

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM
VAZIRLIGI

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

Qo‘lyozma huquqida

UDK. 517.55

Xudayberganov Shuhrat Shavkat o‘g‘li

**Matritsa argumentli golomorf funksiyalar uchun Loran qatorlarining
analoglari**

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan dissertatsiya

5A130101-Matematika (matematik analiz)

Ilmiy rahbar: _____ **dots. R.M.Madrahimov**

Urganch - 2017

M U N D A R I J A

	KIRISH	
0.1.	Dissertatsiya ishining umumiy tavsifi.....	3
0.2.	Dissertatsiya ishining mazmuni.....	4
	I- BOB. Asosiy tushunchalar va dastlabki ma'lumotlar	7
1.1.	Kompleks argumentli funksiya tushunchasi.....	7
1.2.	Kompleks argumentli funksiyaning differensiallanuvchanligi	14
1.3.	Taylor qatori.....	23
1.4.	Loran qatori va maxsus nuqtalar	27
	II BOB. Kartan klassik sohalari.....	41
2.1.	$\mathbb{C}^n$ fazodagi sohalari.....	41
2.2.	Kartan klassik sohalari.....	44
2.3.	Kartan klassik sohalarning avtomorfizmlari.....	51
	III-BOB. Matritsa argumentli golomorf funktsiyalar uchun	55
	Loran qatorlarining analoglari	
3.1	Matritsa o'zgaruvchili golomorf funktsiyalar	55
3.2	Matritsa argumentli golomorf funktsiyalar uchun Loran qatorlarining analoglari	
	Xulosa.....	
	Adabiyotlar.....	

KIRISH

0.1.Dissertatsiya ishining umumiy tavsifi.

1.1. Mavzuning dolzarbligi. Matritsa argumentli funksiyalar nazariyasi bo'yicha dastlabki tadqiqotlar Veyr (1887) va Shleisinger (1922) ishlarida uchraydi. Veyr bitta matritsa argumentli darajali qatorlarni giperkompleks sonlar nuqtai nazardan qaragan va ularning yaqinlashish kriteriyasini bergan. Shleisinger to'rtta elementdan tashkil topgan bir matritsa o'zgaruvchili e^W funksiyani tasvirlovchi darajali qatorlarni o'rgangan va uni Fuks davrida ma'lum bo'lgan differentsial tenglamalar nazariyasining formulalarini ixchamlashda qo'llagan, bu yerda W matritsa. Bu ishlarni matritsa argumentli funksiyalar nazariyasining boshlanishi deb ham bo'lmaydi. Matritsa argumentli funksiyalar nazariyasiga I.A.Lappo- Danilevskiy asos solgan. U matritsa argumentli funksiyalarni majorant matritsalar yordamida o'rgangan.

Matritsa argumentli darajali qatorlarning yaqinlashish sohalari spektral norma yordamida G. Xudoyberganov o'rgangan.

Koshi-Adamar teoremasining matritsa argumentli darajali qatorlar uchun analogi olingan. Bu yerda birinchi marta matritsa argumentli darajali qatorlarning yaqinlashish sohalari Kartan klassik sohalari ekanligi ko'rsatilgan.

Ushbu magistrlik disertatsiyasida $f = C[m \times m] \rightarrow C$ dagi golomor funksiyalari uchun ikkinchi va uchinchi Kartan klassik sohalarida Loran qatorlarining analoglari o'rganilgan.

Bundan tashqari $f: C[m \times m] \rightarrow C[m \times m]$ akslantiruvchi golomor funksiyalari uchun diagonal matritsalar tekisligida aniqlangan golomor funksiyalar uchun Loran qatorlarining analoglari o'rganilgan.

1.2.Tadqiqot obekti va predmeti. Ko'p ko'mpleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, matritsa argumentli golomorf funksiyalar, Loran qatorining ayrim analoglari.

1.3.Ishning maqsadi va vazifalari. Ushbu magistrlik disertatsiyasi maqsadi matritsa argumentli golomorf funksiyalar va ularning xossalarini o'rganishdan iborat. Matritsa argumentli golomorf funksiyalar uchun diagonal

matritsalar tekisligida Loran qatorining analogini olish.

1.4.Ilmiy yangiligi. Matritsa argumentli golomorf funksiyalar uchun diogonal matritsalar tekisligida Loran qatorining analogi.

1.5.Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari. Golomorf funksiyalar va Loran qatorlarini o'rganish. Matritsa argumentli golomorf funksiyalar uchun diogonal matritsalar tekisligida Loran qatorining analogini olish.

1.6.Mavzu bo'yicha qisqacha adabiyotlar taxlili:

L. Shleisinger [1] da matritsa argumentli golomorf funksiyalarning dastlabki ma'lumotlar berilgan. I.A.Lappo-Danilevskiy [2] da matritsa argumentli golomorf funksiyalar majarant matritsalar yordamida o'rganilgan.

G. Xudoyberganov [3-7] matritsa argumentli golomorf funksiyalar spektral normalar yordamida o'rgangan. R.Belman [7], Lankaster [8] va Gantmaxer F.R. [10] larda matritsa argumentli funksiyalar matritsalar nazariyasi keng yoritilgan. R.M.Madrahimov, S.Bekmetova, Sh. Xudayberganov [12-14] larda matritsa argumentli golomorf funksiyalar uchun Loran qatorlarining analoglari o'rganilgan.

1.7.Tadqiqotda qo'llanilgan metodikaning tavsifi. Ko'mpleks analiz va funksional analiz metodlaridan foydalanildi.

1.8.Tadqiqot natijalarining nazariy va amaliy ahamiyati. Matritsa argumentli darajali qatorlar ham nazariy ham amaliy ahamiyatga ega. Chunki matritsalar bilan bog'liq bo'lgan kanonik yoyilmalar fan va texnikaning turli sohalarida qo'llaniladi.

1.9.Ish tuzilmasining tavsifi.

Magistrlik dissertatsiyasi kirish, uchta bob va adabiyotlar ro'yhatidan iborat. Uning birinchi bobi asosiy tushunchalar va dastlabki ma'lumotlardan iborat va o'z navbatida to'rtta paragrafdan tarkib topgan. Bunda kompleks argumentli funksiyaning differensiallanuvchanligi, Teylor qatori, Loran qatori o'rganilgan. Uning ikkinchi bobi Kartan klassik sohalariga bag'ishlangan. Bu bobda Kartan klassik sohalar va ularning avtomorfizmlarini o'rganishga bag'ishlangan.

Magistrlik disertatsiyasining uchinchi bobi matritsa argumentli golomorf funksiyalar uchun Loran qatorlarining analoglarini o'rganishga bagishlangan.

Ma'lumki, G.Xudoyberganov ishlarida $f = \mathbb{C}[m \times m] \rightarrow \mathbb{C}$ dagi golomorf funksiyalar uchun birinchi Kartan sohasining Loran qatorining anoligi o'rganilgan.

Ushbu magistrlik disertatsiyasida $f = \mathbb{C}[m \times m] \rightarrow \mathbb{C}$ dagi golomorf funksiyalari uchun ikkinchi va uchinchi Kartan klassik sohalarida Loran qatorlarining analoglari o'rganilgan.

Bundan tashqari $f: \mathbb{C}[m \times m] \rightarrow \mathbb{C}[m \times m]$ diagonal matritsalar tekisligida aniqlangan golomorf funksiyalar uchun Loran qatorlarining analoglari o'rganilgan.

TEOREMA: V xalqadagi ixtiyoriy f golomorf funksiyani quyidagi yaqinlashuvchi qator ko'rinishda tasvirlash mumkin:

$$f(W) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m (W - aI^{(n)})^m \quad (1)$$

Bunda koefitsiyentlar quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$C_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} f(\xi) \cdot (\xi - aI^{(n)})^{-m-1} \cdot \xi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2)$$

bu yerda
$$V = \left[W \in T_M : RI > \|W - aI^n\| > rI > 0, r \geq 0 \right]$$

I BOB. Asosiy tushunchalar va dastlabki ma'lumotlar

1.1. Kompleks argumentli funksiya tushunchasi.

Kompleks sonlar tekisligi C da biror E to'plam berilgan bo'lsin: $E \subset C$.

1.1.1-ta'rif. Agar E to'plamdagi har bir z kompleks songa biror f qoida yoki qonunga ko'ra bitta ω kompleks son mos qo'yilgan bo'lsa E to'plamda funksiya berilgan deb ataladi va u

$$f: z \rightarrow \omega \text{ yoki } \omega = f(z)$$

kabi belgilanadi. Bunda E funksiyaning aniqlanish to'plami, z -erkli o'zgaruvchi yoki funksiya argumenti, f esa z o'zgaruvchining funksiyasi deyiladi.

Aytaylik,

$$\omega = f(z)$$

funksiya biror $E(E \subset C)$ to'plamda berilgan bo'lsin, ya'ni f qoidaga ko'ra har bir $z = x + iy \in E$ kompleks songa bitta $\omega = u + iv$ ($u \in R, v \in R$)

kompleks son mos qo'yilgan bo'lsin. Demak, $\omega = u + iv = f(x + iy)$

keyingi tenglikdan $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, E to'plamda $\omega = f(z)$ funksiyaning berilishi shu to'plamda x va y haqiqiy o'zgaruvchilarning

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

funksiyaning berilishidek ekan.

Odatda, $u = u(x, y)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning haqiqiy qismi, $v = v(x, y)$ esa $f(z)$ ning mavhum qismi deyiladi:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z),$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

1.1.1-misol. Ushbu

$$f(z) = \frac{z+2}{z-3}$$

funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini toping.

Berilgan funksiyada $z = x + iy$ ekanini hisobga olib, uni $f(z) = u + iv$ ko'rinishda yozib, quydagi tenglikni topamiz:

$$u + iv = \frac{z+2}{z-3} = \frac{x+iy+2}{x+iy-3} = \frac{[(x+2)+iy][(x-3)-iy]}{(x-3)^2 + y^2} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - x - 6}{x^2 + y^2 - 6x + 9} - i \frac{5y}{x^2 + y^2 - 6x + 9}$$

$$\text{Demak, } u = u(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - x - 6}{x^2 + y^2 - 6x + 9},$$

$$v = v(x, y) = -\frac{5y}{x^2 + y^2 - 6x + 9}.$$

Erkli z o'zgaruvchi E to'plamda o'zgarganda $\omega = f(z)$ funksiyaning mos qiymatlaridan iborat to'plam

$$F = \{f(z) = u + iv : z = x + iy \in E\}$$

bo'lsin. Odatda, bu to'plam funksiya qiymatlari to'plami deyiladi.

Demak, E to'plamda

$$\omega = f(z)$$

funksiyaning berilishi Oxy - kompleks tekislikdagi E to'plamni (to'plam nuqtalarini) Ouv - kompleks tekislikdagi F to'plamga (to'plam nuqtalariga) aks ettirishdan iborat ekan.

Shu sababli $\omega = f(z)$ funksiya E to'plamning F to'plamga akslantirish deb ham yuritiladi.

Faraz qilaylik, $\omega = f(z)$ funksiya E to'plamda $E \subset C$ berilgan bo'lib,

$$F = \{f(z) : z \in E\}$$

bo'lsin. So'ngra F to'plamda ($F \subset C$) o'z navbatida biror

$$\zeta = \varphi(\omega)$$

funksiya berilgan bo'lsin. Natijada, E to'plamdan olingan har bir z ga F to'plamda bitta ω son ($f : z \rightarrow \omega$) va F to'plamdan olingan bunday ω songa bitta ζ son ($\varphi : \omega \rightarrow \zeta$) mos qo'yiladi:

$$z \xrightarrow{f} \omega \xrightarrow{\varphi} \zeta.$$

Demak, E to'plamdan olingan har bir z ga bitta ζ ($\zeta \in C$) son mos qo'yilib, $z \rightarrow \zeta$ funksiya xosil bo'ladi. Bunday funksiya murakkab funksiya deyiladi va

$$\zeta = \varphi(f(z))$$

kabi belgilanadi.

$\omega = f(z)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lib, F esa shu funksiya qiymatlaridan iborat to'plam bo'lsin:

$$F = \{f(z) : z \in E\}$$

F to'plamdan olingan har bir ω songa E to'plamdan bitta z son mos qo'yilishini ifodalovchi funksiya $\omega = f(z)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya deyiladi va

$$z = f^{-1}(\omega)$$

kabi belgilanadi.

Faraz qilaylik $\omega = f(z)$ funksiya E to'plamda ($E \subset C$) berilgan bo'lsin.

1.1.2-ta'rif. Agar z argumentning E to'plamdan olingan turli qiymatlarida $f(z)$ funksiyaning mos qiymatlari ham turlicha bo'lsa, ya'ni $f(z_1) = f(z_2)$ tenglikdan $z_1 = z_2$ tenglik ($z_1, z_2 \in E$) kelib chiqsa, $f(z)$ funksiya E to'plamda bir yaproqli (yoki bir varaqli) funksiya deyiladi.

1.1.2-misol. Ushbu

$$f(z) = \frac{1}{z-2}$$

funksiyaning $E = \{z \in C : |z| < 2\}$ to'plamda bir yaproqli bo'lishini ko'rsating.

Aytaylik, $z_1, z_2 \in E$ uchun

$$f(z_1) = f(z_2)$$

ya'ni

$$\frac{1}{z_1 - 2} = \frac{1}{z_2 - 2}$$

bo'lsin. Ravshanki, keying tenglikdan $z_1 - 2 = z_2 - 2$

ya'ni $z_1 = z_2$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$ ($z_1, z_2 \in E$)

Bu esa berilgan funksiyaning E da bir yaproqli ekanini bildiradi.

Faraz qilaylik $\omega = f(z)$ funksiya E ($E \subset C$) to'plamda berilgan bo'lib, z_0 nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1.1.3-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = (\delta) > 0$ son topilsaki, z argumentning $0 < |z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A kompleks son $f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow z_0$ dagi limiti deb ataladi va

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

kabi belgilanadi.

1.1.4-ta'rif. Agar $\forall M > 0$ son uchun shunday $\delta = (\delta) > 0$ son topilsaki, z argumentning $0 < |z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z)| > M$$

tengsizlik bajarilsa, $z \rightarrow z_0$ dagi $f(z)$ funksiyaning limiti ∞ deyiladi.

Aytaylik, $z = \infty$ nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1.1.5-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $p = p(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, z argumentning $|z| > p$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A kompleks son $f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow \infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$$

kabi belgilanadi.

Endi z, z_0 hamda A kompleks sonlarni

$$z = x + iy,$$

$$z_0 = x_0 + iy_0,$$

$$A = \alpha + i\beta$$

deb so'ng

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ekanligini e'tiborga olib, $z \rightarrow z_0$ da $f(z)$ funksiyaning A limitga ega bo'lishi $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$ da $u(x, y)$ hamda $v(x, y)$ funksiylarning mos ravishda α va β limitlarga ega bo'lishiga ekvivalent ekanligini ifodalovchi teoremani keltiramiz.

1.1.1-teorema. $w = f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow z_0$ da A limitga,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

ega bo'lishi uchun

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \beta$$

bo'lishi zaur va etarli.

Isbot. Zarurligi. Aytaylik, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$

bo'lsin. Limit ta'rifiga binoan $\forall \varepsilon > 0$, olinganda ham $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ki, z argumentning $0 < |z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Ravshanki,

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$f(z) - A = [u(x, y) - \alpha] + i[v(x, y) - \beta]$$

bo'lib,

$$|z - z_0| < \delta$$

bo'lishidan

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan quyidagi

$$|u(x, y) - \alpha| = |\operatorname{Re}(f(z) - A)| \leq |f(z) - A| < \varepsilon,$$

$$|v(x, y) - \beta| = |\operatorname{Im}(f(z) - A)| \leq |f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Demak,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ ni, } |x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$$

bo'lganda

$$|u(x, y) - \alpha| < \varepsilon,$$

$$|v(x, y) - \beta| < \varepsilon$$

tengsizliklar bajariladi. Bu esa

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \beta, \quad ,$$

ekanligini bildiradi.

Yetarliligi, Aytaylik,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \beta$$

bo'lsin. Limit ta'rifiga asosan, $\forall \varepsilon > 0$, olinganda ham, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ ga ko'ra $\exists \delta > 0$ ni

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi $\forall x, y$ da

$$|u(x, y) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

$$|v(x, y) - \beta| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

tengsizliklar bajariladi. Bu tengsizliklardan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} |f(z) - A| &= |u(x, y) + iv(x, y) - (\alpha + i\beta)| = |(u(x, y) - \alpha) + i(v(x, y) - \beta)| = \\ &= \sqrt{(u(x, y) - \alpha)^2 + (v(x, y) - \beta)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon \end{aligned}$$

Demak,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

Teorema isbot bo'ldi.

Aytaylik, $f(z)$ hamda $g(z)$ funksiyalar E to'plamda ($E \subset C$) berilgan bo'lib,

z_0 nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$

bo'lsa, u holda

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = A \cdot B$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

bo'ladi.

