_2|=1} \varphi(\xi_1, \xi_2) P_2(\xi_2, z_2) d\xi_2 - \varphi(\xi_1, \eta_2) \right| = \\
& = \left| \int_{|\xi_2|=1} \varphi(\xi_1, \xi_2) P_2(\xi_2, z_2) d\xi_2 - \int_{|\xi_2|=1} \varphi(\xi_1, \eta_2) P_2(\xi_2, z_2) d\xi_2 \right| = \\
& = \left| \int_{|\xi_2|=1} P_2(\xi_2, z_2) [\varphi(\xi_1, \xi_2) - \varphi(\xi_1, \eta_2)] d\xi_2 \right|
\end{aligned}$$

$\varphi(\xi)$  ning  $T$  da uzluksizligidan  $\forall \varepsilon > 0$  uchun  $\exists \delta > 0$  mavjudki,  $|\xi_1| = 1$  va  $|\xi_2 - \eta_2| < \delta$  ni qanoatlantiruvchi  $(\xi_1, \xi_2)$  nuqtalarda

$$|\varphi(\xi_1, \xi_2) - \varphi(\xi_1, \eta_2)| < \varepsilon \quad (3.2.4)$$

bajariladi. Puasson yadrosining xossasiga ko'ra  $\int_{|\xi_2|=1} P_2(\xi_2, z_2) d\xi_2 = 1$  va

$\xi_2 \neq \eta_2$ ,  $z_2 \in \{|z_2| < 1\}$  lar uchun  $\lim_{z_2 \rightarrow \eta_2} P_2(z_2, \xi_2) = 0$  bajariladi. Bundan

$|\xi_2 - \eta_2| > \delta$  lar uchun yuqoridagi  $\varepsilon$  uchun  $\exists \delta' > 0$  topiladiki,  $|z_2 - \eta_2| < \delta'$  bajarilganda

$$|P_2(\xi_2, z_2)| < \varepsilon \quad (3.2.5)$$

tengsizlik o'rinli.

Endi  $\{|\xi_2| = 1\}$  aylanani  $|\xi_2 - \eta_2| < \delta$  ni qanoatlantiruvchi yoyini  $\gamma_1$  bilan,  $|\xi_2 - \eta_2| > \delta$  ni qanoatlantiruvchi yoyini  $\gamma_2$  bilan belgilaymiz va

$\int_{|\xi_2|=1} P_2(\xi_2, z_2) [\varphi(\xi_1, \xi_2) - \varphi(\xi_1, \eta_2)] d\xi_2$  integralni  $\gamma_1$  va  $\gamma_2$  yoylar bo'yicha

integrallarga ajratamiz. Ulardan birinchisi uchun (3.2.4) ga ko'ra  $\forall \xi_1 \in \{|z_1| = 1\}$ ,  $\forall z_2 \in \{|z_2| < 1\}$  larda

$$\left| \int_{\gamma_1} P_2(\xi_2, z_2) [\varphi(\xi_1, \xi_2) - \varphi(\xi_1, \eta_2)] d\xi_2 \right| < \varepsilon \cdot \int_{\gamma_1} P_2(\xi_2, z_2) d\xi_2 = \varepsilon$$

va (3.2.5) ga ko'ra  $|z_2 - \eta_2| < \delta'$  ni qanoatlantiruvchi  $\forall z_2 \in \{|z_2| < 1\}$  va  $\forall \xi_1 \in \{|z_1| = 1\}$  lar uchun

$$\left| \int_{\gamma_2} P_2(\xi_2, z_2) [\varphi(\xi_1, \xi_2) - \varphi(\xi_1, \eta_2)] d\xi_2 \right| < 2M \int_{\gamma_2} P_2(\xi_2, z_2) d\xi_2 \leq 4M\pi\varepsilon$$

o'rinli, bu yerda  $M = \max_{\xi \in T} |\varphi(\xi)|$ .

