

**O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O`RTA MAXSUS
TA`LIM VAZIRLIGI**

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

Yangibayeva Reymajon Adilbekovna

Mavzu: “Chegaraviy shartida fizik va spectral parametric bo’lgan Shturm-Liuvill masalasi”

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar:

f.-m.f.n., dots. Yaxshimuratov A.B

Urganch-2017

MUNDARIJA

Kirish.....	7
1-§. Chegaraviy shartida fizik va spektral parametri bo'lgan Shturm-Liuvill masalasiga mos keluvchi operatorlar dastasi.....	9
2-§. Musbat aniqlangan hol.....	11
3-§. Umumiy hol.....	15
Xulosa.....	21
Adabiyotlar.....	22

Kirish

Tadqiqot mavzusining dolzarbligi. Mazkur ishda quyidagi spektral masala o'rganiladi:

$$l(u) \equiv -u'' + q(x)u = \lambda u, \quad (1)$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(\pi) = m\lambda u(\pi). \quad (2)$$

Bu yerda $q(x)$ – haqiqiy uzluksiz funksiya, λ – spektral parametr, m – fizik parametr.

(1)+(2) masaladagi m parametrning ishorasi muhim rol o'ynaydi. Agar $m > 0$ bo'lsa, (1)+(2) masalani Gilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma operator uchun qo'yilgan spektral masala deb qarash mumkin. Shundan so'ng xos qiymatlarning va xos funksiyalarning m ga nisbatan dinamikasini, masalan, Vishik-Lyusternikning [12] ishida keltirilgan usul yordamida o'rganish mumkin.

Agar $m < 0$ bo'lsa, (1)+(2) masala [13] ishida keltirilgani kabi Pontryagin fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma operator uchun qo'yilgan spektral masala sifatida qaralishi mumkin. Mazkur ishning asosiy maqsadi (1)+(2) masala spektral xarakteristikalarining $m \in \mathbb{R}^-$ bo'lganida o'zgarish dinamikasini o'rganishdan iborat. Biz $m \rightarrow -0$ holni o'rganish bilan cheklanamiz.

Ilmiy izlanishning maqsad va vazifalari. Chegaraviy shartida fizik va spektral parametri bo'lgan Shturm-Liuvill masalasining xos qiymatlari va xos funksiyalari uchun fizik parametr nolga intilganda asimptotik formulalar olish.

Mavzuning o'rganilish darajasining qiyosiy tahlili. Bu turdagi masalalar mexanikada uchraydi. Masalan, Puasson [1] ishida cho'zilmaydigan ipning bir tomoniga osilgan jismning harakatiga doir masalani yechganida chegaraviy shartida spektral parametri bo'lgan Shturm-Liuvill masalasi hosil bo'lgan. Krilov [2] ishida, Timoshenko [3] ishida sterjenning ko'ndalang tebranishlarini o'rganishda chegaraviy shartida spektral parametri bo'lgan masalani hosil qilishgan. Ular (1)+(2) masalani $q(x) \equiv 0$ bo'lgan holda qaraganlar va bunda ular m parametr yordamida aniqlanadigan katta va kichik yuklanishlarda xos

qiymatlarning asimptotikasini o'rganish. (1)+(2) turdagi masalaga keltiriladigan aniq fizik masalalarni Tixonov va Samarskiyning [4] ishida, Uolterning [5] ishida va Fultonning [6] ishida uchratish mumkin. O'rtachalashtirish nazariyasi [7] bilan (1)+(2) spektral masalaning bog'liqligi topilganidan buyon (1)+(2) masalaga bo'lgan qiziqish keskin ortdi. Chegaraviy shartida spektral parametri bo'lgan spektral masalalar haqida umumiy ma'lumotlarni Diksmaning [8] ishidan, Shkalikovning [9] ishidan, Russakovskiyning [10] ishidan, Bayding, Braun va Seddigining [11] ishidan olish mumkin.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi. Mazkur ishning birinchi paragrafida chegaraviy shartida fizik va spektral parametri bo'lgan Shturm-Liuvill masalasiga mos keluvchi operatorlar dastasi haqida zaruriy ma'lumotlar keltirilgan, ikkinchi paragrafida qaralayotgan masalaga ekvivalent bo'lgan masala yordamida xos qiymat va xos funksiyalar uchun asimptotik formulalar keltirib chiqarilgan, uchinchi paragrafida qaralayotgan chegaraviy shartida fizik va spektral parametri bo'lgan Shturm-Liuvill masalasida fizik parametr $m > 0$ bo'lsa, bu masala Gilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma operator uchun qo'yilgan spektral masalaga keltirilgan. Agar $m < 0$ bo'lsa, bu masala Pontryagin fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma operator uchun qo'yilgan spektral masala sifatida qaralgan. Qaralayotgan masala spektral xarakteristikalarining $m \rightarrow -0$ bo'lganida o'zgarish dinamikasini ifodalovchi teorema o'rganilgan va isbotlangan.

