

**O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O`RTA MAXSUS
TA`LIM VAZIRLIGI**

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

Setimbetova Rayhon Qamariddin qizi

Mavzu: “Matritsaviy normalar va ularning tatbiqlari”

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar:

f.-m.f.n.,dots.Madraximov R.M

Urganch-2017

REJA

Kirish	7
I.BOB.Matritsalar ustida amallar	
1.1.Matritsa tushunchasi.....	9
1.2.Matritsalar ustida amallar.....	14
1.3.Matritsa rangi.....	20
1.4.Teskari matritsa.....	23
II.BOB.Matritsaviy normalar	
2.1.Matritsalarida vektor normalari.....	27
2.2.Matritsaviy normalar.....	29
2.3.Matritsaviy normalarning tadbiqlari.....	34
Xulosa.....	38
Adabiyotlar.....	39

Kirish

Ma'lumki respublikamizda yoshlarning ta'lim olishi uchun uch bosqichli uzluksiz ta'lim tizimi joriy qilingan. Bu tizimning uchinchi bosqichida yoshlar oliy o'quv yurtlariga kirib kamida to'rt yil davomida o'qib, oxirida o'zlari tanlagan yo'nalishlari bo'yicha bakalavr diplomini olishlari mumkin. Mamlaktimizda joriy etilgan bu ta'lim olish tizimi o'zining samaraviyligi tufayli ko'pchilik mutaxassislarining e'tirofiga sazovor bo'lmoqda. Oliy o'quv yurtlarida talabalarning ma'naviyatini boyitishga katta e'tibor beriladi. Fuqarolarning, ayniqsa, yoshlarning ma'naviyati yuksakligi respublikamizning har tamonlama jadal rivojlanishini va ilg'or davlatlar qatoriga qo'shilishini ta'minlaydi. O'zbekiston Respublikasining birinchi prezidenti I. Karimovning "Yuksak ma'naviyat yengilmas kuch" asarida buning ahamiyati to'la yoritib berilgan. Oliy o'quv yurti talabasi bakalavr darajasini olishda avval bitiruv malakaviy ishini himoya qilish zarur. "Matritsaviy normalar va ularning tatbiqlari" mavzusida bitiruv malakaviy ish yozildi.

Bitiruv malakaviy ishning qisqacha mazmuni quyidagilardan iborat: Birinchi bobning birinchi paragrafida algebra va sonlar nazariyasining muhim tushunchalaridan hisoblangan matritsa tushunchasi, matritsalar ustida amallar, teskari matritsa, matritsa rangi, matritsalarini chiziqli almashtirishlar, kabi tushunchalar batafsil yoritib berilgan. Ularga oid bir nechta misollar keltirilgan. Ushbu paragrafda matritsalar haqida dastlabki tushunchalar, uning qanday holatda berilishi, matritsalarini qo'shish, ko'paytirish va shularga oid ta'riflar, teoremlar, misollar hamda misollarning ishlanish usullari keltirilgan.

Bitiruv malakaviy ishi mavzusining dolzarbligi: Matritsaviy normalar va ularning tatbiqlari matematikaning ko'plab sohalarida uchrab turadi. Matritsaviy normalar va ularning tatbiqlarini o'rganish jarayonida quyidagi masalalar o'rganildi.

1. Matritsa tushunchasi, ular ustida amallar.
2. Matritsaning iqtisodiy masalalarga tatbiqi
3. Matritsaviy norma va matritsaviy vektor normalar ularning xossalari

Bitiruv malakaviy ishining asosiy maqsadi: Matritsaviy normalar va ularning tatbiqlarini o'rganish va uni amaliyotga joriy qilish.

Bitiruv malakaviy ishining asosiy vazifalari: Buning uchun quyidagi vazifalar qo'yildi:

1) Matritsaviy normalar va ularning tatbiqlarini o'rganish va ularni misolarda tahlil qilish.

2) Teskari matritsani hisoblashdagi xatolik va chiziqli tenglamalar sistemasini yechish

Bitiruv malakaviy ishining o'rganganlik darajasi: Bitiruv malakaviy ishi to'liq o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishining predmeti: Matritsalar ustida amallar, norma, matritsaviy norma, vektor normalari...

Bitiruv malakaviy ishining obyekti: Matritsaviy normalar va ularning tatbiqlar.

Bitiruv malakaviy ishining ilmiy farazi: Bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega. Olingan asosiy natijalar: bir nechta adabiyotlardan mavzuga oid ma'lumotlar to'plangan, ular misollar bilan boyitilgan.

Bitiruv malakaviy ishining metodlari: Chiziqli algebra, matematik analiz va funksional analiz usullaridan foydalanildi.

Bitiruv malakaviy ishining tarkibi va hajmi: Kirish, ikkita bob, yettita paragraf, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat bo'lib, I – bob to'rtta paragrafdan iborat bo'lib unda boshlang'ich tushunchalar, matritsa tushunchasi, matritsalar ustida amallar, teskari matritsa, matritsa rangi, matritsalarini chiziqli almashtirishlar, kabi tushunchalar batafsil yoritib berilgan. Bitiruv malakaviy ishining II - bob uchta paragrafdan iborat bo'lib, unda asosiy qism, norma tushunchasi, matritsaviy norma, matritsaviy vektor normalarini o'rganish va ularni misollarda tahlil qilish, Teskari matritsani hisoblashdagi xatolik va chiziqli tenglamalar sistemasini yechishni o'rganishga bag'ishlangan.

I.BOB.Matritsalar ustida amallar.

1.1.Matritsa tushunchasi.

Matritsa tushunchasi va unga asoslangan matematikaning “Matritsalar algebrasi” bo‘limi amaliyotda, jumladan, iqtisodiyotda katta ahamiyat kasb etadi. Bu shu bilan tushuntiriladiki, aksariyat iqtisodiy ob’ekt va jarayonlarning matematik modellari matritsalar yordamida sodda va kompakt ko‘rinishida tasvirlanadi.