Yuqoridagi tengsizliklarni hisobga olsak, natijada

$$\left| h(z_1, z_2) - \oint(z_1, \eta_2) \right| = \left| \int_{|\xi_1|=1} P_1(\xi_1, z_1) \left[ \int_{|\xi_2|=1} \varphi(\xi_1, \xi_2) P_2(\xi_2, z_2) d\xi_2 - \varphi(\xi_1, \eta_2) \right] d\xi_1 \right| < (1 + 4\pi M)\varepsilon$$

tengsizlikni  $\{|z_1| \leq 1\}$  da tekis bajarilishini hosil qilamiz. Bu

$\lim_{z_2 \rightarrow \eta_2} h(z_1, z_2) = \oint(z_1, \eta_2)$  ni bildiradi. Xuddi shunday  $\lim_{z_1 \rightarrow \eta_1} h(z_1, z_2) = \oint(\eta_1, z_2)$  ni

ko'rsatish mumkin. Demak,  $h(z_1, z_2)$  funksiya  $\overline{U}$  da uzluksiz funksiya ekan.

3) Endi  $h(z_1, z_2)$  funksiyaning yagonaligini ko'rsatamiz. Teskarisidan faraz qilamiz, ya'ni  $u_1(z)$  va  $u_2(z)$  funksiyalar (3.2.2) Puasson integrali bilan aniqlanuvchi garmonik funksiyalar bo'lsin. U holda  $\vartheta(z) = u_1(z) - u_2(z)$  funksiyani qaraymiz. Bu funksiya ham  $U$  da garmonik bo'lib,  $\overline{U}$  da uzluksiz va  $\vartheta(z)|_{\partial U} = 0$ . Maksimum prinsipiga ko'ra bu funksiya o'zining eng katta qiymatiga  $U$  da erishsa,  $\vartheta = \text{const}$

bo‘ladi, uzluksizligidan  $\overline{U}$  da ham  $\vartheta = const$ . Lekin  $T$  da  $\vartheta \equiv 0$  ligidan  $\overline{U}$  da ham  $\vartheta \equiv 0$  ligi kelib chiqadi. Agar eng katta qiymatga  $T$  da erishsa, u holda yana  $\vartheta \equiv 0$  ga ega bo‘lamiz.

Endi quyidagi Dirixle masalasini qaraymiz.

$$(dd^c u)^2 = 0, \quad u|_{\partial U} \equiv \phi(\xi), \quad \phi(\xi) \in C(\partial U).$$

Odatdagidek bu masala yechimini Perron metodi yordamida izlaymiz.

$$\mathcal{U}(\tilde{\varphi}, U) = \{u : u \in Psh(U) \cap C(\overline{U}), u|_{\partial U} \leq \phi\}.$$

funksiyalar oilasini qaraymiz va

$$\omega(z) = \sup_{u \in \mathcal{U}} u(z)$$

ni olamiz. Bu xolda  $\omega^*(z)$  maksimal funksiya bo‘ladi, ya’ni  $(dd^c \omega^*)^n = 0$ .

Endi  $\omega^*|_{\partial U} = \phi$  ni ko‘rsatish kerak.

Buning uchun yuqoridagi sinf o‘rniga

$$\mathcal{U}_1(\phi, U) = \{u : u \in sh(U) \cap C(\overline{U}), u|_{\partial U} \leq \phi\}$$

subgarmonik funksiyalar sinfini qaraymiz. Bu xolda shunday  $F(z)$  garmonik funksiya topilib,  $\Delta F = 0$ ,  $F|_{\partial U} = \phi$  bajariladi.  $F(z)$  funksiya  $F(z) \geq \omega(z)$  ni qanoatlantiradi, bundan

$$\overline{\lim_{z \rightarrow \xi}} \omega(z) \leq \phi(\xi) \quad (3.2.6)$$

Ikkinchi tomondan ixtiyoriy chegaraviy  $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0) \in \partial U$  ni tayinlaymiz va umumiylikka xilof qilmagan xolda  $\xi_2^0 = 1$  deb olamiz. Bu xolda  $h(z_1, 1)$  funksiya  $|z_1| < 1$  da garmonik va  $|z_1| \leq 1$  da uzluksiz. Bu funksiya yordamida quyidagi funksiyanı tuzamiz:

$$v(z) = h(z_1, 1) + c \operatorname{Re}(z_2 - 1) - \varepsilon, \quad c > 0, \varepsilon > 0$$

