

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**NAMANGAN MUHANDISLIK-TEXNOLOGIYA
INSTITUTI**

**A.Rahmonov
M. Kamolidinov
B. Jalilov**

Oliy matematika

MARUZA MATNLARI

NAMANGAN-2017 YIL

Oliy matematika. Ma'ruza matnlari /A.Rahmonov, M. Kamolidinov, B. Jalilov. Namangan., Namangan muhandislik-
texnologiya instituti 20__ yil.

Ushbu ma'ruza matnlari oliy matematikaning chiziqli algebra, tekislik, fazoda analitik geometriya elementlari, matematik analiz, differentsial tenglamalar va extimollar nazariyasi va matematik statistika bo'limiga tegishli mavzularini o'z ichiga oladi.

Ma'ruza matnlari O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan 2008 yil 23 avgustda tasdiqlangan namunaviy o'quv dasturi asosida tuzildi va barcha muhandis-texnologiya bakalavr yo'nalishi uchun mo'ljallangan.

«Oliy matematika» kafedrasida muhokama qilingan va nashrga tavsiya etilgan.

.

«Oliy matematika » kafedrasida mudiri:

dots. A.Rahmonov

Tuzuvchilar: f-m.f.n.dotst. A.Rahmonov
t.f.n., dot. M. Kamolidinov
B. Jalilov

Mavzu № 1
TO'PLAM VA ULAR USTIDA AMALLAR. XAQUIY SONLAR HAQUIY SONLAR TO'PLAMINING
CHEGARALARI VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Reja

1. To'plam tushunchasi.
2. To'plamlar ustida amallar.
3. Xaquiylar sonlar.
4. Haquiylar sonlar to'plamining chegaralari.
5. Haquiylar sonlar ustida amallar.

To'plam tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir. To'plam qandaydir ob'ektlarning tayin bir majmuidir. Masalan, shkafdagi kitoblarni, barcha to'g'ri kasrlar, berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar, barcha juft sonlar to'plami va shu kabilar to'plamga misol bo'la oladi. Bu misollardan ko'rinib to'ribdiki, to'plam chekli yoki cheksiz sondagi narsalarni yoki, odatda aytilishicha, elementlarni o'z ichiga olishi mumkin. Birinchi holda to'plamni chekli, ikkinchi holda yecha cheksiz deyiladi.

Odatda to'plamlarni bosh harflar: A, B, C, D, E, ... bilan, uning elementlarini yecha kichik harflar a, b, c, x, y, bilan belgilanadi.

Agar A to'plamning elementi a bo'lsa, $a \in A$ kabi yo'zilanadi va «a element A to'plamga tegishli» deb o'qiladi. Aks holda $a \notin A$ deb yo'zilanadi va «a element A to'plamga tegishli emas» deb o'qiladi.

Masalan, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ bo'lsa, u holda $6 \in A$, $7 \notin A$ bo'ladi.

Bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'sh to'plam deyiladi va $\emptyset$ kabi belgilanadi. Masalan, $x^2 + 4 = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plami bo'shdir, chunki bu haqiqiy ildizlarga ega emas.

To'plamni aniqlashda uni tashkil etgan elementlar orasida aynan bir-biriga teng bo'lgan elementlarni to'plamning elementi sifatida faqat bir martagina olinadi. Masalan, B to'plam $x^3 - 3x + 2 = 0$ tenglamaning $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, bo'lib, ulardan to'zilgan B to'plam deganda biz 1 va -2 elementlardan to'zilgan $B = \{1, -2\}$ to'plamni tushunamiz.

Agar B to'plamning har bir elementi A to'plamning ham elementlari bo'lsa, B to'plamning qismi yoki qisman to'plami (to'plam osti) deb ataladi va $B \subset A$ kabi belgilanadi. Masalan, juft sonlar to'plami butun sonlar to'plamining qisman to'plamidir. Ravshanki, agar $A \subset B$, $B \subset C$ bo'lsa, u holda $A \subset C$ bo'ladi.

Bo'sh to'plam $\emptyset$ har qanday A to'plamning qismi deb hisoblanadi.

Biror A to'plam berilgan bo'lsin. Bu to'plamning barcha qisman to'plamlaridan iborat to'plamni $R(A)$ kabi belgilamiz. Ravshanki, agar $\emptyset \in R(A)$, $A \in R(A)$. Masalan, $A = \{1, 2, 3\}$ to'plam uchun

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ bo'ladi. $P(A)$ to'plam elementlarining o'zi to'plamdir.

1-Ta'rif. Agar A to'plam B to'plamning qismi, B to'plam A to'plamning qismi, ya'ni $A \subset B$ va $B \subset A$ bo'lsa, u holda A va B to'plamlarni bir biriga teng to'plamlar deb ataladi va $A = B$ kabi yo'zilanadi.

2-Ta'rif. A va B to'plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan S to'plam A va B to'plamlarning yig'indisi deb ataladi va

$$S = A \cup B$$

kabi belgilanadi. Masalan, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, bo'lsa, unda ularning yig'indisi quyidagi to'plamdan iborat bo'ladi:

$$S = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}.$$

Ta'rifdan $A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$ kelib chiqadi, shuningdek, agar $A \subset B$ bo'lsa, unda $A \cup B = B$ bo'ladi.

3-Ta'rif. A va B to'plamlarning umumiy elementlardan tashkil topgan to'plam A va B to'plamlarning ko'paytmasi deyiladi va

$$D = A \cap B$$

kabi belgilanadi. Masalan, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ bo'lsa, ularning ko'paytmasi

$$D = A \cap B = \{2, 4\}$$

to'plam bo'ladi. Ta'rifdan $A \cap A = A$, $A \cap B = B \cap A$ kelib chiqadi, shuningdek, agar $A \subset B$ bo'lsa, unda $A \cap B = A$ bo'ladi.

Ikki to'plam ko'paytmasi bo'sh to'plam, ya'ni $A \cap B = \emptyset$ bo'lsa, u holda A va B to'plamlar kesishmaydigan to'plamlar deyiladi.

Chekli sondagi to'plamlar: $M_1, M_2, \dots, M_n$ berilgan bo'lsin bu to'plamlar yig'indisi deb, $M_1, M_2, \dots, M_n$ to'plamlarni xech bo'lmaganda bittasiga tegishli bo'lgan barcha elementlar to'plamni M ga aytiladi va $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$ yoki $M = \bigcup_{k=1}^n M_k$ kabi yo'zilanadi. Masalan, barcha butun sonlar to'plam juft sonlar to'plamining birlashmasidir. M_1 to'plam $1 < x < 5$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan x sonlardan, M_2 to'plam yecha $2 < y < 7$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan y sonlardan iborat bo'lsin. U holda bu to'plamlarning $M_1 \cup M_2$ birlashmasi $1 < z < 7$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan Z sonlardan iborat bo'ladi. $M_1, M_2, \dots, M_n$ to'plamlarning kesishmasi (ya'ni ko'paytmasi) deb, bu $M_1, M_2, \dots, M_n$ to'plamlarning har biriga tegishli elementlardan va faqat shu elementlardan iborat M to'plamga aytiladi va $M = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$ yoki $M = \bigcap_{k=1}^n M_k$ kabi belgilanadi.

Agar bu to'plamlarning har biriga tegishli bo'lgan elementlar bo'lmasa, u holda ularni kesishmasi, ravshanki, bo'sh to'plam bo'ladi.

4-Ta'rif. A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan to'zilgan E to'plam A to'plamdan B to'plamning ayirmasi deb aytiladi va $E = A/B$ kabi belgilanadi. Masalan, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$ bo'lsa,

$A/B=\{1,2,4,5\}$ va $B/A=\{6,9,12\}$ bo'ladi. Agar A to'plam C ning qismi, ya'ni $A \subset C$ bo'lsa, ushbu C/A ayirma A to'plamning C to'plamga to'ldiruvchi to'plam deb ataladi va $C_s A$ kabi yo'zilanadi. Ta'rifga ko'ra $C_s A = C/A$

5-Ta'rif. A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan va B to'plamning A to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan to'zilgan to'plam $A \vee B$ to'plamlarning simmetrik ayirmasi deb ataladi va A/B kabi belgilanadi. Ta'rifga ko'ra $A/B = (A/B) \cup (B/A)$. Masalan, $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9\}$ bo'lsa u holda bu to'plamlarning simmetrik ayirmasi $A/B = \{1,2,3,7,8,9\}$ bo'ladi.

Haqiqiy Sonlar.

1. Natural sonlar. Butun sonlar.

Ma'lumki $N = \{1,2,3,\dots\}$ - musbat butun sonlar to'plamini ifodaladi. Bu to'plamdan olingan ixtiyoriy nato'ral n, m va raqobat sonlar uchun quyidagi ikkitasdikning o'rinli ekani ravshan:

- a) $n=m$, $n>m$, $n<m$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o'rinli,
- v) $n<m$, $m<p$ tengsizliklardan $n<p$ tengsizlikning o'rinli ekani kelib chiqadii.

Agar biror E to'plam elementlari orasida Yuqorida keltirilgan

a) va b) munosabatlar o'rinli bo'lsa, E to'plam tartiblangan to'plam oladi. Natural sonlar to'plami elementlarini o'zaro taqqoslab, bu to'plam elementlari orasida eng kichik elementi mavjudligini va u 1 soni ekanligini topamiz. Ammo N to'plam elementlari orasida eng katta element yo'q. Haqiqatdan, har bir $n \in N$ uchun ya'na N ga tegishli $(n+1)$ son topiladi. Ma'lumki, ikki nato'ral n, m sonlar yig'indisi $(n+m)$ hamda ko'paytmasi yana nato'ral son bo'lib, qo'shish va ko'paytirish amallari yecha quyidagi xossalarga ega

1°. Kommutativlik: $n+m=m+n$, $m \cdot n=n \cdot m$

2°. Assotsiativlik: $(n+m)+r=n+(m+r)$, $(n \cdot m) \cdot p=n \cdot (m \cdot p)$

3°. Distributivlik: $(n+m)p=n \cdot p+m \cdot p$

4°. N to'plamda shunday k element borki, $k \cdot n=n \cdot k=n$ bo'ladi. Bu element $k=1$ dir. N to'plamda $n+p=n$ tenglikni qanoatlantiradigan nato'ral r son mavjud emas. Agar $m \in N$, $n \in N$ bo'lsa, $m+x=n$ lar natural sonlar to'plamda doim yechimga ega bo'lavermaydi. U faqat $n>m$ bo'lgandagina yechimga ega. Agar $n \leq m$ bo'lsa yechimi N to'plamda deb yo'zing mavjud emas.

Ishorasi nato'ral sonlarga tyechnqari bo'lgan sonlarni manfiy nato'ral sonlar to'plamini tashkil etadi va u odatda Z harfi bilan belgilanadi:

$$Z = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Ravshanki $N \subset Z$.

Butun sonlar to'plami nato'ral sonlar to'plami kabi tartiblangan belgini to'plam deb yo'zing bo'ladi. Ixtiyoriy ikki raqobat va q butun sonlar yig'indisi $r+q$, ayirmasi $r-q$, ko'paytmasi $r \cdot q$ yana butun son bo'lib, qo'shish, ayirish ko'paytirish amallariga nisbatan 1°, 2°, 3°, 4°. Xossalari bilan birga yana quyidagi xossalari ham o'rinlidir:

5°. Ixtiyoriy $q \in Z$ element uchun Z to'plamdashanday element $-q$ mavjudki, $q+(-q)=0$ bo'ladi.

6°. Ixtiyoriy $q \in Z$ element uchun $q+0q=qq$ bo'ladi.

7°. Ixtiyoriy $q \in Z$ element uchun $q \cdot 0q=0q \cdot q$ bo'ladi.

Demak, bir tomondan, Z belgini to'plam deb yo'zing uz ichiga N to'plamning deb yo'zing barcha elementlarini olsa, ikkinchi tomondan yecha, Z belgini to'plam deb yo'zing elementlari uchun qo'shish va ko'paytirish amallari N belgini to'plam deb yo'zingdagi qo'shish hamda ko'paytirish amallari bilan bir xil bo'ladi. Butun sonlar belgini to'plamda deb yo'zing $m+xq$, $m \in Z$, $n \in Z$ lar doim yechimga ega. Ammo shu to'plamda $m \cdot xq$ $m \neq 0$ lar doim yechimga ega bo'lavermaydi. Masalan, $2x=-4$ lar Z belgini to'plamda deb yo'zing da $2x=-5$ yecha Z belgini to'plam deb yo'zing yechimga ega emas.

2. Ratsional sonlar.

Ushbu $r = \frac{p}{n}$, $p \in Z$, $n \in N$ kasr ko'rinishida tasvirlanadigan har bir son ratsional son deyiladi. Barcha ratsional

sonlar to'plamini Q deb belgilaymiz.

Ravshanki $N \subset Z \subset Q$.

Q to'plamda ham bir-biriga teng bo'lgan ratsional sonlar bitta element deb qaraladi. Masalan, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{16}{24}$ ratsional sonlari bitta $\frac{2}{3}$ ga teng bo'lgan ratsional son deb olinadi.

Ratsional sonlar to'plami Q nato'ral va butun sonlar to'plami kabi tartiblangan. Ikki ratsional son yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati yana ratsional son bo'ladi. SHu to'rt arifmetik amallarga nisbatan ushbu xossalari o'rinlidir:

1°. Kommutativlik : $r+t=t+r$, $r \cdot t=t \cdot r$.

2°. Assotsiativlik: $(r+t)+c=r+(t+c)$, $(r \cdot t) \cdot c=r \cdot (t \cdot c)$.

3°. Distributivlik: $(r+t)c=r \cdot c+t \cdot c$

4°. Nol sonning xususiyati: $r+0=r$, $r \cdot 0=0$.

5°. Bir sonning xususiyati: $r \cdot 1=1 \cdot r=r$.

6°. qarama-qarshi elementning mavjudligi:

ixtiyoriy $r \in Q$ uchun shunday $-r \in Q$ son mavjudki, $r+(-r)=0$ bo'ladi.

7°. Teskari elementning mavjudligi ixtiyoriy $r \in Q$ ($r \neq 0$) uchun shunday $r^{-1} \in Q$ son mavjudki, $r \cdot r^{-1}=1$ bo'ladi.

8°. Ixtiyoriy $r \in Q$, ixtiyoriy $t \in Q$, ixtiyoriy $s \in Q$ sonlar uchun $r>t$, bo'lganda $r+=t+=$ bo'ladi.

9°. Ixtiyoriy $r \in Q$, ixtiyoriy $t \in Q$, ixtiyoriy $s \in Q$ ($s>0$) sonlar uchun $r>t$ bo'lganda $r \cdot c>t \cdot c$ bo'ladi.

10°. Ixtiyoriy ikki musbat r va t ratsional sonlar uchun shunday natural son n mavjudki, $n \cdot r > t$ bo'ladi. Bu xossa odatda Arximed aksiomasi deb ham Yuritiladi. Ratsional sonlarni chekli yoki cheksiz davrini unli kasr ko'rinishida ifodalash mumkin. Davriy bo'lmagan cheksiz unli kasr bilan tasvirlanuvchi sonlar irratsional sonlar deb ataladi : bunday sonlar $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $5-\sqrt{2}$ va h.kazo.

Barcha ratsional va irratsional sonlar birgalikda haqiqiy sonlar to'plami deb ataladi. Haqiqiy sonlar to'plami R harfi bilan belgilanadi. Ta'rifga ko'ra $R = Q \cup U$, U -irratsional sonlar to'plam haqiqiy sonlar qiymatlari bo'yicha tartibga solingan, ya'ni har bir juft x va y haqiqiy sonlar uchun ushbu $x < y$, $x = y$, $x > y$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi to'g'ridir. Haqiqiy sonlarni sonlar o'qining nuqtalari bilan tasvirlash mumkin. Sonlar o'qi deb shunday cheksiz to'g'ri chiziqqa aytiladi, unda: 1) sanoq boshi deyiladigan biror 0 nuqta, 2) musbat yo'nalish, 3) uzunliklarni o'lchash uchun masshtab tanlab olingan bo'ladi.

Haqiqiy sonning absolyut qiymati va uning xossalari. Biror $x \in R$ ($x \neq 0$) sonni olaylik. Bunda $x, -x$ sonlardan biri albatta musbat bo'ladi. Bu musbat son x sonning absolyut qiymati deyiladi va uni $|x|$ kabi belgilanadi. Nol sonning absolyut qiymati deb nol soninigi o'zi olinadi: $|0| = 0$.

Demak,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases} \quad (1)$$

Haqiqiy sonning absolyut qiymati bir nechta xossalarga ega:

1°. $x \in R$ son uchun $|x| \geq 0$, $|x| = |-x|$, $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$ munosabatlar o'rinli. Bu munosabatlar sonning absolyut qiymati ta'rifidan kelib chiqadi.

2°. Agar $0 < a \in R$ son berilganda $x \in R$ sonlar $|x| < a$ (2)

Tengsizlikni qanoatlantirsa, bunday x sonlar $-a < x < a$ (3)

Tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha.

3°. Agar $0 < a \in R$ son berilganda $x \in R$ sonlar $|x| \leq a$ tengsizlikni qanoatlantirsa, bunday x sonlar $-a \leq x \leq a$ tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha.

4°. Ikki $x \in R$ va $y \in R$ haqiqiy son yig'indisining absolyut qiymati bu sonlar absolyut qiymatlarining yig'indisidan katta emas, ya'ni

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

5°. $x \in R$, $y \in R$ sonlar uchun $|x-y| \geq |x| - |y|$ tengsizlik o'rinli.

6°. $x \in R$, $y \in R$ sonlar uchun $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ tenglik o'rinli.

7°. $x \in R$, $y \in R$, $y \neq 0$ sonlar uchun $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ tenglik o'rinli.

MAVZU № 2

DETERMINANTLAR VA ULARNING XOSSALARI. KRAMER QOIDASI VA GAUSS USULI.

Reja

1. 2-tartibli determinantlar. Determinantlarning asosiy xossalari
2. 3-tartibli determinantlar
3. n - tartibli determinantlar
4. Kramer qoidasi.
5. Gauss usuli. Gauss usulining Gauss-Jordan modifikatsiyasi

2-tartibli determinantlar. Determinantlarning asosiy xossalari

1. a, v, s va d haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin.

2. Ular 2- tartibli determinant yoki aniqlovchi deb ataluvchi $ad - bc$ sonni aniqlaydi va $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

ko'rinishda yoziladi.

3. Ta'rifga asosan, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

4. a, v, c va d sonlarga determinant elementlari deyiladi. Ikkinchi tartibli determinantda a, b - birinchi, c, d -

ikkinchi satr, a,c- birinchi, b,d—ikkinchi ustun, a,d- bosh yoki birlamchi, b,c- ikkilamchi diagonallar bir-biridan farqlaniladi.

5. 2-tartibli determinant misolida determinantlarning quyidagi asosiy xossalarini tekshirib ko`rish qiyin emas.

6. Determinantning kattaligi:

7. 1-xossa: satrlari mos ustunlari bilan almashtirilsa - o`zgarmaydi;

8. 2-xossa: satrlari (ustunlari) o`rinlari almashtirilsa -

9. - ishorasi qarama-qarshisiga o`zgaradi;

10. 3-xossa: biror-bir satr (ustun) har bir elementi k haqiqiy songa

11. ko`paytirilsa - k marta ortadi;

12. 4-xossa: biror-bir satr (ustun) har bir elementi nolga teng bo`lsa

13. - nolga teng;

14. 5-xossa: ikki satr (ustun) mos elementlari o`zaro teng yoki

15. proporsional bo`lsa- nolga teng.

16. Quyida ta`riflanadigan 3- tartibli, ixtiyoriy n-tartibli determinantlar uchun ham Yuqoridagi xossalar o`rinli.

3-tartibli determinantlar

17. Uchinchi tartibli determinant **yoki** aniqlovchi **deb**,

$$18. \Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (1.1)$$

19. yig`indiga teng songa aytiladi va

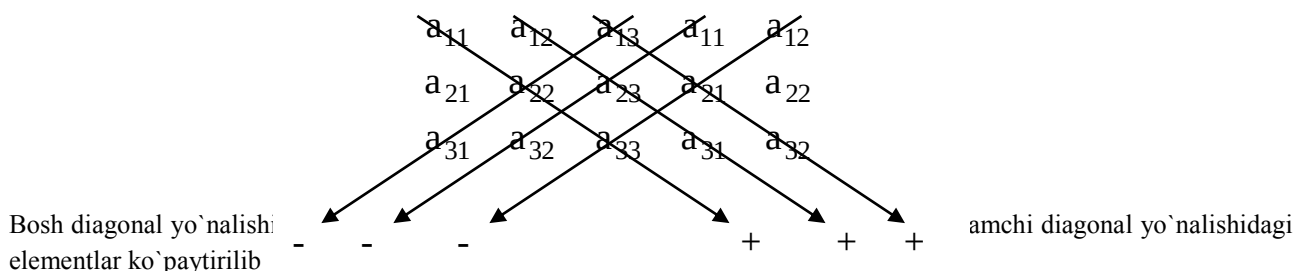
$$20. \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |a_{ik}|$$

21. ko`rinishda yoziladi.

a_{ik} haqiqiy sonlarga determinantning elementlari deyiladi.

a_{ik} element i-satr va k-ustun elementi bo`lib, ularning kesishmasida joylashgan. 3-tartibli determinantda ham satr va ustunlar, bosh va ikkilamchi diagonallar bir-biridan farqlaniladi.

(1.1) Standart ifoda sodda tuzilishga ega. a_{ik} elementlar bo`yicha hisoblanadigan  $\Delta$  yig`indini Sarrius qoidasi yordamida tuzish mumkin. Determinant ustunlariga o`ngdan birinchi va ikkinchi ustunlarini ko`chirib yozib, kengaytirilgan jadval tuzamiz:



Δ yig`indi uchburchaklar usulida ham tuzilishi mumkin.

$$\Delta = + \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

Oldidagi ishorasi bilan birga Δ hadi deyiladi. Har bir ko`paytma determinantning har bir satr va ustuni element - vakillaridan tarkib topgan. (1.1) ifodaning standart deyilishiga sabab, uning har bir hadida ko`paytuvchi elementlar birinchi indeks - satr nomerining o`sish tartibida joylashtirilgan. Ikkinchi indeks ustun nomerlari esa quyidagi tartibda joylashgan:

$$\left. \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \right\} (1.2)$$

$$\left. \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \right\} (1.3)$$

(1.2) va (1.3) 1, 2 va 3 sonlarining o`rin almashtirishlaridir. (1, 2, 3) tartiblangan o`rin almashtirishga asosiy o`rin

almashtirish deyiladi.

1. Agar o`rin almashtirishda uning ikki aniq elementlari o`rinlari almashtirilsa, ushbu elementlar transpozisiyalangan deyiladi. Transpozisiyalanganda o`rin almashtirish tizimi boshqasi bilan almashinadi. Masalan,
- 2.

Agar biror-bir o`rin almashtirish tizimi asosiysidan bir necha  $N_1, N_2$ , va hokazo transpozisiyalash usullari bilan hosil qilingan bo`lsa $(1, 2, 3) \rightarrow (3, 2, 1) \rightarrow (3, 2, 1)$ Ba xOKa3O. ini ta`kidlash muhimdir. O`rin almashtirish tizimi $(1, 2, 3) \rightarrow (3, 2, 1) \rightarrow (3, 2, 1)$ bo`lsa, mos ravishda juft (toq) deyiladi.

$j = (j_1, j_2, j_3)$ o`rin almashtirish tizimi berilgan bo`lsin. Bu erda $j_1, j_2, j_3 - 1, 2$ va 3 sonlarining tanlangan biror-bir tartibi. $t(j)$ - asosiy $(1, 2, 3)$ o`rin almashtirishdan  $j$  o`rin almashtirishga o`tish uchun zarur transpozisiyalar soni bo`lsin. Agar $t(j)$ – juft (toq) son bo`lsa,  $j$ - juft (toq) o`rin almashtirishdir.