Misol uchun quyidagi iqtisodiy masalani qaraylik:

Maxsulot turi	Xom ashyoning bir maxsulot birligini tayyorlash uchun sarf normasi		Maxsulot ishlab chiqarish rejasi
	s_1	s_2	
A	2	3	100
B	5	2	80
C	1	4	130
Xom ashyo birligining narxi	30	50	

Maxsulotni rejadagi hajmini ishlab chiqarish uchun ketadigan xom ashyolar hajmi va ularning umumiy narxi topilsin.

Yechish. s_1 xom ashyoning sarf hajmini topaylik:

$$s_1 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 80 + 1 \cdot 130 = \text{birlik.}$$

s_2 xom ashyo uchun $s_2 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 80 + 4 \cdot 130 = 980$ birlik. Shu sababli, S xom ashyoning sarf hajmini quyidagi matritsa satr ko‘rinishida ifodalash mumkin.

$$S = C \cdot A = (100 \ 80 \ 130) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (730 \ 980)$$

u holda hom ashyoning sarf narxi $Q=730 \cdot 30 + 980 \cdot 50 = 70900$ pul birligi,

Matritsa ko‘rinishida quyidagicha yozish mumkin.

$$Q=(S \cdot B)=(CA)B =(70900)$$

Matritsa tushunchasi birinchi marta ingliz matematiklari U.Gamilton (1805-1865 y.y.) va A.Kelli (1821-1895 y.y.) ishlarida uchraydi. Hozirgi kunda matritsa tushunchasi tabiiy va amaliy jarayonlarni matematik modellashtirishda muhim apparat sifatida qo‘llaniladi.

1-ta’rif. Matritsa deb m ta satr va n ta ustunga ega bo‘lgan to‘rtburchakli sonlar jadvaliga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$(a_{ij})_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \|a_{ij}\|_{mn} = \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \right\|,$$

$$[a_{ij}]_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bu matritsa ($m \times n$) o‘lchamli bo‘lib, a_{ik} - haqiqiy songa (bunda birinchi indeks satr nomerini, ikkinchisi esa ustun nomerini ko‘rsatib, bularning kesishgan joyida a_{ik} element turadi hamda $i = 1, 2, 3, \dots, m$; $k = 1, 2, 3, \dots, n$) uning elementi deb ataladi.

Matritsalar lotin grafikasining katta harflari bilan belgilanadi. Masalan, A , B , $C, \dots$. Quyida keltirilgan jadvallar matritsa bo‘la olmaydi, chunki ular to‘g‘ri to‘rtburchakli emas:

$$B = \begin{pmatrix} & 3 & \\ 2 & & 7 \\ & 8 & \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} & 3 & 4 & \\ 2 & 5 & 7 & \\ & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 32 \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

$(1 \times n)$ o'lchamli matritsaga **satr matritsa**, $(m \times 1)$ o'lchamli matritsaga esa **ustun matritsa** deyiladi, ya'ni

$$K = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}), \quad L = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Bundan tashqari ba'zida bu matritsalar mos ravishda **satr-vektor** va **ustun-vektor** deb ham ataladi. Vektorlarning elementlari esa ularning **komponentlari** deyiladi.

Har bir elementi nolga teng bo'lgan, ixtiyoriy o'lchamli matritsaga **nol matritsa** deb aytiladi va quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2-ta'rif. Agar A va B matritsalarining barcha mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, bunday matritsalar **teng** deyiladi va $A = B$ ko'rinishda yoziladi.

3-ta'rif. Agar A matritsaning ustunlar soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lsa, A matritsa B matritsa bilan **zanjirlangan matritsa** deyiladi.

4-ta'rif. Ham satrlar soni, ham ustunlar soni n ga teng bo'lgan, ya'ni $(n \times n)$ o'lchamli matritsaga n - tartibli **kvadrat matritsa** deyiladi.

Kvadrat matritsaning bosh diagonal deb, indekslari bir xil bo'lgan elementlarni xayolan birlashtirish natijasida hosil bo'lgan to'g'ri chiziqqa aytiladi. Boshqacha aytganda, $a_{11} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{nn}$ yozuv diagonal elementlari deyiladi.

Agar $A = (a_{ij})$ kvadrat matritsada $i > j$ ($i < j$) munosabat bajarilganda $a_{ij} = 0$ bo'lsa, u holda A matritsaga yuqori (quyi) **uchburchak matritsa** deyiladi.

Masalan, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - yuqori $B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - quyi

uchburchakli matritsa deb ataladi.

$A = (a_{ij})$ kvadrat matritsada $i \neq j$ bo'lganda, $a_{ij} = 0$ bo'lsa, u holda A matritsaga **diagonal matritsa** deyiladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Agar diagonal matritsaning barcha a_{ii} elementlari o'zaro teng bo'lsa, u holda bunday matritsaga skalyar matritsa deyiladi, ya'ni

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})$ kvadrat matritsada $i \neq j$ bo'lganda $a_{ij} = 0$ va $i = j$ bo'lganda esa $a_{ii} = 1$ bo'lsa, u holda bunday matritsaga **birlik matritsa** deyiladi va odatda E harfi bilan belgilanadi, ya'ni

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Agar A matritsada barcha satrlar mos ustunlar bilan almashtirilsa, u holda hosil bo'lgan A^T matritsaga A matritsaga transponirlangan matritsa deyiladi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Agar A kvadrat matritsada $A = A^T$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda bunday matritsaga simmetrik matritsa deb ataladi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Misoldan ko‘rinib turibdiki matritsaning elementlari bosh diagonalga nisbatan simmetrik joylashgan.

n – tartibli simmetrik matritsaning turli elementlari soni ko‘pi bilan $\frac{n(n+1)}{2}$ ga teng, bunda n - natural son.

Agar A kvadrat matritsada $A = -A^T$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, boshqacha aytganda bosh diagonalga nisbatan simmetrik bo‘lgan elementlari bir-biridan faqat ishoralari bilangina farqlansa, ya’ni barcha i va j larda $a_{ij} = -a_{ji}$ bo‘lsa (bundan barcha i lar uchun $a_{ii} = -a_{ii} = 0$ ekanligi kelib chiqadi), bunday matritsaga qiyasimmetrik matritsa deb ataladi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

n – tartibli qiya simmetrik matritsaning turli elementlari soni ko‘pi bilan $n^2 - n + 1$ formula yordamida topiladi, bunda n - natural son.