Bu funksiya yetarlicha katta  $c$  larda  $\mathcal{U}$  sinfga tegishli. Bundan tashqari

$$\lim_{z \rightarrow \xi^0, z \in U} v(z) = \phi(\xi^0) - \varepsilon.$$

$\varepsilon$  va  $\xi^0$  nuqtaning ixtiyoriyligidan

$$\lim_{z \rightarrow \xi, z \in U} \omega(z) \geq \phi(\xi), \forall \xi \in \partial U \quad (3.2.7)$$

bajariladi. Demak, (3.2.6) va (3.2.7) munosabatlardan

$\lim_{z \rightarrow \xi, z \in U} \omega(z) = \phi(\xi), \forall \xi \in \partial U$  o‘rinli ekani va bundan

$\lim_{z \rightarrow \xi, z \in U} \omega(z) = \varphi(\xi), \forall \xi \in T$  ning bajarilishi kelib chiqadi.  $\omega^*(z)$  funksiya  $U$  da

plyurisubgarmonik bo‘lganligi uchun uning uchun chegarada uzluksizlik sharti bajariladi

$$\lim_{z \rightarrow \xi, z \in U} \omega^*(z) = \varphi(\xi), \forall \xi \in T.$$

$\omega^*(z)$  ning uzluksizligi A.Sadullayev va B.Abdullayevlar (q.[15]) ishidagi kabi ko‘rsatiladi.

Endi yagonaligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik,  $v(z)$  funksiya

$$(dd^c v)^2 = 0, \quad v|_{\partial U} = \omega^*|_{\partial U}$$

umumlashgan Dirixle masalasining yagona yechimi bo‘lsin.  $U$  holda  $v(z)$   $U$  da maksimal bo‘ladi va demak  $U$  da  $v(z) \geq \omega^*(z)$  bo‘ladi. Lekin  $\omega^*$  ham  $U$  da maksimal, ya’ni  $\omega^* \geq v$ , binobarin  $\omega^*(z) \equiv v(z)$  kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Bu teoremadan foydalanib, quyidagi teoremani o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatishimiz mumkin.

**3.2.2-teorema.**  $U \subset \mathbb{C}^n$  birlik polidaira va  $T \subset \overline{U}$  uning ostovi bo‘lsin.  $U$  holda ixtiyoriy  $\varphi(\xi) \in C(T)$  uchun  $(dd^c u)^n = 0, u|_T = \varphi(\xi)$  Dirixle masalasi yagona  $u \in Psh(U) \cap C(U), u|_T = \varphi(\xi)$  yechimga ega.

Endi birlik polikrug  $U \subset \mathbb{C}^n$  da Monj-Amper tenglamasi uchun quyidagi Dirixle masalasini qaraymiz:

$$(dd^c u)^n = 0, \quad u|_{\partial U} \equiv \varphi(\xi), \quad \xi \in \partial U,$$

bu yerda  $\varphi(z) \in C(\bar{G})$  bo'lib,  $G = O \cap U$ ,  $O - \partial U$  ning yetarlicha kichik atrofi.

**3.2.3-teorema.**  $U \subset \mathbb{C}^n$  birlik polidoira va  $G = O \cap U$ , bu yerda  $O - \partial U$  ning yetarlicha kichik atrofi bo'lib,  $\varphi(z) \in C(\bar{G})$  bo'lsin.  $U$  holda ixtiyoriy  $\varphi(\xi) \in C(\partial U)$

uchun  $(dd^c u)^n = 0, u|_{\partial U} = \varphi(\xi)$  Dirixle masalasi yagona

$u \in Psh(U) \cap C(\bar{U}), u|_{\partial U} = \varphi(\xi)$  yechimga ega.

**Isbot.** Odatdagidek bu masala yechimini Perron metodi yordamida izlaymiz.

Quyidagi  $\mathcal{U}(\varphi, U) = \{g \in Psh(U) \cap C(\bar{U}), g(z)|_{\partial U} \leq \varphi(\xi)\}$  sinfni qaraymiz va

$$\omega(z) = \sup\{g(z) : g \in \mathcal{U}(\varphi, U)\} \text{ deb olamiz.}$$

$U$  xolda  $\omega^*$  regulyarizatsiya  $U$  da maksimal funksiyani ifodalaydi, ya'ni  $(dd^c \omega^*)^n = 0$ .