Tadqiqot predmeti va ob'yekti. Tadqiqot obyekti sifatida chegaraviy shartida fizik va spektral parametri bo'lgan Shturm-Liuvill masalasi olingan. Tadqiqot predmeti esa mazkur masalaning xos qiymatlari va xos funksiyalari uchun fizik parametr nolga intilganda asimptotik formulalar olishdan iborat.

Tadqiqotning ilmiy ahamiyati. Mazkur ishning kvant fizikasi, elektronika, chiziqli va nochiziqli xususiy hosilali tenglamalar nazariyasi, mexanika, kristallografiya, geologo-razvedka masalalariga muhim tatbiqlari bo'lganligi bois ilmiy jihatdan muhim ahamiyat kasb etadi.

1-§. Chegaraviy shartida fizik va spektral parametri bo'lgan Shturm-Liuvill masalasiga mos keluvchi operatorlar dastasi

Ushbu $H = L_2 \times \mathbb{C} = \{(u(x), a) : u(x) \in L_2(0, \pi), a \in \mathbb{C}\}$ chiziqli fazoni

$$(f, g) = \int_0^\pi u(x) \overline{v(x)} dx + |m| \cdot a \cdot \bar{b}$$

skalyar ko'paytma bilan qaraymiz. Bu yerda:

$$f(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ a \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} v(x) \\ b \end{pmatrix}.$$

H fazo bu skalyar ko'paytma bilan qaralganda Gilbert fazosi bo'ladi. H fazoga Pontryagin fazosi deyiladi.

H Pontryagin fazosida quyidagi operatorni ko'rib chiqamiz:

$$\mathbf{L}f = \mathbf{L} \begin{pmatrix} u(x) \\ u(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u'' + q(x)u \\ \frac{u'(\pi)}{m} \end{pmatrix}.$$

Bu operatorning aniqlanish sohasi quyidagicha:

$$D(\mathbf{L}) = \left\{ f(x) : f(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u(\pi) \end{pmatrix} \in H, u(x) \in W_1^2[0, \pi], l(u) \in L_2(0, 1), u'(0) = 0 \right\}$$

Bu yerda $W_p^k[0, \pi]$ orqali Sobolev fazosi belgilangan:

$$W_p^k[0, \pi] = \{u(x) : u^{(j)}(x) \in L_p(0, \pi), j = \overline{0, k}\}.$$

Bu yerdagi hosilalar Sobolev ma'nosidagi umumlashgan hosilalardir. Bundan tashqari

$$L_p(0, \pi) = \left\{ u(x) : \left(\int_0^\pi |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad p \geq 1.$$

$\mathbf{L}$ operator H Pontryagin fazosida korrekt aniqlanganligi ravshan. Bu holda (1)+(2) masala quyidagi

$$\mathbf{L}u - \lambda u = 0, \quad u \in D(\mathbf{L})$$

spektral masalaga keltiriladi. Boshqacha aytganda, (1)+(2) masalaning λ_k xos qiymatlari L operatorning xos qiymatlari bilan ustma-ust tushadi. Xos funksiyalar o'rtasida esa ushbu

$$u_k(x) \leftrightarrow \begin{pmatrix} u_k(x) \\ u_k(\pi) \end{pmatrix}$$

munosabat mavjud.

1-lemma. $G = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \text{sign } m \end{pmatrix}$ bo'lsin. Bu yerda I orqali $L_2(0, \pi)$ fazodagi birlik

operator belgilangan. U holda $T = GL$ operator H Pontryagin fazosida o'z-o'ziga qo'shma bo'ladi.

Isbot. Bo'laklab integrallash yordamida quyidagi tenglik osongina isbot qilinadi:

$$(GLu, u) = \int_0^\pi (|u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2) dx = (u, GLu). \quad (3)$$

Bu yerda $u(x) \in D(L)$. Shuning uchun GL operator simmetrik bo'ladi. Ushbu

$$(GL - \lambda I)u = \begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in H$$

tenglamani quyidagi tarzda yozish mumkin:

$$-u''(x) + q(x)u(x) - \lambda u(x) = f(x),$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(\pi) - |m| \lambda u(\pi) = a.$$

Agar λ son bu masalaga mos keluvchi bir jinsli masalaning xos qiymati bo'lmasa, bu masalaning yechimi mavjud va yagona bo'ladi.

[9] ishda (1)+(2) masalaning $m \in \mathbb{R}$ bo'lganida regulyar masala bo'lishi isbotlangan, xususan bu masalaning spektri diskret ekanligi ko'rsatilgan. Shuning uchun GL operator simmetrik va diskret spektrlidir. Bundan GL operatorning o'z-o'ziga qo'shma operatorligi kelib chiqadi. **1-lemma isbotlandi.**

Shunday qilib, (1)+(2) masala quyidagi masalaga ekvivalent ekan:

$$(T - \lambda G)u = 0, \quad u \in D(T) = D(L), \quad (4)$$

Bu yerda $T = T^*$ bo'lib, $m < 0$ bo'lganida

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Agar barcha $y \in \text{Ker}(\mathbf{T} - \mu \mathbf{G})$ larda $(\mathbf{G}y, y) > 0$ bo'lsa, (4) masalaning μ xos qiymati musbat turda deyiladi, aks holda, ya'ni $(\mathbf{G}y, y) < 0$ bo'lsa, manfiy turda deyiladi.