Funksiyaning uzluksizligi. Faraz qilaylik, $\omega = f(z)$ funksiya E to'plamda $E \subset C$ berilgan bo'lib, z_0 nuqta ($z_0 \in E$) nuqta shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1.1.6-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$, son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, z argumentning $|z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.
(Ravshanki, bu holda

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

bo'ladi).

Odatda, $z - z_0$ ayirma funksiya argumentning orttirmasi deyiladi va Δz kabi belgilanadi.

$$\Delta z = z - z_0.$$

Ushbu

$$f(z) - f(z_0)$$

ayirma esa, funksiya orttirmasi deyiladi. Uni Δf kabi belgilanadi:

$$\Delta f = f(z) - f(z_0).$$

Shu tushunchalardan foydalanib, funksiyaning z_0 nuqtada uzluksizligini quydagicha ham ta'riflash mumkin.

Agar $\Delta z \rightarrow 0$ da Δf ham nolga intilsa, yani

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f = 0$$

bo'lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

1.1.7-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya E to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, $f(z)$ funksiya E to'plamda uzluksiz deyiladi.

1.1.3-misol. Ushbu

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$$

funksiyaning $\forall z_0 \in C$ ($z_0 \neq 0$) nuqtada uzluksiz bo'lishini ko'rsating.

$\forall z_0 \in C$ ($z_0 \neq 0$) nuqtani olaylik.

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{1}{z_0 + \Delta z} - \frac{1}{z_0} = \frac{-\Delta z}{z_0(z_0 + \Delta z)}$$

$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{z_0 \rightarrow 0} \frac{-\Delta z}{z_0(z_0 + \Delta z)} = 0$$

Demak, berilgan funksiya $\forall z_0 \in C$ ($z_0 \neq 0$) nuqtada uzluksiz.

1.1.2-teorema. $\omega = f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$$

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$$

funksiyaning (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

Demak, kompleks o'zgaruvchili $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi, ikkita haqiqiy o'zgaruvchili

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$$

funksiyalarning (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'lishiga ekvivalent ekan. Bundan haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar haqidagi tasdiqlar kompleks o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalarda ham o'rinli bo'ladi. Jumladan quydagi tasdiqlar o'rinlidir:

1) Agar $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar z_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa,

$$f(z) \pm g(z), f(z) \cdot g(z) \frac{f(z)}{g(z)}, (g(z) \neq 0)$$

funksiyalar ham z_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2) Agar $f(z)$ funksiya yopiq $\bar{D}$ to'plamda uzluksiz bo'lsa, funksiya $\bar{D}$ da chegaralangan bo'ladi, ya'ni shunday o'zgarmas $M (M \neq \infty)$ son mavjudki, $\forall z \in \bar{D}$ uchun

$$|f(z)| \leq M$$

bo'ladi.

3) Agar $f(z)$ funksiya yopiq $\bar{D}$ to'plamda uzluksiz bo'lsa, funksiya moduli $\bar{D}$ da o'zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga erishadi, ya'ni shunday $z_1, z_2 \in \bar{D}$ nuqtalar topiladiki, $z \in \bar{D}$ uchun

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |f(z_1)| \\ |f(z)| &\geq |f(z_2)| \end{aligned}$$

bo'ladi.

4) Agar $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, $|f(z)|$ funksiya ham shu z_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Bu tasdiqning isboti quydagi

$$\left| |f(z)| - |f(z_0)| \right| \leq |f(z) - f(z_0)|$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

$\omega = f(z)$ funksiya E to'plamda ($E \subset C$) berilgan bo'lsin.

1.1.8-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, E to'plamning $0 < |z' - z''| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy z' va z'' ($z', z'' \in E$) nuqtalarida

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(z)$ funksiya E to'plamda tekis uzluksiz deyiladi.

1.1.3-teorema. (Kantor teoramas) Agar $f(z)$ funksiya chegaralangan yopiq to'plamda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi.

Isbot. Aytaylik,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

funksiya chegaralangan yopiq E to'plamda ($E \subset C$) uzluksiz bo'lsin. 2-teoremaga ko'ra haqiqiy o'zgaruvchili $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar ham shu E to'plamda uzluksiz bo'ladi. Ayni paytda bu funksiyalar E da tekis uzluksiz ham

bo'ladi.

Unda $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, ushbu

$$\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} < \delta \quad (1.1.1)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $(x', y') \in E$, $(x'', y'') \in E$ nuqtalarda

$$\begin{aligned} |u(x', y') - u(x'', y'')| &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \\ |v(x', y') - v(x'', y'')| &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

tengsizliklar bajariladi.

Agar $z' = x' + iy'$, $z'' = x'' + iy''$ deyilsa, unda (1.1.1) va (1.1.2) munosabatlardan foydalanib

$$\begin{aligned} |z' - z''| &= \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} < \delta, \\ |f(z') - f(z'')| &= \sqrt{[u(x', y') - u(x'', y'')]^2 + [v(x', y') - v(x'', y'')]^2} < \\ &< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon \end{aligned}$$

bo'lishini topamiz.

Shunday qilib, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, E to'plamning $|z' - z''| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan ixtiyoriy z' va z'' ($z', z'' \in E$) nuqtalarida

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilar ekan. Bu esa $f(z)$ funksiyaning E da uzluksiz bo'lishini bildiradi. Teorema isbot bo'ldi

1.2. Kompleks argumentli funksiyaning differensiallanuvchanligi.

$\omega = f(z)$ funksiya E to'plamda ($E \subset C$) berilgan bo'lsin. Bu E to'plamda z_0 nuqtani olib unga shunday Δz orttirma beraylikki, $z_0 + \Delta z \in E$ bo'lsin.

Natijada $f(z)$ funksiya ham z_0 nuqtada

$$\Delta \omega = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

orttirmaga ega bo'ladi.

1.2.1-ta'rif. Agar $\Delta z \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta \omega}{\Delta z}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit kompleks o'zgaruvchili $f(z)$ funksiyaning z_0

nuqtadagi hosilasi deb aytiladi va $f'(z_0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

1.2.2-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya $z_0 \in E$ nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lsa, funksiya z_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Agar $f(z)$ funksiya E to'plamning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, funksiya E to'plamda differensiallanuvchi deyiladi.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lsin. Unda,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

bo'lib,

$$\Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z)\Delta z$$

bo'ladi. Bu erda $\Delta z \rightarrow 0$ da $\alpha(z_0, \Delta z)$ ham nolga intiladi: $\alpha(z_0, \Delta z) \rightarrow 0$.

Natijada quyidagi tasdiqqa kelamiz.

1.2.1-teorema. $f(z)$ funksiyaning $z_0 \in E$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning ortirmasi $\Delta f(z_0)$ ni ushbu

$$\Delta f(z_0) = A\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z)\Delta z$$

ko'rinishda ifodalanishi zarur va yetarli.

Bunda A miqdor Δz hamda $\alpha(z_0, \Delta z)$ larga bog'liq bo'lmagan miqdordir.

1.2.1-misol. $f(z) = x - iy = \bar{z}$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{x - iy}{x + iy} - \text{ mavjud emas}$$

$$z = x + iy. \quad f(z) = z = x + iy$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1$$

Biz yuqorida kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi hamda differensiallanuvchi bo'lishi tushunchalarining kiritilishi haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi hamda differensiallanuvchi bo'lishi tushunchalarining kiritilishi kabi ekanini ko'rdik. Demak, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilalarini hisoblashda haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning hosilalarini hisoblashdagi ma'lum qoida va jadvallardan foydalanish mumkin.

Ba'zi qoidalarni keltiramiz;

1) $f(z) = c - \text{const}$ bo'lsa, $f'(z) = 0$ bo'ladi

2) $(kf(z))' = k \cdot f'(z)$, $k = \text{const}$

3) $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$,

4) $(f(z) \cdot g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$,

$$5) \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, g(z) \neq 0$$

6) Agar $\omega = f(z)$, $F = \varphi(\omega)$ bo'lib, $F = \varphi(f(z))$ bo'lsa, u holda

$$(\varphi(f(z)))' = \varphi'(\omega) \cdot f'(z)$$

bo'ladi.

7) Agar $\omega = f(z)$ va $z = f^{-1}(\omega)$ bo'lsa,

$$(f^{-1}(\omega))' = \frac{1}{f'(z)}, (f'(z) \neq 0)$$

bo'ladi.

Garchi, kompleks hamda haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar hosilalari tushunchalarining kritilishi bir xil bo'lsa ham, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilaga ega bo'lsin deyilishi (binobarin, differensiallanuvchi bo'lsin deyilishi) talabi ancha og'ir talab hisoblanadi. Bitta sodda misol qaraylik. Ushbu,

$$f(z) = x$$

funksiyani olaylik. Agar bu funktsiyani haqiqiy o'qda joylashgan E to'plamda ($E \subset R$) qaralsa, ravshanki, u hosilaga ega bo'lib, $f'(z) = 1$ bo'ladi.

Endi $f(z) = x$ funktsiyani kompleks tekislik C da qaraylik. Ravshanki, bu funktsiya uchun

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

bo'ladi. Bu nisbat $z \rightarrow z_0$ da limitga ega emas, chunki, $x = x_0$ $y \neq y_0$ da nisbat 0 ga teng, $x \neq x_0$ $y = y_0$ da esa 1 ga teng. Demak, $f(z) = x$ funktsiya differensiallanuvchi emas.

Faraz qilaylik,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

funktsiya biror D sohada ($D \subset C$) berilgan bo'lib,

$$z_0 = x_0 + iy_0 \in D$$

bo'lsin.

1.2.3-ta'rif. Agar haqiqiy o'zgaruvchili $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar

(x_0, y_0) nuqtada ($(x_0, y_0) \in R^2$) differensiallanuvchi bo'lsa, $f(z)$ funktsiya z_0

nuqtada haqiqiy analiz ma'nosida (qisqacha R^2 ma'noda) differensiallanuvchi deyiladi.

1.2.2-teorema. $f(z)$ funktsiyaning z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lishi uchun

1) $f(z)$ funktsiyaning z_0 nuqtada haqiqiy analiz ma'nosida (R^2 ma'noda) differensiallanuvchi bo'lishi va

$$2) \text{ ushbu } = [u(x, y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x, y) - v(x_0, y_0)] = \Delta u + i\Delta v$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.2.1)$$

tengliklarning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada ($z_0 \in D$) $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lsin. Hosila ta'rifi ko'ra

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

ya'ni

$$\Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z)\Delta z$$

bo'ladi. Bu yerda

$$\Delta z = z - z_0 = (x + iy) - (x_0 + iy_0) = (x - x_0) + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y$$

$$\begin{aligned} \Delta f(z_0) &= f(z) - f(z_0) = [u(x, y) + iv(x, y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)] = \\ &= [u(x, y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x, y) - v(x_0, y_0)] = \Delta u + i\Delta v \end{aligned}$$

bo'lib, α esa Δx va Δy larga bog'liq va ular nolga intilganda nolga intiladi:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \alpha = 0$$

Endi $f'(z_0)$ hamda α larni

$$f'(z_0) = a + ib, \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \left(\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha_1 = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha_2 = 0 \right)$$

deb, (1.2.1) tenglikni quydagicha yozamiz:

$$\Delta u + i\Delta v = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\alpha_2)(\Delta x + i\Delta y)$$

Bu tenglikdan. haqiqiy hamda mavhum qismlarini tenglab topamiz:

$$\begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1\Delta x - \alpha_2\Delta y, \\ \Delta v &= b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2\Delta x + \alpha_1\Delta y \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Demak, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funsiyalar (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi. Ayni paytda $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada R^2 ma'noda differensiallanuvchi bo'ladi.

Modomoki, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega ekan, unda $\Delta z \rightarrow 0$, jumladan $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0 (\Delta y = 0)$, $\Delta z = \Delta y \rightarrow 0 (\Delta x = 0)$ bo'lganda ham

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$$

Nisbatning limiti har doim $f'(z_0)$ ga teng bo'laveradi. (1.2.2) tengliklar

$\Delta z = \Delta x (\Delta y = 0)$ bo'lganda

$$\begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x + \alpha_1\Delta x \\ \Delta v &= b\Delta x + \alpha_2\Delta x \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

$\Delta z = \Delta y (\Delta x = 0)$ bo'lganda

$$\begin{aligned} \Delta u &= -b\Delta y - \alpha_2\Delta y \\ \Delta v &= a\Delta y + \alpha_1\Delta y \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

tengliklarga keladi.

(3) munosabatlardan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \frac{\partial v}{\partial x} = b,$$

(4) munosabatlardan esa

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -b, \frac{\partial v}{\partial y} = a,$$

bo'lishini topamiz. Bu tengliklardan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Aytaylik $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada R^2 ma'noda differensiallanuvchi bo'lib, teoremda keltirilgan ikkinchi shart bajarilsin. $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y.$$

bo'ladi. Bu yerda $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ da $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ larning har biri nolga intiladi.

U holda

$$\Delta f(z_0) = \Delta u + \Delta v = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y + i \left[\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y \right]$$

bo'ladi. Teoremaning ikkinchi sharti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

dan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \Delta f(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) - i \frac{\partial u}{\partial y} (\Delta x + i \Delta y) + (\alpha_1 + i \beta_1) \Delta x + (\alpha_2 + i \beta_2) \Delta y = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta z + \left[(\alpha_1 + i \beta_1) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i \beta_2) \frac{\Delta y}{\Delta z} \right] \Delta z \end{aligned}$$

Bu tenglikdan esa

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha_1 + i \beta_1) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i \beta_2) \frac{\Delta y}{\Delta z} \quad (1.2.5)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Keyingi tenglikdagi

$$(\alpha_1 + i \beta_1) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i \beta_2) \frac{\Delta y}{\Delta z}$$

ifoda uchun

$$\left| (\alpha_1 + i\beta_1) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2) \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \leq |(\alpha_1 + i\beta_1)| \left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| + |(\alpha_2 + i\beta_2)| \left| \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \leq$$

$$\leq |(\alpha_1 + i\beta_1)| + |(\alpha_2 + i\beta_2)| \leq |\alpha_1| + |\beta_1| + |\alpha_2| + |\beta_2| < \varepsilon$$

bo'ladi, chunki $\Delta z \rightarrow 0$ da ya'ni $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ da

$$\alpha_1 \rightarrow 0, \beta_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \beta_2 \rightarrow 0,$$

Shuni e'tiborga olib (1.2.5) tenglikda $\Delta z \rightarrow 0$ da limitga o'tib

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

bo'lishini topamiz. Demak, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega va

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Eslatma. Yuqorida keltirilgan teorema $f(z)$ funksiya xosilasining mavjudligini tasdiqlabgina qolmasdan, uni hisoblash yo'lini ko'rsatadi:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial x}$$

1.2.2-misol. $f(z) = z^2$ funksiya ixtiyoriy $z \in C$ nuqtada xosilaga ega bo'ladimi.

$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$$

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

bu funksiyalar $\forall (x, y) \in R^2$ nuqtada differensiallanuvchi.

Ikkinchi tomondan.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

bo'lib,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

Demak, $f(z) = z^2$ funksiya $\forall z \in C$ nuqtada xosilaga ega.

Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya

$z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ ($D \subset C$), nuqtada R^2 ma'noda differensiallanuvchi bo'lsin.

Ushbu

$$du(x_0, y_0) + idv(x_0, y_0)$$

ifoda $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi differensial deyiladi va $df(z_0)$ kabi belgilanadi:

$$df(z_0) = du(x_0, y_0) + idv(x_0, y_0)$$

Ravshanki,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y$$

shuni etiborga olib topamiz:

$$df = \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right] + i \left[\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right] = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Demak,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (1.2.6)$$

quyidagi $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

o'zgaruvchilarni olaylik. Ravshanki,

$$dz = dx + i dy,$$

$$d\bar{z} = dx - i dy.$$

bu tengliklardan

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \quad (1.2.7)$$

bo'lishini topamiz.

(1.2.6) va (1.2.7) tengliklardan

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Agar

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

ko'rinishda belgilansa unda $f(z)$ funksiya differensial uchun ushbu

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

tenglikka kelaymiz.

Koshi- Riman shartlari.

Aytaylik, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar biror nuqtada Koshi-Riman shartlarini bajarsin:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x},$$

unda (8) tenglikka ko'ra shu nuqtada

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Aksincha, $f(z)$ funksiya uchun biror nuqtada

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

bo'lsin. Ravshanki (1.2.8) tenglikka ko'ra shu nuqtada

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

bo'ladi.

Demak, biror nuqtada Koshi-Riman shartlarining bajarilishi shu nuqtada tenglikning o'rinli bo'lishiga ekvivalent ekan.

Bu hol yuqorida keltirilgan 2-teoremani quyidagicha ifodalash mumkinligini ko'rsatadi.

1.2.3-teorema. $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lishi uchun

Agar $\omega = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, shu nuqtada

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

bo'lib, funksiyaning hosilasi

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

differentiiali esa

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz = f'(z_0) dz$$

ko'rinishda bo'ladi.

Kompleks analizda hosilaga ega bo'lgan funksiyalar C-differensiallanuvchi funksiyalar deyiladi.