Endi uning  $\omega^*|_{\partial U} = \varphi$  chegaraviy shartni qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

Bir tomondan

$$\overline{\lim_{z \rightarrow \xi, z \in U}} \omega^*(z) \leq \varphi(\xi), \quad \xi \in \partial U$$

ekanini ko'rsatish uchun  $\omega^*(z)$  ni  $\Delta F = 0$  Laplas tenglamasining yechimi, ya'ni  $U$  da garmonik va  $F|_{\partial U} = \varphi$  shartni qanoatlantiruvchi  $F(z) \in sh(U) \cap C(\bar{U})$  funksiya bilan taqqoslaymiz. Regulyar  $U$  soha uchun Dirixle masalasining bunday yechimi mavjud.  $F(z)$  funksiya  $U$  da subgarmonik va  $v|_{\partial U} \leq \varphi$  shartni qanoatlantiruvchi  $v$  subgarmonik funksiyalarning yuqoridan egiluvchisi sifatida  $F(z) \geq \omega^*(z)$  shartni qanoatlantiradi. Va bundan

$$\overline{\lim_{\substack{z \rightarrow \xi, \\ z \in U}} \omega^*(z)} \leq \varphi(\xi), \quad \xi \in \partial U$$

kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan  $U$  psevdoqavariq soxa bo'lgani uchun uni shunday qat'iy psevdoqavariq sohalar bilan qoplash mumkinki,

$$\emptyset \neq G_1 \subset\subset G_2 \subset\subset \dots, \quad \bigcup G_j = U$$

bo'ladi. Xususan,  $\rho(z) = -\ln[(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2) \dots (1 - |z_n|^2)]$  deb olsak  $G_j = \left\{ \rho(z) < \frac{1}{j} \right\}$

bo'lib, ular qat'iy psevdoqavariq sohalar bo'ladi.

Shartga ko'ra shunday  $j_0 \in \mathbb{N}$  topiladiki,  $j > j_0$  lar uchun  $G \supset \partial G_j$  bo'ladi va  $\varphi(z) \in Psh(G) \cap C(\overline{G})$  ekanligidan  $\varphi(\xi)$ ,  $\xi \in \partial U$  ga intiluvchi  $\varphi_j(z) = \varphi|_{\partial G_j}$  ketma-ketlikni tuzib olamiz.  $j > j_0$  larda  $G_j$  soxalar uchun quyidagi sinflarni tuzamiz:

$$\mathcal{U}(\varphi_j, G_j) = \{u(z) \in Psh(G_j) \cap C(\overline{G_j}), u(z)|_{\partial G_j} \leq \varphi_j\}$$

va  $\omega_j = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi_j, G_j)\}$  deb olamiz. U holda qat'iy psevdoqavariq sohalar uchun Dirixle masalasi yechimga egaligidan  $\omega_j^* \in Psh(G_j) \cap C(\overline{G_j})$  bo'lib,

$\lim_{z \rightarrow \xi \in \partial G_j} \omega_j^*(z) = \varphi_j$ . Shu bilan birga  $|\omega_j^*(z)| \leq \max_{\xi \in \partial U} |\varphi(\xi)|$ , ya'ni  $\{\omega_j^*\}$  ketma-ketlik monoton o'suvchi va yuqoridan lokal tekis chegaralangan. Demak  $\lim_{j \rightarrow \infty} \omega_j^* = \omega_0^*$  mavjud va

$\omega_0^* \in Psh(U) \cap C(\overline{U})$ , shu bilan birga  $\lim_{z \rightarrow \xi \in \partial U} \omega_0^*(z) = \varphi(\xi)$ .