(1.2) o`rin almashtirishlar tizimi juft, (1.3) o`rin almashtirishlar tizimi esa toqdir.

Yuqorida keltirilgan tushunchalardan foydalanib, uchinchi tartibli determinantni boshqa teng kuchli ta`rifini berish mumkin.

3-tartibli determinant yoki aniqlovchi deb, quyidagi yig`indiga teng Δ songa aytiladi:

$$\Delta = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

bu erda, $j(j_1, j_2, j_3)$ - asosiy $(1, 2, 3)$ o`rin almashtirishdan hosil bo`lishi mumkin bo`lgan o`rin almashtirishlar.

Ushbu ta`rif  $n$ -tartibli determinantni ta`riflashda umumlashtirilishi mumkin.

n - tartibli determinantlar

n – tartibli determinant yoki aniqlovchi deb, quyidagi yig`indiga teng Δ songa aytiladi:

$$\Delta = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \quad \text{Ba}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ko`rinishda yoziladi, bu erda  $j(j_1, j_2, \dots, j_n)$  - asosiy  $(1, 2, \dots, n)$  o`rin almashtirishdan olinishi mumkin bo`lgan ixtiyoriy o`rin almashtirish, $t(j)$ – asosiydan j o`rin almashtirishga o`tishda transpozisiyalar soni.

$(-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ ko`paytmaga determinantning hadi deyiladi.  $n$  – tartibli determinant  $n^2$  haqiqiy son – elementlar orqali aniqlanadi va yig`indi $n!$ ta haddan iborat.

DETERMINANTLARNING XOSSALARI

Minor va algebraik to`ldiruvchilar haqida tushuncha

n - tartibli $\Delta = |a_{ik}|$ determinant berilgan bo`lib, uning ixtiyoriy  $i$ -satri va ixtiyoriy  $k$ -ustunini o`chiramiz. Qolgan ifoda $(n-1)$ -tartibli determinantni tashkil etadi va a_{ik} elementning minori deyiladi. a_{ik} element minori M_{ik} yozuv bilan belgilanadi.

a_{ik} elementning algebraik to`ldiruvchisi yoki ad`yunkti deb,

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} \text{ kattalikka aytiladi.}$$

Masalan, uchinchi tartibli $\Delta = |a_{ik}|$ determinantning a_{12} elementi minori M_{12} va algebraik to`ldiruvchisi A_{12} mos ravishda:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$$

2. Determinantlarning xossalari

Ixtiyoriy n -tartibli determinant o`zining asosiy xossalariidan (§1 ga qaralsin) tashqari, ko`shimcha ravishda quyidagi xossalarga ham ega.

6-xossa: Determinantning ixtiyoriy satri yoki ustuni elementlarining o`z algebraik to`ldiruvchilariga ko`paytmalarining yig`indisi uning kattaligiga teng:

$$\Delta = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2.1)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (2.2)$$

(2.1) yig'indi n-tartibli determinantni i-satr elementlari bo'yicha yoyish formulasi deyilsa, (2.2) yig'indi k-ustun elementlari bo'yicha yoyish formulasi deyiladi.

Masala: Uchinchi tartibli $\Delta = |a_{ik}|$ determinantni ikkinchi ustun elementlari bo'yicha yoying.

Uchinchi tartibli determinantni ikkinchi ustun elementlari bo'yicha yoyish formulasini qo'llaymiz, natijada

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 a_{i2} A_{i2} &= a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - \\ &- a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{22} (a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31}) - \\ &- a_{32} (a_{11} a_{23} - a_{13} a_{21}) = \Delta \end{aligned}$$

7-xossa: Determinant biror satri (yoki ustuni) elementlarining boshqa parallel satr (yoki ustun) mos elementlari algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng:

$$\Delta = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = 0 \quad (i \neq j, \quad i, j=1,2,\dots,n)$$

Ushbu xossa determinantlarning 5- xossasi asosida isbotlanadi.

8-xossa: n-tartibli aniq bir satrlari (ustunlari) bir-biridan farq qiluvchi, qolganlari esa aynan bir xil bo'lgan Δ_1 va Δ_2 determinantlar berilgan bo'lsin. Berilgan Δ_1 va Δ_2 determinantlarning yig'indisi ko'rsatilgan farqli satri (ustuni) mos elementlarining yig'indisidan iborat, umumiy satrlari (ustunlari) esa o'zgarmas qoladigan n-tartibli Δ determinantga teng.

Masalan, uchinchi ustunlari farqli, qolgan ustunlari aynan bir xil uchinchi tartibli determinantlar quyidagicha qo'shiladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{31} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} + b_{33} \end{vmatrix}$$

9-xossa: Determinant kattaligi uning biror satri (ustuni) elementlariga boshqa parallel satr (ustun) mos elementlarini bir xil songa ko'paytirib qo'shganda o'zgarmaydi.

Yuqori tartibli determinantlarni hisoblashning rasional usuli uning biror satri yoki ustunida keltirilgan xossa asosida nollar yig'ib, so'ngra shu satr yoki ustun bo'yicha yoyib hisoblashdir. Yuqori tartibli determinantni hisoblash masalasi ketma-ket ravishda quyi tartibli determinantlarni hisoblash bilan almashinadi.

Masalan:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -3 & 9 \\ -1 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= -3 \begin{vmatrix} -15 & 0 & -14 \\ 6 & 0 & 9 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -15 & -14 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} -15 & -14 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-17) = -153 \end{aligned}$$

10-xossa: n-tartibli berilgan $\Delta_1 = |a_{ik}|$ va $\Delta_2 = |b_{ik}|$ determinantlar ko'paytmasi n-tartibli $\Delta = |s_{ik}|$ determinantga teng va uning ixtiyoriy s_{ik} elementi quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

c_{ik} element Δ_1 determinant i-satri elementlarining Δ_2 determinant k-ustuni mos elementlariga ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11}\mathbf{b}_{11} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{b}_{21} & \mathbf{a}_{11}\mathbf{b}_{12} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{b}_{22} \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{b}_{11} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{b}_{21} & \mathbf{a}_{21}\mathbf{b}_{12} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{b}_{22} \end{vmatrix}$$

r-Kapelli teoremasi. Chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun uning asosiy matrisasi rangining kengaytirilgan matrisasi rangiga teng bo'lishi zarur va etarli. Agar asosiy A matrisa rangi kengaytirilgan $(A | V)$ matrisa rangiga teng bo'lib, teng ranglar o'z navbatida noma'lumlar soni m ga teng bo'lsa, ya'ni $\text{rang}(A) = \text{rang}(A | B) = m$, sistema aniq bo'ladi. Agar A matrisa rangi kengaytirilgan $(A | V)$ matrisa rangiga teng bo'lib, teng ranglar noma'lumlar soni m dan kichik bo'lsa, ya'ni $\text{rang}(A) = \text{rang}(A | V) < m$, sistema aniqmas bo'ladi. Agarda asosiy matrisa rangi kengaytirilgan matrisa rangidan kichik bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmaydi.

n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi normal ko'rinishda berilgan bo'lsin:

[illegible]

(5.2) sistema uchun uning aniqlik sharti muhimdir.

Kramer teoremasi. n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi aniq bo'lishi uchun uning asosiy matrisasi determinantning noldan farqli bo'lishi zarur va etarli. YAgona echim $\left(\frac{\det A_1}{\det A}; \frac{\det A_2}{\det A}; \dots; \frac{\det A_j}{\det A}; \right)$

..., $\frac{\det A_n}{\det A}$) tartiblangan tizimdan iborat bo'ladi, bu erda A_j asosiy A matrisadan j -ustunning ozod hadlar ustuni

bilan almashtirilgani bilan farq qiluvchi matrisa. Agarda $\det A=0$ bo'lsa, (5.2) sistema yoki aniqmas yoki birgalikda bo'lmaydi.

Masala. Quyida berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarini birgalikda va aniqligini tekshiring. Birgalikdagi sistemalarni Kramer formulalari yordamida eching:

$$\begin{array}{ll} 1) \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{array} \right. & 2) \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{array} \right. \\ 3) \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{array} \right. & \end{array}$$

Berilgan sistemalar uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi bo'lgani uchun, dastlab, Kramer teoremasini tatbiq etamiz:

$$1) \det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0 \text{ bo'lgani uchun - sistema aniq.}$$

YAgona echim Kramer formulalari yordamida topiladi:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{27} = -\frac{81}{27} = -3,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{27} = \frac{54}{27} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{27} = \frac{27}{27} = 1.$$

Sistema echimi: (-3; 2; 1).

$$2) \det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0. \text{ Kramer teoremasiga ko'ra, sistema yoki aniqmas yoki birgalikdama.}$$

Kroneker-Kapelli teoremasiga murojaat etib, sistema kengaytirilgan matrisasi rangini Gauss algoritmi yordamida aniqlaymiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 9 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A | V) < 3$ (noma'lumlar soni) shartlar bajarilgani uchun sistema aniqmas va quyidagi sistemaga teng kuchli:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = x_3 + 7 \\ 4x_1 + 5x_2 = 3x_3 - 5 \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Oxirgi sistemani Kramer formulasi yordamida yechish mumkin:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_3 + 7 & 1 \\ 3x_3 - 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = -\frac{x_3 + 20}{7}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & x_3 + 7 \\ 4 & 3x_3 - 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{5x_3 + 9}{7}.$$

$$\text{Sistema echimi: } \left(-\frac{x_3 + 20}{7}; \frac{5x_3 + 9}{7}; x_3 \right).$$

3) $\det A = 0$ bo'lgani uchun sistema yoki aniqmas yoki birgalikdama.

Sistema kengaytirilgan matrisasi rangini nollar yig'ib, hisoblaymiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 10 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$\text{rang}(A) = 2 < 3 = \text{rang}(A | V)$ munosabat o'rinli bo'lgani uchun sistema birgalikdama.

. Gauss usuli. Gauss usulining Gauss-Jordan modifikatsiyasi.

m ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Agar sistema tenglamalarining birida x_k ($k=\{1, 2, \dots, m\}$) noma'lum +1 koeffisient bilan qatnashib, qolgan barcha tenglamalarida x_k noma'lumli hadlar mavjud bo'lmasa yoki yo'qotilgan bo'lsa, sistema x_k noma'lumga

nisbatan ajratilgan yoki x_k noma'lum sistemaning ajratilgan noma'lumi deyiladi. Ajratilgan noma'lum bazis noma'lum deb ham yuritiladi.

Sistemaning har bir tenglamasi ajratilgan yoki bazis noma'lumga ega ko'rinishga **noma'lumlari ajratilgan** yoki **bazisga keltirilgan sistema** deyiladi. Har qanday birgalikdagi sistema o'zining ajratilgan yoki bazis noma'lumlari tizimi mavjudligi bilan xarakterlanadi. Noma'lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistemaning ajratilgan yoki bazis noma'lumlari tizimiga tegishli bo'lmagan noma'lumlari ajratilmagan, ozod yoki erkli noma'lumlar deb ataladi. Masalan, quyidagi

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & - x_5 = -1 \\ & - x_2 + x_3 & 4x_5 = 7 \\ & + 5x_2 & + x_4 - 3x_5 = 6 \end{cases}$$

noma'lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistemada x_1 , x_3 va x_4 ajratilgan yoki bazis noma'lumlar bo'lsa, x_2 va x_5 noma'lumlar esa ozod yoki erkli noma'lumlardir.

Agar noma'lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistemaning har bir noma'lumi uning ajratilgan yoki bazis noma'lumlari tizimiga tegishli bo'lsa, sistema aniq, ya'ni yagona echimga ega bo'ladi. Agarda noma'lumlari ajratilgan sistema erkli noma'lumlarga ham ega bo'lsa, aniqmas, ya'ni cheksiz ko'p echimlarga ega bo'ladi.

Berilgan dastlabki shakldagi sistemaning **umumiy echimi** deb, unga teng kuchli bo'lgan noma'lumlari ajratilgan yoki biror-bir bazisga keltirilgan sistemaga aytiladi.

Sistemaning umumiy echimini qurish usuliga esa **Gauss usuli** deyiladi. Sistemaning barcha echimlarini topish uchun uning umumiy echimini qurish etarli. Berilgan sistemaning umumiy echimini aniqlash uchun uning ustida quyidagi elementar almashtirishlar bajariladi:

- 1) sistema tenglamalari o'rinlarini almashtirish mumkin;
- 2) sistema biror-bir tenglamasi ikkala qismini biror noldan farqli songa ko'paytirish mumkin;
- 3) sistema biror-bir tenglamasiga uning boshqa tenglamasini songa ko'paytirib, qo'shish mumkin.

Agar sistemani almashtirish jarayonida $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_m = 0$ nol yoki trivial tenglama hosil bo'lsa, u o'chiriladi. Agarda $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_m = b$ ($b \neq 0$) zid yoki qarama-qarshi tenglama hosil bo'lsa, sistemaning o'zi ham zid, ya'ni birgalikda emas.

Sistema umumiy echimini qurish usuli – Gauss usulining bir necha modifikatsiyalari mavjud. Quyida **Gaussning klassik** yoki ixcham sxema usuli va **Jordan modifikatsiyalari** bilan tanishamiz.

Gaussning klassik yoki ixcham sxema usuli to'g'ri va teskari yurishlardan iborat. To'g'ri yurishda sistemaning asosiy matrisasi trapesiyali yoki uchburchakli ko'rinishga keltiriladi. Teskari yurishda uning noma'lumlari ketma-ket ravishda aniqlanadi va umumiy echim quriladi.

Masala. §5 da Kramer formulalari yordamida echilgan sistemani Gaussning klassik usulida eching.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ +4x_2 + x_3 = 9 \\ +\frac{7}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ +4x_2 + x_3 = 9 \\ -\frac{27}{8}x_3 = -\frac{27}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi mazmun-mohiyati quyidagidan iborat: Dastlabki normal ko'rinishda berilgan sistemaning kengaytirilgan $(A | B)$ matrisasi quriladi. Yuqorida zikr etilgan sistemani teng kuchli sistemaga aylantiruvchi elementar almashtirishlardan foydalanib, kengaytirilgan matrisaning chap qismida yoki uning qism ostida birlik matrisa hosil qilinadi. Bunda birlik matrisadan o'ngda echimlar ustuni hosil bo'ladi. Gauss-Jordan usulini quyidagicha sxematik ifodalash mumkin:

$$(A | V) \sim (E | X^*).$$

CHiziqli tenglamalar sistemasini yechish Gauss-Jordan usuli noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish Gauss

strategiyasi va teskari matrisa qurish Jordan taktikasiga asoslanadi. Teskari matrisa oshkor shaklda qurilmaydi, balki o'ng ustunda bir yo'la teskari matrisaning ozod hadlar ustuniga ko'paytmasi – echimlar ustuni quriladi.

Masala. §5 da Kramer formulalari yordamida echilgan sistemalarni Gauss-Jordan usulida eching.

$$1) \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 2 & 3 & | & -5 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 8 & 0 & 5 & | & -19 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & | & -13 \\ -27 & 0 & 0 & | & 81 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 5 & -3 & | & -5 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 14 & 0 & 2 & | & -40 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & | & -13 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix}$$

Sistema aniqlanmas bo'lib, umumiy echim ko'rinishlaridan biri

$(x_1, -x_1 - 13; -7x_1 - 20)$

shaklga ega. Bu erda, x_1 erkli noma'lum va $x_1 \in \mathbb{R}$.

$$3) \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 5 & -3 & | & -4 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 14 & 0 & 2 & | & -39 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & | & -13 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix}$$

Sistemaning ikkinchi tenglamasi zid tenglama. Demak, sistemaning o'zi ham zid, ya'ni birgalikda emas.]

MAVZU № 3

MATRISALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR. TESKARI MATRISA.

Reja

1. Matrisa haqida tushuncha
2. Matrisalar va ular ustida amallar
3. Kvadrat matrisa determinanti.
4. Teskari matrisa haqida tushuncha
5. Teskari matrisa qurish algoritmlari.

Matrisa haqida tushuncha

a_{ik} haqiqiy sonlar n ta satr va m ta ustunda joylashgan quyidagi to'g'ri to'rtburchak

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ik})$$

shaklidagi jadvalga $n \times m$ o'lchamli **matrisa** deyiladi.

a_{ik} haqiqiy sonlar matrisa elementlari deb ataladi.

$1 \times m$ o'lchamli matrisaga **satr matrisa**, $n \times 1$ o'lchamli matrisaga **ustun matrisa** deyiladi. **Nol matrisa** deb, har bir elementi nolga teng bo'lgan matrisaga aytiladi.

$n \times m$ o'lchamli $A=(a_{ik})$ va $V=(b_{ik})$ matrisalar berilgan bo'lsin. Agar matrisalarning barcha mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, matrisalar o'zaro teng deyiladi va $A=V$ ko'rinishda yoziladi.

2. Matrisalar ustida amallar.

O'lchamlari aynan teng A va V matrisalarni qo'shganda, ularning mos elementlari qo'shiladi: $A+V=(a_{ik})+(b_{ik})=(a_{ik}+b_{ik})$.

Haqiqiy son matrisaga ko'paytirilganda, matrisaning har bir elementi shu songa ko'paytiriladi: $k(a_{ik})=(ka_{ik})$.

Misol. Amallarni bajaring:

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & -7 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Matrisalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagi xossalarga bo'ysinadi: 1) $A+V=V+A$; 2) $A+(B+C)=(A+B)+C$; 3) $k(A+B)=kA+kB$; 4) $k(nA)=(kn)A$; 5) $(k+n)A=kA+nA$.

Agar A matrisaning ustunlari soni V matrisaning satrlari soniga teng bo'lsa, A va V matrisalar **o'zaro zanjirlangan matrisalar** deyiladi. O'zaro zanjirlangan matrisalarni ko'paytirish mumkin.

$n \times m$ o'lchamli $A=(a_{ik})$ matrisani $m \times p$ o'lchamli $B=(b_{ik})$ matrisaga ko'paytmasi $n \times p$ o'lchamli $C=(c_{ik})$ matrisaga teng bo'lib, uning s_{ik} elementlari quyidagicha aniqlanadi

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk},$$

ya'ni s_{ik} element A matrisa i -satri elementlarining V matrisa k -ustuni mos elementlariga ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

Masalan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

Matrisalarni ko'paytirish quyidagi xossalarga bo'ysinadi:

1. $(kA)B=k(AB)$; 2. $(A+B)C=AC+BC$;
3. $A(B+C)=AB+AC$; 4. $A(BC)=(AB)C$.

Matrisalarning ko'paytmasi ko'paytuvchi matrisalar nolmas bo'lishiga qaramasdan, nol matrisani berishi ham mumkin.

A va V matrisalarning ko'paytmasi har doim o'rin almashtirish qonuniga bo'ysinavermaydi, ya'ni umuman olganda $AV \neq VA$. $AV=VA$ tenglikni qanoatlantiruvchi A va V matrisalarga **o'rin almashinuvchi** matrisalar deyiladi.

Berilgan $n \times m$ o'lchamli A matrisaning har bir satri mos ustunlari bilan almashtirilsa, hosil bo'lgan $m \times n$ o'lchamli matrisaga A matrisaning **transponirlangan matrisasi** deyiladi va A^T ko'rinishda belgilanadi.

Matrisalar ko'paytmasi transponirlangani uchun quyidagi formula o'rinni: $(AV)^T = V^T A^T$.

Satrlari soni n ustunlari soni m ga teng bo'lgan matrisaga n -tartibli **kvadratik matrisa** deyiladi. Kvadratik matrisaning quyidagi xususiy ko'rinishlari bir-biridan farqlaniladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{Yuqori uchburchakli matrisa;}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{quyi uchburchakli matrisa;}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{diagonal matrisa;}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E - \text{birlik matrisa.}$$

3. Matrisalar o'zlarining quyidagi sonli xarakteristiklari bo'yicha taqqoslanadi: 1) kvadratik matrisa determinanti; 2) normasi; 3) rangi.

3. Kvadrat matrisa determinanti. Matrisa normasi.

4. Berilgan n - tartibli $A = (a_{ik})$ kvadratik matrisaning determinanti yoki aniqlovchisi deb, n - tartibli $|a_{ik}|$ determinantga aytiladi va $\det(A)$ ko'rinishda yoziladi.

5. Kvadrat matrisaning determinanti yoki aniqlovchisi uning asosiy sonli xarakteristikasi hisoblanadi. Yuqori, quyi uchburchakli va diagonal matrisalarning determinanti bosh diagonal elementlarining ko'paytmasiga teng bo'lsa, birlik matrisaning determinanti birga teng.

6. Ikki teng o'lchovli kvadrat matrisalar ko'paytmasining determinanti alohida matrisalar determinantlari ko'paytmasiga teng: $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Berilgan $n \times m$ o'lchamli $A = (a_{ik})$ matrisaning normasi deb, unga mos qo'yiluvchi quyidagi nomanfiy

$$N = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik}^2}$$

songa aytiladi.

$$\text{Masalan, } A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -9 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \text{ matrisaning normasi}$$

$$N = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2 + (-9)^2 + 8^2 + 1^2} = 14.$$

4. Matrisa rangi va uni aniqlash usullari.

$n \times m$ o'lchamli $A = (a_{ik})$ matrisa berilgan bo'lib, p matrisaning satrlari soni n va ustunlari soni m larning kichigidan katta bo'lmagan son bo'lsin. Matrisaning ixtiyoriy p ta satrini va ixtiyoriy p ta ustunini o'chiramiz. O'chirilgan elementlar p - tartibli kvadratik matrisani tashkil etadi va unga o'z navbatida p -tartibli determinant yoki minorni mos qo'yish mumkin.

A matrisaning rangi deb, noldan farqli matrisa osti minorlarining eng katta tartibiga aytiladi va $\text{rang}(A)$ ko'rinishida ifodalanadi.

$$\text{1-masala. } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \text{ matrisa rangini aniqlang.}$$

Berilgan matrisa 3×2 o'lchamli bo'lgani uchun satrlari va ustunlari sonini taqqoslaymiz va kichigi 2 ni tanlaymiz. Matrisadan ikkinchi tartibli minorlar ajratamiz va ularning kattaligini hisoblaymiz. Jarayonni noldan farqli 2-tartibli minor ajralmaguncha davom etamiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Berilgan matrisadan noldan farqli eng Yuqori ikkinchi tartibli minor ajraldi. Demak, ta'rifga binoan, A matrisa rangi 2 ga teng.

$$\text{2-masala. } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \text{ matrisa rangini aniqlang.}$$

V matrisadan ajralishi mumkin bo'lgan eng yuqori - ikkinchi tartibli har qanday minor nolga teng:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, matrisa rangi ikkiga teng bo'la olmaydi. V matrisa nolmas matrisa bo'lgani uchun uning rangi 1 ga teng.

3-masala. $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ matrisa rangini aniqlang.

S matrisa uchinchi tartibli kvadratik matrisa. Undan yagona eng Yuqori 3-tartibli M_1 minor ajraladi. M_1 minor kattaligini hisoblaymiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

$M_1 = 0$ bo'lgani uchun, S matrisa rangi 3 ga teng bo'la olmaydi.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ bo'lgani uchun, } \text{rang}(S) = 2.$$

Matrisa rangi uning ustida quyidagi **elementar almashtirishlar** bajarganda o'zgarmaydi:

1. Matrisa biror satri (ustuni) har bir elementini biror noldan farqli songa ko'paytirganda;
2. Matrisa satrlari (ustunlari) o'rinlari almashtirilganda;
3. Matrisa biror satri (ustuni) elementlariga uning boshqa parallel satri (ustuni) mos elementlarini biror songa ko'paytirib, so'ngra qo'shganda;
4. Matrisa transponirlanganda.

Matrisa rangini aniqlashning ta'rif asosida biz Yuqorida masalalarda ko'rgan «**minorlar ajratib hisoblash**» usuli va nollar yig'ib hisoblashga asoslangan «**Gauss algoritmi**» usullari mavjud.