Ko'p hollarda $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishi shartlarini qutb koordinatalarida ifodalash lozim bo'ladi.

Ravshanki, qutb koordinatalarida

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

$$|z| = \rho, \quad \arg z = \varphi \quad (0 < \rho < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

bo'ladi.

1.2.4-teorema. $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lishi uchun

- 1) u va v funksiyalarning ρ va φ o'zgaruvchilarning funksiyasi sifatida z_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi va
- 2) ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

tengliklarning bajarilish zarur va yetarli.

Faraz qilaylik, $\omega = f(z)$ funksiya biror D sohada ($D \subset C$) berilgan bo'lsin.

1.2.4-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtaning biror $U(z_0, \varepsilon)$ atrofida ($U(z_0, \varepsilon) \subset D$) C-differensiallanuvchi bo'lsa, $f(z)$ nuqtada golomorf (yoki

analitik) deb ataladi.

1.2.5-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida golomorf bo'lsa, funksiya D sohada golomorf deyiladi.

Odatda D sohada golomorf bo'lgan funksiyalar sinfi $V(D)$ kabi belgilanadi.

1.2.6-ta'rif. Agar $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ funksiya $z=0$ nuqtada golomorf bo'lsa, $f(z)$ funksiya " ∞ " nuqtada golomorf deyiladi.

1.2.7-ta'rif. Agar $\overline{f(z)}$ funksiya z_0 nuqtada ($z_0 \in D$) nuqtada golomorf bo'lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada antigolomorf deyiladi.

Aytaylik, R^2 fazodagi E sohada ($E \subset R^2$) sohada $F = F(x, y)$ funksiya berilgan bo'lib, u shu sohada ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}$$

ega bo'lsin.

1.2.8-ta'rif. Agar E sohaning har bir nuqtasida

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2.9)$$

tenglik bajarilsa, $F(x, y)$ funksiya E sohada garmonik funksiya deyiladi.

Odatda (1.2.9) Laplas tenglamasi deyiladi. Bu tenglama ushbu

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplas operatori yordamida quyidagicha yoziladi:

$$\Delta F = 0,$$

bunda

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplas operatori uchun

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda (1.2.9) tenglikni quyidagicha

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

yo'zish mumkin.

Quyida golomorf funksiya bilan garmonik funksiyalar orasidagi munosabatni ifodalaydigan teoremani keltiramiz.

1.2.5-teorema. D sohada ($D \subset C$) golomorf bo'lgan har qanday $f(z)$ funksiyaning haqiqiy hamda mavhum qismlari $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar shu sohada gormonik bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya D sohada golomorf bo'lsin.

Unda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

tengliklar bajariladi.

Bu tengliklardan foydalanib topamiz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

Agar

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda yuqoridagi tengliklardan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $u(x, y)$ funksiyaning garmonik ekanini bildiradi.

Xuddi shunga o'xshash $v(x, y)$ funksiyaning garmonikligi ko'rsatiladi. Teorema

isbot bo'ldi.

1.3. Teylor qatori.

Aytaylik

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)$$

darajali qator berilgan bo'lib uning yaqinlashish radiusi $R (R > 0)$ bo'lsin.

Ravshanki, bu qator

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

doirada yaqinlashuvchi bo'ladi. Berilgan darajali qatorning yig'indisi $f(z)$ deylik:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0) \quad (1.3.1)$$

yuqorida keltirilgan darajali qatorning xossasidan foydalanib (1.3.1) qatorni ketma-ket differensiallaymiz:

$$f'(z) = c_1 + c_2 \cdot 2 \cdot (z - z_0) + \dots$$

$$f''(z) = c_2 + c_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (z - z_0) + \dots$$

Bu tengliklardan $z = z_0$ deb olamiz.

$$f(z_0) = c_0$$

$$f'(z_0) = c_1$$

$$f''(z_0) = 2 \cdot c_2$$

$$f'''(z_0) = 3 \cdot 2 \cdot c_3$$

$$f^{(n)}(z_0) = n! c_n$$

demak,

$$c_0 = f(z_0), \quad c_1 = f'(z_0), \quad c_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(z_0)}{3!}, \quad \dots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \dots$$

bo'ladi.

Koeffitsentlarning bu qiymatlarini (1.3.1) ga qo'ysak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (1.3.2)$$

bo'ladi. Odatda (1.3.2) darajali qator Teylor qator deyiladi.

Xulosa: Darajali qator o'zining yaqinlashish sohasida absolyut yaqinlashadi, ichida esa tekis yaqinlashadi. Yaqinlashish sohasini chegarasida har xil hollar ro'y berishi mumkin.

Misollar.

$$1. \frac{1}{1-z} = S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad R=1. \quad |z| = 1$$

qator doira ichida tekis yaqinlashadi, chegarada uzoqlashadi.

$$2. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \quad |z| > 1 \quad R=1. \quad \frac{|z|^k}{k^2} \rightarrow \infty$$

$$D = \{z : |z| \leq 1\}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k}$$

$z=1$ da uzoqlashuvchi

$z = -1$ da yaqinlashuvchi

$R=1$

Abel teoremasi.

1.3.1-teorema. (Abel). Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (1.3.3)$$

darajali qator z ning $z = z_0$ ($z_0 \neq 0$) qiymatida yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qator

$$\{z \in C : |z| < |z_0|\}$$

doirada absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot. Shartga ko'ra

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$$

sonli qator yaqinlashuvchi. Qator yaqinlashishning zaruriy shartiga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$$

bo'ladi.

Madomiki $\{c_n z_0^n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega ekan, unda bu ketma-ketlik chegaralangan, ya'ni shunday o'zgarmas $M > 0$ son mavjudki, $\forall n \in N$ uchun

$$|c_n z_0^n| \leq M$$

bundan

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \quad (1.3.4)$$

endi ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$$

qator bilan birga quyidagi

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$$

qatorni qaraymiz, ravshanki

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi, chunki $\left| \frac{z}{z_0} \right| = q < 1$ geometrik qator (4) ga ko'ra

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$$

qator $\{z \in C : |z| < |z_0|\}$ doirada yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, berilgan

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

qator $\{z \in C : |z| < |z_0|\}$ doirada absolyut yaqinlashuvchi. Teorema isbot bo'ldi.

Natija 1: Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

darajali qator $z = z_1$ nuqtada uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda qator $\{z \in C : |z| > |z_1|\}$ sohada uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isbot: Berilgan darajali qator $z = z_1$ nuqtada uzoqlashuvchi bo'lsin. Unda bu qator z ning $\{|z| > |z_1|\}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida ham uzoqlashuvchi bo'ladi, chunki

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

qator z ning $\{|z| > |z_1|\}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi biror $z = z^*$ qiymatida

yaqinlashuvchi bo`ladigan bo`lsa, Abel teoremasiga binoan bu qator $z = z_1$ nuqtada $\{|z_1| < |z^*|\}$ ham yaqinlashuvchi bo`lib qoladi.

Bu esa

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

qatorning $z = z_1$ nuqtada uzoqlashuvchi deyilishiga ziddir.

Demak, berilgan qator $\{z \in C : |z| > |z_1|\}$ da uzoqlashuvchi.

Natija isbot qilindi.

1.4. Loran qatori va maxsus nuqtalar

Jumladan, $f(z)$ funksiya

$$D = \{z \in C_z : |z - a| < R\}$$

doirada golomorf bo'lsa, uni Teylor qatori

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

ga yoyilishini ko'rdik. Bu yerda

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(t)}{(t - a)^{n+1}} dt$$

bo'ladi. ($\gamma_r = \{|t - a| = r\}, 0 < r < R$).

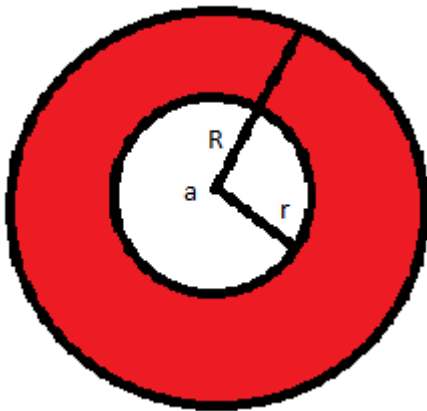
$f(z)$ funksiya halqada golomorf bo'lsa, uni shu halqada qatorga yoyish masalasi kompleks analiz va uning tatbiqlarida muhim ahamiyatga ega.

1° Loran qatori tushunchasi.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya ushbu

$$K = \{z \in C_z : r < |z - a| < R\}$$

sohada (halqada 2-rasm) golomorf bo'lsin, bunda $r \geq 0, R \leq +\infty$



2-rasm.

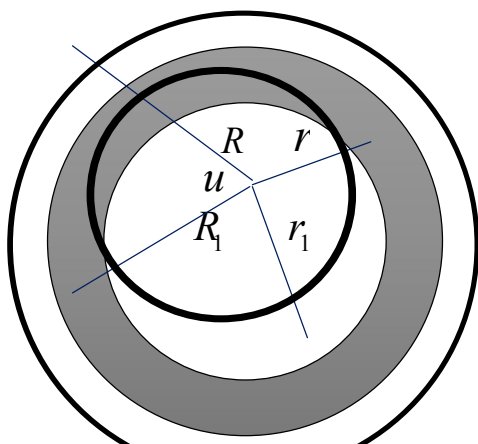
K sohada ixtiyoriy z nuqta olib, uni tayinlangan deb qaraymiz. So'ng shunday

$$K_1 = \{t \in C_z : r_1 < |t - a| < R_1\}$$

sohani (halqani) olamizki, bunda

$$r < r_1 < R_1 < R$$

bo'lib $z \in K_1$ bo'lsin. Ravshanki, bu holda $K_1 \subset K$ bo'ladi



Ushbu $t \in C_r : \{|t - a| = r_1\}$, $t \in C_r : \{|t - a| = R_1\}$ aylanalarni mos ravishda γ_1, Γ_1 orqali belgilaymiz.:

$$\gamma_1 = \{t \in C_z : |t - a| = r_1\},$$

$$\Gamma_1 = \{t \in C_z : |t - a| = R_1\}$$

Unda K_1 sohaning chegarasi $\partial K_1 = \gamma_1 \cup \Gamma_1$ bo'ladi. Bu yerda γ_1 va Γ_1 aylanalarda yo'nalish soat stereklasi yo'nalishiga qarshi qilib olingan.

Qaralayotgan $f(z)$ funksiya $k(K_1 \subset K)$ sohada golomorf bo'lganligi sababli

Koshining integral formulasiga ko'ra $\forall z \in K_1$ uchun $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_1} \frac{f(t)}{t - z} dt$

bo'ladi. Ravshanki, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_1} \frac{f(t)}{t - z} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{t - z} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t - z} dt$.

Demak,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{t - z} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t - z} dt \quad (1.4.1)$$

$\forall t \in \Gamma_1$ uchun tekis yaqinlashuvchi $\left(\left| \frac{z - a}{t - a} \right| < 1 \right)$ ushbu

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{(t - a) \left(1 - \frac{z - a}{t - a} \right)} = \frac{1}{t - a} + \frac{z - a}{(t - a)^2} + \dots + \frac{(z - a)^n}{(t - a)^{n+1}} + \dots$$

Qatorni $\frac{1}{2\pi i} f(t)$ ga ko'paytirib, so'ng, Γ_1 bo'yicha hadlab integrallasak

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{t - z} dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (1.4.2)$$

hosil bo'ladi. Bu yerda

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{(t - a)^{n+1}} dt \quad n = (0, 1, 2, \dots) \quad (1.4.3)$$

(shuni ta'kidlash lozimki, bu holda (1.4.3) munosabatdagi c_n koeffitsiyentlar da keltirilganidek $\frac{1}{n!} f^{(n)}(z)$ ga teng qilib olib bo'lmaydi. Sababi, $f(z)$ funksiya a nuqtada golomorf bo'lmasligi mumkin).

Endi (1.4.1) tenglikning o'ng tomonidagi ikkinchi integral ostidagi $\frac{1}{t - z}$

funksiyani $\forall t \in \partial_1$, uchun quyidagicha

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t-a}{z-a}} = -\frac{1}{z-a} - \frac{t-a}{(z-a)^2} - \dots - \frac{(t-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \dots \quad (1.4.4)$$

yozib olamiz . $\forall t \in \gamma_1$ da $\left| \frac{t-a}{z-a} \right| = \frac{r_1}{|z-a|} = q < 1$

Bo'lganligi sababli ,(1.4.3) qator tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Yuqoridagidek ,(1.4.4) tengliknig har ikki tomonini $\frac{1}{2\pi i} f(t)$ ga ko'paytirib integrallab

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{t-z} dt = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^{-n} \quad (1.4.5)$$

bo'lishini topamiz, bunda

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(t) \times (t-a)^{n-1} dt \quad (n=0,1,2,3,..) \quad (1.4.6)$$

bo'ladi. Natijada (1.4.1), (1.4.2) va (1.4.5)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z-a)^{-n} \quad (1.4.7)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

(1.4.3) va (1.4.6) formulalardagi 1,2,3,... qiymatlarni qabul qiladigan n indeksni, -1,-2,-3,.. qiymatlarni qabul qiladigan -n indeks bilan almashtirsak , unda (1.4.6) ushbu

$$d_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(t) \times (t-a)^{-n-1} dt \quad (1.4.8)$$

ko'rinishga keladi.

Agar z nuqta K sohadagi ixtiyoriy nuqta ekanini, $f(z)$ funksiya shu sohada golomorf bo'lishini hamda γ_1 va Γ_1 chiziqlar K sohaga tegishlilikini e'tborga olsak, Koshi teoremasiga ko'ra

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt = \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt$$

Umuman,

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t-z} dt = \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{t-z} dt = \int_{K_1} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

bo'lishini topamiz. Bu yerda

$$K_r = \{t \in C_r : |t-a| = \rho : r_1 < \rho < R_1\}$$

Endi (3) va (8) tengliklarni solishtirib $d_{-n} = c_n$ ($n=0,1,2,3,..$) ya'ni $d_n = c_{-n}$

bo'lishini topamiz. Bu hol $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} d_n (z-a)^{-n}$ yig'ndilarni birlashtirib,

ushbu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ ko'rinishida yozish imkonini beradi:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z-a)^{-n}.$$

Demak, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ bo'lib, bunda $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt$

($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) bo'ladi

Shunday qilib quydagi teorema kelamiz:

1.4.1-teorema. Ushbu $\{z \in C_z : r < |z-a| < R\}$ sohada (halqada) golomorf

bo'lgan ixtiyoriy $f(z)$ shu sohada yaqinlashuvchi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$.

Qatorning yig'indisi sifatida ifodalanadi:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

bo'lib, $r < \rho < R$ bo'ladi. Odatda, bu teorema Loran teoremasi deyiladi.

1.4.1-ta'rif. Koeffitsentlari $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)

Formulalar yordamida aniqlanadigan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ qator $f(z)$ funksiya K sohadagi (halqadagi) Loran qator deyiladi.

$f(z)$ funksiyaning K sohada (halqada) golomorf bo'lsa teorema binoan

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ bo'linishini e'tiborga olib, bu holda $f(z)$ funksiya K

sohada (halqada) Loran qatorlariga yoyiladi deb ataymiz.

Yuqorida aytilganlardan hamda darajali qatorlar haqidagi ma'lumotlardan foydalanib, quydagi hulosalarga kelamiz.

1) Loran qatorlari

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

ni ikkita

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (1.4.9)$$

va

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n \quad (1.4.10)$$

qatorlarning yig'indisidan iborat deb qator deb qarash mumkin. Odatda (9) qator Loran qatorining to'g'ri qismi, (1.4.10) qator esa Loran qatorning bosh qismi deyiladi.

2) Loran qatorining to'g'ri qismi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

musbat darajali qatordir. Uning yaqinlashish sohasi Abel teoremasiga ko'ra $|z-a| < R$ doiradan iborat bo'lib, yaqinlashish radiusi Koshi-Adamar formulasi

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

ga ko'ra topiladi. (1.4.9) qator $|z-a| < R_1$ ($R_1 < R$) da tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

3) Loran qatorining bosh qismi

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n$$

da $\omega = \frac{1}{z-a}$ deyilsa, unda bu qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \omega^n$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu qator Abel teoremasiga ko'ra

$$|\omega| < \frac{1}{r}$$

da yaqinlashuvchi bo'lib, yaqinlashish radiusi Koshi-Adamar formulasiga ko'ra

$$r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

bo'ladi. Demak,

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n$$

qator doiraning tashqi qismi bo'lgan

$$|z-a| > r$$

sohada yaqinlashuvchi bo'ladi.

4) Agar $r \geq R$ bo'lsa, loran qatorining yaqinlashish sohasi bo'sh to'plamdan iborat.

Agar $r < R$ bo'lsa. Loran qatori

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

ning yaqinlanish sohasi

$$\{z \in C_z : r < |z-a| < R\}$$

halqadan iborat bo'ladi.