Endi ixtiyoriy chegaraviy  $\xi^\circ = (\xi^\circ, \xi_n^\circ) \in \partial U$  nuqtani tayinlaymiz va umumiylikka xilof qilmagan xolda  $\xi_n^\circ = 1$  deb olamiz xamda

$$v(z) = \omega_0^*(z, 1) + c \operatorname{Re}(z_n - 1) + \varepsilon, c > 0, \varepsilon > 0 \quad (3.2.8)$$

funksiyani tuzamiz. Bu funksiya yetarlicha katta  $c$  larda  $\mathcal{U}(\varphi, U)$  sinfga tegishli. Bundan tashqari

$$\lim_{z \rightarrow \xi^0, z \in U} v(z) = \varphi(\xi^0) + \varepsilon.$$

$\varepsilon$  ning ixtiyoriyligidan esa  $\lim_{z \rightarrow \xi^0, z \in U} \omega^*(z) \geq \varphi(\xi^0)$  kelib chiqadi.  $\xi^0$  ning ixtiyoriyligidan

$$\lim_{z \rightarrow \xi} \omega^*(z) = \varphi(\xi)$$

kelib chiqadi.  $\omega^*$  ning uzluksizligi Uolshning natijasidan, yagonaligi quyidagidan kelib chiqadi.

Faraz qilaylik,  $v(z)$  funksiya

$$(dd^c v)^n = 0, \quad v|_{\partial U} \equiv \omega^*|_{\partial U}$$

umumlashgan Dirixle masalasining yagona yechimi bo'lsin. U holda  $v(z)$   $U$  da maksimal bo'ladi va demak  $U$  da  $v(z) \geq \omega^*(z)$  bo'ladi. Lekin  $\omega^*$  ham  $U$  da maksimal, ya'ni  $\omega^* \geq v$ , binobarin  $\omega^*(z) \equiv v(z)$  kelib chiqadi.

### 3.3. Polidoirada kuchsiz $m$ - subgarmonik funksiyalar sinfi uchun Dirixle masalasi

Endi polidoirada Dirixle masalasini kuchsiz  $m$ -subgarmonik funksiyalar sinfida ko'rib chiqamiz. Quyidagi sinfni qaraymiz:

$$\mathcal{U}(\varphi, D) = \{u \in m - wsh(D) : \overline{\lim_{z \rightarrow \partial D}} u(z) \leq \varphi\},$$

$$\omega(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D)\}.$$

**3.3.1 - teorema.**  $U \subset \mathbb{C}^n$  birlik polidoira va  $G = O \cap U$ , bu yerda  $O = \partial U$  ning yetarlicha kichik atrofi bo'lib,  $\varphi(z) \in C(\bar{G})$  bo'lsin.  $U$  holda  $m - wsh$  funksiyalar sinfida Dirixle masalasi yechimga ega, ya'ni  $\omega(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D)\}$  funksiya maksimal, uzluksiz  $\omega \in m - wsh(D) \cap C(\bar{D})$  bo'lib,  $\omega|_{\partial D} \equiv \varphi$  tenglik bajariladi.

**Isbot.**  $\omega(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D)\}$  lar uchun  $m - wsh$  funksiyalar xossasiga ko'ra  $\omega^*(z)$  regularizatsiya ham  $m - wsh$  funksiya bo'ladi.

$$\overline{\lim_{z \rightarrow \xi, z \in U}} \omega^*(z) \leq \varphi(\xi), \quad \xi \in \partial U$$

ekanini ko'rsatish uchun  $\omega^*(z)$  ni  $\Delta F = 0$  Laplas tenglamasining yechimi, ya'ni  $U$  da garmonik va  $F|_{\partial U} = \varphi$  shartni qanoatlantiruvchi  $F(z) \in sh(U) \cap C(\bar{U})$  funksiya bilan taqqoslaymiz. Regulyar  $U$  soha uchun Dirixle masalasining bunday yechimi mavjud.  $F(z)$  funksiya  $U$  da subgarmonik va  $v|_{\partial U} \leq \varphi$  shartni qanoatlantiruvchi  $v$  subgarmonik funksiyalarning yuqoridan egiluvchisi sifatida  $F(z) \geq \omega^*(z)$  shartni qanoatlantiradi. Va bundan

$$\overline{\lim_{\substack{z \rightarrow \xi, \\ z \in U}}} \omega^*(z) \leq \varphi(\xi), \quad \xi \in \partial U$$

kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan  $U$  psevdoqavariq soxa bo'lgani uchun uni shunday qat'iy psevdoqavariq sohalar bilan qoplash mumkinki,

$$\emptyset \neq G_1 \subset \subset G_2 \subset \subset \dots, \quad \bigcup G_j = U$$

bo'ladi. Xususan,  $\rho(z) = -\ln[(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)\dots(1 - |z_n|^2)]$  deb olsak  $G_j = \left\{ \rho(z) < \frac{1}{j} \right\}$

bo'lib, ular qat'iy psevdoqavariq sohalar bo'ladi.