1.2. Matritsalar ustida amallar.

O'lchamlari aynan teng bo'lgan matritsalar ustidagina algebraik qo'shish amali bajariladi.

O'lchamlari aynan teng bo'lgan A va B matritsalarini qo'shish uchun, ularning mos elementlari qo'shiladi:

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2j} + b_{2j} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{ij} + b_{ij} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mj} + b_{mj} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Shuningdek, ikkita matritsa ayirmasi, ya'ni $A - B = C$ ham xuddi shunday topiladi:

$$A - B = C = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1j} - b_{1j} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2j} - b_{2j} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} - b_{i1} & a_{i2} - b_{i2} & \dots & a_{ij} - b_{ij} & \dots & a_{in} - b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mj} - b_{mj} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

1-misol.Quyidagi matritsalarining yig'indi va ayirmasini toping:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Ta'rifga asosan

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+4 & 1-1 & 0+2 & 2-2 \\ 1-3 & 4+0 & 3+4 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

va

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3-4 & 1+1 & 0-2 & 2+2 \\ 1+3 & 4-0 & 3-4 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ega bo‘lamiz.

Biror haqiqiy λ sonni matritsaga ko‘paytirish uchun shu son matritsaning har bir elementiga ko‘paytiriladi: $\lambda (a_{in}) = (\lambda a_{in})$.

$$\lambda \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2j} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mj} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matritsalarini qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari quyidagi xossalarga bo‘ysunadi:

- 1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$;
- 2) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$;
- 3) $k (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k \mathbf{A} + k \mathbf{B}$;
- 4) $k (n \mathbf{A}) = (k n) \mathbf{A}$;
- 5) $(k + n) \mathbf{A} = k \mathbf{A} + n \mathbf{A}$.

Matritsalarini qo‘shish, ayirish, ya’ni algebraik qo‘shish va matritsani songa ko‘paytirish amallariga matritsalar ustida **chiziqli amallar** deyiladi.

Faqat va faqat zanjirlangan matritsalar ustida ko‘paytirish amali bajariladi. Zanjirlangan, boshqacha aytganda $m \times p$ o‘lchamli $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matritsaning $p \times n$ o‘lchamli $\mathbf{B} = (b_{jk})$ matritsaga **ko‘paytmasi** deb, elementlari $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ip}b_{pk}$ kabi aniqlanadigan $m \times n$ o‘lchamli $\mathbf{C} = (c_{ij})$ matritsaga aytiladi.

Masalan, bizga umumiy holda $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi

matritsalar berilgan bo'lsin. Bu matritsalarini ko'paytirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Endi buni aniq misolda ko'rib chiqamiz.

2-misol. Quyidagi A matritsani B matritsaga ko'paytiring:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. 1. Izlanayotgan $C = AB$ matritsaning birinchi satr va birinchi ustunining elementi A matritsaning birinchi satr elementlarini mos ravishda B matritsaning birinchi ustun elementlari bilan ko'payganini yig'indisiga teng, ya'ni

$$c_{11} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6.$$

2. Izlanayotgan $C = AB$ matritsaning birinchi satr va ikkinchi ustunining elementi A matritsaning birinchi satr elementlarini B matritsaning ikkinchi ustun elementlari bilan mos ravishda ko'payganini yig'indisiga teng:

$$c_{12} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 2.$$

3. Birinchi satr va uchinchi ustun elementi

$$c_{13} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -1 \text{ kabi aniqlanadi.}$$

4. Izlanayotgan matritsaning ikkinchi satr elementlari A matritsaning ikkinchi satr elementlarini B matritsaning mos ravishda 1-,2-,3- ustun elementlari bilan ko'paytmasini yig'indisi sifatida topiladi:

$$c_{21} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6;$$

$$c_{22} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 1;$$

$$c_{23} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1.$$

5. C matritsaning uchinchi satr elementlari ham shunga o'xshash topiladi:

$$c_{31} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8;$$

$$c_{32} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -1;$$

$$c_{33} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 4.$$

Shunday qilib,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo'lsa, AB va BA ko'paytmalarini topish mumkin. Agar $AB = BA$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda A va B matritsalariga ***kommutativ matritsalar*** deyiladi. Masalan, E birlik matritsa ixtiyoriy A kvadrat matritsa bilan kommutativdir. Haqiqatan ham

$$AE = EA = A.$$

Aytaylik bizga $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan bo'lsin. Bu

matritsalar zanjirlangan bo'lganligi sababli ular ustida ko'paytirish amali bajariladi.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (1 + 4 + 9 + 16) = (30).$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3 \ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Keltirilgan misoldan ko‘rinib turibdiki, A va B matritsalarining ko‘paytmasi o‘rin almashtirish qonuniga bo‘ysunmaydi, ya’ni $AB \neq BA$.

Matritsani matritsaga ko‘paytirish quyidagi xossalarga bo‘ysunadi:

1. **$(kA)B = k(AB)$;**

2. **$(A + B)C = AC + BC$;**

3. **$A(B + C) = AB + AC$;**

4. **$A(BC) = (AB)C$.**

Keltirilgan xossalardan to‘rtinchisini isbotini aniq misollar yordamida keltiramiz.

Faraz qilamiz bizga $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ va $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan bo‘lsin.

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \end{pmatrix};$

$(AB)C = \begin{pmatrix} 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 6 & 14 \end{pmatrix}$

b) $BC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 4 & 6 \\ 11 & 1 & 4 \end{pmatrix};$

$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 & 4 & 6 \\ 11 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 6 & 14 \end{pmatrix}$. Xossa isbotlandi.