5) Agar $f(z)$ funksiyaning Loran qatori

$$K = \{z \in C_z : r < |z-a| < R\}$$

sohada (halqada) yaqinlashuvchi bo'lsa, Abel teoremasiga ko'ra qator

$$\{z \in C_z : r_1 \leq |z-a| \leq R_1\}$$

($r < r_1 < R_1 < R$) yopiq sohada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Veyershtass teoremasiga ko'ra Loran qatorning yig'ndisi $f(z)$ funksiya

$$\{z \in C_z : r < |z - a| < R\}$$

sohada golomorf bo'ladi.

2⁰ Funksiyani Loran qatoriga ko'ra yoyilmasining yagonaligi

Biz

$$K = \{z \in C_z : r < |z - a| < R\}$$

sohada (halqada) golomorf bo'lgan har qanday $f(z)$ funksiyaning Loran qatori

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

ga yoyilishini ko'rdik. Ravshanki, $f(z)$ funksiyaning Loran qatori

(Teylor qatori singari) o'z koefitsientlari

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t - a)^{n+1}} dz$$

bilan to'liq aniqlanadi.

Endi $f(z)$ funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasida koefitsient c_n lar yagona

holda aniqlanishini, ya'ni $f(z)$ funksiya turli usullar bilan Loran qatoriga

yoyilganda ularda koefitsientlar har doim bir xil bo'lishini ko'rsatamiz.

1.4.2-teorema $f(z)$ funksiya $K = \{z \in C_z : r < |z - a| < R\}$ sohada (halqada)

golomorf bo'lsin. Bu funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

yagonadir.

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni K sohada (halqada) golomorf bo'lgan

$f(z)$ funksiyaning Loran qatori ikkita

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (1.4.11)$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z - a)^n \quad (1.4.12)$$

bo'lib $c_n \neq c'_n$ bo'lsin. Ushbu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z - a)^n$$

tenglikning har ikki tomonini $(z - a)^{-m-1}$ (m - *tayinlangan butun son*) ga ko'paytiramiz:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^{n-m-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z - a)^{n-m-1}$$

(1.4.11) va (1.4.12) qatorlar $\{z \in C_z : |z - a| = \rho\}$, $(r < \rho < R)$ aylanada tekis yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli ularni shu aylana bo'yicha hadlab integrallab quydagi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1} dz \quad (1.4.13)$$

tenglikka kelimiz.

Ma'lumki, ixtiyoriy butun k soni uchun

$$\int_{|z-a|=\rho} (z-a)^k dz = \begin{cases} 0, & k \neq -1 \\ 2\pi i, & k = -1 \end{cases}$$

bo'ladi. Bu tenglikdan foydalanib, (1.4.13) munosabatdan

$$c_n = c'_n$$

bo'lishini topamiz. Bu esa teoremani isbotlaydi.

Odatda, bu teorema yagonalik teoremasi deyiladi.

Eslatma. Funktsiyalarni Loran qatorga yoyish masalasi uning c_n koefitsientlarini aniqlash bilan hal qilinadi. Bu ko'pincha bunday integrallarni hisoblash qiyin bo'ladi. Yagonalik teoremasi funktsiyalarni Loran qatoriga yoyishda boshqa usullardan foydalanish imkoniyatini yaratadi.

Shuning uchun funktsiyalarni Loran qatoriga yoyishda turli usullardan foydalanish mumkin bo'ladi.

3^o Loran qatori koefitsientlari uchun Koshi tengsizliklari. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $K = \{t \in C_z : r < |z - a| < R\}$ sohada (halqada) holomorf bo'lib, $\max_{z \in \gamma_\rho} |f(z)| = M$, $\gamma_\rho = \{|z - a| = \rho\}$, $r < \rho < R$ bo'lsin. U holda $f(z)$

funktsiyaning K halqadagi Loran qatori $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ koefitsientlari

$$\text{uchun ushbu } |c_n| < \frac{M}{\rho^n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

(1.4.14)

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Haqiqatdan ham, Loran qatori koefitsientlari uchun

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-a|=\rho} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \text{ bo'lishini e'tiborga olib,}$$

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-a|=\rho} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \right| \leq \frac{1}{2\rho i} \int_{|t-a|=\rho} \frac{|f(t)|}{|t-a|^{n+1}} |dt| \leq \frac{M}{2\rho r^{n+1}} \int_{|t-a|=\rho} |dt| = \frac{M}{2\rho r^{n+1}} \times 2\rho r = \frac{M}{r^n}$$

bo'lishini topamiz. Demak, $|c_n| < \frac{M}{\rho^n}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) Bu tengsizliklar Koshi

tengsizliklari deyiladi.

Maxsus nuqtalar va ularning turlari

Agar $a \in C$ nuqtada $f(z)$ funksiyaning golomorf bo'lishi sharti bajarilmasa, u holda funksiyani shu nuqta atrofida o'rganiladi.

Odatda, bunday nuqta $f(z)$ funksiyaning maxsus nuqtasi deb qaraladi.

1.4.2-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya ushbu $\{z \in C; 0 < |z - a| < r\}$ sohada (a nuqtaning o'yilgan atrofida) golomorf bo'lsa, u holda a nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi deyiladi

Misol. Ushbu $f(z) = \frac{1}{z+i}$ funksiyani qaraylik. Ravshanki, bu

funksiya $\{z \in C; 0 < |z + 1| < r\}$ sohada (halqada) golomorf. Binobarbarin, $a = -i$ nuqta berilgan funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'ladi.

1.4.3-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya ushbu $\{z \in C; R < |x| < +\infty\}$ sohada golomorf bo'lsa, u holda $a = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi deyiladi.

Misol. Ushbu $f(z) = e^x$ funksiyani qaraylik. bu funksiya $\{z \in C; R < |x| < +\infty\}$ sohada golomorf. Demak, $a = +\infty$ nuqta berilgan $f(z) = e^x$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'ladi.

Funksiyaning yakkalanmagan maxsus nuqtalari ham bo'ladi.

Masalan, ushbu $f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$ (1.4.15) funksiyani qaraylik. Ravshanki, $a = 0$

hamda $a_n = \frac{1}{n}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) nuqtalar (1.4.15) funksiyaning maxsus

nuqtalari bo'ladi. Bunda $a = 0$ maxsus nuqta berilgan funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lmaydi.

Darhaqiqat, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ bo'lganligi sababli, $a = 0$ nuqtaning har qanday

o'yilgan atrofi $U_\delta(a) = \{0 < |x| < r\}$ da funksiyaning maxsus nuqtalari bo'ladi.

Demak, $a = 0$ berilgan funksiyaning yakkalanmagan nuqtasi ekan. biz quydagi yakkalangan maxsus nuqtalarni o'rganamiz.

2^o Aytaylik $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lsin. Unda $f(z)$ funksiya $\{t \in C; 0 < |z - a| < r\}$ sohada (a nuqtaning o'yilgan atrofida) golomorf. $f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow a$ limitining harakteriga qarab yakkalangan maxsus turlarga ajratiladi.

1.4.4-ta'rif. Agar $z \rightarrow a$ da $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \quad (A\text{- chekli})$$

bo'lsa u holda a nuqta $f(z)$ funksiyaning bartaraf qilinadigan (chetlatilishi mumkin bo'lgan) maxsus nuqtasi deyiladi.

1.4.1-misol. Ushbu $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ funksiyani qaraylik. Ravshanki, bu funksiya $C \setminus \{z=0\}$ da golomorf bo'lib, $a=0$ nuqta uning maxsus nuqtasi bo'ladi. Ayni vaqtda $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right) = 1$ bo'ladi.

Demak, a nuqta berilgan funksiyaning bartaraf qilinadigan maxsus nuqtasi bo'ladi

1.4.5-ta'rif. Agar $z \rightarrow a$ da $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib, $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ bo'lsa, u holda a nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb maxsus nuqtasi deyiladi.

1.4.2-misol. Ushbu $f(z) = \frac{z}{z+1}$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya $C \setminus \{z=-1\}$ da golomorf bo'lib, $a=1$ nuqta uning yakkaqlangan maxsus nuqtasi bo'ladi. Bu funksiya uchun $\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z}{z+1} = \infty$ bo'lganligi sababli, $a=1$ berilgan funksiyaning qutb nuqtasi bo'ladi.

1.4.6-ta'rif. Agar $z \rightarrow a$ da $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lmasa, u holda a nuqta $f(z)$ funksiyaning o'ta (muhim) maxsus nuqtasi bo'ladi.

1.4.2-misol. Ushbu $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya $C = \{z \neq 0\}$ da golomorf bo'lib, $z=0$ nuqta uning yakkaqlangan maxsus nuqtasi bo'ladi. Qaralayotgan funksiyaning $z \rightarrow 0$ da limiti mavjud emas. Haqiqatdan ham, agar $z=x$ bo'lib 0 ga intilsa, unda $\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = 0$ bo'ladi, va demak, $z=x \rightarrow 0$ da limit mavjud emas.

Agar $z=iy$ bo'lib 0 ga intilsa, unda $e^{\frac{1}{z}} = \cos \frac{1}{y} - i \sin \frac{1}{y}$ bo'lishni e'tiborga olib,

$z=iy \rightarrow 0$ da $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ funksiyaning limiti mavjud emasligini ko'rsatamiz. Demak, $z=0$ nuqta berilgan funksiyaning o'ta maxsus nuqtasi bo'ladi.

3⁰ Maxsus nuqtalar bilan Loran qatorlari orasidagi bog'lanishlar. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $K = \{z \in C; 0 < |z-a| < r\}$ sohada golomomorf bo'lib, a nuqta shu funksiyaning yakkaqlangan maxsus nuqtasi bo'lsin. Unda 1-teoremaga ko'ra $f(z)$ funksiya K da Loran qatori $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ (1.4.16) ga yoyiladi.

Qaralayotgan funksiyaning Loran qatori (1.4.16) ga nisbatan uch holni qaraymiz:

- (1.4.17) qatorda $z-a$ ayirmaning manfiy darajali hadning qatmagan holi;
- (1.4.17) qatorda $z-a$ ayirmaning manfiy darajali hadning chekli sondagisi qatnashgan hol;

c) (1.4.17) qatorda $z - a$ ayirmaning manfiy darajali handing cheksiz sonligi qatnashga hol;
 Mana shu hollarga qarab $f(z)$ funksiyani yakkalangan maxsus nuqtalarini aniqlash mumkin bo'ladi

Bartaraf etiladigan maxsus nuqta

1.4.3-teorema. $f(z)$ funksiyani yakkalangan maxsus $a \in C$ nuqtasi bo'lishi uchun funksiyani Loran qatoriga yoyilmasi (1.4.17) da $z - a$ ayirmaning manfiy darajali hadlari qatnashmasligi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. a nuqta $f(z)$ funksiyani bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi bo'lsin. Unda $z \rightarrow a$ da $f(z)$ funksiyani chekli limiti mavjud bo'ladi:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \quad (A - \text{chekli})$$

Chekli limitga ega bo'lgan funksiyani xossasiga binoan a nuqtani o'yilgan

$$\{z \in C : 0 < |z - a| < R\}$$

atrofida $f(z)$ funksiya chegaralangan bo'ladi, ya'ni shunday o'zgarmas $M > 0$ topiladiki,

$$|f(z)| \leq M$$

Tengsizlik bajariladi. Ushbu

$$0 < \rho < R$$

Tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ρ sonini olaylik. Unda Koshi tengsizliklariga ko'ra $f(z)$ funksiyani Loran qatori koefitsientlari uchun

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.4.18)$$

bo'ladi.

Agar $n = -1, -2, -3, \dots$ bo'lib, $\rho \rightarrow 0$ da $0 < \rho < R$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{M}{\rho^n} = 0$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda (18) munosabatdan

$$c_{-1} = c_{-2} = \dots = c_{-n} = \dots = 0$$

bo'lishini topamiz. Bu esa (17) Loran qatorida $z - a$ ayirmaning manfiy darajali hadlari bo'lmasligini bildiradi. Boshqacha aytganda bu holda (1.4.17) Loran qatorining bosh qismi aynan nolga teng bo'ladi.

Yetarliligi. Aytaylik, $f(z)$ funksiyani Loran qatoriga yoyilmasi (1.4.17) da $z - a$ ayirmaning manfiy darajada qatnashgan hadlari bo'lmasin, ya'ni Loran qatorining bosh qismi aynan nolga teng bo'lsin. Bu holda $f(z)$ funksiyani Loran qatori ushbu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n = c_0 + c_1 (z - a) + c_2 (z - a)^2 + \dots \quad (1.4.19)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Demak, a nuqta $f(z)$ funksiyani bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi. Teorema isbot bo'ldi.

1.4.4-teorema. $f(z)$ funksiyaniing yakkalangan maxsus $a \in C$ nuqtasi uning bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi bo'lishi uchun a nuqtaning biror o'yilgan atrofi $\{z \in C : 0 < |z - a| < R\}$ da $f(z)$ funksiyaniing chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

Bu teoremaning isboti yuqorida keltirilgan 3-teoremaning isboti kabitir. Faraz qilaylik, a nuqta $f(z)$ funksiyaniing bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi bo'lsin. Bu holda $z \rightarrow 0$ da $f(z)$ funksiya chekli limitga ega bo'ladi. Agar

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$$

deb olinsa, funksiyaniing a nuqtadagi maxsusligi bartaraf etiladi. Maxsus nuqtaning bartaraf etiladigan deb nomlanishining boisi ham shundadir.

Qutb nuqta

1.4.5-teorema. $f(z)$ funksiyaniing yakkalangan maxsus $a \in C$ nuqtasi uning qutb nuqtasi bo'lishi uchun funksiyaniing Loran qatoriga yoyilmasi (1.4.17) da $z - a$ ayirmaning manfiy darajali hadlaridan chekli sondagisining bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot.zarurligi. a nuqta $f(z)$ funksiyaniing qutb nuqtasi bo'lsin. Unda $z \rightarrow 0$ da $f(z)$ funksiyaniing limiti mavjud bo'lib,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

bo'ladi.

Bu holda a nuqtaning o'yilgan $U = \{0 < |z - a| < r\}$ atrofi topiladiki, bu atrofda $f(z)$ golomorf funksiya bo'lib,

$$f(z) \neq 0 \quad (z \in U)$$

boladi. U da ushbu

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

funksiyani qaraylik. Ravshanki, bu funksiya U da golomorf bo'ladi. Ikkinchi tomondan

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = 0$$

bo'ladi. Demak, $z = a$ nuqtada $\varphi(z)$ funksiyaniing bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi ekan.

Agar

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = 0 = \varphi(a)$$

deyilsa, unda $\varphi(z)$ funksiya $\{z \in C : |z - a| < r\}$ doirada golomorf bo'lib qoladi. $z = a$ nuqta $\varphi(z)$ funksiyaniing noli bo'lgani uchun uni

$$\varphi(z) = (z - a)^n \cdot \psi(z)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $\psi(z)$ a nuqtada golomorf funksiya bo'lib, $\psi(z) \neq 0$

bo'ladi.

Shunday qilib, qarayotgan U atrofda

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \frac{1}{\psi(z)} \quad (1.4.19)$$

bo'lishini topamiz.

Endi $\frac{1}{\psi(z)}$ funksiyani a nuqta atrofi $\{z \in C : |z-a| < r\}$ da Teylor qatoriga yoyamiz :

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a)^{-n+1} + \dots + c_0(z-a)^n + \dots \quad (1.4.20)$$

bunda

$$c_{-n} = \frac{1}{\psi(a)} \neq 0$$

(19) va (20) munosabatlardan $f(z)$ bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, a nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb nuqtasi bo'lganda, uning Loran qatori bosh qismi hadlarining soni chekli bo'lar ekan.

Yetarlili. Aytaylik, a nuqtaning biror o'yilgan atrofi $\{z \in C : 0 < |z-a| < r\}$ da $f(z)$ funksiyaning Loran qatoridagi $z-a$ ayirmaning manfiy darajali hadlarining soni chekli bo'lsin :

$$f(z) = c_{-n}(z-a)^{-n} + c_{-n+1}(z-a)^{-n+1} + \dots + c_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (1.4.21)$$

$(c_{-n} \neq 0)$

Ravshanki, $f(z)$ va $(z-a)^n \cdot f(z) = \psi(z)$ funksiyalar $\{z \in C : 0 < |z-a| < r\}$ da golomorf bo'ladi.

Yuqoridagi (21) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$\psi(z) = (z-a)^n \cdot f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + c_{-n+2}(z-a)^2 + \dots$$

Bundan esa

$$\lim_{z \rightarrow a} \psi(z) = c_{-n} \neq 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Natijada

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\psi(z)}{(z-a)^n} = \infty$$

bo'lishini topamiz. Bu esa a nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb nuqtasi ekanini bildiradi. Teorema isbot bo'ldi.