Matrisa rangi «Gauss algoritmi» yoki nollar yig'ish usuli asosida quyidagicha aniqlanadi: Dastlabki ko'rinishdagi matrisa Yuqorida sanab o'tilgan elementar almashtirishlar yordamida «**trapesiyasimon matrisa**» ko'rinishiga keltiriladi. Trapesiyasimon matrisa deb, bosh diagonaldan Yuqorida yoki quyida joylashgan har bir elementi nolga teng bo'lgan matrisaga aytiladi. Trapesiyasimon matrisaning rangi yoki xuddi shuning dastlabki matrisaning rangi trapesiyasimon matrisaning noldan farqli bosh diagonal elementlari soniga teng.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ matrisaning rangini nollar yig'ish usulida aniqlang.

Berilgan dastlabki matrisa ustida quyidagicha elementar almashtirishlar bajaramiz va uning ko'rinishini trapesiyasimon ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trapesiyasimon matrisa bosh diagonal elementlaridan ikkitasi noldan farqli bo'lgani uchun uning rangi va shu bilan birga berilgan matrisa rangi ikkiga teng.

1. Teskari matrisa haqida tushuncha.

n – tartibli kvadratik $A=(a_{ik})$ matrisa berilgan bo'lsin. Agar A matrisa determinanti noldan farq qilib, uning rangi tartibi n ga teng bo'lsa, matrisaga maxsusmas matrisa deyiladi. Agarda $\det(A)=0$ bo'lib, rangi n dan kichik bo'lsa, A matrisaga maxsus matrisa deyiladi.

Teorema. Ikki teng tartibli kvadrat matrisalarning ko'paytmasi, ko'paytuvchi matrisalarning har biri maxsusmas bo'lgandagina, maxsusmas matrisadan iborat bo'ladi.

To'g'ridan-to'g'ri ko'paytirish yo'li bilan n -tartibli birlik E va n -tartibli har qanday A matrisalarning o'zaro o'rin almashinuvchi ekanligini, ko'paytma A matrisani berishini, ya'ni $A \cdot E = E \cdot A = A$ tengliklar o'rinli bo'lishini misollarda tekshirib ko'rish qiyin emas.

Berilgan A kvadratik matrisaning teskari matrisasi deb, tartibi A matrisaning tartibiga teng va A matrisaga chapdan yoki o'ngdan ko'paytmasi birlik E matrisaga teng bo'lgan A^{-1} matrisaga aytiladi: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Yuqoridagi teorema asosan E birlik matrisaning maxsusmas ekanligini e'tiborga olsak, maxsus matrisaning teskari matrisaga ega emasligini xulosa qilamiz. Har qanday maxsusmas kvadrat matrisaning yagona teskari matrisasi mavjudligi quyidagi teoremdan kelib chiqadi.

Teorema. Teskari matrisa mavjud bo'lishi uchun $\det(A) \neq 0$ bo'lib, A matrisaning maxsusmas bo'lishi zarur va etarli.

2. Teskari matrisa qurish algoritmlari.

Berilgan maxsusmas kvadrat matrisaning teskari matrisasini qurishning «klassik» va Jordan usullari mavjud.

Berilgan $A=(a_{ik})$ kvadratik matrisa har bir elementini o'zining ad'yunkti bilan almashtirib, so'ngra hosil bo'lgan matrisani transponirlasak, quyidagi A matrisa elementlari mos ad'yunktlari matrisasining transponirlangan matrisasi A^v ni hosil qilamiz:

$$A^v = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A^v matrisaga A matrisaning ko'shma matrisasi deyiladi.

n -tartibli determinantning 6 va 7 xossalariga asosan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}$$

Tenglikni ixcham shaklda $A \cdot A^v = \det A \cdot E$ ko'rinishda yozish mumkin. Tenglamani ikkala tomonini noldan farqli $\det A$ ga bo'lsak,

$$A \frac{1}{\det A} A^v = E.$$

Ikkinchi tomondan teskari matrisa ta'rifiga binoan $A \cdot A^{-1} = E$. Tenglamalarni solishtirib, A kvadratik maxsusmas matrisaning teskari matrisasi A^{-1} uchun quyidagi formulani olamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^v$$

Oxirgi formula A maxsusmas matrisaning teskarisini qurish klassik usul formulasi deyiladi. Umuman olganda, klassik usulda teskari matrisa qurish jarayoni quyidagi ketma-ket bajariladigan qadamlarni o'z ichiga oladi:

1. Berilgan A kvadrat matrisa determinanti kattaligi hisoblanadi. Agar $\det A \neq 0$ bo'lsa, keyingi qadamga o'tiladi. Agarda $\det A = 0$ bo'lsa, A matrisa maxsus va teskari matrisa mavjud emas;

2. $A=(a_{ik})$ matrisa elementlarining mos ad'yunktlari hisoblanadi va tartib saqlangan holda, matrisa elementlari mos ad'yunktlari matrisasi (A_{ik}) tuziladi;

3. (A_{ik}) matrisa transponirlanadi va A matrisa elementlari mos ad'yunktlari matrisasining transponirlangan matrisasi yoki shuning o'zi qo'shma $A^v = (A_{ki})$ matrisasi tuziladi;

4. $A^v=(A_{ki})$ matrisa har bir elementi $\det A$ ga bo'linadi va A^{-1} teskari matrisa quriladi.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ maxsusmas matrisaning teskari matrisasini klassik usulda quring.

Klassik usulda ikkinchi tartibli maxsusmas matrisa teskarisi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

formula asosida quriladi. Formulani qo'llab,

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

natijani olamiz. Teskari matrisa to'g'ri qurilganini ta'rif asosida tekshirib ko'ramiz:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Demak, berilgan A matrisaning teskarisi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Berilgan A kvadratik matrisa teskarisi A^{-1} Jordan usuli asosida quyidagicha quriladi: A matrisaga o'ngdan tartibi uning tartibiga teng birlik E matrisa qo'shiladi va kengaytirilgan $(A | E)$ matrisa tuziladi. Parallel ravishda kengaytirilgan matrisaning chap va o'ng qismlari satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarilib, chap qism birlik matrisa ko'rinishiga keltiriladi. Kengaytirilgan matrisaning chap qismi birlik E matrisa ko'rinishiga keltirilganda uning o'ng qismida teskari A^{-1} matrisa hosil bo'ladi. Teskari matrisa qurish Jordan usuli algoritmi quyidagi sxema shaklida ifodalanishi mumkin: $(A | E) \sim (E | A^{-1})$.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ matrisaning teskarisini Jordan usuli yordamida quramiz.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{9}{16} \\ -1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{13}{16} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Oxirgi ko'rinishdagi kengaytirilgan matrisa o'ng qismida teskari matrisa shakli hosil bo'ldi. Teskari matrisa to'g'ri qurilganini ta'rif asosida tekshirib ko'rish mumkin.

Teskari matrisa o'zining quyidagi xossalriga ega:

$$1) (A^{-1})^{-1} = A; \quad 2) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T; \quad 3) (AV)^{-1} = V^{-1} A^{-1}.$$

CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

1. CHiziqli tenglamalar sistemasi. Sistemaning echimi.

Iqtisodiy masalalarning aksariyati bir necha noma'lumli (aytaylik m ta) chekli sondagi (aytaylik n ta) chiziqli tenglamalarni o'z ichiga olgan va ushbu tenglamalarning umumiy echimini topish masalasi qo'yilgan quyidagi

(5.1)

tenglamalar normal sistemasi deyiladi.

- koeffisientlar yoki asosiy matrisa,

— матрицага эса

kengayti

aylantiradigan mumkin bo'lgan barcha m ta haqiqiy sonlarning tartiblangan $(x_1; x_2; \dots; x_m)$ tizimlari to'plamiga aytiladi.

Sistemani yechish deganda – uning barcha echimlarini topish yoki echimga ega emasligini ko`rsatish tushuniladi.

CHiziqli tenglamalar sistemasi echimga ega bo'lsa - **birgalikda**, yagona echimga ega bo'lsa - **aniq**, cheksiz ko'p echimga ega bo'lsa - **aniqmas** va umuman echimi mavjud bo'lmasa – **birgalikda bo'lmagan** sistema deyiladi.

Tenglamalar sistemasining biror-bir tenglamasi zid (qarama-qarshi) tenglama bo'lsa, sistemaning o'zi ham zid, ya'ni birgalikda bo'lmagan sistemani tashkil etadi. Aynan teng echimlar to'plamiga ega tenglamalar sistemalariga esa **teng kuchli (ekvivalent) sistemalar** deb ataladi.

2. CHiziqli tenglamalar sistemasining echimi mavjudligi va yagonaligi haqida teoremlar.

(5.1) umumiy koʻrinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdalik va aniqlik masalasini quyidagi teorema ochib beradi.

Kroneker-Kapelli teoremasi. Chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun uning asosiy matrisasi rangining kengaytirilgan matrisasi rangiga teng bo'lishi zarur va etarli. Agar asosiy A matrisa rangi kengaytirilgan $(A|V)$ matrisa rangiga teng bo'lib, teng ranglar o'z navbatida noma'lumlar soni m ga teng bo'lsa, ya'ni $\text{rang}(A)=\text{rang}(A|B)=m$, sistema aniq bo'ladi. Agar A matrisa rangi kengaytirilgan $(A|V)$ matrisa rangiga teng bo'lib, teng ranglar noma'lumlar soni m dan kichik bo'lsa, ya'ni $\text{rang}(A)=\text{rang}(A|V) < m$, sistema aniqmas bo'ladi. Agarda asosiy matrisa rangi kengaytirilgan matrisa rangidan kichik bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmaydi.

n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi normal ko'rinishda berilgan bo'lsin:

(5.2)

(5.2) sistema uchun uning aniqlik sharti muhimdir.

Kramer teoremasi. n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi aniq bo'lishi uchun uning asosiy

matrisasi determinantning noldan farqli bo'lishi zarur va etarli. YAgona echim $\left(\frac{\det A_1}{\det A}; \frac{\det A_2}{\det A}; \dots; \frac{\det A_j}{\det A}; \dots; \frac{\det A_n}{\det A} \right)$ tartiblangan tizimdan iborat bo'ladi, bu erda A_j asosiy A matrisadan j -ustunning ozod hadlar ustuni

bilan almashtirilgani bilan farq qiluvchi matrisa. Agarda $\det A = 0$ bo'lsa, (5.2) sistema yoki aniqmas yoki birgalikda bo'lmaydi.

Masala. Quyida berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarini birgalikda va aniqligini tekshiring. Birgalikdagi sistemalarni Kramer formulalari yordamida eching:

$$1) \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Berilgan sistemalar uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi bo'lgani uchun, dastlab, Kramer teoremasini tatbiq etamiz:

$$1) \det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0 \text{ bo'lgani uchun - sistema aniq.}$$

YAgona echim Kramer formulalari yordamida topiladi:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{27} = -\frac{81}{27} = -3,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{27} = \frac{54}{27} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{27} = \frac{27}{27} = 1.$$

Sistema echimi: $(-3; 2; 1)$.

$$2) \det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0. \text{ Kramer teoremasiga ko'ra, sistema yoki aniqmas yoki birgalikdama.}$$

Kroneker-Kapelli teoremasiga murojaat etib, sistema kengaytirilgan matrisasi rangini Gauss algoritmi yordamida aniqlaymiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 9 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A | V) < 3$ (noma'lumlar soni) shartlar bajarilgani uchun sistema aniqlanmas va quyidagi sistemaga teng kuchli:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = x_3 + 7 \\ 4x_1 + 5x_2 = 3x_3 - 5 \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Oxirgi sistemani Kramer formulasi yordamida yechish mumkin:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_3 + 7 & 1 \\ 3x_3 - 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = -\frac{x_3 + 20}{7}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & x_3 + 7 \\ 4 & 3x_3 - 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{5x_3 + 9}{7}.$$

$$\text{Sistema echimi: } \left(-\frac{x_3 + 20}{7}; \frac{5x_3 + 9}{7}; x_3\right).$$

3) $\det A = 0$ bo'lgani uchun sistema yoki aniqlanmas yoki birgalikdamos.

Sistema kengaytirilgan matrisasi rangini nollar yig'ib, hisoblaymiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 10 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 2 < 3 = \text{rang}(A | V)$ munosabat o'rinli bo'lgani uchun sistema birgalikdamos.

3. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining nolmas echimlari mavjudlik shartlari.

Agar (1) sistema tenglamalari barcha ozod hadlari nolga teng bo'lsa, chiziqli tenglamalar sistemasi **bir jinsli sistema** deyiladi. Agarda tenglamalar ozod hadlaridan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsa, sistema **bir jinsli bo'lmagan sistema** deb ataladi.

CHiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi doimo birgalikda, chunki $\text{rang}(A) = \text{rang}(A | O)$ tenglik har doim o'rinli.

Bundan tashqari, bir jinsli sistema har doim m ta nollar tizimi - **nolli** yoki **trivial** (0; 0; ...; 0) echimga egaligi bilan xarakterlanadi.

CHiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi uchun uning nolmas echimlarga egalik shartini bilish muhimdir. Javob Kroneker–Kapelli teoremasidan kelib chiqadi.

Teorema. CHiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi nol echimdan tashqari nolmas echimlarga ham ega bo'lishi uchun sistema asosiy matrisasi rangining noma'lumlar sonidan kichik bo'lishi zarur va etarli.

Teoremadan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1-xulosa. Agar bir jinsli sistemaning noma'lumlari soni uning tenglamalari sonidan katta bo'lsa, sistema nol echimdan tashqari nolmas echimlarga ham ega;

2-xulosa. n ta noma'lumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi nol echimdan tashqari nolmas echimlarga ham ega bo'lishi uchun sistema asosiy matrisasining determinanti nolga teng bo'lishi zarur va etarli.

MA VZU № 4

CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI TESKARI MATRISA USULIDA YECHISH. YUQORI TARTIBLI DETERMINANTLAR.

n ta noma'lumli n ta Chiziqli tenglamalar sistemasi

berilgan bo'lsin. Matrisalarni ko'paytirish amali va matrisalar tengligi ta'rifidan foydalanib, sistemani $A \cdot X = V$ matrisali tenglama ko'rinishida yozish mumkin. Bu erda, $A=(a_{ik})$ - asosiy matrisa, V – ozod hadlar ustun matrisasi va X - noma'lumlar ustun matrisasi.

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{V} \quad (6.1)$$

Masala. Quyida berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarini teskari matritsa usulida eching:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = -8 \end{cases}$$

$$1) \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

2) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ qism matrisa rangi sistema rangiga teng bo'lgani uchun sistema dastlabki ko'rinishini unga teng kuchli quyidagi shakli bilan almashtiramiz:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 = -2x_2 + 2 \\ 3x_1 + x_3 = -6x_2 + 5 \end{cases}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\mathbf{x}_2 + 2 \\ -6\mathbf{x}_2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mathbf{x}_2 + \frac{22}{13} \\ -\frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

Sistema aniqmas bo'lib, umumiy echim ko'rinishlaridan biri $(-2x_2 + \frac{22}{13}; x_2; -\frac{1}{13})$ shaklda yozilishi mumkin.

3) Sistema asosiy matrisasi teskarisini Jordan usulida aniqlaymiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{16} & \frac{3}{8} & \frac{7}{16} \\ & & & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & \frac{11}{8} \\ & & & \frac{1}{16} & \frac{7}{8} & \frac{11}{16} \end{array} \right)$$

21

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{3}{8} & \frac{7}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{8} & \frac{11}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sistema echimi: $(-2; -1; 2)$.

Har bir usul kabi teskari matrisa usuli o'zining afzallik va noqulaylik jihatlarga ega. Bir nechta asosiy matrisalari aynan teng va biri-biridan faqat ozod hadlari ustuni bilan farq qiluvchi sistemalarni teskari matrisa usulida echgan maqsadga muvofiq. Chunki, bir marta qurilgan teskari matrisa mos ozod hadlari ustuniga ko'paytiriladi va natija olinaveradi. Usulning noqulay jihati teskari matrisa qurish jarayoni bilan bog'liq bo'lib, ayniqsa, $\det A$ nolga yaqin bo'lganda ko'pxonali sonlar ustida hisob-kitoblarni talab etadi.

2. Sistemaning umumiy echimi. Gauss usuli. Gauss usulining Gauss-Jordan modifikatsiyasi.

m ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Agar sistema tenglamalarining birida x_k ($k=\{1, 2, \dots, m\}$) noma'lum +1 koeffitsient bilan qatnashib, qolgan barcha tenglamalarida x_k noma'lumli hadlar mavjud bo'lmasa yoki yo'qotilgan bo'lsa, sistema x_k noma'lumga nisbatan ajratilgan yoki x_k noma'lum sistemaning ajratilgan noma'lumi deyiladi. Ajratilgan noma'lum bazis noma'lum deb ham yuritiladi.

Sistemaning har bir tenglamasi ajratilgan yoki bazis noma'lumga ega ko'rinishiga **nomalumlari ajratilgan** yoki **bazisga keltirilgan sistema** deyiladi. Har qanday birgalikdagi sistema o'zining ajratilgan yoki bazis noma'lumlari tizimi mavjudligi bilan xarakterlanadi. Noma'lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistemaning ajratilgan yoki bazis noma'lumlari tizimiga tegishli bo'lmagan noma'lumlari ajratilmagan, ozod yoki erkli noma'lumlar deb ataladi. Masalan, quyidagi

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & -x_5 = -1 \\ -x_2 + x_3 & 4x_5 = 7 \\ +5x_2 & +x_4 - 3x_5 = 6 \end{cases}$$

nomalumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistemada x_1 , x_3 va x_4 ajratilgan yoki bazis noma'lumlar bo'lsa, x_2 va x_5 noma'lumlar esa ozod yoki erkli noma'lumlardir.

Agar noma'lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistemaning har bir noma'lumi uning ajratilgan yoki bazis noma'lumlari tizimiga tegishli bo'lsa, sistema aniq, ya'ni yagona echimga ega bo'ladi. Agarda noma'lumlari ajratilgan sistema erkli noma'lumlarga ham ega bo'lsa, aniqmas, ya'ni cheksiz ko'p echimlarga ega bo'ladi.

Berilgan dastlabki shakldagi sistemaning **umumiy echimi** deb, unga teng kuchli bo'lgan noma'lumlari ajratilgan yoki biror-bir bazisga keltirilgan sistemaga aytiladi.

Sistemaning umumiy echimini qurish usuliga esa **Gauss usuli** deyiladi. Sistemaning barcha echimlarini topish uchun uning umumiy echimini qurish etarli. Berilgan sistemaning umumiy echimini aniqlash uchun uning ustida quyidagi elementar almashtirishlar bajariladi:

- 1) sistema tenglamalari o'rinlarini almashtirish mumkin;
- 2) sistema biror-bir tenglamasi ikkala qismini biror noldan farqli songa ko'paytirish mumkin;
- 3) sistema biror-bir tenglamasiga uning boshqa tenglamasini songa ko'paytirib, qo'shish mumkin.

Agar sistemani almashtirish jarayonida $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_m = 0$ nol yoki trivial tenglama hosil bo'lsa, u o'chiriladi. Agarda $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_m = b$ ($b \neq 0$) zid yoki qarama-qarshi tenglama hosil bo'lsa, sistemaning o'zi ham zid, ya'ni birgalikda emas.

Sistema umumiy echimini qurish usuli – Gauss usulining bir necha modifikatsiyalari mavjud. Quyida **Gaussning klassik** yoki ixcham sxema usuli va **Jordan modifikatsiyalari** bilan tanishamiz.

Gaussning klassik yoki ixcham sxema usuli to'g'ri va teskari yurishlardan iborat. To'g'ri yurishda sistemaning asosiy matrisasi trapesiyali yoki uchburchakli ko'rinishga keltiriladi. Teskari yurishda uning noma'lumlari ketma-ket ravishda aniqlanadi va umumiy echim quriladi.

Masala. §5 da Kramer formulalari yordamida echilgan sistemani Gaussning klassik usulida eching.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ +4x_2 + x_3 = 9 \\ +\frac{7}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ +4x_2 + x_3 = 9 \\ -\frac{27}{8}x_3 = -\frac{27}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi mazmun-mohiyati quyidagidan iborat: Dastlabki normal ko'rinishda berilgan sistemaning kengaytirilgan $(A | B)$ matrisasi quriladi. Yuqorida zikr etilgan sistemani teng kuchli sistemaga aylantiruvchi elementar almashtirishlardan foydalanib, kengaytirilgan matrisaning chap qismida yoki uning qism ostida birlik matrisa hosil qilinadi. Bunda birlik matrisadan o'ngda echimlar ustuni hosil bo'ladi. Gauss-Jordan usulini quyidagicha sxematik ifodalash mumkin:

$$(A | B) \sim (E | X^*).$$

CHiziqli tenglamalar sistemasini yechish Gauss-Jordan usuli noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish Gauss strategiyasi va teskari matrisa qurish Jordan taktikasiga asoslanadi. Teskari matrisa oshkor shaklda qurilmaydi, balki o'ng ustunda bir yo'la teskari matrisaning ozod hadlar ustuniga ko'paytmasi – echimlar ustuni quriladi.

Masala. §5 da Kramer formulalari yordamida echilgan sistemalarni Gauss-Jordan usulida eching.

$$1) \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 2 & 3 & | & -5 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 8 & 0 & 5 & | & -19 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & | & -13 \\ -27 & 0 & 0 & | & 81 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 5 & -3 & | & -5 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 14 & 0 & 2 & | & -40 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & | & -13 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix}$$

Sistema aniqmas bo'lib, umumiy echim ko'rinishlaridan biri

$$(x_1, -7x_1 - 13; -7x_1 - 20)$$

shaklga ega. Bu erda, x_1 erkli noma'lum va $x_1 \in \mathbb{R}$.

$$3) \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 5 & -3 & | & -4 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 14 & 0 & 2 & | & -39 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & | & -13 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix}$$

Sistemaning ikkinchi tenglamasi zid tenglama. Demak, sistemaning o'zi ham zid, ya'ni birgalikda emas.

Avvalgi mavzuda 2-3-tartibli determinantlar bilan tanishdik, endi n-tartibli ($n \geq 4$), determinantlar va ularni hisoblashni ko'ramiz. Ishni osonlashtirish maqsadida yordamchi tushunchalar kiritamiz.

1. Algebraik to'ldiruvchi va minorlar.

Determinantning biror elementining minori deb, shu determinantlardan bu element turgan satr va ustunni uchirishdan hosil bo'lgan determinantga aytiladi. Soddalik uchun quyidagi uchinchi tartibli determinantni olaylik.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

Determinant a_{ik} elementning minori M_{ik} ($i, k=1, 2, 3$) bilan belgilanadi. Masalan, a_{12} element minori

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad a_{33} \text{ element minori yecha } M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Determinant a_{ik} elementining algebraik to'ldiruvchisi deb $(-1)^{i+k} M_{ik}$ songa aytiladi. Masalan, a_{11} elementining algebraik to'ldiruvchisi

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ bo'ladi.}$$

a_{32} elementining algebraik to'ldiruvchisi esa

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \text{ bo'ladi.}$$

Bu kiritilgan tushunchalar yordamida quyidagi xossani isbotlash mumkin (xossalar tartibini saqlab qolamiz).

9°. Determinantning biror qatoridagi barcha elementlarni mos algebraik to'ldiruvchilari bilan ko'paytmasidan tashkil topgan yig'indi shu determinantning qiymatiga teng.

Isbot. Bu xossani birinchi satr uchun keltiramiz.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

determinantning birinchi satr elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Undan

$$\begin{aligned} & a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + \\ & + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - \\ & - a_{13}a_{31}a_{22} = \Delta \end{aligned}$$

Demak,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \quad (1)$$

Xuddi shu kabi ixtiyoriy satr yoki ustun elementlari orqali (1) formula kabi natijani hosil qilish mumkin. (1) formula determinantni birinchi satr elementlari orqali yoyilmasi deyiladi.