Chiziqli operatorlarning umumiy nazariyasiga ko'ra (4) masalaning spektri bir juftdan ko'p bo'lmagan, haqiqiy bo'lmagan, o'zaro qo'shma bo'lgan xos qiymatlarga ega bo'lishi mumkin. Haqiqiy qiymatlar orasida esa manfiy turdagisi ko'pi bilan bitta bo'ladi.

2-§. Musbat aniqlangan hol

Quyidagi kvadratik formani ko'rib chiqamiz:

$$Q(u) = \int_0^\pi (|u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2) dx, \quad u(x) \in W_2^1[0, \pi].$$

2-lemma. Agar $Q(u)$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lsa, ya'ni $0 \neq u \in W_2^1$ bo'lganida $Q(u) > 0$ bo'lsa, u holda (4) masalaning barcha xos qiymatlari haqiqiy bo'ladi, faqat bitta λ_0 manfiy turdagi xos qiymat mavjud bo'ladi, qolgan barcha cheksizta $\{\lambda_k\}_1^\infty$ xos qiymatlari musbat bo'lib, ular musbat turda bo'ladi.

Isbot. (3) ga ko'ra $\mathbf{T} = \mathbf{GL} > 0$ bo'ladi. Bundan esa

$$0 < (\mathbf{T}\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k) = \lambda_k (\mathbf{G}\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k) \quad (5)$$

kelib chiqadi. Demak, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ekan.

[14] ishning III bobiga asosan $\mathbf{L}$ operator bitta manfiy yoki neytral turdagi xos qiymatga ega bo'ladi. (5) ga asosan bu xos qiymat manfiy bo'ladi va manfiy turga ega bo'ladi.

2-lemma isbotlandi.

$H_{\mathbf{T}}$ orqali quyidagi

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x) \\ u(\pi) \end{pmatrix} \in D(\mathbf{T}^{1/2})$$

elementlarga ega bo'lgan va ushbu

$$\|u\|_T^2 = Q(u)$$

norma bilan qaraladigan Gilbert fazosini kiritib olamiz. $\forall \varepsilon > 0$ da ushbu

$$\|\sqrt{q}u\|_{L_2} \leq \varepsilon \|u'\|_{L_2} + M(\varepsilon) \|u\|_{L_2}$$

baholash o'rinli ekanligi hamda $W_2^1(0, \pi)$ fazo $L_2(0, \pi)$ fazo ichiga kompakt joylashishiga asosan $Q(u)$ kvadratik formaning musbat aniqlanganligi uning $W_2^1(0, \pi)$ fazoda tekis musbat aniqlanganligiga ekvivalent bo'ladi. Shuning uchun H_T fazo $W_2^1(0, \pi)$ fazoga izomorf bo'ladi.

3-lemma. $Q(u) > 0$ bo'lganida L operator H_T fazoda o'z-o'ziga qo'shma bo'ladi. Bundan tashqari L operatorning H_T fazodagi spektri diskret bo'ladi va u H fazodagi spektr bilan ustma-ust tushadi.

Isbot. $Q(u) > 0$ bo'lgani uchun $\lambda = 0$ son (1)+(2) masalaning xos qiymati bo'lmaydi. Shuning uchun L operatorning teskarisi mavjud.

Quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{u})_T = (\mathbf{G}\mathbf{L}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{u})_H = (\mathbf{G}\mathbf{u}, \mathbf{u})_H \leq \text{const} \cdot \|\mathbf{u}\|_T^2.$$

Bunga asosan L^{-1} operator simmetrik bo'ladi va H_T fazoda chegaralangan bo'ladi. H_T fazo H fazoning ichida kompakt joylashadi. Bunga asosan L^{-1} operator H_T fazoda kompakt bo'ladi. Demak, L operatorning H_T fazodagi spektri diskret ekan. L operatorning spektori H fazoda ham, H_T fazoda ham diskret bo'lganligi uchun [15] ishga asosan ular ustma-ust tushadi. **3-lemma isbotlandi.**

$l(u)$ differensial ifoda va $u'(0) = u'(\pi) = 0$ chegaraviy shartlar yordamida hosil qilingan operatorning teskarisini A_0 orqali belgilaymiz. $Q(u) > 0$ bo'lganligi uchun A_0 operator mavjud bo'ladi va musbat aniqlangan bo'ladi.