Matritsalar ustida bajarilgan transponirlash amali quyidagi xossalarga bo'ysinadi:

$$1. (A^T)^T = A;$$

$$2. (\lambda A)^T = \lambda A^T;$$

$$3. (A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$4. (AB)^T = B^T A^T.$$

Trapetsiyasimon (zinapoyasimon) matritsa deb biror satrini noldan farqli elementi k – o'rinda hamda qolgan barcha satrlarining birinchi k ta o'rnida nollar turgan matritsaga aytiladi. Masalan,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kanonik matritsa deb uning bosh diagonal elementlarining dastlabki bir nechta birlar qolgan elementlari nollardan iborat matritsaga aytiladi. Masalan,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3. Matritsa rangi

$n \times m$ o'lchamli $A = (a_{ik})$ matritsa berilgan bo'lib, p matritsaning satrlari soni n va ustunlari soni m larning kichigidan katta bo'lmagan son bo'lsin. Matritsaning ixtiyoriy p ta satrini va ixtiyoriy p ta ustunini o'chiramiz. O'chirilgan elementlar p -tartibli kvadratik matritsani tashkil etadi va unga o'z navbatida p -tartibli determinant yoki minorni mos qo'yish mumkin.

A **matritsning rangi** deb, noldan farqli matritsaosti minorlarining eng katta tartibiga aytiladi va $\text{rang}(A)$ ko'rinishida ifodalanadi.

1-masala. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang?

Berilgan matritsa 3×2 o'lchamli bo'lgani uchun satrlari va ustunlari sonini taqqoslaymiz va kichigi 2 ni tanlaymiz. Matritsadan ikkinchi tartibli minorlar ajratamiz va ularning kattaligini hisoblaymiz. Jarayonni noldan farqli ikkinchi-tartibli minor ajralmaguncha davom etamiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Berilgan matritsadan noldan farqli eng yuqori ikkinchi tartibli minor ajraldi. Demak, ta'rifga binoan, A matritsa rangi 2 gateng.

2-masala. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang?

B matritsadan ajralishi mumkin bo'lgan eng yuqori – ikkinchi tartibli har qanday minor nolga teng:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, matritsa rangi ikkiga teng bo'la olmaydi. V matritsa nolmas matritsa

bo'lgani uchun uning rangi 1 ga teng.

3-masala. $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang?

C matritsa uchinchi tartibli kvadratik matritsa. Undan yagona eng yuqori 3-tartibli M_1 minor ajraladi. M_1 minor kattaligini hisoblaymiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0. \quad M_1 = 0 \text{ bo'lgani uchun, } C \text{ matritsa rangi 3 gateng}$$

bo'la olmaydi. $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ bo'lgani uchun, $\text{rang}(C) = 2$.

Matritsa rangi uning ustida quyidagi **elementar almashtirishlar** bajarganda o'zgarmaydi.

1. Matritsa biror satri (ustuni) har bir elementini biror noldan farqli songa ko'paytirganda;
2. Matritsa satrlari (ustunlari) o'rinlari almashtirilganda;
3. Matritsa biror satri (ustuni) elementlariga uning boshqa parallel satri (ustuni) mos elementlarini biror songa ko'paytirib, so'ngra qo'shganda;
4. Matritsa transponirlanganda.

Matritsa rangini aniqlashning ta'rif asosida biz yuqorida masalalarda ko'rgan «**minorlar ajratib hisoblash**» usuli va nollar yig'ib hisoblashga asoslangan «**Gauss algoritmi**» usullari mavjud.

Matritsa rangi «Gauss algoritmi» yoki nollar yig'ish usuli asosida quyidagicha aniqlanadi: dastlabki ko'rinishdagi matritsa yuqorida sanab o'tilgan elementar almashtirishlar yordamida «**trapetsiyasimon matritsa**» ko'rinishiga keltiriladi. Trapetsiyasimon matritsa deb, bosh diagonal dan yuqorida yoki quyida joylashgan har bir elementi nolga teng bo'lgan matritsaga aytiladi. Trapetsiyasimon matritsaning

rangi yoki xuddi shuning o'zi dastlabki matritsaning rangi trapetsiyasimon matritsaning noldan farqli bosh diagonal elementlari soniga teng.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini nollar yig'ish usulida

aniqlang?

Berilgan dastlabki matritsa ustida quyidagicha elementar almashtirishlar bajaramiz va uning ko'rinishini trapetsiyasimon ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trapetsiyasimon matritsa bosh diagonal elementlaridan ikkitasi noldan farqli bo'lgani uchun uning rangi va shu bilan birga berilgan matritsarangi ikkiga teng.

1.4. Teskari matritsa .

n – tartibli kvadratik $A = (a_{ik})$ matritsa berilgan bo'lsin. Agar A matritsa determinanti noldan farq qilib, uning rangi tartibi n ga teng bo'lsa, matritsaga maxsusmas matritsa deyiladi. Agarda $\det(A) = 0$ bo'lib, rangi n dan kichik bo'lsa, A matritsaga maxsus matritsa deyiladi.

Teorema. Ikki teng tartibli kvadrat matritsalarining ko'paytmasi, ko'paytuvchi matritsalarining har biri maxsusmas bo'lgandagina, maxsusmas matritsadan iborat bo'ladi.

To'g'ridan-to'g'ri ko'paytirish yo'li bilan n – tartibli birlik E va n – tartibli har qanday A matritsalarining o'zaro o'rin almashinuvchi ekanligini, ko'paytma A matritsani berishini, ya'ni $A \cdot E = E \cdot A = A$ tengliklar o'rinli bo'lishini misollarda tekshirib ko'rish qiyin emas.

Berilgan A kvadratik matritsaning teskari matritsasi deb, tartibi A matritsaning tartibiga teng va A matritsaga chapdan yoki o'ngdan ko'paytmasi birlik E matritsaga teng bo'lgan A^{-1} matritsaga aytiladi: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Yuqoridagi teoremaga asosan E birlik matritsaning maxsusmas ekanligini e'tiborga olsak, maxsus matritsaning teskari matritsaga ega emasligini xulosa qilamiz. Har qanday maxsusmas kvadrat matritsaning yagona teskari matritsasi mavjudligi quyidagi teoremdan kelib chiqadi.

Teorema. Teskari matritsa mavjud bo'lishi uchun $\det(A) \neq 0$ bo'lib, A matritsaning maxsusmas bo'lishi zarur va yetarli.