1-misol. Determinant hisoblansin.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Yechish. Birinchi satrda nol bo'lgani uchun birinchi satr elementlari bo'yicha yechish qulay, ya'ni

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 18 - 10 = 8.$$

Determinantning biror qatoridagi bitta elementidan tashqari barcha elementlari nolga teng bo'lganda, bu qator bo'yicha yoyilmadan foydalanib, natijani hisoblash ishini yanada osonlashtiradi.

2-misol.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

determinant hisoblasin.

Yechish. Birinchi ustunni o'zgarishsiz qoldirib, ikkinchi ustunga birinchi ustunni 3 ga ko'paytirib qo'shamiz, uchinchi ustunga birinchi ustunni (-2)ga ko'paytirib qo'shamiz, natijada

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 19 & -9 \\ 3 & 11 & -10 \end{vmatrix}$$

bo'ladi. Birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmadan foydalansak.

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} 19 & -9 \\ 11 & -10 \end{vmatrix} = -190 + 99 = -91.$$

Determinantlarning yuqorida keltirilgan 9° xossasini qo'llab, ya'ni biror satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyish usuli bilan 4-tartibli determinant tushunchasini kiritish mumkin. Chunki, bunday aniqlangan determinant biror ustun yoki satr elementlari bo'yicha yoyilganda hosil bo'ladigan determinantlar 3-tartibli bo'ladi. 3-tartibli determinant tushunchasi esa bizga ma'lum. Shu jarayonni ketma-ket davom ettirib n-tartibli determinant tushunchasi kiritiladi. Uning umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2)$$

(2) ko'rinishdagi n-tartibli determinantlar uchun yuqorida aytilgan barcha xossalar, jumladan, determinantning biror qator elementlari bo'yicha yechish formulasi ham o'rinli bo'ladi.

Istalgan tartibli determinantni hisoblashda aynan algebraik to'ldiruvchilar yordamida satr yoki ustun bo'yicha yoyish usulidan foydalaniladi.

3-Misol. Determinant hisoblansin.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Yechish. Determinantni hisoblash uchun uni ikkinchi satr elementlari bo'yicha yoyib chiqamiz. U holda

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = \\ &= -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -5(12+60+3-90+3+8) + (-4+3+30+3-30-4) = 20-2=18 \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak, yuqori tartibli determinantning hisoblash, determinant tartibini ketma-ket pasaytirish yo'li bilan amalga oshiriladi.

MAVZU № 5

Kompleks sonlar. Muar formulasi. Algebraning asosiy teoremasi.

Reja

1. Kompleks sonlar. Dastlabki ta'riflar.
2. Kompleks sonlar ustida asosiy amallar
3. Kompleks sonni darajaga ko'tarishva kompleks sondan ildiz chiqarish.
4. Eyler formulasi. Kompleks sonning ko'rsatkichli shakli.

Kompleks sonlar. Dastlabki ta'riflar

Kompleks son deb

$$z = a + ib \quad (1)$$

Ifodaga aytiladi, bu yerda a va b —haqiqiy sonlar, i —mavhum birlik, ushbu tengliklar bilan aniqlanadi:

$$i = \sqrt{-1} \text{ yoki } i^2 = -1 \quad (2)$$

a -kompleks son z ning haqiqiy qismi, ib -mavhum qismi deyiladi. Ular bunday belgilanadi:

$a = \operatorname{Re} z$. $b = \operatorname{Im} z$. Agar $aq0$ bo'lsa, $0 + ib = ib$ sof mavhumson deyiladi; agar $bq0$ bo'lsa, haqiqiy son son hosil bo'ladi: $a + i \cdot 0 = a$. Faqat mavhum qismining ishorasi bilan farq qiladigan ikki kompleks son :
 $z = a + ib$ va $z = a - ib$ bir-biriga qo'shma deyiladi.

Ushbu ikki asosiy ta'rif qabul qilinadi:

1. Agar $z_1 = a_1 + ib$ va $z_2 = a_2 + ib_2$ dan iborat ikki kompleks son

$$a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2$$

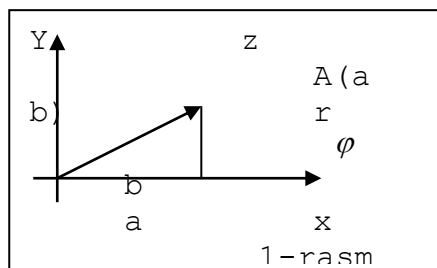
bo'lsa, ya'ni haqiqiy qismlar o'zaro va mavhum qismlar o'zaro teng bo'lsa u kompleks sonlar teng deyiladi.

2. Agar $a = 0$, $b = 0$ bo'lsa, faqat shundagina kompleks son z nolga teng bo'ladi:

$$z = a + ib = 0$$

1. **Kompleks sonlarning geometrik tasviri.** Har qanday kompleks son $z = a + ib$ ni Oxy tekislikda koordinatalari a va b bo'lgan $A(a, b)$ nuqta shaklida tasvirlash mumkin. Aksincha, Oxy tekislikdagi har qanday $M(a, b)$ nuqta $zqxQiy$ kompleks songa mos keladi. O'zida kompleks son tasvirlanadigan tekislik o'zgaruvchi z ning kompleks tekisligi deyiladi, tekislikka doiracha ichiga z simvoli qo'yiladi. O'zgaruvchi z kompleks tekisligining Ox o'qda yotuvchi nuqtalariga haqiqiy sonlar mos keladi ($bq0$). Oy o'qda yotuvchi nuqtalar sof mavhum sonni tasvirlaydi, chunki bu holda $aq0$. Shuning uchun kompleks sonlarni z ning kompleks o'zgaruvchi tekisligida tasvirlaganda Oy o'q mavhum sonlar o'qi yoki mavhum o'q, Ox o'q esa haqiqiy o'q deyiladi.

$A(a, b)$ nuqtani koordinatalar boshi bilan tutashtirib, $\overline{OA}$ vektorni hosil qilamiz. Ba'zi hollarda $z = a + ib$ kompleks sonning geometrik tasvirini OA vektor deb qabul qilish qulay bo'ladi.



yoki

2. Kompleks sonning trigonometrik shakli. Koordinatalar boshini qutb, Ox o'qining musbat yo'nalishini qutb o'qi deb olib, $A(a, b)$ nuqtaning qutb koordinatalarini φ va $r(r \geq 0)$ bilan belgilaymiz. Unda ushbu tengliklarni yozish mumkin (1-rasm)

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi,$$

demak, kompleks son z ni bunday tasvirlash mumkin:

$$a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi.$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (3)$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi ifodada $z = a + ib$ kompleks son yozuvining *trigonometrik shakli* deb ataladi.

r kompleks son z ning *moduli* deb ataladi. φ kompleks son z ning *argumenti* deb ataladi; ular bunday ifodalanadi:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z. \quad (4)$$

r va φ miqdorlar a va b orqali bunday ifodalanadi:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{b}{a}$$

Demak,

$$|z| = \|a + ib\| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\arg = \arg(a + ib) = \operatorname{Arctg} \frac{b}{a}.$$

Kompleks sonning argumenti φ burchak Ox o'qning musbat yo'nalishidan soat strelkasi xarakatiga teskari yo'nalishda xisoblansa musbat, qarama-qarshi yo'nalishda xisoblansa manfiy bo'ladi. Ravshanki, argument bir qiymatli bo'lmasdan, balki $2k\pi$ qo'shiluvchiga (k -ixtiyoriy butun son) aniqlikda belgilanadi.

Izoh. Qo'shma kompleks sonlar $z = a + ib$ va $\bar{z} = a - ib$ teng modullarga ega: $|z| = |\bar{z}|$, argumentlarining absolyut qiymatlari teng, ammo ishoralari bilan farq qiladi: $\arg z = -\arg \bar{z}$.

Haqiqiy son A ni ham (3) shaklda yozish mumkin, ya'ni:

$$A > 0 \text{ bo'lsa, } A = |A| (\cos 0 + i \sin 0),$$

$$A < 0 \text{ bo'lsa, } A = |A| (\cos \pi + i \sin \pi).$$

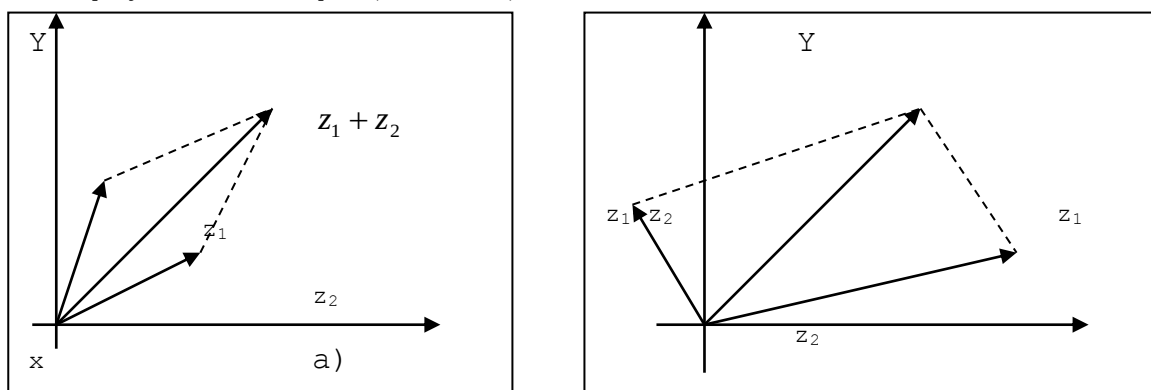
Nolga teng bo'lgan kompleks sonning moduli nolga teng: $|0| = 0$. Nolning argumenti sifatida har qanday φ burchakni qabul qilish mumkin. Haqiqatan har qanday φ burchak uchun ushbu tenglikni yozish mumkin:

$$0 = 0 (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Kompleks sonlar ustida asosiy amallar

1. Kompleks sonlarni qo'shish. Ikki kompleks son $z_1 = a_1 + ib_1$ va $z_2 = a_2 + ib_2$ ning yig'indisi deb ushbu $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$ (1) tenglik bilan aniqlangan kompleks songa aytiladi.

(1) formuladan vektorlar bilan tasvirlangan kompleks sonlarni qo'shish – vektorlarni qo'shish qoidasiga muvofiq bajarilishi kelib chiqadi (2-a- b -rasm)



2- rasm

2. Kompleks sonlarni ayirish. Ikki $z_1 = a_1 + ib_1$ va $z_2 = a_2 + ib_2$ kompleks sonlarning ayirmasi deb shunday kompleks songa aytiladiki, unga z_2 kompleks sonni qo'shganda z_1 kompleks son hosil bo'ladi:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2). \quad (2)$$

Ikki kompleks son ayirmasining moduli shu sonlarni kompleks o'zgaruvchilar tekisligida tasvirlovchi nuqtalar orasidagi masofaga teng

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

3. Kompleks sonlarni ko'paytirish. $z_1 = a_1 + ib_1$ va $z_2 = a_2 + ib_2$ kompleks sonlar ko'paytmasi deb, ularni ikki hadlar singari algebra qoidasiga muvofiq, lekin

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = (-i) \cdot i = -i^2 = 1, \quad i^5 = i \text{ va h.k. , umuman } k \text{ butun bo'lganda:}$$

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i$$

ekanligi e'tiborga olib ko'paytirganda hosil bo'lgan kompleks songa aytiladi.

Shu qoidaga asosan quyidagi ko'paytmani hosil qilamiz:

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ib_1 a_2 + ia_1 b_2 + i^2 b_1 b_2$$

yoki

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2). \quad (3)$$

Kompleks sonlar trigonometrik shaklda berilgan bo'lsin:

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Bu sonlarning ko'paytmasini topamiz:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2] = \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Shunday qilib,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (3^o)$$

ya'ni ikki kompleks son ko'paytmasi shunday kompleks sonki, uning moduli ko'paytuvchilar modullarining ko'paytmasiga teng, argumenti esa ko'paytuvchilar argumentlarining yig'indisiga teng.

1-izoh. $z = a + ib$ va $\bar{z} = a - ib$ qo'shma kompleks sonlar ko'paytmasi (3) formulaga muvofiq bunday ifodalanadi:

$$z\bar{z} = a^2 + b^2,$$

yoki

$$z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

Qo'shma kompleks sonlar ko'paytmasi ulardan har biri modulining kvadratiga teng.

4. Kompleks sonlarni bo'lish. Kompleks sonlarni bo'lish ko'paytirishga teskari amal kabi ta'riflanadi:

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2, \quad |z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$$

deb faraz qilamiz. U holda $\frac{z_1}{z_2} = z$ shunday kompleks sonki, unda $z_1 = z_2 z$ bo'ladi.

Agar $\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$ bo'lsa, u holda

$$a_1 + ib_1 = (a_2 + ib_2)(x + iy)$$

yoki

$$a_1 + ib_1 = (a_2 x - b_2 y) + i(a_2 y + b_2 x);$$

x va y ushbu

$$a_1 = a_2 x - b_2 y, \quad b_1 = b_2 x + a_2 y$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi. Bundan:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Nihoyat, ushbu formulani hosil qilamiz:

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \quad (4)$$

Kompleks sonlarni bo'lish amalda bunday bajariladi:

$z_1 = a_1 + ib_1$ ni $z_2 = a_2 + ib_2$ ga bo'lish uchun bo'linuvchi va bo'luvchini bo'luvchiga qo'shma songa (ya'ni $a_2 - ib_2$ ga) ko'paytiramiz.

Unda bo'luvchi haqiqiy son bo'ladi; unga bo'linuvchining haqiqiy va mavhum qismlarini bo'lamiz:

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Kompleks sonlar trigonometrik shaklda

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

berilgan bo'lsa, ushbuni hosil qilamiz:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (5)$$

Bu tenglikni tekshirish uchun bo'luvchini bo'linmaga ko'paytirish kifoya:

$$\begin{aligned} r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] &= r_2 \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2)] = \\ &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1). \end{aligned}$$

Shunday qilib ikki kompleks son bo'linmasining moduli bo'linuvchi va bo'luvchi modullarining bo'linmasiga teng; bo'linmaning argumenti bo'linuvchi va bo'luvchi argumentlarining ayirmasiga teng.

2-izoh. Kompleks sonlar ustida amallar bajarish qoidalari shuni ko'rsatadiki, kompleks sonlarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish natijasida yana kompleks son hosil bo'ladi.

Agar haqiqiy sonlarni kompleks sonlarning xususiy holi deb qarab, kompleks sonlar ustida amallar bajarish qoidalarini haqiqiy sonlarga tatbiq etilsa, bu qoidalar arifmetikadan bizga ma'lum odatdagi amallar qoidalarining o'zi bo'ladi.

3-izoh. Kompleks sonlar yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasining ta'riflariga qaytib, u ifodalarda har bir kompleks son uning qo'shmasi bilan almashtirilsa, shu amallarning natijalari ham unga qo'shma kompleks sonlarga almashinishiga tekshirib ko'rish oson. Bundan ushbu teorema kelib chiqadi:

Teorema. *Koyeffitsiyentlari haqiqiy sonlar bo'lgan ushbu*

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

Ko'phadda x o'rniga a Qib son, so'ngra unga qo'shma son a -ib qo'yilsa, o'rniga qo'yish natijalari ham o'zaro qo'shma bo'ladi.

Kompleks sonni darajaga ko'tarishva kompleks sondan ildiz chiqarish

1. Darajaga ko'tarish. Bundan oldingi paragrafdagi (3) formuladan, agar n butun musbat son bo'lsa, ushbu formula kelib chiqadi:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1)$$

Bu Muavr formulasi deb ataladi. Bundan ko'rinadiki, kompleks sonni butun musbat darajaga ko'tarishda modul shu darajaga ko'tariladi, argument esa daraja ko'rsatkichiga ko'paytiriladi.

Endi Muavr formulasining yana bir tatbiqni qaraymiz. Bu formulada $n=3$ deb faraz qilib,

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$$

tenglikni hosil qilamiz. Chap tomonini Nyuton binomi formulasi bo'yicha yoyib, haqiqiy va mavhum qismlarini tenglab, $\sin 3\varphi$ va $\cos 3\varphi$ ni $\sin \varphi$ va $\cos \varphi$ ning darajalari orqali ifoda qila olamiz. Masalan, $n=3$ bo'lganda:

$$\cos^3 \varphi + i 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi;$$

ikki kompleks sonning tenglik shartidan foydalanib, ushbu tengliklarni hosil qilamiz:

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 3\varphi = -\sin^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

2. Ildiz ciqarish. Kompleks sonning n -darajali ildizi deb n -darajaga ko'targanda ildiz ostidagi songa teng bo'ladigan kompleks songa aytiladi, ya'ni

$$\rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

bo'lsa,

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Teng kompleks sonlarning modullari teng bo'lishi kerak, argumentlari esa 2π ga karrali songa farq qilishi mumkin bo'lgani uchun

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \varphi + 2k\pi$$

Bundan

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

Bu yerda k -ixtiyoriy butun son, $\sqrt[n]{r}$ -musbat r -son ildizining arifmetik (ya'ni haqiqiy musbat) qiymati. Demak,

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (2)$$

k ga $0, 1, 2, \dots, n-1$ qiymatlarni berib, ildizning n ta har xil qiymatlarini topamiz. k ning boshqa qiymatlarida argumentlar topilgan qiymatlardan 2π ga karrali songa farq qiladi va demak, topilgan ildizlar avvalgilardan bilan bir xil bo'ladi.

Shunday qilib, kompleks sonning n -darajali ildizi n ta har xil qiymatga ega bo'ladi, haqiqiy son kompleks sonning hususiy holidan iborat bo'lgani uchun trigonometrik shaklda tasvirlanishi mumkin:

$$\text{agar } A > 0 \text{ bo'lsa, } A = |A| (\cos 0 + i \sin 0);$$

$$\text{agar } A < 0 \text{ bo'lsa, } A = |A| (\cos \pi + i \sin \pi).$$

1-misol. Birning kub ildizining hamma qiymatlari topilsin.

Yechish. Birmi trigonometrik shaklda tasvirlaymiz:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0.$$

(2) formula bo'yicha shuni hosil qilamiz:

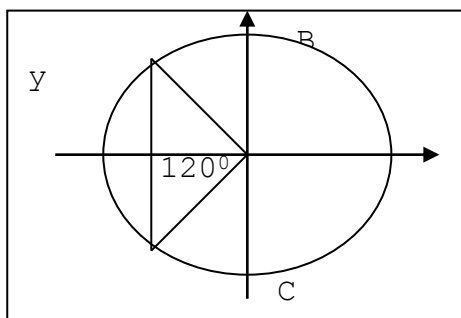
$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{0 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{3}.$$

k ga $0, 1, 2$ qiymatlarni berib, ildizning uchta qiymatini topamiz:

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1, \quad x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \quad x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}.$$

Ma'lumki,

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Shuning uchun

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Ikki hadli tenglamani yechish.

$$x^n = A$$

ildizlarini topamiz.

Agar A haqiqiy musbat son bo'lsa

$$x = \sqrt[n]{A} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Qavs ichidagi ifoda 1 ning n -darajali ildizining hamma qiymatlarini beradi.

Agar A haqiqiy manfiy son bo'lsa,

$$x = \sqrt[n]{|A|} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{n} \right).$$

Qavs ichidagi ifoda -1 ning n -darajali ildizining hamma qiymatlarini beradi.

Agar A kompleks son bo'lsa, x ning qiymatlari (2) formula bo'yicha topiladi.

2-misol. $x^4 = 1$ tenglama yechilsin.

Yechish.

$$x = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4}.$$

k ni 0,1,2,3 ga tenglab, ushbularni topamiz:

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$x_2 = \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} = i,$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} = -1,$$

$$x_4 = \cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} = -i.$$

Ko'rsatkichi kompleks bo'lgan ko'rsatkichli funksiya va uning xossalari

$z = x + iy$ bo'lsin. Agar x va y haqiqiy o'zgaruvchilar bo'lsa, z kompleks o'zgaruvchi deb ataladi.

Kompleks o'zgaruvchi z ning har bir qiymatiga xOy tekisligida (kompleks o'zgaruvchi tekisligida) ma'lum nuqta mos keladi (1-rasmga qarang).

Ta'rif. Kompleks o'zgaruvchi z ning biror kompleks qiymatlar sohasida har bir qiymatiga boshqa ω kompleks miqdorning aniq qiymati mos kelsa, ω kompleks o'zgaruvchi z ning funksiyasi bo'ladi. Kompleks argumentning funksiyasi $\omega = f(z)$ yoki $\omega = \omega(z)$ bilan belgilanadi.

Bu yerda biz kompleks o'zgaruvchining bitta funksiyasini, ya'ni ko'rsatkichli funksiya

$$\omega = e^z \quad \text{yoki} \quad \omega = e^{x+iy}$$

ni qaraymiz

ω funksiyaning kompleks qiymatlari bunday belgilanadi:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (1)$$

ya'ni

$$\omega(z) = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (2)$$

Ko'rsatkichli funktsiyaning hossasi.

1. Agar z_1 va z_2 – ikkita kompleks son bo'lsa, unda

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}. \quad (3)$$

2. Shuning singari yo'l bilan

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} \quad (4)$$

formula ham isbotlanadi.

3. Agar m butun son bo'lsa,

$$(e^z)^m = e^{mz} \quad (5)$$

bo'ladi. Agar $m > 0$ bo'lsa, bu formula (3) formulaga asosan osongina hosil bo'ladi; agar $m < 0$ bo'lsa, bu formula (3) va (4) formulalarga asosan hosil qilinadi.

4. Ushbu ayniyat

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad (6)$$

to'g'ridir.

Haqiqatan, (3) va (1) formulalarga asosan:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

(6) ayniyatga asosan, e^z ko'rsatkichli funktsiya davri $2\pi i$ ga teng bo'lgan davriy funktsiya ekanligi chiqadi.

Eyler formulasi.

Kompleks sonning ko'rsatkichli shakli.

Agar o'tgan paragrafning (1) formulasida xq0 desak, unda

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (1)$$

formulani hosil qilamiz. Bu- ko'rsatkichli mavhum son bo'gan ko'rsatkichli funktsiyaning trigonometrik funktsiyalar orqali ifodalovchi Euler formulasidir.

(1) formulada y ni- y bilan almashtirib,

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y \quad (2)$$

formula hosil qilamiz. (1) va (2) tengliklardan $\cos y$ va $\sin y$ ni topamiz:

$$\begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{aligned} \quad (3)$$

So'ngi formulalardan foydalanib, jumladan $\cos \varphi$ va $\sin \varphi$ ni ularning har qanday butun musbat darajalarini va shu darajalar ko'paytmasini karrali yoylarning sinuslari va kosinuslari orqali tasvirlashimiz mumkin.

Kompleks sonning ko'rsatkichli shakli. Kompleks sonini trigonometrik shaklda tasvirlaymiz:

$$Z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

Bu erda r kompleks soning moduli, φ kompleks soning argumenti. Euler formulasiga ko'ra

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}. \quad (4)$$

Demak, har qanday kompleks sonini ushbu ko'rsatkichli shaklda tasvirlash mumkin:

$$Z = re^{i\varphi}$$

Ko'rsatkichli funktsiyaning 4-§ dagi (3), (4), (5) xossalriga asosan ko'rsatkichli shakldagi kompleks sonlar ustida amallar bajarish oson.

Ushbu kompleks sonlar berilgan bo'lsin:

$$Z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, Z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

Bu holda

$$Z_1 * Z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} * r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i\varphi_2}$$

bu natija 2-§ dagi (3) formula bilan bir xil.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

bu formula 2-§ dagi (5) formula bilan bir xil.

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi};$$

bu formula 3-§ dagi (1) formula bilan bir xil.

$$\sqrt[n]{r e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\varphi}{n}} \quad (R=0,1,2,\dots,n-1);$$

bu formula 3-§ dagi (2) formula bilan bir xil.