Endi $W_2^1[0, \pi]$ fazoda quyidagi usul yordamida A_1 operatorni aniqlaymiz. $u(x) \in W_2^1(0, \pi)$ bo'lsin. Ushbu $l(\omega) = 0$, $\omega'(0) = 0$, $\omega'(\pi) = u(\pi)$ chegaraviy masalaning yechimini $\omega(x)$ orqali belgilaymiz. Har bir $u(x)$ funksiyaga $\omega(x)$ funksiyani mos qo'yuvchi operatorni A_1 orqali belgilaymiz. Demak, $\omega(x) = A_1 u(x)$ ekan. $\omega(x)$ funksiyaning mavjudligi va yagonaligi L operatorning teskarilanuvchi ekanligidan

kelib chiqadi. Bundan tashqari Γ_π orqali $\Gamma_\pi u(x) = u(\pi)$ tenglik bilan aniqlangan operatorni kiritib olamiz.

To'g'ridan to'g'ri hisoblash yordamida ushbu

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{A}_0 + m\mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_j \mathbf{u} = \begin{pmatrix} A_j u(x) \\ \Gamma_\pi A_j u(x) \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1 \quad (6)$$

tenglik o'rinli bo'lishini ko'rishimiz mumkin. Bu yerda $\mathbf{A}_0$ va $\mathbf{A}_1$ operatorlar H_T fazoning

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x) \\ u(\pi) \end{pmatrix}, \quad u(x) \in W_2^1$$

elementlariga ta'sir qiladi deb hisoblanadi.

Quyidagi

$$(\mathbf{A}_0 \mathbf{u}, \mathbf{u})_T = (\mathbf{GLA}_0 \mathbf{u}, \mathbf{u})_H = (u, u)_{L_2}$$

tenglikka asosan $\mathbf{A}_0$ operator H_T fazoda simmetrik va chegaralangan bo'ladi. (6)

ga asosan $\mathbf{A}_1$ operator ham H_T fazoda simmetrik va chegaralangan bo'ladi.

1-teorema. $Q(u) > 0$ bo'lsin. $\{\lambda_k\}_0^\infty$ orqali (1)+(2) masalaning xos qiymatlarini belgilaymiz. Bunda xos qiymatlar o'sish tartibida raqamlangan. U holda quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\lambda_0 = -\frac{1}{m^2} + O(1), \quad m \rightarrow -0, \quad (7)$$

$$y_0(x) = \left(ch \frac{x}{|m|} \right) (1 + O(m)), \quad (8)$$

$$\lambda_k = \mu_k - \mu_k \alpha_k m + O(m^2), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$y_k(x) = y_k^0(x) + O(m), \quad k = 1, 2, \dots. \quad (10)$$

Bu yerda $y_k(x)$, $k = \overline{0, \infty}$ orqali λ_k , $k = \overline{0, \infty}$ xos qiymatlarga mos keluvchi xos funksiyalar belgilangan, $y_k^0(x)$ orqali esa (1)+(2) masalaning $m = 0$ bo'lgan holdagi μ_k xos qiymatiga mos keluvchi xos funksiyalari belgilangan,

$$\alpha_k = \frac{|y_k(\pi)|^2}{(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k)_T}. \quad (11)$$

Isbot. $y(x, \lambda)$ orqali (1) tenglamaning $y'(0, \lambda) = 0$, $y(0, \lambda) = 1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini belgilaymiz. Bu yechim quyidagi integral tenglamani qanoatlantiradi:

$$y(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \tau) q(\tau) y(\tau, \lambda) d\tau. \quad (12)$$

Bu integral tenglamadan foydalanib $y(x, \lambda)$ yechimning asimptotikasini keltirib chiqarishimiz mumkin

$$y(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + O\left(\frac{e^{x|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|}}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$y'(x, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + O\left(e^{x|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|}\right).$$

(1)+(2) masalaning $y'(\pi, \lambda) - m\lambda y(\pi, \lambda) = 0$ xarakteristik tenglamasiga $y(\pi, \lambda)$ yechimning asimptotikasini qo'ysak ushbu tenglama hosil bo'ladi:

$$-\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi + O\left(e^{\pi|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|}\right) - m\lambda \cos \sqrt{\lambda} \pi - m\lambda O\left(\frac{e^{\pi|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|}}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0,$$

$$-\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi - m\lambda \cos \sqrt{\lambda} \pi + O\left(e^{\pi|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|}\right) - mO\left(\sqrt{\lambda} e^{\pi|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|}\right) = 0.$$

Bundan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$th\rho\pi = -m\rho + O(m).$$

Bu yerda $\rho = \sqrt{-\lambda}$, $\lambda \in R^-$.

Demak, $\rho_0 = -\frac{1}{m} + O(m)$ ekan, bundan (7) munosabat kelib chiqadi. $y(x, \lambda)$ yechimning asimptotikasidan (8) munosabat kelib chiqadi.