Berilgan maxsusmas kvadrat matritsaning teskari matritsasini qurishning «klassik» va Jordan usullari mavjud.

Berilgan $A = (a_{ik})$ kvadratik matritsa har bir elementini o'zining ad'yunkti bilan almashtirib, so'ngra hosil bo'lgan matritsani transponirlasak, quyidagi A matritsa elementlari mos ad'yunktlari matritsasining transponirlangan matritsasi A^v ni hosil qilamiz:

$$A^v = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A^v matritsaga A matritsaning qo'shma matritsasi deyiladi.

n - tartibli determinantning xossalariga asosan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}$$

Tenglikni ixcham shaklda $A \cdot A^v = \det A \cdot E$ ko'rinishda yozish mumkin. Tenglamaning ikkala tomonini noldan farqli $\det A$ ga bo'lsak,

$$A \frac{1}{\det A} A^v = E.$$

Ikkinchi tomondan teskari matritsa ta'rifiga binoan $A \cdot A^{-1} = E$. Tenglamalarni solishtirib, A kvadrat maxsusmas matritsaning teskari matritsasi A^{-1} uchun quyidagi formulani olamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^v$$

Oxirgi formula A maxsusmas matritsaning teskarisini qurish klassik usul formulasi deyiladi. Umuman olganda, klassik usulda teskari matritsa qurish jarayoni quyidagi ketma-ket bajariladigan qadamlarni o'z ichiga oladi:

1. Berilgan A kvadrat matritsa determinant kattaligi hisoblanadi. Agar $\det A \neq 0$ bo'lsa, keyingi qadamga o'tiladi. Agarda $\det A = 0$ bo'lsa, A matritsa maxsus va teskari matritsa mavjud emas;

2. $A = (a_{ik})$ matritsa elementlarining mos ad'yunklari hisoblanadi va tartib

saqlangan holda, matritsa elementlari mos ad'yunktlari matritsasi (A_{ik}) tuziladi;

3. (A_{ik}) matritsa transponirlanadi va A matritsa elementlari mos ad'yunktlari matritsasining transponirlangan matritsasi yoki shuning o'zi qo'shma $A^v = (A_{ki})$ matritsasi tuziladi;

4. $A^v = (A_{ki})$ matritsa har bir elementi $\det A$ ga bo'linadi va A^{-1} teskari matritsa quriladi.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ maxsusmas matritsaning teskari matritsasini klassik usulda quring.

Klassik usulda ikkinchi tartibli maxsusmas matritsa teskarisi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

formula asosida quriladi. Formulani qo'llab,

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

natijani olamiz. Teskari matritsa to'g'ri qurilganini ta'rif asosida tekshirib ko'ramiz:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Demak, berilgan A matritsaning teskarisi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Berilgan A kvadratik matritsa teskarisi A^{-1} Jordan usuli asosida quyidagicha quriladi: A matritsaga o'ngdan tartibi uning tartibiga teng birlik E matritsa qo'shiladi va kengaytirilgan $(A | E)$ matritsa tuziladi. Parallel ravishda kengaytirilgan matritsaning chap va o'ng qismlari satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarilib, chap qism birlik matritsa ko'rinishiga keltiriladi. Kengaytirilgan matritsaning chap qismi birlik E matritsa ko'rinishiga keltirilganda uning o'ng qismida teskari A^{-1}

matritsa hosil bo'ladi. Teskari matritsa qurish Jordan usuli algoritmi quyidagi sxema shaklida ifodalanishi mumkin: $(A | E) \sim (E | A^{-1})$.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning teskarisini Jordan usuli yordamida quramiz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{9}{16} \\ -1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{13}{16} \end{array} \right).$$

Oxirgi ko‘rinishdagi kengaytirilgan matritsa o‘ng qismida teskari matritsa shakli hosil bo‘ldi. Teskari matritsa to‘g‘ri qurilganini ta’rif asosida tekshirib ko‘rish mumkin.

Teskari matritsa quyidagi xossalarga ega:

$$1) (A^{-1})^{-1} = A; \quad 2) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T; \quad 3) (AV)^{-1} = V^{-1} A^{-1}.$$

II.BOB. Matritsaviy normalar

2.1.Matritsalarida vektor normalari

V_2 fazoda berilgan ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) \quad (2.1.1)$$

formula orqali aniqlanadi.

$$\cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} \quad (2.1.2)$$

topiladi. Bunda $(\bar{a} \wedge \bar{b})$ belgi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchakni bildiradi.

Haqiqiy sonlar maydon ustida aniqlangan V unitar fazoga Evklid fazosi deyiladi.

Evklid fazoni E orqali belgilaylik.

Bu ta'rifga ko'ra biror V fazo Evklid fazosi bo'lishi uchun uning elementlari ustida quyidagi shartlar bajarilishi lozim.

$$1) (\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x}), (\forall \bar{x}, \bar{y} \in V)$$

$$2) (\bar{x}, \bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{x}, \bar{z}) (\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V);$$

$$3) (\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda (\bar{x}, \bar{y}) (\forall \bar{x}, \bar{y} \in V, \forall \lambda \in R);$$

$$4) (\bar{x}, \bar{x}) > 0 (\forall \bar{x} \in V, \bar{x} \neq 0), (\bar{x}, \bar{x}) = 0 (\bar{x} \in V, \bar{x} = 0);$$

1-4 aksiomalar $(\bar{x}, \bar{y})$ skalyar ko'paytmaning har bir tashkil etuvchilariga ko'ra chiziqli ekanligini bildiradi.

Ta'rif. $\sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}$ miqdor ($\bar{a} \in V$) vektorning normasi (uzunligi) deyiladi va $\|\bar{a}\|$ orqli belgylanadi.

Ta'rif. Agar $\|\bar{a}\| = 1$ bo'lsa, $\bar{a}$ normallangan vektor deyiladi.