1.4.6-teorema. $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus $a \in C$ nuqtasi uning qutb nuqtasi bo'lishi uchun

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

Funksiya a nuqta atrofida golomorf bo'lib, $\varphi(a) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. Aytaylik a nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb nuqtasi bo'sin. Unda

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

funksiya a nuqta atrofida golomorf bo'lib, $\varphi(a) = 0$ bo'lishi yuqorida keltirilgan teoremaning isbotlash jarayonida ko'rsatilgan edi. Yetarliligi. Faraz qilaylik,

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

a nuqta atrofida golomorf bo'lib, $\varphi(a) = 0$ bo'lsin. Modomiki, $\varphi(z) \neq 0$ ekan, unda yagonalik teoremasiga binoan a nuqtaning shunday o'yilgan atrofi

$$\{z \in C : 0 < |z - a| < r\}$$

topiladiki, bu atrofda $\varphi(z) \neq 0$ bo'ladi. Demak, shu atrofda

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

funksiya golomorf, a nuqta esa uning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'ladi. Ayni paytda

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{\varphi(z)} = \infty$$

bo'ladi. Bu esa a nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb nuqtalari bilan uning nollari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

1.4.7-ta'rif. Ushbu

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

funksiyaning a nuqtadagi nolining tartibi $f(z)$ funksiyaning a nuqtadagi qutb nuqtasi tartibi deyiladi.

Masalan, ushbu

$$\varphi(z) = \frac{(z-3)^5}{z}$$

funksiyani qaraylik. Ravshanki, $z = 3$ nuqta bu funksiyaning 5-tartibli noli. $z = 3$ nuqta

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)^5}$$

Funksiyaning 5-tartibli qutb nuqtasi bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan 6-teoremadan quydagi natija kelib chiqadi.

Natija. $f(z)$ funksiyaning a qutb nuqtasining tartibi

$$f(z) = c_{-m}(z-a)^{-m} + c_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \dots + c_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

Yoyilmadagi m songa teng bo'ladi.

II BOB. Kartan klassik sohalari

2.1 $\mathbf{C}^n$ fazodagi sohalar.

Faraz qilaylik, $a \in \mathbf{C}^n$ nuqta va $r > 0$ son berilgan bo'lsin. Ushbu

$$B(a, r) = \{z \in \mathbf{C}^n : |z - a| < r\} \quad (2.1.1)$$

to'plam $\mathbf{C}^n$ fazoda markazi a nuqtada, radiusi r bo'lgan **shar** deyiladi. Odatda, (2.1.1) shar a nuqtaning atrofi ham deb yuritiladi. $D \subset \mathbf{C}^n$ to'plamni qaraylik. Agar bu to'plamning har bir nuqtasi o'zining atrofi bilan shu to'plamga tegishli bo'lsa, D ochiq to'plam deyiladi. Agar D to'plamning ixtiyoriy z^1, z^2 nuqtalari uchun shunday uzluksiz

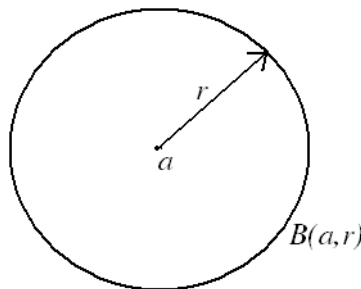
$$\wp: [0, 1] \rightarrow D$$

yo'l (chiziq) topilsaki, $\wp(0) = z^1$, $\wp(1) = z^2$ bo'lsa, D bog'lamli to'plam deyiladi. $\mathbf{C}^n$ fazoda soha xuddi $\mathbf{C}$ dagi soha kabi ta'riflanadi.

2.1.1 – t a ‘ r i f. $\mathbf{C}^n$ fazodagi ochiq va bog'lamli to'plam soha deyiladi. Endi sohaga misollar keltiramiz:

a) sh a r. Yuqorida keltirilgan $B(a, r) = \{z \in \mathbf{C}^n : |z - a| < r\}$ shar soha bo'ladi. Quyidagi $\{z \in \mathbf{C}^n : |z - a| = r\}$ sfera $B(a, r)$ sharining chegarasi bo'lib, u $\partial B(a, r)$ kabi belgilanadi. Ushbu $B(a, r) \cup \partial B(a, r)$ tuplam yopiq shar deyiladi va u $\bar{B}(a, r)$ kabi belgilanadi. Ravshanki,

$$\begin{aligned} \bar{B}(a, r) &= \{z \in \mathbf{C}^n : |z - a| < r\} \cup \{z \in \mathbf{C}^n : |z - a| = r\} = \\ &= \{z \in \mathbf{C}^n : |z - a| \leq r\} \end{aligned}$$



1 – ch i z m a.

b) p o l i d o i r a. Aytaylik, $a \in \mathbf{C}^n$, $r \in \mathbf{R}^n$ vektorlar berilgan bo'lib,

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad r = (r_1, r_2, \dots, r_n), \quad r_i > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

bo'lsin. Ushbu

$$U(a, r) = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) : |z_1 - a_1| < r_1,$$

$\{ |z_2 - a_2| < r_2, \dots, |z_n - a_n| < r_n \} = \{ |z_j - a_j| < r_j, \quad j = 1, \dots, n \}$
 to'plam markazi a nuqtada bo'lgan polidoira deyiladi. Bunda $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ ga polidoiraning radius – vektori deyiladi.

Demak, polidoira $\mathbf{C}$ tekislikdagi n ta

$$U(a_k, r_k) = \{z \in \mathbf{C} : |z_k - a_k| < r_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

doiralarning dekart ko'paytmalaridan iborat bo'ladi:

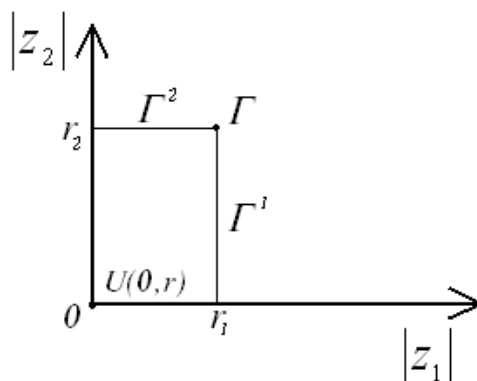
$$U(a, r) = U(a_1, r_1) \times U(a_2, r_2) \times \dots \times U(a_n, r_n).$$

Polidoiraning chegarasi $2n - 1$ o'lchovli $\partial U(a, r) = \bigcup_{k=1}^n \Gamma^k$ bo'lib, bunda k - qirra

$$\Gamma^k = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) : |z_1 - a_1| \leq r_1, \dots, |z_{k-1} - a_{k-1}| \leq r_{k-1}, \\ |z_k - a_k| = r_k, |z_{k+1} - a_{k+1}| \leq r_{k+1}, \dots, |z_n - a_n| \leq r_n\}$$

bo'ladi. Barcha Γ^k qirralar n o'lchovli ushbu

$\Gamma = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) : |z_k - a_k| = r_k, \quad k = 1, 2, \dots, n\}$ to'plam
 bo'yicha kesishadi. Uni polidoiraning uchi (ostovi) deyiladi.



2 – ch i z m a

Polidoira tushunchasi $\mathbf{C}^n$ fazodagi ushbu

$$\|z\| = \max_{1 \leq k \leq n} |z_k|$$

norma bilan bog'langan. $r = (r, r, \dots, r)$ radiusli polidoira bu norma yordamida $U(a, r) = \{\|z - a\| < r\}$ shaklida ifodalanishini ko'rish qiyin emas. SHuning uchun ham $\|z\|$ polidoiraviy norma, $\delta(z, w) = \|z - w\|$ esa polidoiraviy metrika deb ataladi. Ravshanki, polidoiraviy metrika Evklid metrikasi ρ ga ekvivalent bo'lib, ular orasida ushbu

$$\delta(z, w) \leq \rho(z, w) \leq \sqrt{n} \delta(z, w)$$

munosabat o'rinli.

v) **R e y n x a r t s o h a l a r i** . Ushbu $F: z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \rightarrow (|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$ akslantirishni qaraylik.

Bu akslantirish $2n$ o'lchovi $\mathbf{C}^n$ fazoning n o'lchovi $\mathbf{R}_+^n = \underbrace{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \dots \times \mathbf{R}_+}_{n \text{ m a}}$ fazoga (absolyut oktantga) akslantiradi, bunda

$$\mathbf{R}_+ = [0, +\infty).$$

$\mathbf{R}_+^n$ fazoda ixtiyoriy D^* sohani olaylik. F akslantirish yordamida D^* sohaning proobrazi

$$D = F^{-1}(D^*)$$

$\mathbf{C}^n$ fazoda Reynhart sohasi deyiladi.

Reynhart sohasi quyidagi xossaga ega: sohaga tegishli bo'lgan har qanday $z^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$ nuqta bilan bir qatorda,

$$T = \{z \in \mathbf{C}^n : |z_1| = |z_1^0|, \dots, |z_n| = |z_n^0|\}$$

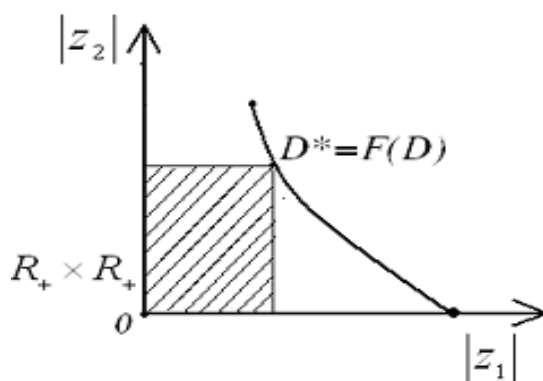
ostov ham shu sohaga tegishli bo'ladi. Odatda, bu xossa Reynhart sohasining ta'rif sifatida ham qaraladi.

Umumiy holda Reynhart sohasi quyidagicha ta'riflanadi: agar $\mathbf{C}^n$ fazodagi D ga tegishli har bir $z^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$ nuqta bilan bir qatorda ixtiyoriy $z = \{a_1 + (z_1^0 - a_1)e^{i\theta_1}, \dots, a_n + (z_n^0 - a_n)e^{i\theta_n}\}$ ($0 < \theta_k \leq 2\pi$) nuqta ham D ga tegishli bo'lsa, D ga markazi $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ nuqtada bo'lgan Reynhart sohasi deyiladi.

Agar $z^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0) \in D$ bo'lganda,

$$U = \{z \in \mathbf{C}^n : |z_1 - a_1| < |z_1^0 - a_1|, \dots, |z_n - a_n| < |z_n^0 - a_n|\}$$

polidora ham D ga tegishli bo'lsa, D to'la Reynhart sohasi deyiladi. SHar va polidoira to'la Reynhart sohasiga misol bo'la oladi.

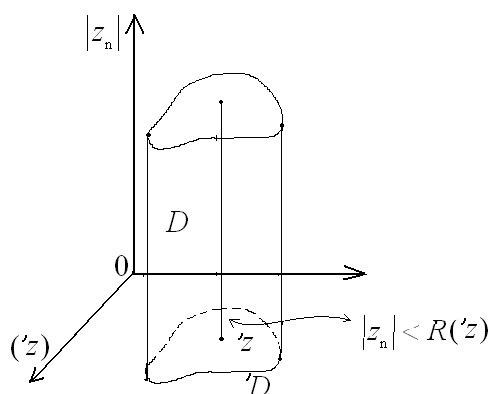


3 – ch i z m a

g) **X a r t o g s s o h a l a r i**. Avvalo, ushbu

$${}^1z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$$

belgilashlarni kiritamiz. Unda $\mathbf{C}^n$ fazo $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}_{z'}^{n-1} \times \mathbf{C}_{z_n}$ ko'rinishda n o'lchovli $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ vektor esa $z = ({}^1z, z_n)$ ko'rinishda ifodalanadi. $\mathbf{C}^n$ fazoda biror D sohani olaylik. Agar bu soha uchun $z^0 = ({}^1z^0, z_n^0) \in D$ bo'lishi bilan bir qatorda, ushbu aylana $\{{}^1z^0\} \times \{|z_n| = |z_n^0|\}$ ham shu sohaga tegishli bo'lsa, D soha $\{z_n = 0\}$ tekislikka nisbatan simmetrik Xartogs sohasi deyiladi. Agar har bir $({}^1z^0, z_n^0) \in D$ da $\{{}^1z^0\} \times \{|z_n| < |z_n^0|\} \in D$ bo'lsa, D to'la Xartogs sohasi deyiladi.



4 – ch i z m a

To'la sohani quyidagicha ifodalash mumkin: $D = \{{}^1z \in {}^1D, |z_n| < R({}^1z)\}$, bunda ${}^1D \subset \mathbf{C}^{n-1}$ biror soha, $R({}^1z)$ esa 1D da aniqlangan haqiqiy funktsiya, $R({}^1z) > 0$. 1D ga Xartogs sohasining *asosi* va 1D da aniqlangan $R({}^1z)$ funktsiyaga sohaning radiusi deyiladi.

2.2.Kartan klassik sohalari.

1^o. Birinchi tip Kartan klassik sohasi. p va q lar butun musbat sonlar bo'lsin, $p + q = m$ deb olamiz va m o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan, m^2 haqiqiy o'zgaruvchiga bog'liq quyidagi Ermit formulasini o'zgartirmasdan qoldiruvchi kompleks chiziqli akslantirishlar gruppasini qaraylik,

$$-|t_1|^2 - \dots - |t_p|^2 + |t_{p+1}|^2 + \dots + |t_m|^2 = t \cdot H \bar{t} = t' H \bar{t}' \quad (2.2.1)$$

bu yerda

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_m \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix}$$

boshqacha aytganda biz $G'H\bar{G} = H$ munosabatni qanotlantiruvchi G matritsaga ega bo'lgan chiziqli akslantirishni qaraymiz. Keyinchalik matritsaning satr va ustunlarining indekslarini yuqoriga ikkilangan indeks ko'rinishda yozamiz

$$G = G^{(m,m)} = \begin{pmatrix} A^{(p,p)} & B^{(p,q)} \\ C^{(q,p)} & D^{(q,q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

deb olamiz. U holda ravshanki, $G'H\bar{G} = H$ shu holda va faqat shu holdaki, qachonki

$$A'\bar{A} - C'\bar{C} = E_p, \quad D'\bar{D} - B'\bar{B} = E_q, \quad A'\bar{B} = C'\bar{D}$$

$U'H\bar{U} > 0$ shartni qanotlantiruvchi m -satr va q -ustundan iborat bo'lgan

$$U = \begin{pmatrix} V^{(p,q)} \\ W^{(q,q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$$

hamma matritsalar bo'lsin, boshqacha aytganda U satr p ga va ustuni q ga teng bo'lgan hamma matritsalar W esa q' tartibli $W'\bar{W} > V'\bar{V}$ shartni qanotlantiruvchi kvadrat matritsalar $U \rightarrow GU = U_1$ o'zaro bir qiymatli akslantirish bu to'plamni o'zini-o'ziga akslantiradi.

$$U_1'H\bar{U}_1 = U'G'H\bar{G}\bar{U} = U'H\bar{U}$$

Har qanday W matritsa xosmas bo'ladi, chunki aks holda shunday q o'lchovli vektor mavjud bo'ladiki, bunda $Wz = 0$. z ni 9 ta yo'l bitta ustinli matritsa sifatida

$$0 = z'W'\bar{W}\bar{z} > z'V'\bar{V}\bar{z} = (Vz)'(\bar{V}\bar{z}) \geq 0, \quad z^{(p,q)} = VW^{-1}$$

matritsalar to'plamini qaraylik,

$$U'H\bar{U} > 0 \quad \text{yoki} \quad W'\bar{W} > V'\bar{V}, \quad Z'\bar{Z} < E$$

ga o'tadi. $Z'\bar{Z}$ matritsaning har qanday diogonal elementi birdan kichik Z ning kvadratlar yig'indisi q dan oshmaydi. Shunday qilib, $Z'\bar{Z} < E$ shart qanotlantiruvchi $Z^{(p,q)}$ matritsalar pq o'lchovli ko'mpleks fazoda chegaralangan to'plam hosil qiladi.

$$U \rightarrow GU = U_1 = \begin{pmatrix} V_1 \\ W_1 \end{pmatrix}$$

almashtirish quyidagi almashtirishga o'tadi:

$$Z \rightarrow Z_1 = V_1 W_1^{-1} = (AV + BW)(CV + DW)^{-1} = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

shunday qilib, $Z'\bar{Z} < E$ soha

$$Z \rightarrow (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

akslantirishlar gruppasiga nisbatan invariant. Bu yerda

$$A'\bar{A} - C'\bar{C} = E_p, \quad D'\bar{D} - B'\bar{B} = E_q, \quad A'\bar{B} = C'\bar{D}$$

G matritsalar gruppasidan kasr chiziqli akslantirishga o'tganda biz bir haqiqiy parametrni yo'qotdik. Agar η ko'mpleks son bo'lsa, moduli birga teng. U holda

$$Z \rightarrow (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \quad \text{va} \quad Z \rightarrow (\eta AZ + \eta)(\eta CZ + \eta D)^{-1}$$

akslantirishlar ustma-ust tushadi. (Boshqacha so'z bilan aytganda bir parametrli qism gruppaga G matritsalar to'plamidan tuzilgan ηE_m bu yerda $|\eta| = 1$ ayniy akslantirishga o'tadi. Shu bilan birga bu qism gruppaga ayniy akslantirishning to'la proobrazidir.) Shuning uchun bizning akslantirish gruppamiz $m^2 - 1$ haqiqiy parametrga ega. Bu gruppani qarayotgan sohada tranzitiv ekanligini isbotlash mumkin. Bundan tashqari u simmetrik, chunki $Z \rightarrow -Z$ involyutsiyaga ega. (Agar ϑ haqiqiy son bo'lsa, u holda gruppaga $Z \rightarrow e^{i\vartheta} Z$ akslantirishga ega.

$$A = e^{i\vartheta} \eta E_q, \quad B = C = 0, \quad D = \eta E_q$$

Bu yerda $|\eta| = 1$, $Z\bar{Z} < E_q$ sohaning analitik avtomorfizmlari to'la gruppaga tashkil qiladi. $q = 1$ da S shartni hosil qilamiz, p va q larning o'rnini almashtirish mumkin. Bu yerda ham xuddi yuqoridagi soha va gruppaga hosil bo'ladi.)