(6) tenglikdagi A_0 va A_1 operatorlar H_T fazoda o'z-o'ziga qo'shma bo'lganligi uchun $L^{-1} = A_0 + mA_1$ operatorga Relix–Nad teoremasini qo'llashimiz mumkin. Bu teorema [18] ishda keltirilgan. Bu teoremaga asosan (10) munosabatni va ushbu

$$\lambda_k^{-1} = \mu_k^{-1} + \alpha_k m + O(m^2) \quad (13)$$

tenglikni olamiz.

Endi α_k ning ifodasini keltirib chiqaramiz. Ushbu

$$(\mathbf{A}_0 + m\mathbf{A}_1)(\mathbf{y}^0(x) + m\mathbf{y}^1(x) + \dots) = (\mu_k^{-1} + \alpha_k m + \dots)(y_k^0(x) + m y_k^1(x) + \dots)$$

tenglikka asosan $\mathbf{A}_0 \mathbf{y}_k^1 = \alpha_k \mathbf{y}_k^0 + \mu_k^{-1} \mathbf{y}_k^{-1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_k^0$ bo'ladi. Bu tenglikni $\mathbf{y}_k^0$ ga skalyar ko'paytirsak, quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$\alpha_k (\mathbf{y}_k^0, \mathbf{y}_k^0)_T = (\mathbf{A}_1 \mathbf{y}_k^0, \mathbf{y}_k^0)_T = Q(\omega, y_k^0).$$

Bu yerda $Q(\omega, y)$ orqali $Q(u)$ kvadratik formaga mos keluvchi bichiziqli forma belgilangan.

$\mathbf{A}_1$ operatorning ta'rifiga ko'ra $\omega(x)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi: $l(\omega) = 0$, $\omega'(0) = 0$, $\omega'(\pi) = y_k^0(\pi)$. Shuning uchun $Q(\omega, y_k^0)$ kvadratik formada bo'laklab integrallab, $Q(\omega, y_k^0) = |y_k^0(\pi)|^2$ tenglikni keltirib chiqarishimiz mumkin. Demak, α_k sonlar uchun (11) munosabat o'rinli ekan.

(13) tenglikdan foydalanib (9) formulani keltirib chiqarish qiyin emas. Teorema isbotlandi.

3-§. Umumiy hol

$Q(u)$ kvadratik forma musbat aniqlanmagan bo'lsa, oldingi paragrafda qo'llagan usulimiz yaramay qoladi. Shuning uchun bu paragrafda boshqa usulni qo'llaymiz.

Quyidagi funksiyani kiritib olamiz:

$$F(\lambda) = \frac{y'_x(\pi, \lambda)}{y(\pi, \lambda)}.$$

Bu yerda, $y(x, \lambda)$ orqali (1) tenglamaning $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini belgilaymiz. Biz bu funksiyaning xossalariidan foydalanib, $m \rightarrow -0$ da xos qiymatlarning asimptotikasini keltirib chiqaramiz.

Quyidagi ikkita chegaraviy masalani mos ravishda A va B masala deb belgilab olamiz:

$$l(u) = \lambda u, \quad u'(0) = u'(\pi) = 0,$$

$$l(u) = \lambda u, \quad u'(0) = u(\pi) = 0.$$

$F(\lambda)$ funksiyaning nollari A masalaning xos qiymatlari bilan, qutblari esa B masalaning xos qiymatlari bilan ustma-ust tushadi. A masalaning xos qiymatlarini $\{\mu_k\}_1^\infty$ orqali, B masalaning xos qiymatlarini esa $\{\rho_k\}_1^\infty$ orqali belgilaymiz. Ossilyatsiya teoremasining natijasi [17] ga ko'ra bu xos qiymatlar almashinib keladi

$$\mu_1 < \rho_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \rho_k < \mu_{k+1} < \dots$$

4-lemma. $F(\lambda)$ funksiya $(-\infty, \rho_1)$ intervalda qavariq bo'ladi.

Isbot. Mittag-Leffler teoremasi [19] ga asosan $F(\lambda)$ meromorf funksiya uchun quyidagi tasvir o'rinli:

$$F(\lambda) = G(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho_k} \right)^s \frac{c_k}{\lambda - \rho_k}. \quad (14)$$

Bu yerda $G(\lambda)$ —butun funksiya bo'lib,

$$c_k = \operatorname{res}_{\lambda=\rho_k} F(\lambda) = \frac{y'_x(\pi, \rho_k)}{y'_\lambda(\pi, \rho_k)}, \quad (15)$$

(14) tenglikdagi s son shunday tanlanadiki, bunda (14) qator yaqinlashishi talab qilinadi.

Quyidagi tengliklarni qanoatlantiruvchi $M > 0$ o'zgarmas son mavjudligini ko'rsatamiz:

$$0 < c_k < Mk^2. \quad (16)$$

Agar bu tengsizliklar isbotlandi deb olsak, unga ko'ra (14) qatorda $s=1$ deb olish mumkin bo'ladi.