Agar $\bar{a}, \bar{b}$ -Evklid fazosining ixtiyoriy vektorlari va $\lambda \in R$ uchun vektorning normasi quyidagi xossalarga ega:

$$1^0 \|\bar{a}\| \geq 0 \quad (\|\bar{a}\| = 0 \leftrightarrow \bar{a} = \bar{0});$$

$$2^0 \|\lambda \bar{a}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{a}\|;$$

$$3^0 (\bar{a}, \bar{b}) \leq \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| \quad (\text{Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi})$$

$$4^0 \|\bar{a} + \bar{b}\| \leq \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\| \quad (\text{uchburchak tengsizligi}) \quad (2.1.3)$$

Evklid fazosining har biri normallangan $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n$,

ortogonal vektorlar sistemasiga ortonormallangan vektorlar sistemasi deyiladi.

Ta'rif. Agar (2.1.3) sistema bazis tashkil etsa, unga Evklid fazosining ortonormallangan bazisi deyiladi.

Misol. $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)=0, (\bar{e}_1, \bar{e}_3)=0, (\bar{e}_2, \bar{e}_3)=0; \|\bar{e}_1\| = 1, \|\bar{e}_2\| = 1, \|\bar{e}_3\| = 1$, bo'ladi.

Demak $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, sistema E fazoning bazisi ekan.

Chekli o'lchovli Evklid fazosining istalgan bazisini ortonormallash mumkin.

Isboti. $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n$ vektorlar sistemasi n o'lchovli E_n Evklid fazoning bazisi bo'lsin. Bizga ma'lumki $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n$ bazisni hamma vaqt ortogonallash mumkin.

Ortogonal bazisdagi har bir vektorni o'z normasiga bo'lib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\frac{\bar{a}_1}{\|\bar{a}_1\|}, \frac{\bar{a}_2}{\|\bar{a}_2\|}, \frac{\bar{a}_3}{\|\bar{a}_3\|}, \dots, \frac{\bar{a}_n}{\|\bar{a}_n\|}$$

V_n fazo Evklid fazosi bo'lgani uchun $\bar{e}_i = \frac{\bar{a}_i}{\|\bar{a}_i\|}$ va $\bar{e}_j = \frac{\bar{a}_j}{\|\bar{a}_j\|}$ vektorlar uchun

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{agar } i = j \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } i \neq j \text{ bo'lsa} \end{cases} \quad (2.1.4)$$

tenglik bajariladi. Demak (2.1.4) sistema ortonormallangan sistema ekan.

2.2. Matritsa normasi.

Ta'rif. A matritsaning normasi deb

$$\|A\| = \sup \left| \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ki} \xi_k \eta_i \right|$$

songa aytiladi. Bu yerda ξ_k va η_i lar mos ravishda

$$\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = 1 \quad \text{va} \quad \sum_{i=1}^m |\eta_i|^2 = 1$$

tengliklarni qanotlantiruvchi sonlar.

Amalda, ko'p xollarda quyidagi ko'rinishdagi normalar ham ishlatiladi.

$$\|A\|_I = \sup \sum_{k=1}^n |a_{ki}|, \quad \|A\|_{II} = \sup \sum_{i=1}^m |a_{ki}|$$

$$\|A\|_p = \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m |a_{ki}|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p=1,2,\dots$$

$$\|A\|_1 = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m |a_{ki}|, \quad \|A\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m |a_{ki}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{Evklidcha norma})$$

Agar A matritsa kvadrat matritsadan iborat bo'lsa, uning normasini quyidagicha xam aniqlash mumkin.

$$\|A\| = \lambda_M^{1/2}(A \cdot A^T),$$

bu yerda $\lambda_M(AA^T)$ - AA^T matritsaning maksimal xos qiymati.

Agar A-simmetrik kvadrat matritsadan iborat bo'lsa, uning normasi shu matritsa maksimal xos qiymatiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\|A\| = \lambda_M(A)$$

Matritsalarining normalari uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|\alpha * A\| = \alpha * \|A\|$$

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Xususiy xolda $\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

Matritsa normasi

Har bir $x \in R^n$ vektorga bitta manfiyimas $\|x\|$ sonni mos qo'yamiz. R^n fazodagi ixtiyoriy x, y vektorlar va λ - ixtiyoriy skalyar uchun quyidagi shartlar bajariladi:

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. $\|x\| > 0$ agarda $x \neq 0$ bo'lsa.

4. Shartda $\lambda = 0$ desak, $\|x\| = 0$ dagina bajarilishi kelib chiqadi. Bundan tashqari 2- shartdan kelib chiqadiki, ixtiyoriy $x, y \in R^n$ vektorlar uchun

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$$

Quyidagi normalarni kiritish mumkin; vektorlarning "kubik" normasi

$$\|x\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (2.2.1)$$

yoki "oktaedrli" norma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (2.2.2)$$

"Ermitcha" norma

$$\|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (2.2.3)$$

Osongina tekshirib ko'rish mumkinki, bu normalar 1., 2., 3. Shartlarni qanotlantiradi.

Endi $m \times n$ o'lchovli to'g'ri to'rtburchakli A matritsani va shu bilan birga uni $y = Ax$ chiziqli alamshtirishni qaraymiz. $x \in R^n$, $y \in S^m$ vektorlar.

Bu fazolarda vektorlarning $\|x\|_R = \|x\|$ va $\|y\|_S = \|y\|$ normalarni kiritib, A matritsaning normasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\|A\| = \sup_{x \in R, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_S}{\|x\|_R} \quad (2.2.4)$$

Normaning ta'rifidan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$\|Ax\|_S \leq \|A\| \|x\|_R \quad (2.2.5)$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (2.2.6)$$

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\| \quad (2.2.7)$$

$p \times n$ o'lchovli B matritsa R^n ni S^p ga akaslantirsin, u holda AB matritsa R^n ni T^m ga akslantiradi. R^n, S^p, T^m fazolarda vektor normalarni va ular yordamida matritsalar normalarni kiritib, quyidagi tengsizlikka kelamiz:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (2.2.8)$$

Masalan, “kubik” vektor normalarida

$A = \|a_{ik}\|$ ($i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$) matritsaning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \quad (2.2.9)$$