2^o. Ikkinchi tip Kartan klassik sohasi. $p = q \geq 2$ deb olamiz va m o'zgaruvchiga bog'liq chiziqli akslantirishlarning gruppasining qsim gruppasini qaraymiz. Bundan tashqari bizning chiziqli akslantirishimiz quyidagi Ermit formulasini o'zgartirmasin:

$$-|t|^2 - \dots - |t_p|^2 + |t_{p+1}|^2 + \dots + |t_{2p}|^2$$

quyidagi kvadrat fo'rmani o'zgartirmaydi deb olamiz:

$$2t_1 t_{p+1} + 2t_2 t_{p+2} + \dots + 2t_p t_{2p} = t \cdot Kt = t'Kt$$

bu yerda

$$K = \begin{pmatrix} 0 & E_p \\ E_p & 0 \end{pmatrix}$$

ga teng. Shunday qilib, biz quyidagi shartlarni qanotlantiruvchi matritsasi G ga teng bo'lgan chiziqli akslantirishlarni qaraymiz:

$$G'H\bar{G} = H, \quad G'K\bar{G} = K \quad (2.2.2)$$

$$J = K^{-1}H = \begin{pmatrix} 0 & E_p \\ E_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & E_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_p \\ -E_p & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

deb olsak (2.2.3) dagi G ga qo'yiladigan shartni quyidagicha almashtirish mumkin:

$$G'H\bar{G} = H, \quad J\bar{G} = GJ \quad (2.2.4)$$

Haqiqatan ham, agar

$$G'H\bar{G} = H \quad \text{va} \quad G'KG = K$$

u holda

$$G^{-1}H\bar{G} = G^{-1}K^{-1}H\bar{G} = (G'KG)^{-1}(G'H\bar{G}) = K^{-1}H = J$$

boshqacha tamondan

$$G'H\bar{G} = H \text{ va } J\bar{G} = GJ$$

dan kelib chiqadi.

$$G'KG = G'HJ^{-1}G = (G'H\bar{G})(G^{-1}J\bar{G})^{-1} = HJ^{-1} = K$$

$$G = \begin{pmatrix} A^{(p,p)} & B^{(p,p)} \\ C^{(p,p)} & D^{(p,p)} \end{pmatrix}$$

deb olamiz. U holda $G'H\bar{G} = H$ shart quyidagiga ekvivalent bo'ladi:

$$A'\bar{A} - C'\bar{C} = E_p = D'\bar{D} - B'\bar{B}, \quad A\bar{B} = C'\bar{D} \quad (2.2.5)$$

$$J\bar{G} = CJ \text{ shart } B = -C, \quad D = \bar{A} \quad (2.2.6)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Demak, (8) shart bajariladi shu holda va faqat shu holdaki qachonki,

$$B = -\bar{C}, \quad D = \bar{A}, \quad A'\bar{A} - C'\bar{C} = E_p, \quad A'C = -C'A \quad (2.2.7)$$

$$A'\bar{A} = C'\bar{C} + E_p > 0$$

ekan. U holda A xosmas matritsa (ya'ni $A \neq 0$) yuqoridagi shartlarni quyidagi shartlar bilan yozish mumkin:

$$B = -\bar{C}, \quad D = \bar{A},$$

$$CA^{-1} = -(CA^{-1})', \quad E_p - (\overline{CA^{-1}})'(\overline{CA^{-1}}) = (A^{-1})'(\overline{A^{-1}})$$

demak, eng umumiy G matritsani quyidagicha hosil qilish mumkin. Ixtiyoriy $T^{(p,p)}$ kososimmetrik matritsani olamiz. $T'T < E_p$ shartni qanotlantiruvchi $A_0^{(p,p)}$

matritsani shunday topamizki, bunda $(A_0^{-1})'(\overline{A^{-1}}) = E_p - T'\bar{T}$, A_0O ko'rinishga ega, bu yerda $O^{(p,p)}$ unitar matritsa keyinchalik G matritsani quyidagi munosabatdan aniqlaymiz:

$$A = A_0O, \quad C = TA = TA_0O, \quad D = \bar{A} = \bar{A}_0\bar{O} \\ B = -\bar{C} = -\bar{T}\bar{A}_0\bar{O} \quad (2.2.8)$$

shunday qilib, G matritsaning parametrlar soni

$$p(p-1) + p^2 = p(2p-1)$$

ga teng.

$$U = \begin{pmatrix} V^{(p,p)} \\ W^{(p,p)} \end{pmatrix}$$

$2p$ yo'lli va p ustinli $U'H\bar{U} > 0$ shartni qanotlantiruvchi matritsa bo'lsin. Boshqacha aytganda V tartibli hamma kvadrat matritsalar W shartni qanotlantiruvchi p tartibli kvadrat matritsalar. Ravshanki, $U \rightarrow GU$ akslantirishi $U'H\bar{U}$, $U'KU$ saqlaydi, ya'ni U matritsalar to'plamini o'ziga o'tkazadi. Har bir W matritsa xosmas ($\det W \neq 0$) V va W matritsalariga qo'yilgan talabni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$(VW^{-1})'(\bar{V}\bar{W}^{-1}) < E_p, \quad (VW^{-1})' = -VW^{-1}$$

demak,

$$Z^{(p,p)} = VW^{-1}$$

matritsa

$$Z'\bar{Z} < E_p, \quad Z' = -Z \quad (2.2.9)$$

sohada o'zgaradi. (2.2.9) munosabat $\frac{p(p-1)}{2}$ - o'lchovli kompleks fazoda chegaralangan sohani ifodalaydi. Bu soha

$$Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \quad (2.2.10)$$

analitik almashtirishlar gruppasiga nisbatan invariant soha bo'ladi. Bu yerda A, B, C, D lar yuqorida aniqlangan birinchi tip sohalar singari bu gruppaga analitik almashtirish G matritsalar gruppasiga nisbatan kam parametrga ega (misol uchun, $p=2$ da uch parametrlilik qsim gruppaga shunday G lardan tuzilganki bunda

$$B = C = 0, \quad A = \bar{D} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

bu yerda,

$$a\bar{a} + b\bar{b} = 1$$

ayniy akslantirishga aylanadi.) (1.1.10) dagi analitik akslantirishlar gruppasi (11) sohada tranzitiv. Bundan tashqari u simmetrik, $Z \rightarrow -Z$ involyutsiya kirgan. (Biroz umumiyroq aytsak, agar ϑ haqiqiy son, u holda bizning gruppamiz, $Z \rightarrow e^{i\vartheta} Z$ akslantirishni o'zida saqlaydi. Bu

$$A = e^{\frac{i\vartheta}{2}} E_p, \quad B = C = 0, \quad D = e^{-\frac{\vartheta}{2}} E_p$$

gruppaga $Z'\bar{Z} < E_p, \quad Z' = -Z$ analitik akslantirishlarni to'la gruppasi bo'lishini isbotlash mumkin.)

3^o. Uchinchi tip Kartan klassik sohasi. $p=q$ bo'lsin, m o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan birinchi tipda kiritilgan akslantirishlarni boshqa bir qsim gruppasini qaraymiz. Bundan tashqari bizning chiziqli akslantirishimiz quyidagi Ermit formasini o'zgartirmasin:

$$-|t_1|^2 - \dots - |t_p|^2 + |t_{p+1}|^2 + \dots + |t_{2p}|^2 \quad (2.2.12)$$

ular bundan tashqari

$$(t_1 U_{p+1} - U_1 t_{p+1}) + \dots + (t_p U_{2p} - U_p t_{2p}) = t \cdot JU = t'JU \quad (2.2.13)$$

shunday qilib, G matritsamiz quyidagi shartlarni qanotlantiradi. Chiziqli akslantirishlarni qaraymiz:

$$G'H\bar{G} = H, \quad G'JG = J \quad (2.2.14)$$

$$K = -J^{-1}H$$

va

$$J = -HK^{-1}$$

ekanligini e'tiborga olib, (2.2.17) munosabatni quyidagi bilan almashtirish mumkin:

$$G'H\bar{G} = H \quad K\bar{G} = GK \quad (2.2.15)$$

$$G = \begin{pmatrix} A^{(p,p)} & B^{(p,p)} \\ C^{(p,p)} & D^{(p,p)} \end{pmatrix} \quad (2.2.16)$$

deb olamiz, u holda (2.2.18) munosabat quyidagini bildiradi:

$$A'\bar{A} - C'\bar{C} = E_p = D'\bar{D} - B'\bar{B}, \quad A'\bar{B} = C'\bar{D}, \quad B = \bar{C}, \quad D = \bar{A} \quad (2.2.17)$$

yoki

$$B = \bar{C}, \quad D = \bar{A}, \quad E - (CA^{-1})(\overline{CA^{-1}}) = (A^{-1})'(A^{-1})$$

$$CA^{-1} = (CA^{-1})' \quad (2.2.18)$$

Eng umumiy G matritsani shuning uchun quyidagidek usuldan topish mumkin. Ixtiyoriy $T'\bar{T} < E_p$ shartlarni qanotlantiruvchi $T^{(p,p)}$ simmetrik matritsani olamiz va $A_0^{(p,p)}$ matritsani topamiz bunda, $(A_0^{-1})'(\overline{A_0^{-1}}) = E_p - T'\bar{T}$ u holda eng umumiy matritsa G quyidagi munosabat bilan aniqlanadi:

$$A = A_0 O, \quad C = TA = TA_0 O, \quad B = \bar{C} = \bar{T} \bar{A}_0 \bar{O}, \quad D = \bar{A} A_0 \bar{O} \quad (2.2.19)$$

$O^{(p,p)}$ unitar matritsa G matritsalar gruppasida haqiqiy parametrlar soni $p(p+1) + p^2 = p(2p+1)$ ga teng.

$$U = \begin{pmatrix} V^{(p,p)} \\ W^{(p,p)} \end{pmatrix}$$

$2p$ yo'lli va p ustunli $U'H\bar{U} > 0$ va $U'JU = 0$ shartlarni qanotlantiruvchi matritsalar bo'lsin. Boshqacha so'z bilan aytganda,

$$W'\bar{W} > V'\bar{V} \text{ va } V'W = W'V$$

ravshanki, $U \rightarrow GU$ akslantirish $U'H\bar{U}$ va $U'JU$ larni o'zgartirmaydi, ya'ni U matritsalar to'plami o'ziga o'tadi. Yuqoridagidek har bir W xosmas ($\det W \neq 0$), shuning uchun V va W ga qo'yilgan talabni quyidagicha yozish mumkin:

$$(VW^{-1})(\overline{VW^{-1}}) < E_p, \quad (VW^{-1})' = VW^{-1} \quad (2.2.20)$$

demak, $Z^{(p,p)} = VW^{-1}$ matritsalar

$$Z'\bar{Z} < E_p, \quad Z' = -Z \quad (2.2.21)$$

chegaralangan sohada $\frac{p(p+1)}{2}$ o'lchovli kompleks fazoda o'zgaradi. Bu soha,

$$Z \rightarrow (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \quad (2.2.22)$$

parametrli analitik avtomorfizmlar gruppasi bo'ladi, bu yerda A, B, C, D lar yuqoridagidek aniqlangan (bu yerda G ayniy akslanishda beradigan $\pm E_{2p}$ bo'ladi.). Bu grupp (2.2.21) sohada tranzitiv ekanligini isbotlash mumkin. Bundan tashqari (2.2.21) soha simmetrik (2.2.22) grupp $Z \rightarrow -Z$ involyutsiyaga ega, (biroz umumiyroq yuqoridagidek (2.2.22) ga $Z \rightarrow e^{i\theta}$ akslantirish kirgan θ imperik haqiqiy parametr $A = e^{\frac{i\theta}{2}} E_p$ deb olish mumkin

$B = C = 0, \quad D = e^{\frac{i\theta}{2}} E_p$). Bu grupp () sohaning to'la analitik avtomorfizmlar gruppasi ekanligini isbotlash mumkin.

4⁰. To'tinchi tip Kartan klassik sohasi. p butun son bo'lsin, $p+2$ haqiqiy kaiffitsentli chiziqli almashtirishlar gruppasini qaraymiz, u quyidagi kvadratik formani o'z joyida qoldiruvchi bo'lsin,

$$-t_1^2 - \dots - t_p^2 + t_{p+1}^2 + t_{p+2}^2 = t \cdot Ht' = t'Ht$$

bu yerda

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \\ \vdots \\ t_{p+2} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

boshqacha aytganda, biz $G = \bar{G}$ va $G'HG = H$ munosabatni qanotlantiruvchi chiziqli almashtirishlarni qaraymiz. Bu yerda G yuqoridagi munosabatni qanotlantiradi. Ravshanki, bu gruppaning haqiqiy parametrlari soni $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$

$$-t'Ht = -t_1^2 - \dots - t_p^2 + t_{p+1}^2 + t_{p+2}^2 = 0 \quad (2.2.23)$$

va

$$t'H\bar{t} = -|t_1|^2 - \dots - |t_p|^2 + |t_{p+1}|^2 + |t_{p+2}|^2 > 0 \quad (2.2.24)$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi $(p+2)$ o'lchov kompleks fazo nuqtalari o'zaro bir qiymatli to'plami $t \rightarrow Gt$ almashtirishda o'ziga o'tadi. t_{p+1} va t_{p+2} nuqtalarning har biri no'ldan farqli va bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi, koordinatalar boshidan o'tuvchi, aks holda

$$|t_{p+1}|^2 + |t_{p+2}|^2 = |t_{p+1}^2 + t_{p+2}^2|^2$$

va

$$|t_1|^2 + \dots + |t_p|^2 < |t_1^2 + \dots + t_p^2| \quad (2.2.25)$$

demak, $\frac{t_{p+1}}{t_{p+2}}$ ning mavhum qismi no'ldan farqli. Bizning nuqtalar to'plamimiz

ikkitadan iborat, har bittasi $\frac{t_{p+1}}{t_{p+2}}$ mavhum qismning aniqlangan qiymatiga ega.

Bizning akslantirish $\frac{t_{p+1}}{t_{p+2}}$ ning yoki mavhum qiymatini saqlaydi, yoki hamma

nuqtani qarama-qarshisiga o'zgartiradi. Shunday qilib, chiziqli akslantirish $\frac{t_{p+1}}{t_{p+2}}$

ning mavhum bo'lagining ishorasini saqlaydi. Ikki indeksning qsim gruppasini tshkil etadi. Endi bu grupp qismlarning va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini qaraymiz:

$$t'Ht=0, \quad t'H\bar{t} > 0, \quad \operatorname{Im} \frac{t_{p+1}}{t_{p+2}} > 0 \quad (2.2.26)$$

Bir jinsli bo'lmagan koordinatalarga o'tib biz bu to'plamni p -o'lchovli ko'mpleks fazodagi chegaralangan to'plamga o'tkazadi. (2.2.26) da birinchi munosabatni $(t_{p+1} + it_{p+2})^2$ ga bo'lib quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(\frac{t_1}{t_{p+1} + it_{p+2}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{t_p}{t_{p+1} + it_{p+2}}\right)^2 = \frac{t_{p+1} - it_{p+2}}{t_{p+1} + it_{p+2}} \quad (2.2.27)$$

(2.2.26) dagi munosabatni $|t_{p+1} + t_{p+2}|^2$ bo'lib,

$$\frac{|t_{p+1}|^2 + |t_{p+2}|^2}{|t_{p+1} + it_{p+2}|^2} = \frac{|t_{p+1} - it_{p+2}|^2 + |t_{p+1} + it_{p+2}|^2}{2|t_{p+1} + it_{p+2}|^2}$$

ni hosil qilamiz. Bundan,

$$\left|\frac{t_1}{t_{p+1} + it_{p+2}}\right|^2 + \dots + \left|\frac{t_p}{t_{p+1} + it_{p+2}}\right|^2 < \frac{1}{2} \left(1 + \left|\frac{t_{p+1} - it_{p+2}}{t_{p+1} + it_{p+2}}\right|^2\right) \quad (2.2.28)$$

Uchinchi shart $\left|\frac{t_{p+1} - it_{p+2}}{t_{p+1} + it_{p+2}}\right| < 1$ ga teng kuchli. Agar biz $z_k = \frac{t_k}{t_{p+1} + it_{p+2}}$,

($k=1,2,\dots,p$) deb olsak (2.2.28) ko'rinishdagi to'plam quyidagi chegaralangan to'plamga o'tadi:

$$|z_1|^2 + \dots + |z_p|^2 < \frac{1}{2} (1 + |z_1^2 + \dots + z_p^2|^2) < 1 \quad (2.2.29)$$

Bizning chiziqli akslantirishlar gruppamiz $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ parametrغا bog'liq kasr chiziqli almashtirishlar to'plami, bu sohani o'zini-o'ziga o'tkazadi.