Shartga ko'ra shunday  $j_0 \in N$  topiladiki,  $j > j_0$  lar uchun  $G \supset \partial G_j$  bo'ladi va  $\varphi(z) \in C(\overline{G})$  ekanligidan  $\varphi(\xi)$ ,  $\xi \in \partial U$  ga intiluvchi  $\varphi_j(z) = \varphi|_{\partial G_j}$  ketma-ketlikni tuzib olamiz.  $j > j_0$  larda  $G_j$  soxalar uchun quyidagi sinflarni tuzamiz:

$$\mathcal{U}(\varphi_j, G_j) = \{u(z) \in Psh(G_j) \cap C(\overline{G_j}), u(z)|_{\partial G_j} \leq \varphi_j\}$$

va  $\omega_j = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi_j, G_j)\}$  deb olamiz. U holda qat'iy psevdoqavariq sohalar uchun Dirixle masalasi yechimga egaligidan  $\omega_j^* \in Psh(G_j) \cap C(\overline{G_j})$  bo'lib,

$\lim_{z \rightarrow \xi \in \partial G_j} \omega_j^*(z) = \varphi_j$ . Shu bilan birga  $|\omega_j^*(z)| \leq \max_{\xi \in \partial U} |\varphi(\xi)|$ , ya'ni  $\{\omega_j^*\}$  ketma-ketlik monoton

o'suvchi va yuqoridan lokal tekis chegaralangan. Demak  $\lim_{j \rightarrow \infty} \omega_j^* = \omega_0^*$  mavjud va

$\omega_0^* \in Psh(U) \cap C(\overline{U})$ , shu bilan birga  $\lim_{z \rightarrow \xi \in \partial U} \omega_0^*(z) = \varphi(\xi)$ .

Endi ixtiyoriy chegaraviy  $\xi^\circ = (\xi^\circ, \xi_n^\circ) \in \partial U$  nuqtani tayinlaymiz va umumiylikka xilof qilmagan xolda  $\xi_n^\circ = 1$  deb olamiz xamda

$$v(z) = \omega_0^*(z, 1) + c \operatorname{Re}(z_n - 1) + \varepsilon, c > 0, \varepsilon > 0 \quad (1)$$

funksiyani tuzamiz. Bu funksiya plyurisubgarmonik funksiya bo'lgani uchun  $m$ - $ush$  funksiya ham bo'ladi, shuning uchun yetarlicha katta  $c$  larda  $\mathcal{U}(\varphi, U)$  sinfga tegishli.

Bundan tashqari

$$\lim_{z \rightarrow \xi^0, z \in U} v(z) = \varphi(\xi^0) + \varepsilon.$$

$\varepsilon$  ning ixtiyoriyligidan esa  $\lim_{z \rightarrow \xi^0, z \in U} \omega^*(z) \geq \varphi(\xi^0)$  kelib chiqadi.  $\xi^0$  ning ixtiyoriyligidan

$$\lim_{z \rightarrow \xi} \omega^*(z) = \varphi(\xi)$$

kelib chiqadi.  $\omega^*$  ning uzluksizligi va yagonaligi ham 3.2.3-teoremadagi kabi ko'rsatiladi.

## Xulosa

Dissertatsiya ishida plyurisubgarmonik va kuchsiz  $m$  – subgarmonik funksiyalar sinfida polidoirada Dirixle masalasi o'rganildi. Quyidagi shartda Dirixle masalasi yechimga egaligi ko'rsatildi.