Endi (16) tengsizlikni isbotlash bilan shug'ullanamiz. Ossilyatsiya teoremasiga ko'ra B masalaning $y_k(x) = y(x, \rho_k)$ xos funksiyasi $[0, \pi)$ yarim intervalda $k-1$ ta ildizga ega bo'ladi. $y(0, \rho_k) = 1$ va $y(\pi, \rho_k) = 0$ bo'lganligi uchun bunga asosan quyidagi tengsizliklar o'rinli bo'ladi:

$$(-1)^k y'_x(\pi, \rho_k) > 0, \quad k=1, 2, \dots \quad (17)$$

Bu yerda biz $y(\pi, \rho_k) = 0$ ekanligidan differensial tenglamalar kursidagi yagonalik teoremasiga asosan $y'_x(\pi, \rho_k) \neq 0$ kelib chiqishini inobatga oldik.

$y(\pi, \lambda)$ funksiyaning $\lambda \rightarrow -\infty$ dagi asimptotikasiga asosan $y(\pi, \lambda) > 0$ bo'ladi. $y(\pi, \lambda)$ funksiyaning eng kichik ildizi ρ_1 bo'lganligi uchun $y'(\pi, \rho_1) < 0$ bo'ladi. $y(\pi, \lambda)$ funksiyaning ildizlari karrasiz bo'lib, ρ_k lar bilan ustma-ust tushganligi sababli quyidagi tengsizliklar o'rinli bo'ladi

$$(-1)^k y'_\lambda(\pi, \rho_k) > 0, \quad k=1, 2, \dots$$

(15) va (17) munosabatlarni e'tiborga olsak, $c_k > 0$ tengsizlik kelib chiqadi. $y(x, \lambda)$ yechimning asimptotikasiga asosan

$$F(\lambda) = -\sqrt{\lambda} \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\cos \pi \sqrt{\lambda}} \cdot \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \notin \Omega_k(\varepsilon).$$

Bu yerda $\Omega_k(\varepsilon) = \{\lambda : |\sqrt{\lambda} - \rho_k| < \varepsilon\}$.

Agar $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ deb olsak, $\Omega_k(\varepsilon)$ sohalar o'zaro kesishmaydi va ularning har birida $F(\lambda)$ funksiyaning bitta qutb nuqtasi ρ_k bor. Agar $\lambda \notin \Omega_k(\varepsilon)$ bo'lsa, quyidagi baholash o'rinli bo'ladi:

$$|F(\lambda)| \leq M \sqrt{|\lambda|}, \quad M = \text{const}. \quad (18)$$

Demak,

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Omega_k} F(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\pi i} \int_{|\rho - \rho_k| = \varepsilon} \rho F(\rho) d\rho \leq Mk^2$$

baholash o'rinli ekan. Shu bilan (16) qo'shtengsizlik to'la isbotlandi.

Endi $G(\lambda) \equiv 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Γ_n orqali $\Omega_k(\varepsilon)$ soha bilan kesishmaydigan kamayib boruvchi aylanalar ketma-ketligini belgilaymiz. U holda quyidagi

$$F(\lambda) - \sum_{\rho_k \in \text{int } \Gamma_n} \frac{\lambda c_k}{\rho_k (\lambda - \rho_k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{\lambda F(\zeta)}{\zeta (\zeta - \lambda)} d\zeta$$

tenglik o'rinli bo'ladi. (18) tenglikka ko'ra bu tenglikning o'ng tomoni $n \rightarrow \infty$ da 0 ga intiladi. Shuning uchun bu tenglikda $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak, $G(\lambda) \equiv 0$ kelib chiqadi.

(14) tenglikdan hosila olsak, quyidagi tengliklar hosil bo'ladi:

$$F'(\lambda) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(\lambda - \rho_k)^2},$$

$$F''(\lambda) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(\lambda - \rho_k)^3}.$$

Bu tengliklarga ko'ra $\lambda \in (-\infty, \rho_1)$ bo'lganida $F'(\lambda) < 0$ va $F''(\lambda) < 0$ bo'ladi.

4-lemma isbotlandi.

$Q(u)$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun $\mu_1 > 0$ bo'lishi zarur va yetarli. Shuning uchun bundan buyon $\mu_1 \leq 0$ deb hisoblaymiz.