MAVZU № 6

TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI. TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQNING TURLI KO'RINISHDAGI TENGLAMALARI

REJA:

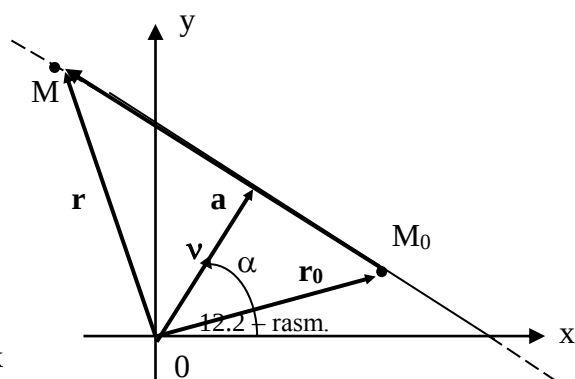
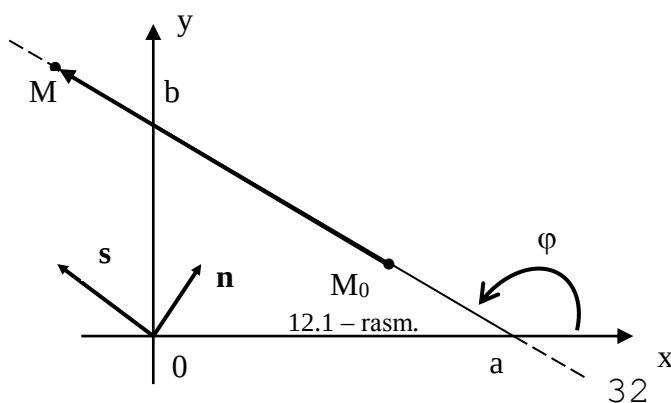
1. Tekislikda to'g'ri chiziqning turli ko'rinishdagi tenglamalari.
2. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha masofa.

1. Tekislikda to'g'ri chiziqning turli ko'rinishdagi tenglamalari.

Tekislikda koordinatalar sistemasini tanlash uning nuqtalarini analitik ifodalash imkonini beradi. Analitik geometriyada tekislikdagi har qanday chiziq biror-bir umumiy xossaga ega nuqtalar to'plami sifatida qaraladi. Tekislikda kiritilgan to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga mos holda qaralayotgan chiziqning ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari x va y orqali belgilansa, uning barcha nuqtalari uchun umumiy xossa x va y larga nisbatan tenglama ko'rinishida ifodalanadi.

Shunday qilib, chiziqda yotuvchi ixtiyoriy nuqta koordinatalarini qanoatlantiruvchi x va y larga nisbatan $F(x, y)=0$ tenglamaga chiziq tenglamasi deyiladi yoki $F(x, y)=0$ tenglama chiziqni aniqlaydi deyiladi.

Tekislikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tanlangan bo'lsin. To'g'ri chiziqning tekislikdagi tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan vaziyatini ushbu to'g'ri chiziqning biror-bir $M_0(x_0; y_0)$ nuqtasi va to'g'ri chiziqqa perpendikulyar nolmas $\mathbf{n}(A; B)$ ($A^2+B^2 \neq 0$) vektor yoki to'g'ri chiziqqa parallel nolmas $\mathbf{s}(m; n)$ ($m^2+n^2 \neq 0$) vektor to'liq aniqlaydi. $\mathbf{n}$ vektor to'g'ri chiziqning normal vektori, $\mathbf{s}$ vektor esa yo'naltiruvchi vektori deyiladi (12.1-rasm).



Koordinatalar sistemasining boshidan o'tmaydigan to'g'ri chiziqni oxiri to'g'ri chiziqda joylashgan uning yagona $\mathbf{a}$ normal radius vektori birga-bir aniqlaydi (12.2-rasm).

To'g'ri chiziqning ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqtasi uchun $\mathbf{n}(A; B)$ va $\mathbf{M_0M}(x-x_0; y-y_0)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{M_0M}) = 0 \text{ yoki koordinatalarda } A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0.$$

Tenglamalar nuqtasi va normal vektori bilan berilgan to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

$$Ax + By + S = 0, (A^2 + B^2 \neq 0) \quad (12.1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga tekislikda to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. To'g'ri chiziq umumiy (12.1) ko'rinishdagi tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, quyidagi tasdiqlar o'rinli:

a) Agar $S = 0$ bo'lsa, $Ax + By = 0$ to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi;

b) $\mathbf{n}(A; B)$ nolmas vektor (12.1) ko'rinishdagi to'g'ri chiziqning normal vektoridir.

Agar umumiy tenglamada $A \neq 0$ munosabat o'rinli bo'lsa, (12.1) tenglama quyidagi ko'rinishga keltiriladi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (12.2)$$

(12.2) tenglama to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi deyiladi.

Agar (12.1) tenglamada $B \neq 0$ bo'lsa, umumiy tenglama to'g'ri chiziqning burchak koeffisientli tenglamasi deb ataluvchi

$$y = kx + b \quad (12.3)$$

ko'rinishga keltiriladi, bu erda, $k = \tan \varphi$ - to'g'ri chiziqning burchak koeffisienti, φ - to'g'ri chiziq bilan Ox absissa o'qining musbat yo'nalishi orasidagi burchak kattaligi va $b = y(0)$ - boshlang'ich ordinata.

To'g'ri chiziqning ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqtasi uchun $\mathbf{C}(m; n)$ va $\mathbf{M_0M}(x-x_0; y-y_0)$ vektorlar o'zaro kollinear, demak

$$\mathbf{M_0M} = t\mathbf{C} \quad (12.4)$$

bu erda, t - ixtiyoriy haqiqiy son bo'lib, parametr deyiladi.

(12.4) tenglama to'g'ri chiziqning vektor parametrli tenglamasi deyiladi va koordinatalarda

$$\begin{cases} x - x_0 = tm, \\ y - y_0 = tn \end{cases} \quad (12.5)$$

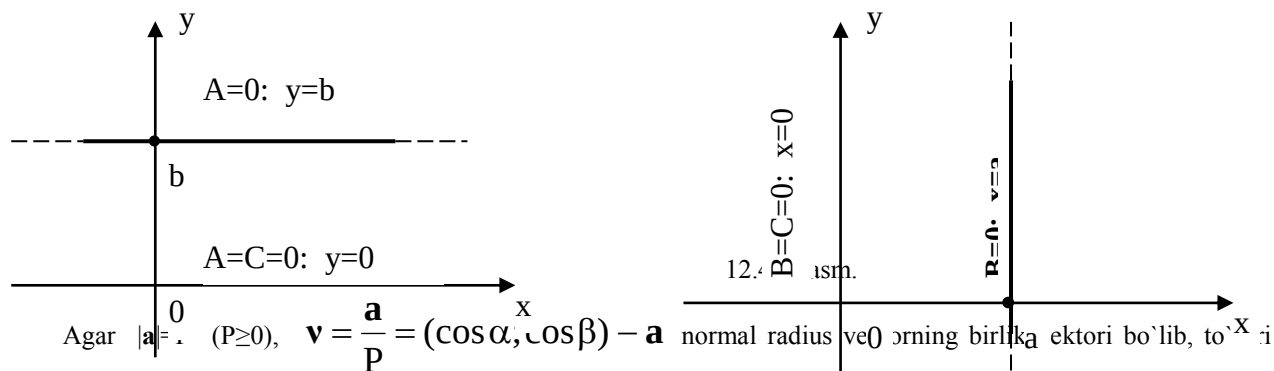
ko'rinishni oladi. (12.5) tenglamalarga to'g'ri chiziqning parametrli tenglamalari deyiladi.

Agar (12.5) tenglamalarda t parametr yo'qotilsa, to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deb ataluvchi quyidagi

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad (12.6)$$

ko'rinishdagi tenglamasi hosil bo'ladi.

Umumiy (12.1) ko'rinishdagi tenglamaning turli xususiy hollari va ularga mos to'g'ri chiziqlar quyidagi rasmlarda keltirilgan:



$$Pr_{\mathbf{v}} \mathbf{r} = R \text{ yoki } |\mathbf{v}| Pr_{\mathbf{v}} \mathbf{r} = R \text{ yoki } (\mathbf{r}, \mathbf{v}) = R (R \geq 0) \quad (12.7)$$

(12.7) tenglama to'g'ri chiziqning vektor ko'rinishdagi tenglamasi deyiladi. (12.7) tenglama koordinatalarda

$$x \cos \alpha + u \cos \beta = R \text{ yoki } x \cos \alpha + u \sin \alpha = R (R \geq 0) \quad (12.8)$$

ko'rinishni oladi. Bu erda, α - $\mathbf{a}$ yoki $\mathbf{v}$ vektorning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak kattaligi.

(12.8) shakldagi tenglama to'g'ri chiziqlarning normal tenglamasi deyiladi. (12.1) shakldagi tenglamadan (12.8) shakldagi tenglamaga o'tish uchun umumiy ko'rinishdagi tenglama normallovchi ko'paytuvchi deb ataladigan

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ songa ko'paytiriladi, bunda } + \text{ yoki } - \text{ ishoradan } S \text{ ozod had ishorasining qarama-qarshisi}$$

tanlanadi, aks holda $R = -\mu S \geq 0$ munosabat bajarilmaydi.

Masala. $3x + 4y - 8 = 0$ tenglamani normal ko'rinishga keltiring.

Berilgan umumiy shakldagi tenglama uchun normallovchi ko'paytuvchi $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}$.

Tenglamani $\mu = \frac{1}{5}$ ga ko'paytiramiz, natijada to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi ko'rinishda normal holga keltiriladi:

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = \frac{8}{5}.$$

Mavzu № 7

TO'G'RI CHIZIQLARGA DOIR ASOSIY MASALALAR.KOORDINATALARNI ALMASHTIRISH

Reja:

1. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi
2. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha masofa.

Berilgan $M_0(x_0; u_0)$ nuqtadan o'tuvchi va burchak koeffisienti k ga teng bo'lgan to'g'ri chiziq $u - u_0 = k(x - x_0)$ tenglama bilan aniqlanadi.

Koordinatalar tekisligida berilgan ikki $M_1(x_1; u_1)$ va $M_2(x_2; u_2)$ ($M_1 \neq M_2$) nuqtalardan o'tuvchi yagona

to'g'ri chiziq tenglamasi $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ ko'rinishga ega.

Burchak koeffisientli $u = k_1x + v_1$ (l_1) va $u = k_2x + v_2$ (l_2) tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchak kattaligi quyidagi formula yordamida aniqlanadi (12.5 – rasm):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

Oxirgi formuladan burchak koeffisientlar tilida l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari kelib chiqadi:

$$l_1 \perp l_2: 1 + k_1 k_2 = 0, \quad l_1 \parallel l_2: k_1 = k_2.$$

Koordinatalar tekisligida umumiy ko'rinishdagi

$$A_1x + V_1u + S_1 = 0 \quad (l_1) \text{ va } A_2x + V_2u + S_2 = 0 \quad (l_2)$$

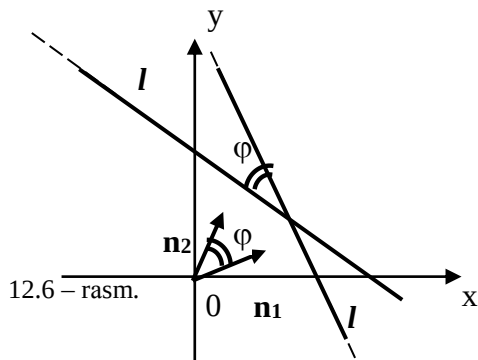
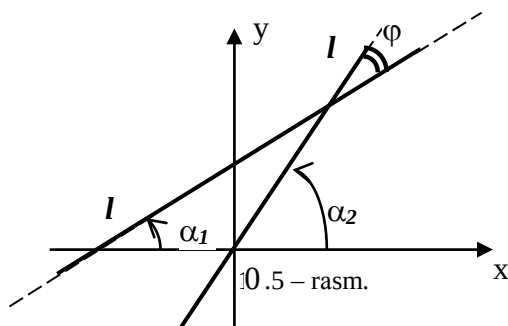
tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchak kattaligi l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlarning normal $\mathbf{n}_1(A_1; V_1)$ va $\mathbf{n}_2(A_2; B_2)$ vektorlari orasidagi burchak kattaligiga teng.

Ushbu tasdiq umumiy shakldagi tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topish masalasini ularning normal vektorlari orasidagi burchakni topish masalasi bilan almashtirish imkonini beradi:

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{(A_1 A_2 + B_1 B_2)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

A va V koeffisientlar tilida l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari quyidagi munosabatlardan iborat:

$$l_1 \perp l_2 : A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0, \quad l_1 \parallel l_2 : \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$



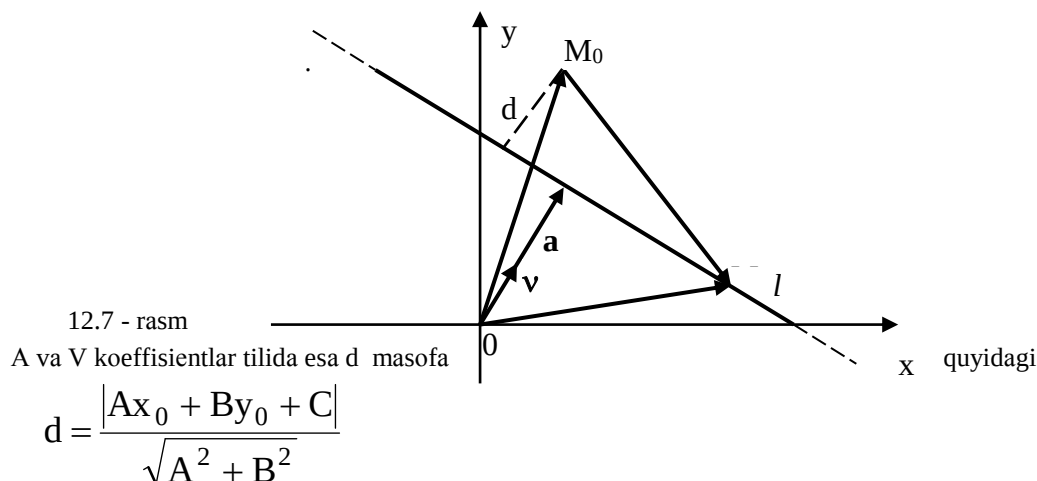
3. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha masofa.

Koordinatalar tekisligida $M_0(x_0; u_0)$ nuqta va umumiy $Ax + Vu + S = 0$ shakldagi tenglamasi bilan l to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lib, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish masalasi qo'yilgan bo'lsin.

Berilgan M_0 nuqtadan berilgan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan d masofa $\mathbf{OM}(x - x_0; u - u_0)$ vektorning $\mathbf{a}$ yoki $\mathbf{v}$ vektordagi sonli proeksiyasining absolyut qiymatiga teng (12.7 - rasm):

$$d = |\text{Pr}_{\mathbf{v}}(\mathbf{OM} - \mathbf{OM}_0)| = |(\mathbf{OM} - \mathbf{OM}_0, \mathbf{v})| = |(\mathbf{OM}, \mathbf{v}) - (\mathbf{OM}_0, \mathbf{v})|.$$

Yoki $d = |(\mathbf{OM}_0, \mathbf{v}) - (\mathbf{OM}, \mathbf{v})|$. Vektor shakldagi so'nggi formula $(\mathbf{OM}, \mathbf{v}) = R$ ekanligini hisobga olsak, koordinatalarda $d = |x_0 \cos \alpha + u_0 \sin \alpha - R|$ ko'rinishni oladi.



$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

formula vositasida hisoblanadi.

Masala. $M_0(-4; 1)$ nuqtadan $3x + 4u - 8 = 0$ to'g'ri chiziqqacha masofani toping?

Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofani hisoblash formulasini qo'llaymiz:

$$d = \frac{|3 \cdot (-4) + 4 \cdot 1 - 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{16}{5} = 3,2 \text{ (bir.)}.$$

MAVZU № 8

QUTB KOORDINATALARI. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR VA ULARNING KANONIK TENGLAMALARI.

Reja

1. Qutb koordinatlar sisteması.

2. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar.

Tekislikdagi nuqtaning o'rnini qutb koordinatlar sisteması deb ataladigan sistema yordamida ham aniqlash mumkin.

Tekislikda, qutb deb ataladigan, biror O nuqtani va bu nuqtadan chikuvchi, qutb o'qi deb ataladigan, yarim to'g'ri chiziqni tanlab olamiz. Tekislikdagi biror M nuqtaning o'rnı ikkita son: M nuqtaning qutbdan uzoqligini

ifodalovchi p son va OM kesmaning qutb o'qi bilan hosil qilgan burchak φ bilan aniklanishi mumkin. (6-shakl) φ burchakni hisoblashda soat strelkasi mo'ljalishiga tesqari mo'ljalish musbat mo'ljalish hisoblanadi, p va φ sonlar M nuqtaning qutb koordinatalari deyiladi. p radius vektorni doimo musbat deb hisoblaymiz. Agar φ qutb bo'rchagi $0 \leq \varphi < 2\pi$ yarim yopiq oraliqda olinsa, u xolda tekislikning xar bir nuqtasi uchun qutb koordinatlar sistemasida aniq bir juft son, r va φ mos keladi. Qutb uchun $r \neq 0$, φ -ixtiyoriy. To'g'ri burchakli koordinatlar sistemasining boshi qutb bilan, Ox o'qning musbat mo'ljalishi esa qutb o'qi bilan ustma-ust tushgan bo'lsin. U xolda

$$x = p \cos \varphi, y = p \sin \varphi \text{ va aksincha } p = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \text{ bo'ladi.}$$

Misollar.

1. $M(2,2)$ nuqtaning qutb koordinatalari topilsin.

2. $r = 2a \sin \varphi$ tenglama Deqart sistemasida yozilsin.

2. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida tushuncha. Ellips va uning kanonik tenglamasi.

CHiziqli tenglamasi koordinatlar sistemasining joylashishiga qarab turli ko'rinishda bo'lishi mumkin. Koordinatalarni almashtirish yordamida chiziqning ixtiyoriy shakldagi tenglamasini sodda (kanonik) ko'rinishga keltirish mumkin.

Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi deb,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

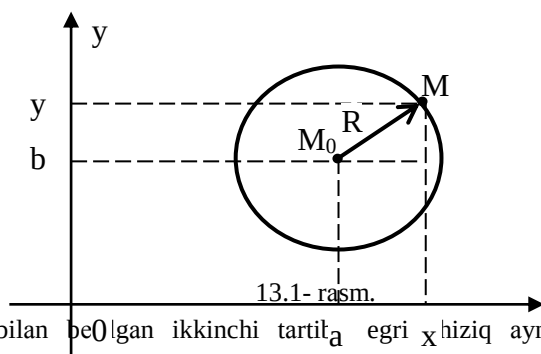
shakldagi tenglamaga aytiladi.

O'rta maktab matematikasida o'rganilgan aylana ikkinchi tartibli egri chiziqlar jumlasiga kiradi. Buning tasdig'i sifatida aylanaga berilgan ta'rifni va uning sodda tenglamasini eslash kifoya. Tekislikda to'g'ri burchakli koordinatlar sistemasi tanlangan bo'lib, koordinatlar tekisligida markaz deb ataluvchi $M_0(a; v)$ nuqtadan teng radius deb ataluvchi R masofada yotuvchi nuqtalar to'plami (geometrik o'rni) bo'lmish aylana quyidagi

$$(x - a)^2 + (y - v)^2 = R^2$$

tenglama bilan aniqlanadi (13.1-rasm).

Ushbu tenglama aylananing kanonik tenglamasi deyiladi. Markazi koordinatlar boshida va R radiusli aylana $x^2 + y^2 = R^2$ tenglama vositasida ifodalanadi.



Umumiy tenglamasi bilan berilgan ikkinchi tartibli egri chiziq aynan aylananani aniqlashi uchun uning koeffitsientlari quyidagi munosabatlarni bajarishi etarli:

$$A = C, \quad B = 0 \quad \text{va} \quad D^2 + E^2 - AF > 0.$$

Tekislikda fokuslari deb ataluvchi berilgan F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalari yig'indisi o'zgarmas kattalikka (fokuslar orasidagi masofadan katta) teng nuqtalar to'plamiga **ellips** deyiladi.

Agar o'zgarmas kattalikni $2a$, fokuslar orasidagi masofani esa $2s$ bilan belgilasak va tekislikda Ox absissa o'qi fokuslari orqali o'tuvchi, koordinatlar boshi F_1F_2 kesmaning o'rtasida joylashgan koordinatlar sistemasi tanlasak, ellips tenglamasi soddalashadi va quyidagi kanonik ko'rinishga keladi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{bu erda} \quad b^2 = a^2 - s^2 \quad (a > s).$$

Ushbu holda ellips fokuslari: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ (13.2-rasm).

Koordinatlar boshi O nuqta ellipsning simmetriya markazi, koordinata o'qlari esa uning simmetriya o'qlari hisoblanadi.

$A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ nuqtalarga ellipsning uchlari, $OA_2 = a$ va $OB_1 = b$ kesma uzunliklariga uning mos ravishda katta va kichik yarim o'qlari deyiladi.

SHunday qilib, ellips ikki simmetriya o'qlariga va simmetriya markaziga ega qavariq yopik chiziqdır.

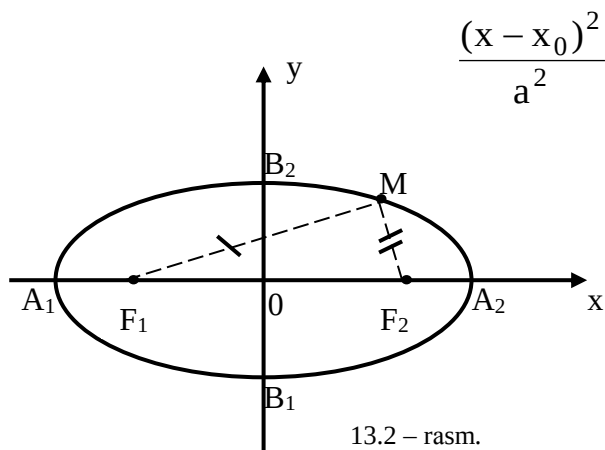
$\varepsilon = \frac{c}{a}$ kattalikka ellipsning eksentrisiteti deb ataladi va har qanday ellips uchun $\varepsilon < 1$ munosabat o'rinli.

Eksentrisitet ellipsning cho'zinchoqligini xarakterlaydigan kattalikdir.

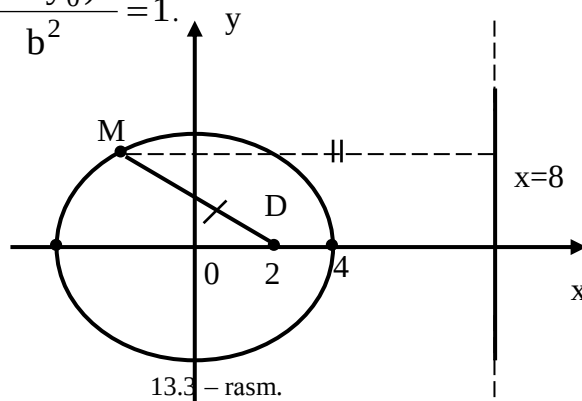
Aylana ellipsning xususiy holi bo'lib, eksentrisiteti 0 ga teng yoki katta va kichik yarim o'qlari teng bo'lgan ellipsdir.

Simmetriya markazi $(x_0; y_0)$ nuqtada va simmetriya o'qlari koordinata o'qlariga parallel ellips tenglamasi quyidagi ko'rinishdan iborat:

Masala. $D(2; 0)$ nuqtaga $x=8$ to'g'ri chiziqqa qaraganda ikki marta yaqinroq masofada joylashadigan $M(x, y)$ nuqtalarning harakat traektoriyasini aniqlang.