Bu holda

$$\|Ax\|_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{k=1}^n |a_{ik} x_k| \leq \max_{1 \leq i \leq m} |x_k| \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$$

Shuning uchun

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$$

Agar “oktaedrli” vektor normadan kelib chiqsak

$$\|x\|_2 = \sum_{k=1}^n |x_k|; \quad \|y\|_2 = \sum_{i=1}^m |y_i|$$

U holda

$$\|A\| = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ik}| \quad (2.2.10)$$

Endi “ermitcha” vektor normalarni,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2, \quad \|y\|^2 = \sum_{i=1}^m |y_i|^2$$

qaraymiz. U holda $S = AA^*$ ermitcha musbat matritsani kiritib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\|Ax\|^2 = y * y = x^* Ax^* Ax = x^* Ax^* Ax = x^* Sx, \quad \|x\|^2 = x^* x.$$

Ammo bu holda

$$\|A\|^2 = \max_{x \neq 0} \frac{x^* Sx}{x^* x} = S,$$

bu yerda $S = AA^*$ matritsaning maksimal xarakteristik soni. Bu holda

$$\|A\| = \sqrt{S} \quad (2.2.11)$$

Endi x va y ustun vektor uchun har xil normani kiritamiz. Masalan,

$$\|x\|_2 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|y\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$$

bo'lsin u holda

$$\|Ax\|_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = \|x\|_2$$

bu yerda $a = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ik}|$. Ikkinchi tomondan, agar $a = a_{pq}$ bo'lsa, u holda x_q ni

$a_{pq} x_q = a |x_q|$ shartni qanotlantiradigan qilib tanlab, $j \neq q$ da $x_j = 0$ deb olib $\|Ax\|_1 = a \|x\|_2$ tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib, bu holda

$$\|Ax\| = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ik}| \quad (2.2.12)$$

bo'ladi.

Misol.

$$1. \quad \|A\|_{\bar{p}} = \left(\sum_1^n \sum_j^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 4 + 1 + 1} = \sqrt{7}$$

$$2. \quad \|A\|_{\max} = \max_{ij} |a_{ij}|$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\|_{\max} = 2$$

2.3 Matritsaviy normalarning tadbiqlari

Teskari matritsani hisoblashdagi xatolik va chiziqli tenglamalar sistemasini yechish

Matritsaviy va vektor normalarining tatbiqlari sifatda teskari matritsani hisoblashda yuz beradigan xatoliklarini baholash muhim ahamiyatga ega. Biz ana shu masalani qarab chiqamiz.

$A \in M_n$ xosmas matritsa bo'lsin. Ya'ni $\det(A) \neq 0$

Printsip bo'yicha A matritsaning teskari matritsasini topish mumkin. Ammo hisoblash sonlarda kompyuterda bajarilgani uchun bunda sonlarni yaxlitlashda ma'lum bir xatoliklar yuzaga keladi. Bundan tashqari hisoblash yetarli darajada aniqlikda bajarilganda ham A matritsa elementlari biror eksprement natijasi yoki oldinda hisoblangan xatolikka yo'l qo'yilgan natija bo'lishi mumkin.

Yaxlitlangan va noaniq boshlang'ich qiymatlar topilgan teskari matritsaga qanday ta'sir qiladi.

Ko'p hollarda yaxlitlangan xatoliklar algoritmining effektida quyidagi holat ro'y beradi.

A xosmas matritsa bo'lsin. Biz unga A^{-1} teskari matritsani hisoblaymiz. Ammo haqiqatda biz $(A + E)^{-1}$ teskarisini hisoblaymiz bu yerda $E \in M_n$ bo'lgan og'ish. Agar og'ish yetarli darajada kichik bo'lsa $(A + E)$ teskarilanuvchan bo'ladi.

U holda xatolik quyidagiga teng bo'ladi.

$$A^{-1} - (A + E)^{-1} = A^{-1} - (1 + A^{-1}E)^{-1} A^{-1}$$

Agar $\rho(A^{-1}E) < 1$ bo'lsa $A+E$ teskarilanuvchi bo'ladi.

$(1 + A^{-1}E)^{-1}$ ni $A^{-1}E$ ning darajali qatorlar ko'rinishida tasvirlaymiz.

Bu bizga quyidagi yoyilmani beradi.

$$A^{-1} - (A + E)^{-1} = (A^{-1}) - \sum_{k=1}^r (-1)^k (A^{-1}E)^k A^{-1} = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (A^{-1}E)^k A^{-1}$$

Shunday qilib xatolikning aniq formulasiga ega bo'lamiz.

$$A^{-1} - (A + E)^{-1} = (A^{-1}) - \sum_{k=1}^r (-1)^k (A^{-1}E)^k A^{-1} = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (A^{-1}E)^k A^{-1} \quad (2.3.1)$$

Agar $\rho(A^{-1}E) < 1$

Agar $\|\cdot\|$ matritsaviy norma bo'lsin. Quyidagi $\|A^{-1}E\| < 1$ bo'lsa (2.3.1) fomula o'rinli bo'ladi.

U holda

$$\|A^{-1} - (A + E)^{-1}\| = \left\| \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (A^{-1}E)^k A^{-1} \right\| \leq \|A^{-1}E\| \|A^{-1}\| = \frac{\|A^{-1}E\|}{1 - \|A^{-1}E\|} \|A^{-1}\|,$$

Teskari matritsani hisoblashni amalga oshirish jarayonida yuqoridan nisbiy baholashga erishamiz.

$$\text{Agar} \quad \frac{\|A^{-1} - (A + E)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|A^{-1}E\|}{1 - \|A^{-1}\| \|E\|}.$$

Agar $\|A^{-1}E\| < 1$ bo'lsa

To'ldiruvchi E matritsani yetarli darajada shunday kichik hisoblaymizki,

$$\|E\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \text{ bo'ladi.}$$

Bundan quyidagi tengsizlikka kelamiz.

$$\rho(A^{-1}E) \leq \|A^{-1}E\| \leq \|A^{-1}\| \|E\| < 1 \text{ va quyidagi hisoblashni olamiz.}$$

$$\frac{\|A^{-1} - (A+E)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|E\|}{1 - \|A^{-1}\| \|E\|} = \frac{\|A^{-1}\| \|A\| (\|E\| / \|A\|)}{1 - \|A^{-1}\| \|A\| (\|E\| / \|A\|)}.$$

Bu miqdor $\chi(A) = \begin{cases} \|A^{-1}\| \cdot \|A\|, \det A \neq 0 \\ \infty, \det A = 0 \end{cases}$

matritsaviy normaga nisbatan A matritsaning shakllanganlik soni deyiladi.