2.3. Kartan klassik sohalarning avtomorfizmlari.

$\mathfrak{R}_1$ *birinchi tip Kartan klassik sohasi avtomorfizmi*. $\mathfrak{R}_1$ soha uchun Γ gruppа quyidagicha almashtirishlardan iborat:

$$Z_1 = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad (2.3.1)$$

bu erda A, B, C, D matritsalar mos ravishda $m \times m, m \times n, n \times m, n \times n$ o'lchamli bo'lib, ushbu

$$\overline{A}A' - \overline{B}B' = I^{(m)}, \quad \overline{A}C' = \overline{B}D', \quad \overline{C}C' - \overline{D}D' = -I^{(n)}$$

shartni qanoatlantiradi. Bundan tashqari $m = n$ bo'lganda

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = +1 \quad (2.3.2)$$

deb faraz qilamiz. Ixtiyoriy $Z = P$ nuqtani koordinatalar boshiga o'tkazuvchi

almashtirish topamiz. $\mathfrak{R}_1$ sohaning aniqlanishiga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$I^{(m)} - \bar{P}P' > 0.$$

Bundan esa

$$I^{(n)} - P'\bar{P} > 0$$

bo'ladi. Bizga ma'lumki, ushbu

$$\bar{Q}(I^{(m)} - \bar{P}P')Q' = I^{(m)}, \quad \bar{R}(I^{(n)} - P'\bar{P})R' = I^{(n)} \quad (2.3.3)$$

shartni qanoatlantiruvchi $m \times m$ -o'lchamli Q matritsa va $n \times n$ -o'lchamli R matritsa mavjud. Ushbu

$$Z_1 = Q(Z - P)(I^{(n)} - \bar{P}'Z)^{-1}R^{-1} \quad (2.3.4)$$

almashtirish P ni koordinatalar boshiga o'tkazadi. Oson ko'rish mumkinki, bu almashtirish (1) ko'rinishga tegishli.

(2.3.4) ni differentsiallab quyidagiga ega bo'lamiz:

$$dZ_1 = Q\{dZ \cdot (I - \bar{P}'Z)^{-1} + (Z - P)d(I - \bar{P}'Z)^{-1}\}R^{-1},$$

ya'ni, $Z = P$ nuqtada

$$\dot{Z}_1 = \left| (\det Q)^m \cdot (\det \bar{R}')^n \right|^2 \cdot \dot{Z} = \{\det(I - P\bar{P}')\}^{-m-n} \cdot \dot{Z}$$

bo'ladi. SHuningdek,

$$Q(Z, \bar{Z}) = \{\det(I - Z\bar{Z}')\}^{-(m+n)}.$$

Oldingi paragrafdagi natijalardan quyidagi teoremaga ega bo'lamiz:

2.3.1-teorema. $\mathfrak{R}_1$ sohaning Bergman yadrosi quyidagiga teng:

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_1)} \cdot \{\det(I - Z\bar{Z}')\}^{-(m+n)}, \quad (2.3.5)$$

bu erda $V(\mathfrak{R}_1)$ — $\mathfrak{R}_1$ soha hajmi va u

$$V(\mathfrak{R}_1) = \frac{1! 2! \dots (m-1)! 1! 2! \dots (n-1)!}{1! 2! \dots (m+n-1)!} \pi^{mn}$$

ga teng.

$\mathfrak{R}_{II}$ **ikkinchi tip Kartan klassik sohasi avtomorfizmi.** $\mathfrak{R}_{II}$ soha uchun Γ gruppasi quyidagicha almashtirishlardan iborat:

$$Z_1 = (AZ + B)(\bar{B}Z + \bar{A})^{-1}, \quad (2.3.6)$$

bu erda

$$A'B = B'A, \quad \bar{A}A' - \bar{B}B' = I$$

$P - \mathfrak{R}_{II}$ sohaning nuqtasi bo'lsin. U holda shunday R matritsa topiladiki,

$$\bar{R}(I - \bar{P}P')R' = I. \quad (2.3.7)$$

Γ ga tegishli ushbu

$$Z_1 = R(Z - P)(I - \bar{P}Z)^{-1}\bar{R}^{-1} \quad (2.3.8)$$

almashtirish P ni koordinatalar boshiga o'tkazadi. (2.3.8) ni differentsiallab quyidagiga ega bo'lamiz:

$$dZ_1 = R\{dZ \cdot (I - \bar{P}Z)^{-1} + (Z - P)d(I - \bar{P}Z)^{-1}\}R^{-1},$$

$Z = P$ deb olsak

$$dZ_1 = R \cdot dZ \cdot (I - \bar{P}P)^{-1} \bar{R}^{-1} = R \cdot dZ \cdot R'$$

Demak, $Z = P$ nuqtada

$$\dot{Z}_1 = |(\det R)^{n+1}|^2 \cdot \dot{Z} = \{\det(I - P\bar{P})\}^{-(n+1)} \cdot \dot{Z}$$

bo'ladi. U holda

$$Q(Z, \bar{Z}) = \{\det(I - Z\bar{Z})\}^{-(n+1)}.$$

2.3.2-teorema. $\mathfrak{R}_{II}$ sohaning Bergman yadrosi quyidagiga teng:

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{II})} \cdot \{\det(I - Z\bar{Z})\}^{-(n+1)}, \quad (2.3.9)$$

bu erda $V(\mathfrak{R}_{II})$ — $\mathfrak{R}_{II}$ soha hajmi va u

$$V(\mathfrak{R}_{II}) = \pi^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{2! 4! \dots (2n-2)!}{n! (n+1)! \dots (2n-1)!}$$

ga teng.

$\mathfrak{R}_{III}$ **uchinchi tip Kartan klassik sohasi avtomorfizmi.** $\mathfrak{R}_{III}$ soha uchun Γ gruppasi quyidagicha almashtirishlardan iborat:

$$Z_1 = (AZ + B)(-\bar{B}Z + \bar{A})^{-1}, \quad (2.3.10)$$

bu erda

$$A'B = -B'A, \quad \bar{A}'A - \bar{B}'B = I$$

$P - \mathfrak{R}_{III}$ sohaning nuqtasi bo'lsin, ya'ni $I + \bar{P}P > 0$. U holda shunday Q matritsa topiladiki,

$$\bar{Q}(I + P\bar{P})Q' = I.$$

Γ ga tegishli ushbu

$$Z_1 = Q(Z - P)(I + \bar{P}Z)^{-1} \bar{Q}^{-1} \quad (2.3.11)$$

almashtirish P ni koordinatalar boshiga o'tkazadi.

(2.3.11) ni differentsiallab quyidagiga ega bo'lamiz:

$$dZ_1 = Q\{dZ \cdot (I + \bar{P}Z)^{-1} + (Z - P)d(I + \bar{P}Z)^{-1}\}Q^{-1},$$

$Z = P$ deb olsak

$$dZ_1 = Q \cdot dZ \cdot (I + \bar{P}P)^{-1} \bar{Q}^{-1} = Q \cdot dZ \cdot Q'.$$

Demak, $Z = P$ nuqtada

$$\dot{Z}_1 = |(\det Q)^{n+1}|^2 \cdot \dot{Z} = \{\det(I + \bar{P}P)\}^{-n+1} \cdot \dot{Z}$$

bo'ladi. SHuning uchun

$$Q(Z, \bar{Z}) = \{\det(I + Z\bar{Z})\}^{-n+1}.$$

2.3.3-teorema. $\mathfrak{R}_{III}$ sohaning Bergman yadrosi quyidagiga teng:

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{III})} \cdot \{\det(I + Z\bar{Z})\}^{-n+1}, \quad (2.3.12)$$

bu erda $V(\mathfrak{R}_{III})$ — $\mathfrak{R}_{III}$ soha hajmi va u

$$V(\mathfrak{R}_{\text{III}}) = \pi^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{2! 4! \dots (2n-4)!}{(n-1)! n! \dots (2n-3)!}$$

ga teng

III-BOB. Matritsa argumentli golomorf funktsiyalar uchun Loran qatorlarining analoglari

3.1. Matritsa o'zgaruvchili golomorf funktsiyalar

m^2 kompleks uzgaruvchiga bog'lik fazo C^{m^2} ni karaymiz. Ba'zi masalalarni yopik Z nuqta sifatida $[m \times m]$ kvadrat matritsalarini karash kulaylik tugdiradi. $z = (z_{ij})_1^m$ nuqtalarni shunday tasvirlanishini $C[m \times m]$ deb belgilaymiz. $C^n[m \times m]$ deganda n ta fazolarning tugri yigindisidan iborat.

1-ta'rif: Agar $G \subset C^n[m \times m]$ soxada kandaydir

$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) : G \rightarrow C[m \times m]$ funksiya aniklangan bulsin, z^0 nuqtaning

ε atrofi deganda radiusi ε ga teng bulgan z^0 markazli $T(Z^0, \varepsilon)$ umumlashgan polidoirani tushunamiz, bunda

$$T(Z^0, \varepsilon) = \{z \in C^n[m \times m]; \|z_v - z_v^0\| < \varepsilon, v = 1, \dots, n\}$$

2-ta'rif: $f(z)$ funksiyaning $z^0 \in G$ nuqtada golomorf deymiz (Veyershtast ma'nosida) agar u $T(z^0, \varepsilon)$ da kandaydir absolyut yakinlashuvchi karrali katorlar kurinishda tasvirlansa

$$f(z) = A^0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_j=1}^n \sum_A A_{k_1, \dots, k_j}^{(0)} (z_{k_1} - z_{k_1}^0) A_{k_1, \dots, k_j}^{(1)} (z_{k_2} - z_{k_2}^0) \dots A_{k_1, \dots, k_j}^{(j-1)} (z_{k_j} - z_{k_j}^0) A_{k_1, \dots, k_j}^{(j)}$$

(1)

Bu erda $A^{(0)}, A_{k_1, \dots, k_j}^{(0)}, \dots, A_{k_1, \dots, k_j}^{(j)} \in C[m \times m], \sum_A$ - ning xadlar yigindisi

A ning turli xil matritsalaridan tuzilgan.

$f(z)$ matritsaning $f_{ij}(z)$ elementlari

$$\Pi = \{z \in C^{nm^2} : |(z_\nu - z_\nu^0)_{ij}| < \varepsilon, \quad \nu = 1, \dots, n\}$$

atrofida m^2 ta golomorf buladi. $z_1, \dots, z_n$ matritsaning elementlari $(z_1)_{ij}, \dots, (z_n)_{ij}$. SHuning uchun (1) katorda aniklangan kandaydir matritsadan tuzilgan golomorf funksiyaning komponentali $f_{ij}(z)$ bulgan G coxaning $C[m \times m]$ akslantiruvchi golomorf akslantirish kurinishda karash mumkin.

Endi $f(z)$ ni G da golomorf deb ataymiz, agar G soxaning xar bir nuqtasida golomorf bulsa, Xuddi I.L.Lappo-Danilevskiyning ta'kidlagandek, P atrofida golomorf bulgan, xar bir matritsa elementlari bilan $(z_1)_{ij}, \dots, (z_n)_{ij}$ matritsa (1) kator kurinishida tasvirlash mumkin, U aytib utgan izoxlarni anik fakti 1- teoremada kursatilgan,

3-ta'rif: CHegaralangan matritsaviy soxa $G \subset C^n[m \times m]$ ni kandaydir matritsalaridan $f(z)$ funksiyalarni golomorflik soxasi deb ataymiz, agar $f(z)$ G da golomorf bulsa va katta soxada golomorf bulsa. Boshkacha aytganda G ni atrofida golomorf davom kilmasa.

1-eslatma. Golomorf funksiyaning (1) yordamida kurinishi, birinchidan u $f(z)$ funksiyaning golomorf davom kildirishda va (1) yordamida matritsani uz ichiga oluvchi $f(z)$ funksiyaning golomorflik soxasini kurishda urinli,

(1) kator va (5) lar bizlarni maksadimiz uchun zarur emas.

Xakikatdan xam, faraz kilaylik $0 \in C[m \times m]$ ($n=1$) soxada golomorfliyini $f(z)$ funksiyaning atrofida absolyut yakinlashuvchi (1) kator kurinishda aniklangan deb karaymiz,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$$

Biz nol' matritsa atrofida z_0 nuqtani $f(z)$ funksiyaning yoyilmasini yozishimiz kerak. U xolda

$$z^k = [(z - z_0) + z_0]^k = (z - z_0)^k + (z - z_0)^{k-1} z_0 + (z - z_0)^{k-2} z_0 (z - z_0) + \dots + (z - z_0)^{k-3} z_0 (z - z_0)^2 + \dots + (z - z_0) z_0 (z - z_0)^{k-2} + z_0 (z - z_0)^{k-1} + \dots + z_0^k$$

U xolda biz kommutativ bulmagan matritsalar kupaytmasi ustida uxshash xadlarni ixchamlab bulmaydi, (Masalan, bir xil darajalarni $z - z_0$) ni uz ichiga oluvchi)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k$$

Natijani $z_0 = t_0 I$, $t_0 \in C^1$ bulganda xosil kilishimiz mumkin, lekin bu uchun barcha mumkin bulgan golomorf funksiyalarni davom kildirishlarni xosil kilish bu uchun etarli emas.

Ikkinchidan bu soxada (1) bilan (5)ni yakinlashishi ustma ust tushadi

2-eslatma: Agar golomorf funksiyalarning tarifini (5) kator erdamida kandaydir matritsalar xosil kilsak, u xolda xuddi takidlagandek (5) chi kurinishidagi matritsalar saklovchi funksiyalarni golomorf davom kildirishini sodir kilish mumkin emas.

Undan tashkari, agar $f(z)$ matritsani $f_{ij}(z)$ elementlarini davom kildirish mumkin bulsa xam golomorf davom kildirish mumkin buladi. Boshka tomondan elementlarni $(z_1)_{ij}, \dots, (z_n)_{ij}$ uzgaruvchilar buyiga golomorf bulgan ixtieriy bulmagan (5) kator kurinishda tasvirlashi mumkin. SHuning uchun golomorf funksiyalarni buday aniklanishi nuktalar aniklanishiga bogliklik kamchiligiga ega.

3.2. Matritsa argumentli golomorf funksiyalar uchun Loran qatorlarining analoglari

Ma'lumki, Loran qatorlari kompleks tekislikdagi halqalar uchun o'rganilgan. C^n fazodagi ayrim polidoiraviy sohalar uchun Loran qatorining analogi o'rganilgan. Ushbu paragrafda ikkinchi va uchinchi tip Kartan klassik sohalar yordamida aniqlangan matritsaviy halqalar uchun Loran qatorlarining analogi o'rganilgan.

1. Simmetrik matritsalar fazosini ${}^H C[m \times m]$ orqali belgilaymiz. Bunda

$$\forall W \in {}^H C[m \times m] \text{ uchun } W' = W \text{ bo'ladi.}$$

$$G = \left\{ W \in {}^H\mathcal{C}[m \times m] : I^{(m)} - W\bar{W} > 0 \right\}$$

ikkinchi tip *Kartan* klassik sohasi bo'ladi.

Quyidagi Koshi Xua Lo-Ken tipidagi integralni qaraymiz

$$F(W) = \int \left[\det \left(I^{(m)} - WU^* \right) \right]^{-m} d\mu(U) \quad (1)$$

bu yerda $f(U)$ integrallanuvchi funksiya, $d(\mu)$ esa $S(U) = \{UU^* = I^{(m)}\}$ dagi Xaara o'lchovi.

3.2.1-TEOREMA:

(1) integral quyidagi sohalarda ma'noga ega bo'ladi:

$$B^+ = \left\{ W \in {}^H\mathcal{C}[m \times m] : I^{(m)} - W\bar{W} > 0 \right\}$$

va

$$B^- = \left\{ W \in {}^H\mathcal{C}[m \times m] : W\bar{W} - I^{(m)} > 0 \right\}.$$

2. Agar $f(U)$ funksiya $S(U)$ da integrallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda

$$\int_{S(U)} f(U) \left[\det \left(I^{(m)} - WU^* \right) \right]^{-m} d\mu(U)$$

B^+ da golomorf funksiya bo'ladi va bu sohada

$$\sum_{P,j} \alpha_p^{(j)} \frac{\Psi_p^{(j)}(W)}{\sqrt{B_p}}$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda $\alpha_p^{(j)}$ koefitsiyentlar quyidagi formula bilan topiladi:

$$\alpha_p^{(j)} = \frac{2\pi \frac{m^2(m-1)}{2}}{1! \dots (m-1)!} \int_{S(U)} f(U) \cdot \frac{\Psi_p^{(j)}(U)}{\sqrt{B_p}} d\mu(U).$$

3. $\Psi_{P_{1,k+1}P_k}^{(j)}(U) = \Psi_{P_1-P_k, P_2-P_k, \dots, P_{k-1}-P_k, 0}(U) \cdot (\det U)^{P_k}$. Bunda ixtiyoriy

$P_1 \geq P_2 \geq \dots \geq P_k$ bo'ladi.