2-teorema. $\mu_1 \leq 0$ bo'lsin. U holda shunday m_0 musbat son mavjudki, bunda $m \in (-m_0, 0)$ bo'lganida (1)+(2) masalaning barcha xos qiymatlari haqiqiy bo'lib, eng kichik xos qiymati λ_0 manfiy turga mansub bo'ladi hamda $m \rightarrow -0$ da $\lambda_0 \rightarrow -\infty$ bo'ladi. Bundan tashqari (7) asimptotik formula o'rinli bo'ladi. Qolgan barcha xos qiymatlar $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$ musbat turga mansub bo'lib, $m \rightarrow -0$ da (9) asimptotik formulalar o'rinli bo'ladi, ularga mos keluvchi xos funksiyalar uchun (10) munosabat bajariladi. $m = m_0$ bo'lganida (1)+(2) masala eng kichik xos qiymatining geometrik karrasi 1 ga teng bo'lib, algebraik karrasi 2 ga teng bo'ladi. Agar $\mu_1 < 0$ bo'lsa, u holda $m \in (m_0, m_0 + \delta)$ bo'lganida biror kichik $\delta > 0$ uchun (1)+(2) masala ikkita kompleks xos qiymatlarga ega bo'ladi, qolgan barcha xos qiymatlar haqiqiy bo'lib musbat turda bo'ladi.

Isbot. (1)+(2) masalaning xos qiymatlari quyidagi tenglamaning ildizlari bilan ustma-ust tushishi ravshan

$$F(\lambda) = m\lambda. \quad (19)$$

$F(\lambda)$ funksiyaning $(-\infty, \rho_1)$ oraliqda qavariqligini hamda $(-\infty, \mu_1)$, $\mu_1 < \min(0, \rho_1)$ oraliqda musbat ekanligini inobatga olsak, shunday $m_0 > 0$ topiladiki, bunda $m \in (-m_0, 0)$ bo'lganida (19) tenglama $(-\infty, \mu_1)$ oraliqda aniq ikkita ildizga ega ekanligi, $m = m_0$ bo'lganida esa bitta karrali ildizga ega bo'lishi kelib chiqadi. $m \rightarrow -0$ da eng kichik xos qiymat λ_0 uchun hamda unga mos keladigan $y_0(x)$ xos

funksiya uchun (7) va (8) asimptotikalar o‘rinli bo‘ladi. Bu holda 4-lemma isbotidagi fikrlash saqlanadi.

(8) asimptotikaga asosan m ning -0 ga yetarlicha yaqin bo‘lgan qiymatlarida quyidagi munosabat bajariladi

$$(\mathbf{G}\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0)_H = (y_0, y_0)_{L_2} - |m| \cdot |y_0(\pi)|^2 = -\frac{1}{2}|m| \exp \frac{2\pi}{|m|} (1 + O(m)) < 0.$$

$(\mathbf{G}\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0)$ ifoda m ga uzluksiz ravishda bog‘liq bo‘ladi. Shuning uchun $m \in (-m_0, 0)$ bo‘lganida nolga aylanmaydi. Aks holda λ_0 xos qiymat karrali bo‘lgan bo‘lar edi, u esa karrali emas. Demak, $m \in (-m_0, 0)$ bo‘lganida λ_0 xos qiymat manfiy turga mansub bo‘ladi. Qolgan barcha xos qiymatlar haqiqiy bo‘lib, musbat turga mansub bo‘ladi. Agar $m = -m_0$ bo‘lsa, (19) tenglamaning λ_0 ildizi karrali bo‘ladi. Ammo λ_0 ning geometrik karrasi 1 ga teng bo‘ladi. Chunki barcha xos funksiyalar o‘zaro proporsional bo‘ladi.

$m = -m_0$ bo‘lganida $y_0 = y(x, \lambda_0)$ xos funksiya, $y_1 = y'_\lambda(x, \lambda_0)$ esa yopishgan funksiya bo‘lishini ko‘rsatamiz. Haqiqatdan ham, (1) differensial tenglamadan λ bo‘yicha hosila olib, $\lambda = \lambda_0$ desak,

$$-y_1'' + q(x)y_1 = \lambda_0 y_1 + y_0 \quad (20)$$

kelib chiqadi. (19) tenglikka asosan λ_0 karrali ildiz bo‘lganligi uchun

$$F(\lambda_0) - m_0 \lambda_0 = 0, \quad F'(\lambda_0) - m = 0$$

tengliklar bajarilishi kelib chiqadi. Demak,

$$-y_1'(\pi, \lambda_0) = \lambda_0 m_0 y_1(\pi, \lambda_0) + y(\pi, \lambda_0) \quad (21)$$

tenglik o‘rinli ekan.

Xos funksiya va yopishgan funksiya ta’rifiga ko‘ra [9], [20, 1-bob] (20) va (21) tengliklarga asosan y_0 funksiya (1)+(2) masalaning xos funksiyasi, y_1 funksiya esa yopishgan funksiyasi bo‘ladi.