Har qanday matritsaviy norma uchun quyidagi xossa o‘rinli.

$$\chi(A) = \|A^{-1}\| \|A\| \geq \|A^{-1}A\| = \|I\| = 1$$

Agar $\|E\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$ shart bajarilsa.

Yuqoridagi belgilashdan foydalanib oxirgi baholashni quyidagi ko‘rinishda yozamiz

$$\frac{\|A^{-1} - (A+E)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\chi(A)}{1 - \chi(A)(\|E\| / \|A\|)} \cdot \frac{\|E\|}{\|A\|} \quad (2.3.2)$$

Bu tengsizlikda teskari matritsaning nisbiy xatosi berilgan matritsa xatosiga nisbatan baholanadi.

$\|E\|$ kichik qiymatlarida (2.3.2) ning o‘ng tomoni $\chi(A) = \|E\| / \|A\|$ ifodaga ekvivalent.

Shunday qilib, teskari matritsani hisoblagandagi nisbiy xato boshlang‘ich qiymatlardagi nisbiy xato bilan nisbiy darajaga ega bo‘ladi. Agarda $\chi(A)$ miqdor katta bo‘lsa A matritsa yomon shartlangan deyiladi ($\|\cdot\|$ matritsaviy normaga nisbatan)

Agar kichik bo‘lsa (yani birga yaqin bo‘lsa) u holda A matritsa, berilgan matritsaviy normaga nisbatan yaxshi shartlangan deyiladi.

Agar $\chi(A) = 1$ bo‘lsa berilgan matritsaviy normaga nisbatan ideal shakllangan deyiladi.

Misol.

Agar biz spektral normani qaraydigan bo'lsak uning shakllanganlik soni quyidagi formula bilan aniqlanadi.

$$\chi(A) = \rho(A) \rho(A^{-1}) = |\lambda_{\max}(A) / \lambda_{\min}(A)|$$

$\chi(A)$ shartlanganlik soni matritsa normasiga bog'liq.

Ammo har xil normalarda shartlanganlik sonining quyidagi manodagi ekvivalentligiga kelamiz.

$$\chi_\alpha = \|A^{-1}\|_\alpha \|A\|_\alpha, \chi_\beta = \|A^{-1}\|_\beta \|A\|_\beta$$

U holda shunday musbat C_m, C_M o'zgarmaslar topiladiki quyidagi tengsizlikni qanotlantirsin.

$$C_m \chi_\alpha(A) \leq \chi_\beta(A) \leq C_M \chi_\alpha(A)$$

ixtiyoriy $A \in M_n$ matritsalar uchun.

Spektral normaga nisbatan ixtiyoriy U matritsa ideal shakllangan bo'ladi. $\chi(U) = 1$ Ammo L_2 normaga nisbatan har bir unitar matritsaning $\chi(U)$ shakllangan soniga teng. Yomon shakllangan matritsalar sifatida biz Gilbert matritsasini qarashimiz mumkin.

$H_n = [h_{ij}] \in M_n$ quyidagi elementlari bilan

$$h_{ij} = 1/(i + j - 1)$$

Bu matritsa spektral normaga nisbatan quyidagi yomon shakllangan natijalarni hosil qilamiz.

Misol. $\chi(H_3) \approx 5 \cdot 10^3, \chi(H_6) \approx 1,5 \cdot 10^3, \chi(H_8) \approx 1,5 \cdot 10^3$

Xulosa

Ma'lumki matritsa tushunchasi ulug' ingliz matematiklari A.Kelli,U.Gamilton nomlari bilan bog'liq.Matritsalar iqtisodiy masalalarda texnikaviy masalalarda juda keng qo'llaniladi.Ushbu bitiruv malakaviy ishida matritsalar va ular ustida amallar matritsaning iqtisodiy masalalarga tatbiqlari o'rganildi.Matritsaviy normalari va ularning xossalari o'rganildi.Bu o'rganilgan materiallar asosida matritsaviy vektor normalarining tatbiqi sifatida teskari matritsaning baholashda yuzga keladigan xatoliklar baholandi.

Adabiyotlar.

1. Белман Р. В. Введение теории матриц. – М. , Наука, 1976.
2. Гельфонт И. М. Чизили алгебрадан лекциялар. -Т. Олий ва шрта мактаб. 1964
3. Гантмахер Р. Теории матриц.– М.: Наука, 1967. – 576 с.
4. Груйич Л.Т., Мартинюк А.А., Риббенс – Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях.– Киев.: Наука. думка, 1984. – 307 с.
5. Демидович Б.П. Лекции по математическое теории устойчивости. –М.: Наука, 1967. – 472 с
6. Iskandarov D., Mullajonova J. Kvadratik formalarning ishoralari. Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari. – Andijon 2011. 67-68 betlar.
7. Курош А. Г. Олий алгебра курси. Т. «Ўқитувчи» 1976
8. Кострикин А.И., Сборник задач по алгебре. М., «Наука», 1986
9. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982. –277с.
10. Миладжанов В. Г., Муллажонов Р.В. Об одном методе анализа устойчивости линейных крупномасштабных систем. // Узбекский журнал Проблемы механики. – Ташкент, 2009. – № 2-3. –С. 28-30.
11. Миладжонов В.Г., Муллажонов Р.И., Абдугаппорова С.Н., Транспонирланган ва симметрик матрицалар. –Андижон, илмий хабарнома 2009-№1
12. Хожиев Ж.Х., Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси. Т. “Ўзбекистон” 2001.
13. Р.Хорн, Ч.Джонсон. Матричный анализ. Москва. Мир. 1989