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$



M nuqta harakat traektoriyasini tekislikda $2DM = MK$ tenglamani qanoatlantiruvchi M nuqtalar to'plami sifatida aniqlaymiz (13.3 – rasm). Koordinatalar tekisligida ikki nuqta orasidagi masofani va nuqtadan vertikal to'g'ri chiziqqacha masofani topish formulalarini qo'llab,

$$2\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = |8 - x|$$

tenglamani olamiz va uni soddalashtirsak, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ ko'rinishga keladi. SHunday qilib, M nuqta ellips bo'ylab harakatlanadi, ellipsning katta o'qi va fokuslari ox absissa o'qida joylashadi (13.3 – rasm).

2. Giperbola va uning kanonik tenglamasi.

Tekislikda fokuslari deb ataluvchi berilgan F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalari ayirmasi absolyut qiymati o'zgarmas kattalikka (nolga teng emas va fokuslar orasidagi masofadan kichik) teng nuqtalar to'plamiga **giperbola** deyiladi.

7. Agar o'zgarmas kattalik $2a$, fokuslar orasidagi masofa $2s$ orqali belgilansa va Yuqorida ellips uchun tanlangan koordinatalar sistemasi tanlansa, u holda giperbola tenglamasi quyidagi kanonik ko'rinishga keladi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ bu erda } b^2 = s^2 - a^2 \text{ (} s > a \text{)}.$$

Giperbola fokuslari: $F_1(-c; 0)$ va $F_2(c; 0)$ (13.4 – rasm).

0 nuqta giperbolaning simmetriya markazi, koordinata o'qlari esa uning simmetriya o'qlaridir. Giperbola absissa o'qini haqiqiy uchlari deb ataluvchi $A_1(-a; 0)$ va $A_2(a; 0)$ nuqtalarda kesadi.

$OA = a$ kattalik uning haqiqiy yarim o'qi deyiladi. $V_1(0; -b)$ va $V_2(0; b)$ nuqtalar giperbolaning mavhum uchlari deyilsa, $OV_2 = b$ kattalik uning mavhum yarim o'qi deyiladi.

Giperbolaning asosiy to'g'ri to'rtburchagi deb, markazi koordinatalar boshida, tomonlari koordinata o'qlariga parallel va uning uchlardan o'tuvchi to'g'ri to'rtburchakka aytiladi.

Giperbola o'zining ikkita $y = \pm \frac{b}{a}x$ tenglamalar bilan aniqlanadigan asimptotalariga ega. Giperbola

asimptotalari uning asosiy to'g'ri to'rtburchagi diagonallaridir. Giperbolani qurish uchun dastlab uning asosiy to'g'ri to'rtburchagini va asimptotalarini qurgan ma'qul.

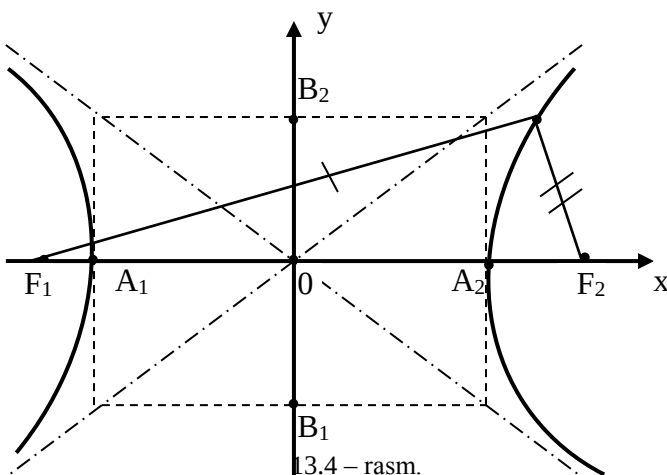
Giperbola ekscentrisiteti $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ bo'lib, uning asosiy to'g'ri to'rt-burchagining cho'zinchoqligini xarakterlaydi.

Simmetriya markazi $(x_0; y_0)$ nuqtada va simmetriya o'qlari koordinata o'qlariga parallel giperbola

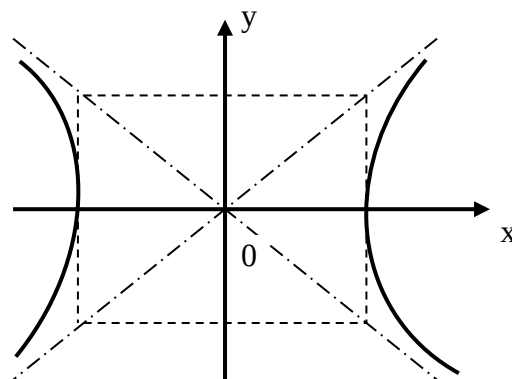
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

tenglama bilan aniqlanadi.

Yarim o'qlari teng, ya'ni $a = b$ giperbolaga teng tomonli giperbola deyiladi. Teng tomonlama giperbola tenglamasi $x^2 - y^2 = a^2$ ko'rinishda bo'lib, uning asosiy to'g'ri to'rtburchagi kvadratdan iborat va ekscentrisiteti $\sqrt{2}$ ga teng.



13.4 – rasm.



13.5 – rasm.

Masala. Asimptotalari $y = \pm \frac{1}{2}x$ tenglamalar bilan berilgan, fokuslari orasidagi masofa 10 birlikka teng bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing.

Giperbola fokuslari abssissa o'qida yotadi deb qarab, uning kanonik tenglamasini tuzamiz: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Fokuslar orasidagi masofa $F_1F_2 = 2c = 10$ bo'lganidan, $s = 5$.

Giperbola uchun $s^2 = a^2 + b^2$ bo'lganidan va $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ berilganidan foydalanib, quyidagi sistemani tuzamiz va uni echamiz:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$$

Sistema echimi: $a = 2\sqrt{5}$ va $b = 2\sqrt{5}$. Demak, giperbola tenglamasi $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{20} = 1$ kanonik

tenglamadan iborat (13.5–rasm).

3. Parabola va uning kanonik tenglamasi.

Tekislikda fokusi deb ataluvchi berilgan F nuqtadan va direktrisasi deb ataluvchi berilgan DD' to'g'ri chiziqdan teng masofada yotuvchi nuqtalar tuplamiga **parabola** deyiladi.

Abssissa o'qi F fokus nuqtadan DD' direktrisasi perpendikulyar ravishda o'tuvchi, ordinata o'qi esa fokus va direktrisalarning o'rtasidan o'tuvchi koordinatalar sistemasi tanlasak, parabola tenglamasi quyidagi kanonik ko'rinishni oladi

$$u^2 = 2R x,$$

bu erda, R – fokus va direktrisa orasidagi masofa.

Direktrisa tenglamasi $y = -\frac{P}{2}$, fokus esa $F(\frac{P}{2}; 0)$ (13.6 – rasm).

Koordinatalar boshi parabola uchi, absissa o'qi esa uning simmetriya o'qidir. Parabola eksentrisiteti $\varepsilon = 1$.

Agar ordinata o'qi parabola simmetriya o'qi bo'lsa, u holda uning tenglamasi $x^2 = 2Ru$ ($R > 0$) ko'rinishda

bo'lib, direktrisa tenglamasi $y = -\frac{P}{2}$ va fokusi $F(0; \frac{P}{2})$ nuqtadir.

Uchi $(x_0; u_0)$ nuqtada, simmetriya o'qlari koordinata o'qlaridan biriga parallel parabola quyidagi tenglamalar bilan aniqlanadi:

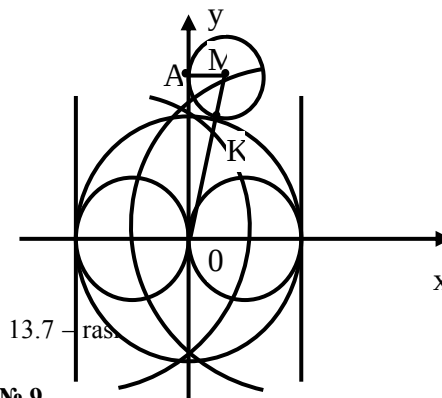
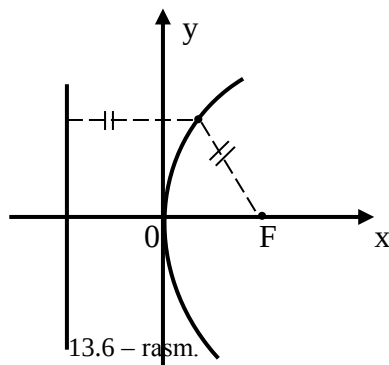
$$(u-u_0)^2 = 2R(x-x_0) \quad \text{yoki} \quad (x-x_0)^2 = 2R(u-u_0).$$

Masala. $0u$ ordinata o'qiga va $x^2 + u^2 = 4$ aylanaga urinuvchi aylanalar markazlari to'plami tenglamasini tuzing.

$M(x; u)$ – aylanalar markazlari to'plamining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Masala shartiga binoan $KM = AM$ (13.7 – rasm). Berilgan aylana radiusi $OK=2$ ekanligini va $KM=OM-OK$ tenglikni hisobga olsak, koordinatalarda quyidagi tenglamani olamiz:

$$x^2 + u^2 - 2 = |x| \quad \text{yoki} \quad u^2 = 4|x| + 4.$$

Ushbu tenglama uchlari $(-1; 0)$ va $(1; 0)$ nuqtalarda, fokuslari koordinatalar boshida, direktrisalari mos ravishda $x = -2$ va $x = 2$ to'g'ri chiziqlardan iborat, absissa o'qi simmetriya o'qi bo'lgan parabolalarni ifodalaydi (13.7–rasm).



MAVZU № 9

IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR KLASSIFIKASIYASI. AYLANA, ELLIPSE, GIPERBOLA, PARABOLA VA ULARNING KANONIK KO'RINISHGA KELTIRISH

Deqart koordinatalar sistemasida 2-tartibli tenglama bilan aniklangan chiziqlar 2-tartibli egri chiziqlar deyiladi. Umumiy xolda 2-tartibli egri chiziqlar tenglamasi

$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

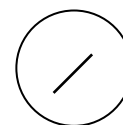
Ko'rinishida bo'ladi.

Bu erda A, B, C, D, E, F – haqiqiy o'zgarmas sonlar (1) tenglama bilan ifoda qilinuvchi sodda ko'rinishdagi ikkinchi tartibli egri chiziqlarga aylana, ellips, giperbola va paraballar misol bo'la oladi.

1. Aylana.

Markaz deb aytaluvchi nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar to'plamiga aylana deyiladi.

Deqart koordinatalar sistemasida aylananing radiusi R va markazi $A(a;v)$ nuqtada bo'lsin. $N(x;y)$ aylanadagi ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, ta'rifga ko'ra: $AN=R$ (1-shakl). Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan: $AN = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Bu tenglikning ikki tomonini kvadratga ko'tarib $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ ni hosil qilamiz. Bu aylana tenglamasidir



2. Ellips deb, tekislikning barcha shunday nuqtalari to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan shu tekislikning fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtasigacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas bo'ladi, bu kattalik fokuslar orasidagi masofadan katta bo'lishi kerak.

$M(x,u)$ nuqta ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $F_1(c;0)$ va $F_2(c;0)$ fokuslar bo'lsa ta'rifdan. $|MF_1|+|MF_2|=2a$ hamda $|MF_1|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $|MF_2|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ ekanidan. $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$ tekislikni xar ikki tamonini kvadratga ko'tarib.

$$A>S \text{ bo'lgani uchun, } a^2 - c^2 = b^2 \text{ desak, } v^2x^2+a^2u^2=a^2v^2 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

(2) ellipsning kanonik tenglamasidir A_1A_2 - katta o'q, V_1V_2 - kichik o'q, $\varepsilon=s/a$ - ellips eksstsentrisiteti deyiladi. $0<c<a$ bo'lgani uchun $0<\varepsilon<1$. $x=a/\varepsilon$ va $x=-a/\varepsilon$ to'g'ri chiziqlar ellipsning direktrisalari deb ataladi.

3. Giperbola deb, tekislikning barcha shunday nuqtalari to'plamiga aytadiki, bu nuqtalarning xar biridan shu tekislikning fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtasigacha bo'lgan masofalar ayirmalarining absolyut qiymatlari o'zgarmas bo'ladi. Nolga teng bo'lmagan bu kattalik fokuslar orasidagi masofadan kichik bo'lishi kerak. Ta'rifga ko'ra (3-shakl)

$$|MF_1| - |MF_2| = \pm 2a$$

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

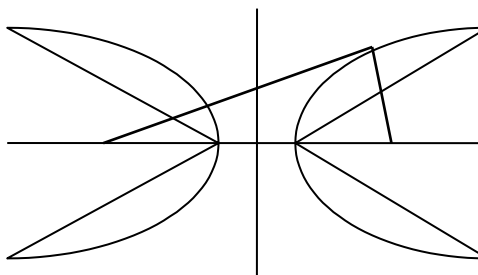
$$|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

$$a^2 - c^2 = -b^2$$

desak (chunki $a<c$)



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ hosil bo'ladi.}$$

(2) Bu giperbolaning kanonik tenglamasidir. A_1A_2 - haqiqiy o'q, V_1V_2 - mavxum o'q, $\varepsilon=s/a$ - giperbolaning eksstsentrisiteti deyiladi. $s>a$ bo'lgani uchun $\varepsilon>1$. $x=a/\varepsilon$ va $x=-a/\varepsilon$ to'g'ri chiziqlar giperbolaning direktrisalari deb ataladi. $Y=+(v/a)x$ to'g'ri chiziqlar giperbolaning asimptotalari deb ataladi.

4. Parabola. Parabola deb, tekislikning fokus deb, ataluvchi berilgan Fokusdan va direktrissa deb ataluvchi berilgan to'g'ri chiziqdan baravar uzoqlikdagi nuqtalar to'plamiga aytiladi (fokus direktrissada yotmaydi deb faraz qilinadi).

Fokusdan direktrissagacha bo'lgan masofani R bilan belgilaymiz. $F(p/2; 0)$ fokus, direktrisa tenglamasi $x=-R/2$. Bo'lsin (4-shakl). U xolda ta'rifga asosan $|NM| = |MF|$. Bu erda $M(x, u)$ - parabolaning ixtiyoriy nuqtasi.

$$|NM| = \frac{P}{2} + x; |MF| = \sqrt{\left(x - \frac{P}{2}\right)^2 + y^2}$$

bo'lgani uchun

$$\frac{P}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{P}{2}\right)^2 + y^2},$$

soddalashtirishdan keyin esa $y^2=2Px$ hosil bo'ladi. Bu parabolaning kanonik tenglamasi deyiladi. Parabola uchun $\varepsilon=1$ eksstsentrasitet va $x=-R/2$ direktrisa bo'ladi.

MAVZU № 10

FAZODA DEKART KOORDINATALAR SISTEMASI VEKTORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Reja

1. Fazoda dekart koordinatalar sistemasi
2. Vektorlar va ular ustida amallar.

Fanda ulchanishi mumkin bo'lgan narsa miqdor yoki kattalik deb ataladi.

Miqdorlar o'z xarakteriga ko'ra ikki xil bo'ladi: 1) skalyar miqdorlar; 2) vektor miqdorlar.

Agar miqdor fakat son kiymati bilangina tulik xarakterlansa, uni skalyar miqdor deb ataladi.

Masalan, uzunlik, yuza, xajm, temperato'ra skalyar miqdorlardir.

Agar miqdor son qiymati bilan tulik xarakterlanmay, balki uning yo'nalishini ham ko'rsatish zaro'r bo'lsa, bunday son qiymati va yo'nalishi bilan xarakterlanadigan miqdorni vektor miqdor yoki qisqacha vektor deb ataladi.

Masalan, tezlik, tezlanish, kuch, kuch impulsi kabi miqdorlar vektorlarga misol bo'ladi.

Hamma vektor miqdorlar uchun umumiy bo'lgan xususiyatlar, qonuniyatlar vektorlar algebrasini tashkil etadi. To'g'ri chiziqda oddiy kesma bilan bir katorda yo'nalgan kesma, ya'ni bir uchi uning boshi, ikkinchi uchi esa oxiri hisoblangan kesma qaraladi. Bunday kesma vektor deyiladi.

Boshi A oxiri V bo'lgan vektor $\vec{AB}$ kabi tasvirlanadi. Shunday qilib, vektor miqdor geometrik usulda ma'lum uzunlikdagi va aniq yo'nalishdagi kesma yordamida tasvirlanadi.

Vektorning uzunligi uning moduli deb ataladi va $|\vec{AB}| = |\vec{a}| = a$ ko'rinishda belgilanadi. Moduli nolga teng vektor nol' vektor, moduli 1 ga teng bo'lgan vektor birlik vektor deyiladi. Nol' vektorning yo'nalishi aniqlanmagan bo'ladi. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yo'nalishlari va uzunliklari bir xil bo'lsa, ular uzaro teng deyiladi.

Vektorlar yigindisi va vektorni skalyarga ko'paytirish.

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorni qo'shish uchun «uchburchak qoida»sidan yoki «parallelogram qoida»sidan foydalanadi. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar boshlari bir nuqtata keltiriladi va ularni tomonlar sifatida olib parallelogram yasaladi. Shu parallelogramning vektorlar boshidan chiqarilgan diagonal vektorlarning yig'indisi bo'ladi (1-shakl). $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ vektorning moduli quyidagi formula yordamida topiladi:

$$|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})}.$$

Vektorlarni qo'shish quyidagi xossalarga ega:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{b} + \vec{a}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ayirma, $\vec{a} = \vec{d} + \vec{b}$ asosida hosil qilinadi. Bu parallelogramning ikkinchi diagonaliga mos keladi.

Ta'rif. $\vec{a}$ vektorning skalyar k songa ko'paytmasi deb, shunday $\vec{b}$ vektorga aytiladiki, $\vec{b}$ ning uzunligi $\vec{a}$ dan k marta katta bo'lib, ya'ni $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$, bo'lib $\vec{b}$ ning yo'nalishi: agar $k > 0$ bo'lsa, $\vec{a}$ ning yo'nalishi bilan bir hil, agar $k < 0$ bo'lsa, $\vec{a}$ ning yo'nalishiga qarama-qarshi bo'ladi.

Vektorning skalyarga ko'paytirish quyidagi xossalarga ega:

1. ($k=i$) $\vec{a} = k\vec{a} + i\vec{a}$

2. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

3. $1\vec{a} = \vec{a}$

4. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

5. $0\vec{a} = 0$

Kollinear va komplanar vektorlar.

1-Ta'rif. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro parallel bo'lsa, yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotsalar ular kollinear vektorlar deyiladi.

1-Teorema. Agar $\vec{b} = k\vec{a}$ bo'lsa, bu tenglik $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning kollinear bo'lishi uchun zarur va yetarlidir. Bundan kollinear vektorlar orasida hamma vaqt chiziqli bog'lanish mavjud ekanligi kelib chiqadi.

2-Ta'rif. Uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektor bitta tekislikda yotsa, yoki bitta tekislikka parallel bo'lsa, ular komplanar vektorlar deyiladi.

2-Teorema. Uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar vektorlar bo'lishi uchun ular orasida $\vec{c} = k\vec{a} + e\vec{b}$ chiziqli bog'lanish mavjud bo'lishi zarur va yetarlidir.

Vektorlarning chiziqli bog'liqligi.

Bizga quyidagi vektorlar sistemasi berilgan bo'lsin,

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n \quad (1)$$

Agar bu sistema uchun hammasi bir vaqtda nolga teng bo'lmagan shunday $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ haqiqiy sonlar mavjud bo'lib va

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0 \quad (2)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, bu holda berilgan vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq deyiladi.

Agar $\alpha_i (i=1, n)$ haqiqiy sonlarning hammasi nolga teng bo'lgandagina (2) o'rinli bo'lsa, (1) vektorlar sistemasi chiziqli bog'liqmas (chiziqli erkli) deyiladi.

Misol. $\vec{a}_1 \{2; 3\}$ va $\vec{a}_2 \{4; 6\}$ vektorlar chiziqli bog'liqdir, chunki $2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = 0$ tenglik o'rinli.

Misol. $\vec{a}_1 \{1; 2\}$, $\vec{a}_2 \{1; 1\}$ va $\vec{a}_3 \{0; -1\}$ vektorlar sistemasi chizigi bog'langanligi ko'rsatilsin va koeffitsientlar aniqlansin.

Yechish. Vektorlarning chiziqli bog'liqligi ta'rifiga ko'ra shunday $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sonlar topiladiki natijada $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi.

$$\alpha_1 \{1; 2\} + \alpha_2 \{1; 1\} + \alpha_3 \{0; -1\} = 0,$$

$$\{\alpha_1; 2\alpha_1\} + \{\alpha_2; \alpha_2\} + \{0; -\alpha_3\} = 0,$$

$$\{\alpha_1 + \alpha_2 + 0; 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3\} = 0,$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\alpha_3 = +1$ bo'lsin, u vaqtda

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

$$\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_3 = 0.$$

Misol. $\vec{a}_1\{1;-1\}$ va $\vec{a}_2\{2;3\}$ vektorlar chiziqli erkli ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish. Faraz qilaylik berilgan vektorning chiziqlik bog'liq bo'lsin. Bu holda, ta'rif ko'ra, $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = 0$ tenglik bo'ladi. Bundan

$$\begin{aligned} \alpha_1\{1;-1\} + \alpha_2\{2;3\} &= 0, \\ \{\alpha_1 + 2\alpha_2; -\alpha_1 + 3\alpha_2\} &= 0, \\ \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \end{cases} & \quad \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

Demak, berilgan vektorlar sistemasi chiziqli erkli.

Agar berilgan vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, ulardan kamida bittasini qolganlari orqali ifoda qilish mumkin. Haqiqatan, sistema chiziqli bog'liq bo'lsa, ta'rifga ko'ra

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_i \vec{a}_i + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$$

tenglik o'rinli. Faraz qilaylik $\alpha_2 \neq 0$. Unda

$$\alpha_2 \vec{a}_2 = -\alpha_1 \vec{a}_1 - \dots - \alpha_n \vec{a}_n$$

yoki

$$\vec{a}_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \vec{a}_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_2} \vec{a}_n = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \vec{a}_1 + \dots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_2}\right) \vec{a}_n$$

Demak, $\vec{a}_2$ vektor qolgan vektorlar orqali chiziqli ifoda qilindi. Buni ko'pincha $\vec{a}_2$

vektor $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \dots, \vec{a}_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi. Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinadiki, kollinear vektorlar chiziqli bog'liq bo'lar ekan. Haqiqatan, agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, bo'lar uchun shunday t soni topiladiki, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi $\vec{a} = t\vec{b}$. Bundan $\vec{a} - t\vec{b} = 0$, bu yerda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning chiziqli bog'liqligini bildiradi. Aksincha, ikki vektor chiziqli bog'liq bo'lsa, ular kollinear vektorlar bo'ladi. Haqiqatan ham ikki vektorning chiziqli bog'liqligidan $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = 0$ ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$) kelib chiqadi. Bundan,

$$\vec{a}_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \vec{a}_2$$

yoki

$$\vec{a}_1 = t \vec{a}_2.$$

Oxirgi tenglik berilgan ikki vektorning kollinearlik shartidir.

Vektorning o'qqa proektsiyasi.

$\vec{AB}$ vektorning o'qdagi proektsiyasi deb uning boshi A, uchi B nuqtalarning shu o'qqa tushirilgan A_1B_1 proektsiyalarini tutashtiruvchi $\vec{A_1B_1}$ vektorning A_1B_1 miqdoriga, ya'ni mo'ljalga $\vec{A_1B_1}$ kesmaning plus yoki minus ishora bilan olingan o'zunligiga atiladi.

$$p_p \vec{AB} = \pm |\vec{A_1B_1}|$$

Agar $\vec{A_1B_1}$ vektorning mo'ljalishi o'q mo'ljalishi bilan bir-hil bo'lsa, proektsiya plus aks holda minus bo'ladi.