**Teorema.**  $U \subset \mathbb{C}^n$  birlik polidoira va  $G = O \cap U$ , bu yerda  $O - \partial U$  ning yetarlicha kichik atrofi bo'lib,  $\varphi(z) \in C(\bar{G})$  bo'lsin.  $U$  holda ixtiyoriy  $\varphi(\xi) \in C(\partial U)$  uchun  $(dd^c u)^n = 0$ ,  $u|_{\partial U} = \varphi(\xi)$  Dirixle masalasi yagona  $u \in Psh(U) \cap C(\bar{U})$ ,  $u|_{\partial U} = \varphi(\xi)$  yechimga ega.

**Teorema.**  $U \subset \mathbb{C}^n$  birlik polidoira va  $G = O \cap U$ , bu yerda  $O - \partial U$  ning yetarlicha kichik atrofi bo'lib,  $\varphi(z) \in C(\bar{G})$  bo'lsin.  $U$  holda  $m - wsh$  funksiyalar sinfida Dirixle masalasi yechimga ega, ya'ni  $\omega(z) = \sup \{u(z) : u \in \mathcal{U}(\varphi, D)\}$  funksiya maksimal, uzluksiz  $\omega \in m - wsh(D) \cap C(\bar{D})$  bo'lib,  $\omega|_{\partial D} \equiv \varphi$  tenglik bajariladi.

## Adabiyotlar

1. H.J. Bremermann. On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domains. Characterization of Silov boundaries. Trans.Amer.Math.Soc., 91:2, 1959, 246-276.
2. J.L.Walsh. Continuity of envelopes of plurisubharmonic functions. J.Math. and Mech., 1968, 18, 143-148.
3. E. Bedford, B.A. Taylor. The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampere equations. Invent. Math., 37:1, 1976, 1-44.
4. Привалов И.И. Субгармонические функции. М., Гостехиздат, 1937.
5. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., НАУКА, 1971.
6. Садуллаев А. Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium Academic Publishing, 2012.
7. Садуллаев А. Плюрисубгармонические функции // Коллективная монография, М., ВИНТИ, Современные проблемы математики, Т.8, 1985, с.65-111.
8. Садуллаев А. Два важных свойства максимальных плюрисубгармонических функций // Узбекский математический журнал, 2013, №2, с.95-99.
9. Садуллаев А. Задача Дирихле в поликруге для уравнения Монжа-Ампера. ДАН СССР, 1982.
10. Уэрмер Дж. Теория потенциала. М., МИР, 1980.
11. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. М., МИР, 1980.
12. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. ч. II. М., НАУКА, 1985.
13. Абдуллаев Б., Садуллаев А. Теория потенциалов в классе  $m$  – субгармонических функций // Труды Математического Института имени В.А. Стеклова, Москва, 2012, №279, с.166–192.
14. Абдуллаев Б.И.  $m$  –  $ws$ h функции // Доклады АНРУз., 2012, №5, с.15-18.
15. Абдуллаев Б.И., Задача Дирихле в классе  $m$  –  $ws$ h функций // Узбекский математический журнал, -Ташкент, 2012, №4, 3-10.

16. Абдуллаев Б.И. О задаче Дирихле для  $m$  –  $sh$  функций // Доклады АНРУз., 2013, №4, с.8-10.
17. Abdullayev B.I.  $\mathcal{P}$  –measure in the class of  $m$  –  $wsh$  functions // Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, 2014 №7(1), pp.3-9
18. Абдуллаев Б., Ваисова М.Д. Слабо  $m$  –гармонические функции// Доклады АНРУз., 2014, №3, с.19-20.
19. Абдуллаев Б. Ваисова М.Д. Аналог теоремы Лелона для  $m$  –субгармонических функций// Доклады АНРУз , 2015, № 1.
- 20.М. Vaisova, R. Sharipov, N. Kamolov. Plyurisubgarmonik funksiyalar uchun polidoirada Dirixle masalasi. Ilm sarchashmalari.-Urganch, 2015,-№12. –17-21 b.
- 21.S. Xaytbayev. Monj – Amper tenglamasi uchun polikrugda Dirixle masalasi. Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to‘plami. Toshkent, 2017, -150-151 b.
22. M.Vaisova, S.Xaytbayev. Polidoirada plurisubgarmonik funksiyalar sinfi uchun Dirixle masalasining bitta yechimi haqida. Ilm sarchashmalari. –Urganch, 2017, - №4. -9-12 b.