$\lambda^{-1}F(\lambda)$ funksiya λ_0 nuqtaning biror atrofida $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_0 \in R^-$ bo‘lganida qavariq bo‘ladi hamda quyidagi yoyilma o‘rinli bo‘ladi

$$\lambda^{-1}F(\lambda) = m_0 + a_2(\lambda - \lambda_0)^2 + a_3(\lambda - \lambda_0)^3 + \dots, \quad a_2 > 0.$$

Bunga ko‘ra $F(\lambda) - m\lambda = 0$ tengliklarni qanoatlantiruvchi λ , m sonlar juftligi uchun quyidagi tenglik bajariladi

$$m + m_0 = a_2 (\lambda - \lambda_0)^2 (1 + O(\lambda - \lambda_0)). \quad (22)$$

Endi [21] ishdan foydalanamiz. Unga ko‘ra λ_0 nuqtaning biror atrofida (22) tenglamadan quyidagi tenglik kelib chiqadi

$$\lambda = \lambda_0 + \sqrt{\frac{m + m_0}{a_2}} + O(m + m_0).$$

Oxirgi tenglikka asosan $-m_0$ nuqtaning chap yarim atrofida (19) tenglamaning haqiqiy bo‘lmagan ikkita ildizi mavjud. Bunga asosan Pontryagin fazosidagi o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlar nazariyasiga ko‘ra qolgan barcha xos qiymatlar haqiqiy bo‘ladi va musbat turga mansub bo‘ladi.

(19) tenglamani grafik usulda yechish natijasida (9) munosabatlar kelib chiqadi. Bunda $\alpha_k > 0$ bo‘ladi. Agar (9) ifodani $y(x, \lambda_k)$ ga qo‘ysak, (10) asimptotik formula kelib chiqadi. **Teorema isbotlandi.**

Xulosa

Mazkur ishda chegaraviy sharti spektral parametrğa va fizik parametrğa bog‘liq bo‘lgan quyidagi spektral masala qaralgan

$$l(u) \equiv -u'' + q(x)u = \lambda u, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(\pi) = m\lambda u(\pi).$$

Bu yerda $q(x)$ – haqiqiy uzluksiz funksiya, λ – spektral parametr, m – fizik parametr.

Qaralayotgan masalada m parametrning ishorasi muhim rol o‘ynaydi. Agar $m > 0$ bo‘lsa, bu masala Gilbert fazosidagi o‘z-o‘ziga qo‘shma operator uchun qo‘yilgan spektral masalaga keltiriladi. Shundan so‘ng xos qiymatlarning va xos funksiyalarning m ga nisbatan dinamikasi o‘rganiladi.

Agar $m < 0$ bo‘lsa, bu masala Pontryagin fazosidagi o‘z-o‘ziga qo‘shma operator uchun qo‘yilgan spektral masala sifatida qaralishi mumkin.

Mazkur ishda qaralayotgan masala spektral xarakteristikalarining $m \rightarrow -0$ bo‘lganida o‘zgarish dinamikasi o‘rganilgan. Bunda ushbu

$$Q(u) = \int_0^{\pi} \left(|u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2 \right) dx$$

kvadratik forma musbat aniqlangan va musbat aniqlanmagan hollar alohida o‘rganilgan.

Adabiyotlar

- [1] Poisson M. Sur la manière d'exprimer les fonctions par des series de quantités periodiques, et sur l'usage de cette transformation dans la resolution de differents problèmes. 18^{eme} cahier. V. XI. Paris: l'Ecole Polytechnique de Paris, 1820.
- [2] Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. М.: АН СССР, 1932.
- [3] Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементарных конструкций. М.: Наука, 1975.
- [4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
- [5] Walter J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions // Math. Z. 1973. V. 133. P. 301-312.
- [6] Fulton C.T. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions // Proc. Roy.Soc. Edinburgh.Sect. A. 1977. V. 77. P. 293–308.
- [7] Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С. О собственных колебаниях струны с присоединенной массой // Сиб.матем.ж. 1988. Т. 29. № 5. С. 70–81
- [8] Dijksma A. Eigenfunctions expansions for a class of Y-self-adjointed ordinary differential operator with boundary conditions containing the eigenvalue parameter // Proc. Roy.Soc. Edinburgh.Sect. A. 1980. V. 86. P. 1–27.
- [9] Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г.Петровского. 1993. Т. 9. С. 140–166.
- [10] Руссаковский Е.М. Задача Штурма-Лиувилля с параметром граничных условиях // Тр. Семинара им. И.Г.Петровского. 1983. Т. 18.

- [11] Binding P.A., Browne P.J., Seddighi K. Sturm–Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2). 1993. V. 37. P. 57–72.
- [12] Вишик М.И., Люстерник А.А Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
- [13] Lancaster P., Shkalikov A.A., Ye Q. Strongly definizable linear pencil in Hilbert space // Integral Equations Operator Theory. 1993. V. 17. P. 338–360.
- [14] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
- [15] Shkalikov A.A. Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics. Instability index formula // Oper. Theory Adv. Appl. V. 87. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 258–285.
- [16] Бен Амара Ж. Об асимптотиках собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля с малым и спектральным параметрами, входящими в граничные условия // Матем. заметки. 1996. Т.60. №4. С. 609–611.
- [17] Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
- [18] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
- [19] Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.
- [20] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
- [21] Чеботарев Н.Г. Теория алгебраических функций. М.: Гостехиздат, 1948.