Vektorning o'qdagi proektsiyasi vektor modulining o'q va vektor orasidagi burchak α kosinusiga ko'paytirilganiga teng:

$$p_p \vec{AB} = p_p |\vec{a}| \cos \alpha$$

Agar vektor OX o'qqa parallel bo'lsa, uning bu o'qqa proektsiyasi vektor o'zunligi bilan bir hil bo'ladi, agar u OX ga perpendikulyar bo'lsa, proektsiyasi nolga teng bo'ladi.

Bir neyechta vektor yig'indisining biror o'qdagi proektsiyasi qo'shiluvchi vektorlar proektsiyalarning yig'indisiga teng:

$$P_{\rho_1}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = P_{\rho_1}\vec{a} + P_{\rho_1}\vec{b} + P_{\rho_1}\vec{c}$$

Fazodagi to'g'ri bo'rchakli Dekart koordinatalar sistemasi. Vektorning koordinatalari. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi.

Fazodagi to'g'ri bo'rchakli Dekart koordinatalar sistemasi masshtab birligi hamda O nuqtada kesishuvchi o'zaro perpendikulyar uchta o'qning berilishi bilan tula aniqlanadi; o'qlardan birinchisini abstsissalar (Ox), ikkinchisi ordinatalar (Oy), uchinchisi applikatalar (Oz) o'qi, O nuqta yecha koordinatalar boshi deyiladi. Xar bir o'qda musbat mo'ljalish va bir hil o'zunlik birligi (masshtab birligi) tanlab olinadi. M nuqtaning fazodagi vaziyati bu nuqtaning koordinatalari deb ataluvchi uchta son (x, y, z) bilan aniqlanadi va M(x, y, z) ko'rinishda yoziladi. Koordinata o'qining xar biri uchun birlik vektor (ort) lar kiritamiz. Ox, Oy va Oz o'qlaridagi birlik vektorlarni mos ravishda $\vec{i}$, $\vec{j}$ va $\vec{k}$ lar bilan belgilash qabul qilingan. $\vec{a}$ vektorning koordinatalari deb, uning Ox, Oy, Oz koordinata o'qidagi proektsiyalari a_x , a_y , a_z ga aytiladi va

$\vec{a} \{a_x; a_y; a_z\}$ ko'rinishda yoziladi (1-shakl):

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Bundagi $a_x \vec{i}$, $a_y \vec{j}$ va $a_z \vec{k}$ vektorning koordinata o'qlaridagi komponentalari deyiladi. Ular tegishli koordinata o'qlariga kollinear vektorlar bo'lib - diagonal $\vec{a}$ vektordan iborat bo'lgan parallelopipedning qirralari bo'lib xizmat qiladi. Vektor o'z koordinatalari bilan to'la aniqlanadi, ya'ni teng vektorning mos koordinatalari ham o'zaro teng va aksincha.

Boshlang'ich nuqtasi koordinatalar boshida va oxirgi nuqtasi

M(x, y, z) nuqtada bo'lgan $\vec{r} = \vec{OM}$ vektor M nuqtaning radius vektori deyiladi. Bu holda

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

bo'ladi. Radius vektorning uzunligi quyidagi formuladan topiladi:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ikki vektorni yig'indisi ayirmasi va vektorni songa ko'paytmasi uchun quyidagilar o'rinalidir:

$$(\vec{a} \pm \vec{b}) \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}$$

$$\lambda \vec{a} \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}, (\lambda - \text{Const})$$

$\vec{a} \{a_x; a_y; a_z\}$ va $\vec{b} \{b_x; b_y; b_z\}$ vektorlar o'zaro kollinear bo'lishining zaruriy va etarli sharti

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}$$

edi. U holda $a_x = \lambda b_x$; $a_y = \lambda b_y$; $a_z = \lambda b_z$ bo'lib, ikki vektorning kollinearlik sharti uning koordinatalari orqali

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

ko'rinishda yoziladi $\vec{a} \{a_x; a_y; a_z\}$ vektorning uzunligi

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

formula bilan aniqlanadi. $\vec{M}_1 \vec{M}_2$ vektorning uzunligi

$$M_1 M_2 = \left| \vec{M}_1 \vec{M}_2 \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ formula bo'yicha hisoblanadi.}$$

MAVZU № 11

FAZODA TEKISLIK TENGLAMALARI. FAZODA TO'G'RI CHIZIQ.

Reja

1. Fazoda tekislikning turli ko'rinishdagi tenglamalari
2. Nuqtasi va normal vektori bilan berilgan tekislik tenglamasi.
3. Berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha masofa.

1. Fazoda tekislikning turli ko'rinishdagi tenglamalari. Nuqtasi va normal vektori bilan berilgan tekislik tenglamasi.

R_3 fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tanlangan bo'lib, $\mathbf{a}$ radius vektor berilgan bo'lsin. $\mathbf{a}$ radius vektor oxiridan vektorga yagona mumkin bo'lgan perpendikulyar tekislik (T) o'tkazilgan, $M(x, u, z)$ nuqta tekislikning ixtiyoriy nuqtasi va $\mathbf{OM} = \mathbf{r}(x, u, z)$ nuqtaning radius vektori bo'lsin.

$$|\mathbf{a}| = R, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{a}}{R} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) - \mathbf{a} \text{ vektorning birlik vektori, } \alpha, \beta \text{ va } \gamma \text{ } \mathbf{a} \text{ yoki } \mathbf{v} \text{ vektorning}$$

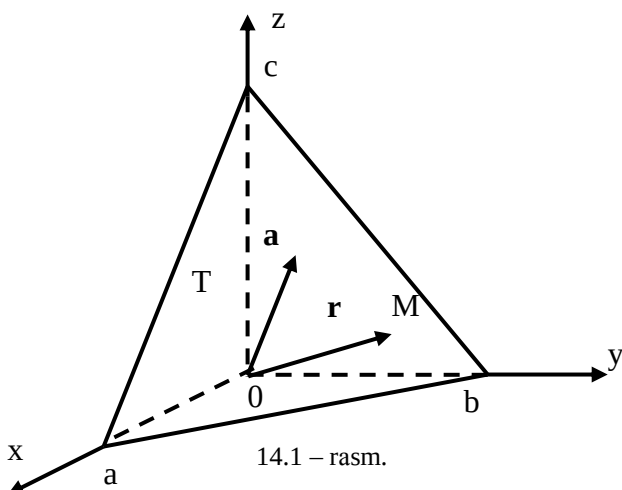
koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchaklari bo'lsin (14.1 – rasm).

$\cos \alpha, \cos \beta$ va $\cos \gamma$ $\mathbf{a}$ yoki $\mathbf{v}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi. Har qanday $\mathbf{r}$ vektorning $\mathbf{v}$ vektordagi sonli proektsiyasi R ga teng:

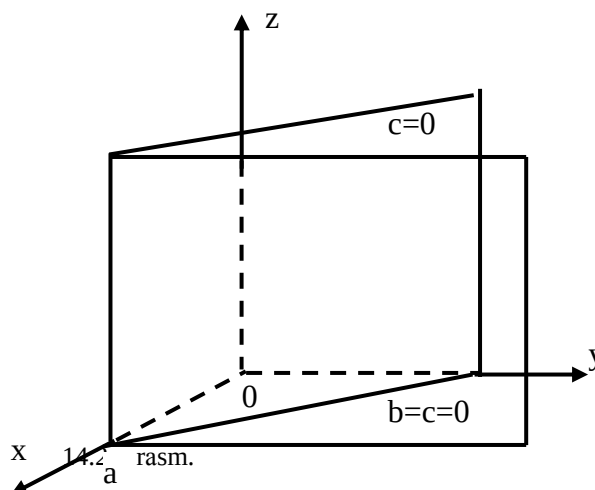
$$\text{Pr}_{\mathbf{v}} \mathbf{r} = R \text{ yoki } (\mathbf{r}, \mathbf{v}) = R \quad (R \geq 0) \quad (14.1)$$

(14.1) tenglamaga T tekislikning vektor shakldagi tenglamasi deyiladi. Vektor tenglama koordinatalarda

$$x \cos \alpha + u \cos \beta + z \cos \gamma = R \quad (R \geq 0) \quad (14.2)$$



14.1 – rasm.



14.2 rasm.

ko'rinishda yoziladi. (14.2) tenglama tekislikning normal shakldagi tenglamasi deyiladi. Agar (14.2) tenglamani noldan farqli biror-bir songa ko'paytirsak, tenglamaga teng kuchli

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \quad (14.3)$$

8. ko'rinishdagi tenglamani olamiz. (14.3) tenglamaga T tekislikning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi deyiladi. Har qanday (14.3) ko'rinishdagi tenglamani (14.2) normal shakldagi tenglamaga keltirish mumkin. Buning

uchun umumiy tenglamani normallovchi ko'paytuvchi $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ ga ko'paytirish etarli. $R = -\mu D$

ning nomanfiyligini ta'minlash maksadida "+" yoki "-" ishoralaridan ozod had D ishorasining qarama-qarshisi tanlanadi. Natijada

$$\mu A x + \mu V u + \mu S z = R \quad (R \geq 0)$$

Bu erda, $(\mu A)^2 + (\mu V)^2 + (\mu S)^2 = 1$ munosabat o'rinni bo'lib, $\mathbf{v} = (\mu A, \mu V, \mu S)$ vektorning birlik vektor va uning koordinata o'qlaridagi sonli proektsiyalari, mos ravishda quyidagilarga

$$\mu A = \cos \alpha, \quad \mu V = \cos \beta, \quad \mu S = \cos \gamma$$

tengligini payqash qiyin emas.

Agar tekislik umumiy ko'rinishdagi tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, tenglama shaklidan tekislikning o'zi haqida

quyidagilarni aniqlash mumkin: 1) agar $D = 0$ bo'lsa, $Ax + Vu + Sz = 0$ tekislik koordinata boshidan o'tadi; 2) $\mathbf{N} = (A, V, S)$ vektor $\mathbf{T}$ tekislikka perpendikulyar, ya'ni tekislikning normal vektoridir, chunki $\mathbf{v} = (\mu A, \mu V, \mu S)$ vektorga kollinear: $\mu \mathbf{N} = \mathbf{v}$.

Umumiy tenglamaning xususiy hollarini tahlil qilish mumkin. Agar $S = 0$ bo'lsa, $Ax + Vu + D = 0$ tenglama bir tomondan xOy koordinatalar tekisligida to'g'ri chiziqni ifodalasa, R_3 fazoda to'g'ri chiziqdan o'tib, xOy koordinatalar tekisligiga perpendikulyar yoki Oz applikata o'kiga parallel tekislikni aniqlaydi (14.2–rasm). $V = S = 0$ bo'lsa, $Ax + D = 0$

tekislik Ox absissa o'qini $X = -\frac{D}{A} = a$ nuqtada o'qqa perpendikulyar yoki uOz koordinatalar tekisligiga parallel ravishda kesuvchi tekislikni aniqlaydi (14.2–rasm) va hokazo. $X = 0$ – uOz koordinatalar tekisligi tenglamasi, $u = 0$ – xOz koordinatalar tekisligi tenglamasi va $z = 0$ esa xOy koordinatalar tekisligi tenglamasidir.

Agar umumiy ko'rinishdagi tekislik tenglamasida A, V, S va D sonlarning har biri noldan farq qilsa, u holda (14.3) umumiy tenglama quyidagi ko'rinishga keltirilishi mumkin

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (14.4)$$

bu erda, $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{V}$ va $c = -\frac{D}{S}$. (14.4) tenglamaga tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi deyiladi (14.2 – rasm).

Berilgan $M_0(x_0, u_0, z_0)$ nuqtadan berilgan $\mathbf{N}(A, V, S)$ vektorga perpendikulyar ravishda o'tuvchi tekislik tenglamasi vektor shaklda $(\mathbf{N}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ ko'rinishda yozilsa, koordinatalarda

$$A(x - x_0) + V(u - u_0) + S(z - z_0) = 0$$

shaklda yoziladi. Bu erda, $\mathbf{r}_0$ – M_0 nuqtaning radius vektori.

Masala. $M_0(-2, 3, -1)$ nuqtadan o'tib, $\mathbf{N} = (1, -4, 2)$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

Tuzilgan tenglamaga binoan: $1 \cdot (x + 2) - 4 \cdot (y - 3) + 2 \cdot (z + 1) = 0$ yoki $x - 4u + 2z + 16 = 0$.

2. Berilgan uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi. Tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchak. Tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.

Fazoda bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$ va $(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalar berilgan bo'lib, ular orqali o'tuvchi yagona tekislik tenglamasini tuzish masalasi qo'yilgan bo'lsin.

Tekislik $(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o'tgani uchun $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ tenglama o'rinli, bu erda A, V va S koeffisientlar bir vaqtda nolga teng emas. Tekislik berilgan ikkinchi $(x_2; y_2; z_2)$ va uchinchi $(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalardan ham o'tgani uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0,$$

$$A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0.$$

A, V va S noma'lumlarga nisbatan uchta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ldi. Ma'lumki, ushbu bir jinsli sistema determinanti nolga teng bo'lgandagina nolmas echimlarga ega. Demak, berilgan bir to'g'ri chiziqda etmaydigan uchta nuqtadan o'tuvchi yagona tekislik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

shaklda yoziladi. Tenglamani quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Oxirgi ikki tenglamaning o'zaro teng kuchli ekanligini tekshirib ko'rish qiyin emas.

Ikki T_1 va T_2 tekislik umumiy ko'rinishdagi tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (T_1) \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (T_2) \end{cases}$$

Berilgan tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchak ularning normal $\mathbf{N}_1(A_1; B_1; C_1)$ va $\mathbf{N}_2(A_2; B_2; C_2)$ vektorlari orasidagi φ burchakka teng. Ushbu tenglik tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchakni topish masalasini ularning normal vektorlari orasidagi burchakni topish masalasi bilan almashtirish imkonini beradi:

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)}{|\mathbf{N}_1| |\mathbf{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Bu erda, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Berilgan tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari quyidagilardan iborat:

$$T_1 \perp T_2: (\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) = 0 \text{ yoki } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$$

$$T_1 \parallel T_2: \mathbf{N}_1 = \lambda \mathbf{N}_2 \text{ yoki } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Masala. $x + u + z = 1$ va $z = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Berilgan tekisliklar hosil qilgan ikki yoqli burchak mos normal vektorlar $(1, 1, 1)$ va $(0, 0, 1)$ orasidagi φ burchakka teng:

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1}}.$$

$$\text{Demak, } \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. Berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha masofa.

R_3 fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lib, berilgan M_0 nuqtadan umumiy ko'rinishdagi tenglamasi bilan berilgan $Ax + Vu + Sz + D = 0$ ($A^2 + V^2 + S^2 \neq 0$) tekislik orasidagi d masofani topish masalasi qo'yilgan bulsin.

$\mathbf{r}_0(x_0, u_0, z_0)$ vektor M_0 nuqtaning radius vektori va $\mathbf{r}(x, u, z)$ vektor esa tekislikning ixtiyoriy M nuqtasi radius vektori bo'lsin. d masofa $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$ vektorning $\mathbf{a}$ yoki $\mathbf{v}$ vektordagi sonli proektsiyasining absolyut qiymatiga teng: $d = |\text{Pr}_{\mathbf{v}}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})|$. Masofani hisoblash formulasi vektor ko'rinishda yoki tekislikning normal tenglamasi parametrlari orqali yozilishi mumkin (§13 ga qarang). Tekislikning umumiy tenglamasi parametrlari orqali esa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

ko'rinishda yoziladi.

Masala. $(-1, 4, -3)$ nuqtadan $x + 2u - 2z + 5 = 0$ tekislikgacha bo'lgan masofani toping.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani hisoblash formulasiga binoan:

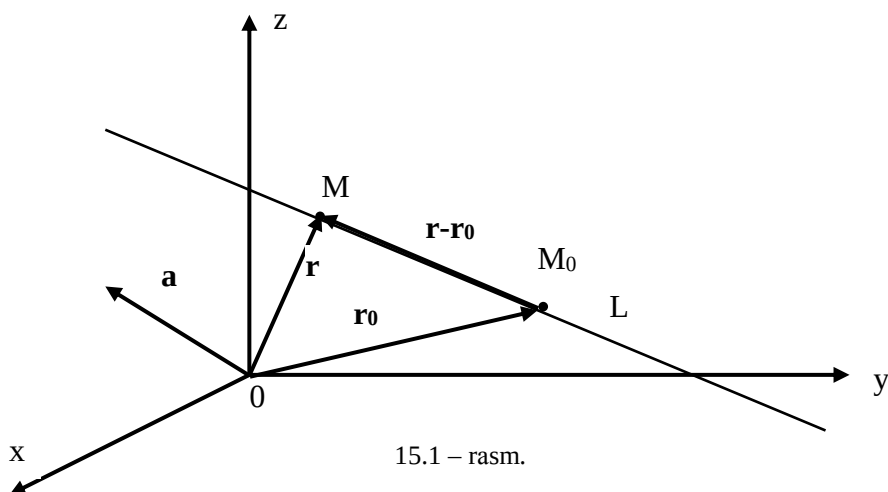
$$d = \frac{|-1 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 6 \text{ (bir.)}.$$

1. To'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.

Fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tanlangan bo'lib, $M_0(x_0, u_0, z_0)$ nuqta va nolmas $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ radius vektor berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan $\mathbf{a}$ vektorga parallel L to'g'ri chiziq o'tkazamiz. $M(x, u, z)$ nuqta L to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi va $\mathbf{r}(x, u, z)$ vektor uning radius vektori, $\mathbf{r}_0(x_0, u_0, z_0)$ vektor esa berilgan M_0 nuqtaning radius vektori bo'lsin. $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ vektor L to'g'ri chiziqda yotgani uchun berilgan $\mathbf{a}$ vektorga kollinearidir:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t \mathbf{a} \quad (15.1)$$

(15.1) tenglamada t ixtiyoriy haqiqiy son bo'lib, parametr deyiladi. Agar t parametr haqiqiy sonlar o'qida turli son qiymat qabul qilsa, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \mathbf{a}$ vektor oxiri L to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qiladi (15.1-rasm). (15.1) tenglamaga fazoda berilgan nuqtadan berilgan vektor yo'nalishida o'tuvchi to'g'ri chiziqning vektor tenglamasi deyiladi.



Koordinatalarda (15.1) tenglama quyidagi uchta tenglamalarga ajraladi:

$$\begin{cases} x - x_0 = ta_1, \\ y - y_0 = ta_2, \\ z - z_0 = ta_3. \end{cases} \quad (15.2)$$

(15.2) tenglamalarga to'g'ri chiziqning parametrlil tenglamalari deyiladi. Agar (15.2) sistemada t parametr yo'qotilsa, quyidagi qo'sh tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0) \quad (15.3)$$

(15.3) ko'rinishdagi tenglamaga fazoda to'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishdagi tenglamasi deyiladi. (15.3) tenglamada a_1, a_2, a_3 sonlardan ixtiyoriy biri yoki ikkitasi nolga teng bo'lishi mumkin.

Ushbu hollarda, qulayligi uchun maxrajlarda bir yoki ikkita nollar yozish qabul qilingan bo'lib, yozuv shartli tus oladi. (15.3) tenglama fazoda $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tib, $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ vektorga parallel to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

Masala. Koordinatalar fazosida $(2, -3, 1)$ nuqtadan o'tib, $(-1, 0, 4)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

To'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishdagi tenglamasi, (15.3) tenglamaga binoan,

$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 3}{0} = \frac{z - 1}{4}$$

shaklda bo'ladi. Ushbu tenglamalar o'z navbatida quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli:

$$\begin{cases} 4x + z - 7 = 0, \\ y + 3 = 0. \end{cases}$$

SHunday qilib, qaralayotgan to'g'ri chiziq $z = -4x + 7$ va $y = -3$ tekisliklarning umumiy kesishish to'g'ri chizig'idan iborat.

Fazoda ikki tekislik o'zlarining umumiy

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (T_1) \quad \text{va} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (T_2)$$

ko'rinishdagi tenglamalari bilan berilgan bo'lsin.

Agar $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ munosabatlar o'rinli bo'lsa, T_1 va T_2 tekisliklar turli o'zaro parallel

tekisliklarni aniqlaydi. Agar $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ munosabatlar bajarilsa, T_1 va T_2 tekisliklar ustma – ust

joylashadi, ya'ni berilgan tenglamalar teng kuchli bo'lib, aynan bir tekislikni aniqlaydi. Qolgan barcha hollarda tekisliklar to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Berilgan tekisliklar umumiy tenglamalaridan tuzilgan

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (15.4)$$

sistema aynan to'g'ri chiziqni aniqlashi uchun

$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ matrisa rangining 2 ga teng bo'lishi zarur va etarlidir. YOKi xuddi shuning o'zi, quyidagi

ikkinchi tartibli

$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ aniqlovchilardan birining noldan farqli bo'lishi kifoya.

Aniqlik uchun ulardan birinchisi noldan farqli bo'lsin. Unda (15.4) tenglamalar sistemasini x va y ga nisbatan yechish mumkin:

$$\begin{cases} x = \alpha z + \mu, \\ y = \beta z + \nu. \end{cases}$$

Yuqoridagi tenglamalar sistemasi esa, quyidagi

$$\frac{x - \mu}{\alpha} = \frac{y - \nu}{\beta} = \frac{z}{1}$$

tenglamalarga teng kuchli, bu erda, α, β, μ va ν ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Haqiqatdan ham, ushbu tenglamalar fazoda $(\mu, \nu, 0)$ nuqtadan o'tib, $(\alpha, \beta, 1)$ vektorga parallel to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

Asosiy matrisasi rangi 2 ga teng bo'lganda, (15.4) ko'rinishdagi tenglamalar sistemasiga fazoviy to'g'ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamalari deyiladi.

Masala. Ou ordinata o'qining kanonik shakldagi tenglamalarini tuzing.

Ou o'qi xOu va uOz koordinata tekisliklari kesishmasidan iborat:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x = 0y \\ z = 0y \end{cases}$$

Oxirgi tenglamalar sistemasini shartli ravishda $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ ko'rinishda yozish mumkin. Haqiqatdan ham, Ou

o'qi $(0, 0, 0)$ nuqtadan o'tib, $j(0, 1, 0)$ vektor yo'nalishidagi to'g'ri chiziqdir.

2. Fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Fazoda to'g'ri chiziqning turli ko'rinishdagi tenglamalari.

Fazoda ikki L_1 va L_2 to'g'ri chiziqlar kanonik $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$ (L_1) va

$\frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3}$ (L_2) ko'rinishdagi tenglamalari bilan berilgan bo'lib, ular orasidagi burchak

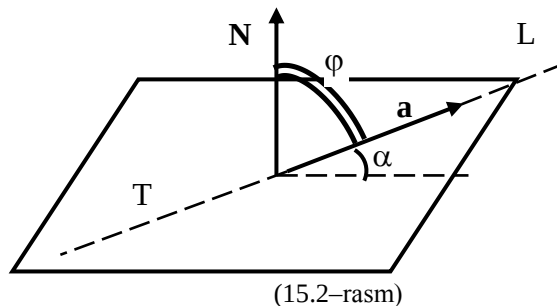
kattaligini topish masalasi qo'yilgan bo'lsin. Berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchak, L_1 va L_2 larning yo'naltiruvchi vektorlari $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ va $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ orasidagi burchakka teng. Berilgan to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotishi yoki o'zaro ayqash bo'lishi mumkin. Barcha hollarda ular orasidagi burchakni topish masalasi to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakni topish masalasiga keltiriladi:

$$\cos \varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Fazoda umumiy ko'rinishdagi tenglamasi bilan (T) tekislik va kanonik ko'rinishdagi tenglamalari bilan (L) to'g'ri chiziq berilgan bulsin:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (T), \quad \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (L)$$

Berilgan to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi α burchak sinusi (L) to'g'ri chiziq yo'naltiruvchi vektori $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ bilan (T) tekislik normal vektori $\mathbf{N}(A, B, C)$ orasidagi φ burchak kosinusiga teng (15.2-rasm).