$f(U)$ uchun quyidagi qatorga yoyish o'rinli bo'lsin.

U holda B^+ uchun

$$F(W) = \sum_{P_1 \geq \dots \geq P_k \geq 0} \sum_j \alpha_p^{(j)} \frac{\Psi_p^{(j)} W}{\sqrt{B_p}} = F^+(W) \quad (2)$$

$$B^- = \left\{ W \in {}^H\mathcal{C}[m \times m] : W\bar{W} - I^{(m)} > 0 \right\} \text{ uchun}$$

$$F(W) = \sum_{P_1 \geq \dots \geq P_k \geq 0} \sum_j \alpha_{-P_k-k, \dots, P_1-k}^{(j)} \cdot \frac{\Psi_{-P_k-k, \dots, P_1-k}(W^{-1})}{\sqrt{B_p}} = F^-(W) \quad (3)$$

funksiya $F^\pm \in H(B^\pm)$.

4. Quyidagi matritsaviy sohalarni qaraymiz:

$$G_R = \left\{ W \in {}^H\mathcal{C}[m \times m] : R^2 I^{(m)} - W\bar{W} > 0 \right\}$$

$$G_r = \left\{ W \in {}^H\mathcal{C}[m \times m] : W\bar{W} - r^2 I^{(m)} > 0 \right\}$$

bu yerda r va R lar haqiqiy sonlar $0 < r < R$.

$G = G_R \cap G_r$ - matritsaviy halqa bo'ladi.

3.2.2-TEOREMA:

Agar $F(W) \in H(G) \cap C(\bar{G})$ bo'lsa, u holda $W \in G$ uchun Loran yoyilmasi o'rinli.

$$F(W) = F^+(W) + F^-(W)$$

bu yerda koefitsiyentlar quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\alpha_{-P_k-k, \dots, P_1-k}^{(j)} = \frac{2\pi \frac{m^3(m-1)}{2}}{1! \dots (m-1)!} \cdot \int_{\rho I^{(m)} - U U^* = 0} f(U) \cdot \Psi_{-P_k-k, \dots, -P_1-k}^{(j)}(U) d\mu(U)$$

bu yerda $r < \rho < R$

5. Kososimmetrik matritsalar fazosini ${}^H\mathcal{C}[m \times m]$ orqali belgilaymiz. Bunda

$\forall W \in {}^H\mathcal{C}[m \times m]$ uchun $W' = W$ bo'ladi.

$$G = \left\{ W \in {}^{\text{III}}\mathcal{C}[m \times m] : I^{(m)} + W\bar{W} > 0 \right\}$$

uchinchi tip *Kartan* klassik sohasi bo'ladi.

Quyidagi Koshi Xua Lo-Ken tipidagi integralni qaraymiz.

Agar m –juft bo'lsa,

$$F(W) = \int \left[\det \left(I^{(m)} + WU^* \right) \right]^{-\frac{m-1}{2}} d\mu(U) \quad (4)$$

Agar m -toq bo'lsa,

$$F(W) = \int \left[\det \left(I^{(m)} + WU^* \right) \right]^{-\frac{m}{2}} d\mu(U) \quad (5)$$

bu yerda $f(U)$ integrallanuvchi funksiya, $d(\mu)$ esa $S(U) = \{UU^* = I^{(m)}\}$ dagi Xaara o'lchovi.

3.2.3-TEOREMA:

(4) va (5) integrallar quyidagi sohalarda ma'nolarga ega bo'ladi:

$$B^+ = \left\{ W \in {}^{\text{III}}\mathcal{C}[m \times m] : I^{(m)} + W\bar{W} > 0 \right\}$$

va

$$B^- = \left\{ W \in {}^{\text{III}}\mathcal{C}[m \times m] : W\bar{W} + I^{(m)} < 0 \right\}.$$

6. Agar $f(U)$ funksiya $S(U)$ da integrallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda

$$\int_{S(U)} f(U) \left[\det \left(I^{(m)} + WU^* \right) \right]^{-m} d\mu(U)$$

B^+ da golomorf funksiya bo'ladi va bu sohada

$$\sum_{P,j} \alpha_p^{(j)} \frac{\Psi_p^{(j)}(W)}{\sqrt{B_p}}$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda $\alpha_p^{(j)}$ koefitsiyentlar quyidagi formula bilan topiladi:

$$\alpha_p^{(j)} = \frac{2\pi \frac{m^2(m-1)}{2}}{1! \dots (m-1)!} \int_{S(U)} f(U) \cdot \frac{\Psi_p^{(j)}(U)}{\sqrt{B_p}} d\mu(U).$$

7. $\Psi_{P_{1,k+1}P_k}^{(j)}(U) = \Psi_{P_1-P_k, P_2-P_k, \dots, P_{k-1}-P_k, 0}(U) \cdot (\det U)^{P_k}$. Bunda ixtiyoriy $P_1 \geq P_2 \geq \dots \geq P_k$ bo'ladi.

$f(U)$ uchun quyidagi qatorga yoyish o'rinli bo'lsin.

U holda B^+ uchun

$$F(W) = \sum_{P_1 \geq \dots \geq P_k \geq 0} \sum_j \alpha_p^{(j)} \frac{\Psi_p^{(j)} W}{\sqrt{B_p}} = F^+(W) \quad (6)$$

$B^- = \left\{ W \in {}^{\text{III}}\mathcal{C}[m \times m] : W\bar{W} + I^{(m)} < 0 \right\}$ uchun

$$F(W) = \sum_{P_1 \geq \dots \geq P_k \geq 0} \sum_j \alpha_{-P_k-k, \dots, P_1-k}^{(j)} \cdot \frac{\Psi_{-P_k-k, \dots, P_1-k}(W^{-1})}{\sqrt{B_p}} = F^-(W) \quad (7)$$

funksiya $F^\pm \in H(B^\pm)$.

8. Quyidagi matritsaviy sohalarni qaraymiz:

$$G_R = \left\{ W \in {}^{\text{III}}\mathcal{C}[m \times m] : R^2 I^{(m)} + W\bar{W} > 0 \right\}$$

$$G_r = \left\{ W \in {}^{\text{III}}\mathcal{C}[m \times m] : W\bar{W} + r^2 I^{(m)} < 0 \right\}$$

bu yerda r va R lar haqiqiy sonlar $0 < r < R$.

$G = G_R \cap G_r$ - matritsaviy halqa bo'ladi.

3.2.4-TEOREMA:

Agar $F(W) \in H(G) \cap C(\bar{G})$ bo'lsa, u holda $W \in G$ uchun Loran yoyilmasi o'rinli.

$$F(W) = F^+(W) + F^-(W)$$

bu yerda koefitsiyentlar quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\alpha_{-P_k-k, \dots, P_1-k}^{(j)} = \frac{2\pi \frac{m^3(m-1)}{2}}{1! \dots (m-1)!} \cdot \int_{\rho I^{(m)} - UU^* = 0} f(U) \cdot \Psi_{-P_k-k, \dots, -P_1-k}^{(j)}(U) d\mu(U)$$

bu yerda $r < \rho < R$.

3.3. Diagonal matritsalar tekisligida aniqlangan golomorf funksiyalar uchun Loran qatorining analogi.

Ushbu porografda psevdonorma tushunchasi kiritilgan va shu norma asosida matrisa argumentli golomor funksiyalar uchun Loran qatorining analogi o'rganilgan.

Ta'rif: Agar ushbu $\|\bullet\|: T_M \rightarrow T_M^+$ akslantirish quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, bu akslantirishga *psevdonorma* deyiladi:

- 1) $\|\lambda \cdot W\| \equiv |\lambda| \|W\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, W^* \in T_M$;
- 2) $\|W\| + \|Z\| - \|Z + W\| \geq \theta$, $\forall W, Z \in T_M$;

Xususan $W \in T_M$ bo'lganida, $\|W\| = \sqrt{WW^*}$ deb olsak, bu psevdonorma bo'ladi.

Quyidagi ko'rinishdagi diagonal matritsalar to'plamini $\mathbf{Z}$ orqali belgilaymiz:

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} z_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & z_{22} & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & z_{33} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & z_{nn} \end{pmatrix} \right\}$$

Bu yerda $Z_{jj} \in \mathbb{C}$ $j = \overline{1, n}$. Bu diagonal matritsalar tekisligi deyiladi va uni T_M orqali belgilaymiz.

Ushbu maqolada T_M diagonal matritsalar tekisligida aniqlangan $f: \mathbb{C}[n \times n] \rightarrow \mathbb{C}[n \times n]$ akslantiruvchi golomorf funksiyalar uchun Loran qatorlarining analoglari bo'lgan quyidagi teorema isbotlandi.

TEOREMA: V xalqadagi ixtiyoriy f golomorf funksiyani quyidagi

yaqinlashuvchi qator ko'inishda tasvirlash mumkin:

$$f(W) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m (W - aI^{(n)})^m \quad (1)$$

Bunda koefitsiyentlar quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$C_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} f(\xi) \cdot (\xi - aI^{(n)})^{-m-1} \cdot \dot{\xi} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2)$$

bu yerda
$$V = \left[W \in T_M : RI > \|W - aI^n\| > rI > 0, r \geq 0 \right]$$

Teoremaning isboti. Ixtiyoriy $W \in V$ nuqtani fikserlaymiz va quyidagi xalqani qaraymiz:

$$V' = \left\{ \xi : R'I^{(n)} > \|\xi - aI^{(n)}\| > r' \cdot I^{(n)} \right\} \quad W \in V' \subset V$$

Koshining integral formulasiga ko'ra

$$f(W) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V'} f(\xi) (\xi - W)^{-1} \cdot \dot{\xi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} f(\xi) (\xi - W)^{-1} \cdot \dot{\xi} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} f(\xi) (\xi - W)^{-1} \cdot \dot{\xi} \quad (3)$$

bu yerda

$$\Gamma' = \left\{ \|\xi - aI^{(n)}\| = R'I^{(n)} \right\} \text{ va } \gamma' = \left\{ \|\xi - aI^{(n)}\| = r' \cdot I^{(n)} \right\}$$

Yo'nalish soat strelkasiga teskari yo'nalgan. Ixtiyoriy $\xi \in \Gamma'$ uchun

$$I^{(n)} - qI^{(n)} > \theta$$

bu yerda
$$qI^{(n)} = \left\| (W - aI^{(n)}) (\xi - aI^{(n)})^{-1} \right\|.$$

Shuning uchun geometrik progressiya

$$\begin{aligned} (\xi - W)^{-1} &= (\xi - aI^{(n)})^{-1} \cdot \left(I^{(n)} - (W - aI^{(n)}) \cdot (\xi - aI^{(n)})^{-1} \right)^{-1} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (W - aI^{(n)})^m (\xi - aI^{(n)})^{-m-1} \end{aligned}$$

ξ bo'yicha Γ' da tekis yaqinlashadi. Uni chegaralangan $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$ funksiyaga

ko'paytirsak (tekis uzluksizlikka ta'sir qilmaydi) va Γ' bo'yicha integrallab quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} f(\xi) \cdot (\xi - W)^{-1} \cdot \dot{\xi} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (W - aI^{(n)})^m \quad (4)$$

bu yerda

$$C_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} f(\xi) \cdot (\xi - aI^{(n)})^{-m-1} \dot{\xi} \quad (m=0,1,2,\dots) \quad (5)$$

(3) formulaning ikkinchi integralini boshqacha yoyishga to'g'ri keladi.

Ixiyoriy $\xi \in \gamma'$ uchun

$$I^{(n)} - q_1 I^{(n)} > \theta$$

bu yerda $q_1 I^{(n)} = \left\| (\xi - aI^{(n)}) (z - aI^{(n)})^{-1} \right\|$

Shuning uchun γ' da tekis yaqinlasuvchi geometrik progressiyani hosil qilamiz :

$$\begin{aligned} -(\xi - z)^{-1} &= (z - aI^{(n)})^{-1} \cdot (I^{(n)} - (\xi - aI^{(n)})) \cdot (z - aI^{(n)})^{-1} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (\xi - aI^{(n)})^{m-1} (z - I^n a)^{-m} \end{aligned}$$

Boshqadan funksiyani chegaralangan $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$ funksiyaga ko'paytirib γ' bo'yicha integrallab quyidagini hosil qilamiz:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} f(\xi) (\xi - W) \dot{\xi} = \sum_{m=1}^{-\infty} d_m (W - aI^{(n)})^m \quad (6)$$

bu yerda

$$d_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} f(\xi) (\xi - aI^{(n)})^{(m-1)} \dot{\xi} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

(6) va (7) formulalarda m indeks $1, 2, \dots$ qiymat qabul qiladi, $-m$ esa $-1, -2, \dots$ qimatlarni qabul qiladi (bu hech narsani o'zgartirmaydi) va uni quyidagicha belgilaymiz:

$$C_m = d_{-m} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} f(\xi) (\xi - aI^{(n)})^{-m-1} \dot{\xi} \quad (m = -1, -2, \dots) \quad (8)$$

U holda (6) yoyilma quyidagi ko'rinishga keladi:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} f(\xi) (\xi - W) \dot{\xi} = \sum_{m=-1}^{-\infty} C_m (W - aI^{(n)})^m \quad (9)$$

(4) va (9) ifodalarni (3) ga qo'yib (4) va (9) qatorlari yig'indi sifatida quyidagi

yoyilmani hosil qilamiz:

$$f(W) = \sum_{W=-\infty}^{\infty} C_m (W - I^{(n)} a)^m$$

(5) va (8) formulalardagi γ' va Γ' aylanalarini integralning invariantlik xossasiga ko'ra quyidagi aylana bilan almashtirish mumkin:

$$\|\xi - aI^{(n)}\| = \rho \cdot I^{(n)} \quad R I^{(n)} > \rho I^{(n)} > r I^{(n)}$$

Natijada yuqorida teoremda keltirilgan (1) qatorni hosil qilamiz.

Xulosa

Ushbu magistrlik dissertatsiyasida diogonal matritsaviy tekislikda aniqlangan golomorf funksiyalar va ularning xossalari o'rganilgan va quyidagi natija olingan:

TEOREMA: *V xalqadagi ixtiyoriy f golomorf funksiyani quyidagi yaqinlashuvchi qator ko'rinishda tasvirlash mumkin:*

$$f(W) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m (W - aI^{(n)})^m \quad (1)$$

Bunda koefitsiyentlar quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$C_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} f(\xi) \cdot (\xi - aI^{(n)})^{-m-1} \cdot \xi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2)$$

bu yerda
$$V = \left[W \in T_M : RI > \left\| W - aI^n \right\| > rI > 0, r \geq 0 \right]$$

Ushbu natija nazariy ahamiyatga ega bo'lib, ko'mpleks argumentli golomorf funksiyalar uchun o'rinli bo'lgan Loran teoremasini diogonal matritsaviy tekislikda aniqlangan matritsaviy golomorf funksiyalar uchun umumlashmasidir.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. L.Shleisinger. Обращение целых трансцендентных функций от матрицы. Журнал Ленинградского физико-математического общества. т 2, 1929г. №2, стр. 38-40.
2. Лаппо-Данилевский И.А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1957г. 436 с.
3. Худайберганов.Г. Голоморфные функции от матриц и некоторые связанные с ними геометрические задачи комплексного анализа. Узб.мат.журнал 1991 №4 стр.51-59.
4. Худайберганов.Г. Степенные ряды и голоморфные функции от нескольких матриц. Препринт института физики Со АН СССР. Красноярск, 1988. 37 стр.
5. Г.Худайберганов, Т.Т.Туйчиев Р.М.Мадрахимов. Матрица аргументли голоморф функциялар. Хива – 2008
6. Худайберганов.Г. Ряды Лорана в матричных областях Актуальный вопросы анализа Материалы научной конференции 22-23 апреля 2016 года ст.58-59.
7. Р.Белман Введение в теорию матриц . Издательство “Наука” Москва 1969 .
8. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука. 1978. 280 с.
9. Шаб ат Б.В. Введение в комплексный анализ. ч.2. М.: Наука. 1985. 464с.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука. 1967. 576 с
11. И. М. Гельфанд «Лекции по линейной алгебре» Москва 1998
12. R. M. Madrahimov, S.Bekmetova, Sh. Xudayberganov Loran qatorining C^n fazodagi ayrim analoglari. “Ilm sarchashmalari” 2016-5. 8-12-bet.
13. R. M. Madrahimov, Sh. Xudayberganov Loran qatorining C^n fazodagi ayrim analogi. Научно-практический конференции. Toshkent-2017
14. R. M. Madrahimov, Sh. Xudayberganov Matritsa argumentli golomorf funksiyalar uchun Loran qatorlarining anologi. . “Ilm sarchashmalari” 2017-5. 12-15-bet.