Masala vektorlar orasidagi burchak kattaligini topish masalasiga keltirildi. SHunday qilib,

$$\cos \varphi = \sin \alpha = \frac{a_1 \cdot A + a_2 \cdot B + a_3 \cdot C}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

To'g'ri chiziq va tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari quyidagi munosabatlardan iborat:

$$L \perp T: \frac{a_1}{A} = \frac{a_2}{B} = \frac{a_3}{C}, \quad L \parallel T: a_1A + a_2B + a_3C = 0.$$

Masala. $(-3, 4, -2)$ nuqtadan o'tib, $x + 2y - 5z + 8 = 0$ tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

To'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lganidan, tekislik normal vektori to'g'ri chiziq yo'naltiruvchisidir. Demak, to'g'ri chiziqning kanonik shakldagi tenglamalari

$$\frac{x + 3}{1} = \frac{y - 4}{2} = \frac{z + 2}{-5}$$

ko'rinishga ega.

MAVZUNo 12 CHIZIQLI ALGEBRA- FAZO CHIZIQLI BOG'LIQLIK VA BAZIS TUSHUNCHALARI. CHIQLI ALMASHTIRISH MATRISASI

REJA

1. Chiziqli algebra- fazo chiziqli bog'liqlik va bazis tushunchalari.
2. Chiqli almashtirish matrisasi.
3. Chiziqli almashtirish xos vektori va xos qiymati.

1. CHiziqli fazo va uning o'lchovi. n o'lchovli fazoda bazis va koordinatalar.

Elementlari vektorlar deb ataluvchi L to'plam berilgan bo'lsin. Agar L to'plamda:

1) ixtiyoriy $\mathbf{x} \in L$ va $\mathbf{y} \in L$ vektorlar juftiga $\mathbf{x}$ va $\mathbf{y}$ vektorlarning yig'indisi deb ataluvchi yagona $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \in L$ vektorni mos qo'yuvchi;

2) $\mathbf{x} \in L$ vektorga va λ haqiqiy songa $\mathbf{x}$ vektorning λ songa ko'paytmasi deb ataluvchi yagona $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} \in L$ vektorni mos qo'yuvchi qonuniyat o'rnatilgan bo'lsa, u holda L vektorlar to'plamiga *ao'io'iy chizio'li fazo* deyiladi.

Ta'rifda keltirilgan vektorlarni qo'shish va vektorni songa ko'paytirish amallari quyidagi aksiomalariga bo'ysinadi.

a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x},$

d) $\lambda (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y},$

b) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z},$

e) $(\lambda + \mu) \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x},$

$$v) \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x},$$

$$g) \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

$$j) (\lambda \mu)\mathbf{x} = \lambda (\mu \mathbf{x}),$$

$$z) 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x},$$

bu erda $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ va $\mathbf{z}$ L to'plamga tegishli ixtiyoriy vektorlar bo'lsa λ va μ esa ixtiyoriy haqiqiy sonlardir.

Elementlari L chiziqli fazoda bo'lgani kabi qo'shish va songa ko'paytirish amallari vositasida chiziqli fazoni tashkil etuvchi L to'plamning har qanday qism osti to'plamiga L chiziqli fazoning *o'ism osti fazosi* deyiladi.

CHiziqli fazoning qism osti fazosiga misollar keltiramiz:

1) Ikki o'lchovli haqiqiy arifmetik R^2 fazo chiziqli fazo sifatida o'zining quyidagi qism osti fazolariga ega:

a) R^2 fazoning o'zi;

b) koordinatalar boshi, ya'ni yagona ikki o'lchovli nol vektordan iborat to'plam (nol fazo),

v) koordinatalar boshidan o'tuvchi har qanday to'g'ri chiziqli yotuvchi vektorlar to'plami fazosi;

2) R^3 fazoning koordinatalar markazidan o'tuvchi tekislikda yotgan vektorlar to'plami R^3 fazoning qism osti fazosini tashkil etadi,

3) R^n fazoda mumkin bo'lgan barcha $(x_1; x_2; \dots; x_{n-1}; 0)$ haqiqiy sonlarning tartiblangan tizimlari to'plami fazosi R^n fazoning qism osti fazosidir va hokazo.

L chiziqli fazoda mavjud har qanday chiziqli erkli vektorlar sistemalarining tarkibidagi vektorlar soni n ga teng va undan oshmasa, u holda chiziqli fazo *n o'lchovli* deyiladi va L^n yozuv bilan belgilanadi. n – soniga esa *chiziqli fazoning o'lchovi* deyiladi.

n o'lchovli chiziqli fazoning bazisi deb, har qanday chiziqli erkli n ta vektorlarning tartiblangan tizimiga aytiladi.

L^n chiziqli fazoning har bir $\mathbf{x}$ vektorini bazis vektorlarining yagona ko'rinishdagi chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida tasvirlash mumkin.

Agar $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ – L^n chiziqli fazoning ixtiyoriy tanlangan bazislaridan biri bo'lsa, u holda L^n fazoning har bir $\mathbf{x}$ vektorini uchun yagona $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ chiziqli yoyilma o'rinni bo'ladi. $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlarga $\mathbf{x}$ vektorining $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ bazisdagi koordinatalari deyiladi va $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{x}(x_1; x_2; \dots; x_n)$ ko'rinishda yoziladi.

Agar L^n chiziqli fazoda boshqa bazis tanlansa, unda $\mathbf{x}$ vektorning koordinatalari ham mos ravishda o'zgaradi.

Masala: $\mathbf{a}_1(1; -1; 2; -3)$, $\mathbf{a}_2(-2; 1; -1; 4)$, $\mathbf{a}_3(-3; 1; 0; 5)$ va $\mathbf{a}_4(3; -2; 3; -7)$ vektorlar sistemasiga tortilgan chiziqli qism osti fazoning bazislaridan birini va uning o'lchovini aniqlang.

Masala chiziqli bog'liq vektorlar sistemasining bazisi va rangini topish usulida (§11 ga qaralsin) echiladi.

$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \mathbf{a}_3x_3 + \mathbf{a}_4x_4 = \mathbf{0}$ vektor tenglama umumiy echimi Gauss-Jordan usulida quriladi:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 5 & -7 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Qurilgan umumiy echimning bazis x_1 va x_4 noma'lumlari oldidagi vektor – k m osti sistema berilgan vektorlar sistemasiga tortilgan chiziqli qism osti fazoning bazislaridan biri bo'lib, fazo o'lchovi 2 ga teng.

2. Evklid fazo. Bazisni almashtirish. Ortogonal matrisa.

Agar haqiqiy chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan bo'lsa, ya'ni fazoning ixtiyoriy $\mathbf{x}$ va $\mathbf{u}$ vektorlar juftiga yagona $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ haqiqiy son mos qo'yilsa, u holda haqiqiy chiziqli fazoga *Evklid fazo* deyiladi. Ta'rifda keltirilgan moslik har qanday $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vektorlar va λ son uchun quyidagi aksiomalarga bo'ysinadi:

$$a) (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{x})$$

$$b) (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$v) (\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$g) (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$$

22. Skalyar ko'paytma aniqlangan haqiqiy chiziqli fazo Evklid fazoda metrika haqida gapirish mumkin. Biz oldingi mavzularda ta'riflagan vektor uzunligi (moduli yoki normasi), vektorni birlik vektorga keltirish, vektorlar orasidagi burchak, ortogonallik va ortonormallik tushunchalari, Koshi-Bunyakovskiy va Minkovskiy (yoki uchburchak) tengsizliklari Evklid fazoga xosdir.

n o'lchovli Evklid fazoda n ta vektorlarning ortonormallangan bazisi mavjud.

Vektorlari ortonormallangan sistemani tashkil etgan bazisga *ortonormallangan bazis* deyiladi.

Ortonormallangan bazisda berilgan ikki $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $\mathbf{u}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya'ni

n o'ldir. L^n fazoda ikki: dastlabki $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis va yangi $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ bazislar tanlangan bo'lsin. Agar yangi bazis vektorlari dastlabki bazis vektorlari orqali quyidagi formulalar bo'yicha ifodalanishi aniqlangan bo'lsa, ya'ni

[illegible]

u holda $\mathbf{x}$ vektorning dastlabki bazisdagi koordinatalari uning yangi bazisdagi koordinatalari orqali quyidagi formulalar bo'yicha ifodalanadi:

[illegible]

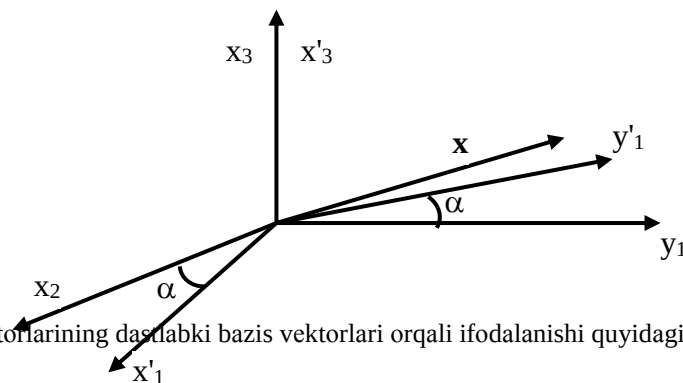
$$(16.2)$$

yoki matrisa shaklida $\mathbf{x} = \mathbf{P}^T \mathbf{x}'$, bu erda $\mathbf{R}^T$ (16.1) sistema koeffisientlar matrisasining transponirlangan matrisasi:

$$\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{21} & \dots & \mathbf{P}_{n1} \\ \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{22} & \dots & \mathbf{P}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{P}_{1n} & \mathbf{P}_{2n} & \dots & \mathbf{P}_{nn} \end{pmatrix}$$

Ushbu matrisaga *bazisdan yangi bazisga o'tish matrisasi* deyiladi.

Masala. Uch o'Ichovli fazoda **i**, **j**, **k** bazisidan ikkinchi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini **OZ** applikata o'qi atrofida α burchakli burishdan hosil bo'lgan **i'**, **j'**, **k'** bazisiga o'tish matrisasini tuzing.



- 23.

- 24.

- 25.

25. Yangi bazis vektorlarining dastlabki bazis vektorlari orqali ifodalanishi quyidagi sistema ko'rinishidan iborat:

$$\begin{cases} \mathbf{i}' = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \\ \mathbf{j}' = -\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \\ \mathbf{k}' = 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + \mathbf{k} \end{cases}$$

Dastlabki bazisdan yangi bazisga o'tish matrisasi

$$P^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^T \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ixtiyoriy vektorning dastlabki koordinatalarini uning yangi koordinatalari orqali ifodalovchi (2) formulalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} x_1 = \cos \alpha x'_1 - \sin \alpha x'_2 \\ x_2 = \sin \alpha x'_1 + \cos \alpha x'_2 \\ x_3 = x'_3 \end{cases}$$

Agar haqiqiy elementli R matrisaning transponirlangan R^T matrisasi uning teskari R^{-1} matrisasiga teng bo'lsa, ya'ni $R^T = R^{-1}$, u holda R *ortogonal matrisa* deyiladi.

Ta'rifdan R ortogonal matrisa uchun $R R^T = R R^{-1} = E$ tengliklar o'rinli bo'lishi va R matrisa determinanti 1 yoki -1 ga teng bo'lishini payqash qiyin emas.

26. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini (umuman, ortogonal koordinatalar sistemasini) har qanday almashtirganda o'tish matrisasi rolini ortogonal matrisa o'taydi.

Ko'rilgan masalada R matrisaning ortogonalini ($R^T = R^{-1}$) tekshirib ko'rish mumkin.

CHIZIQLI OPERATORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

1. CHiziqli operator va uning matrisasi.

L chiziqli fazoni va uning A almashtirishini yoki operatorini, ya'ni har bir $x \in L$ vektorga shu L fazoning biror-bir u vektorini mos qo'yuvchi qonunni qaraymiz. Ushbu qonun $u = Ax$ ko'rinishida yoziladi.

L fazoning har qanday z va z' vektorlari va ixtiyoriy λ haqiqiy son uchun $A(z+z') = Az + Az'$; $A(\lambda z) = \lambda Az$ tengliklar o'rinli A almashtirishi chiziqli *fazoning chizio'li almashtirishi* (yoki *operatori*) deyiladi.

Agar L fazo n o'lchovli bo'lib, unda $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis tanlangan bo'lsa, u holda x vektor koordinatalari va uning aksi u vektor koordinatalari orasidagi bog'liqlik quyidagi sistema ko'rinishida aniqlanadi

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

yoki matrisa ko'rinishida $Y = AX$, bu erda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

i – ustuni tanlangan Ae_i vektorning koordinatalaridan tuzilgan A matrisaga *chizio'li almashtirish matrisasi* deyiladi.

Bazis almashtirilib, dastlabki bazisdan yangi bazisga P^T o'tish matrisa yordamida o'tilsa, chiziqli almashtirishning dastlabki bazisdagi A matrisasiga yangi bazisda $(P^T)^{-1}AP^T$ matrisa mos keladi. A va $(P^T)^{-1}AP^T$ matrisalar o'zaro o'xshash matrisalar deyiladi. A matrisadan $(P^T)^{-1}AP^T$ matrisaga o'tish A matrisani o'xshashlik almashtirishi deyiladi.

SHunday qilib, ayni bir chiziqli almashtirishga turli bazislarda o'xshash matrisalar mos keladi.

2. CHiziqli operatorlar ustida amallar.

CHiziqli almashtirish ustida bajariladigan amallarni ko'rib chiqamiz:

a) Almashtirishlarni qo'shish. Ikki chiziqli almashtirishlar matrisa ko'rinishida berilgan bo'lsin: $Y=AX$, $Z=BX$. CHizikli almashtirishlarning yig'indisi deb, quyidagicha aniqlanadigan S almashtirishga aytiladi.

$$Y + Z = (A+B)X = CX.$$

b) Almashtirishni songa ko'paytirish. Matrisa ko'rinishida $Y=AX$ chiziqli almashtirish va ixtiyoriy λ haqiqiy son berilgan bo'lsin. Berilgan almashtirishni λ songa ko'paytmasi deb, quyidagi V almashtirishga aytiladi: $Z = (\lambda A)X =$

BX.

v) Almashtirishlarni ko'paytirish. Ikki ketma-ket chiziqli almashtirishlar $Y = AX$ va $Z = BY$ berilgan bo'lsin. Y uchun ifodani birinchi formuladan ikkinchisiga ko'ysak, $Y = AX$ almashtirishning $Z = BY$ almashtirishga ko'paytmasi deb ataladigan quyidagi F almashtirishni olamiz:

$$Z = B(AX) = (BA)X = FX$$

g) Teskari almashtirish. Matrisa shaklida $Y=AX$ chiziqli almashtirish berilgan bo'lib, A - kvadrat maxsusmas matrisa ($\det A \neq 0$) bo'lsin. Tenglama ikkala qismini chapdan teskari A^{-1} matrisaga ko'paytirib, $Y=AX$ chiziqli almashtirishning teskari almashtirishi deb ataluvchi $X=A^{-1}Y$ chiziqli almashtirishni olamiz.

3. CHiziqli operator xos vektori va xos qiymati.

Agar shunday bir λ son tanlash mumkin bo'lsaki, bunda $Ax=\lambda x$ tenglikni qanoatlantiruvchi har qanday nolmas x vektorga A chiziqli almashtirishning xos vektori deyiladi. λ sonning o'ziga esa A chiziqli almashtirishning x xos vektoriga mos keluvchi xos o'qiymati deyiladi.

Xos vektorlar quyidagi xossalarga ega:

1. Har bir xos vektorga yagona xos qiymat mos keladi;
2. Agar x_1, x_2 – A chiziqli almashtirishning ayni bir λ xos qiymatga mos keluvchi xos vektorlari bo'lsa, u holda ularning yig'indisi x_1+x_2 vektor ham A chiziqli almashtirishning λ xos qiymatiga mos keluvchi xos vektori bo'ladi.
3. Agar x – A chiziqli almashtirishning λ xos qiymatiga mos xos vektori bo'lsa, x ga kollinear har qanday kx vektor ham A chiziqli almashtirishning o'sha λ xos qiymatiga mos xos vektori bo'ladi.

Agar L^n fazoda bazis tanlangan bo'lsa, $Ax = \lambda x$ tenglikni matrisa shaklida yozish mumkin: $AX = \lambda X$.

Tenglikni qanoatlantiruvchi har qanday nolmas ustun A matrisaning λ xos qiymatiga mos xos vektori deyiladi.

$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX = \lambda EX \Leftrightarrow (A - \lambda E)X = 0$ bo'lib, oxirgi tenglik koordinatalarda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Xos vektorlarni qurish uchun sistemaning nolmas echimlarini topish zarur. n ta noma'lumli n ta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi nolmas echimlarga fakatgina sistema determinanti nolga teng bo'lgandagina ega bo'ladi, ya'ni

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki}$$

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad \text{bu erda} \quad a_n = (-1)^n, \quad a_0 = \det A.$$

Oxirgi yozilgan tenglamalar A matrisaning xarakteristik tenglamalari, uning ildizlari esa xarakteristik sonlari yoki A matrisaning xos qiymatlari deyiladi.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ matrisaning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping.

Xarakteristik tenglama tuzamiz va uni echib, A matrisaning xos qiymatlarini aniqlaymiz:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1; 6\}$$

$\lambda_1 = 1$ xos qiymatga mos xos vektorlardan birini quramiz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}, \text{ ya'ni } X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 6$ xos qiymatga mos xos vektorlardan biri esa:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisaning xarakteristik ko'phadi bazis tanlanishiga bog'lik emas. Ayni bir chiziqli almashtirishga turli bazislarda o'xshash matrisalar mos kelgani uchun, o'xshash matrisalarning xarakteristik ko'phadlari tengdir. Agar $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k$ xos vektorlar juft-jufti bilan turli xos qiymatlarga tegishli bo'lsa, ular chiziqli erkli sistemani tashkil etadi.

4. Chiziqli operator matrisasini diagonal ko'rinishga keltirish.

A matrisa berilgan $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ bazis vektorlar matrisaning xos vektorlaridan iborat bo'lgandagina $\mathbf{A}$ matrisa diagonal ko'rinishda bo'ladi.

Agar o'xshash $\mathbf{A}$ va $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K}$ matrisalar berilgan bo'lib, $\mathbf{D}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K}$ matrisa diagonal matrisa bo'lsa, u holda $\mathbf{K}$ matrisa $\mathbf{A}$ matrisani diagonal ko'rinishga keltiradi deyiladi. $\mathbf{D}$ diagonal matrisaning bosh diagonal $\mathbf{A}$ matrisaning xos qiymatlaridan, $\mathbf{K}$ matrisaning i - ustuni λ_i xos qiymatlarga tegishli xos vektor mos koordinatalaridan tuziladi.

Berilgan matrisani diagonal matrisaga keltiruvchi $\mathbf{K}$ matrisa quyidagicha quriladi:

- 1) $\mathbf{A}$ matrisaning barcha xos qiymatlari topiladi;
- 2) Har bir λ_i xos qiymatga mos $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{0}$ bir jinsli sistemaning fundamental echimlari – xos vektorlari tuziladi;
- 3) $\mathbf{i}$ – ustuni λ_i ga tegishli fundamental echimning mos koordinatalaridan iborat $\mathbf{K}$ matrisa quriladi.

Masala. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ matrisani diagonal ko'rinishga keltiruvchi $\mathbf{K}$ matrisani quring.

Yuqorida matrisaning xos qiymatlari $\lambda \in \{1; 6\}$ va ularga mos xos vektorlari $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

tuzilgan edi. Demak, $\mathbf{K}$ matrisa $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ko'rinishda yozilishi mumkin. $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K} = \mathbf{D}$ ekanligini tekshirib

ko'ramiz:

$$\mathbf{K}^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{18}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{18}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Har qanday $\mathbf{x}$ va $\mathbf{u}$ vektorlar uchun $(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{x})$ tenglik o'rinli $\mathbf{A}$ chiziqli almashtirishga *simmetrik almashtirish* deyiladi.

$\mathbf{A}$ chiziqli almashtirish simmetrik bo'lishi uchun ortonormallangan bazisda uning matrisasining simmetrik bo'lishi $((\mathbf{a}_{ik}) = (\mathbf{a}_{ki}))$ zarur va etarlidir.

Haqiqiy elementli simmetrik matrisa quyidagi xossalarga ega:

1. Simmetrik matrisaning barcha xos qiymatlari haqiqiy;
2. Simmetrik matrisaning turli xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari ortogonal;
3. Agar $\mathbf{A}$ matrisa haqiqiy elementli simmetrik matrisa bo'lib, $\mathbf{V}$ matrisa ortogonal bo'lsa, u holda o'xshash $\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$ matrisa simmetrik va haqiqiydir.

Har qanday haqiqiy simmetrik $\mathbf{A}$ matrisani $\mathbf{Q}$ ortogonal matrisa yordamida diagonal ko'rinishga keltirish

mumkin.

A simmetrik matrisani diagonal ko'rinishga keltiruvchi **Q** ortogonal matrisa quyidagicha quriladi:

- 1) **A** matrisani diagonal ko'rinishga keltiruvchi **K** matrisa quriladi;
- 2) **K** matrisaning ustunlari ortogonallashtirish jarayoniga tortiladi va har biri birlik vektorga keltiriladi;
- 3) Ustunlari ortonormalangan vektorlar sistemasini tashkil etgan **Q** matrisa quriladi.

MAVZU № 13

1. FUNKSIYA TUSHUNCHASI. FUNKSIYANING ANIQLANISH SOHASI VA QIYMATLAR TO'PLAMI.

Reja

1. Funksiya tushunchasi.
2. Haqiqiy o'zgaruvchi funksiyalarining klassifikatsiyasi.
3. Juft va toq funksiyalar.
4. Davriy va davriymas funksiyalar.

Tabiat xodisalarining tekshirganda va amaliy faoliyatda mazmun jihatidan to'rtinchi bo'lgan miqdorlar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi; masalan: xajm, Yuza, ogirlik, tezlik va xokazo. Har bir miqdorni o'lchash natijasida biror son, ya'ni shu miqdorning son qiymati hosil bo'ladi.

Matematikada mazmuniga mutloqo bog'liq bo'lmagan miqdorlar qaraladi, faqat ularning son qiymatlari va bu son qiymatlarning o'zgarish xarakteri e'tiborga olinadi.

Turli son qiymatlar qabul qiladigan miqdor o'zgaruvchi miqdor deyiladi. Masalan, nuqtaning tekis harakatida vaqt va masofa o'zgaradi, tezlik yecha o'zgarmaydi.

Son qiymatlari o'zgarmaydigan miqdor o'zgarmas miqdor deyiladi. Masalan, har qanday aylana uzunligi L ning uning diametri $2R$ ga nisbati $\frac{L}{2R}$ har doim o'zgarmas son $\pi=3,14...$ ga tengdir.

Miqdorlarni lotin alfaviti harflari bilan belgilash qabul qilingan: o'zgarmas miqdorlar $a, b, c, ...$ harflari bilan, o'zgaruvchi miqdorlar $x, y, z, ...$ harflari bilan belgilanadi.

Agar o'zgaruvchi miqdor qabul qiladigan qiymatlar to'plami $X=\{x\}$ berilgan bo'lsa; u holda x o'zgaruvchi miqdor berilgan deyiladi. Bu to'plam x o'zgaruvchining o'zgarish sohasi deyiladi. O'zgaruvchining o'zgarish sohasi ko'pincha ikki haqiqiy son a va b bilan chegaralangan, chekli oraliq bo'ladi.

Berilgan a va b ($a < b$) sonlar orasida yotuvchi barcha x sonlar to'plami oraliq yoki interval deyiladi, bunda a va b sonlarning o'zlari qaralayotgan sonlarning to'plamiga tegishli emas; u oraliq (a, b) bilan yoki $a < x < b$ tengsizliklar bilan belgilanadi.

Berilgan ikkita a va b son va ular orasida yotuvchi barcha x sonlar to'plami kesma yoki segment deyiladi, bunda a va b sonlarning ikkalasi ham qaralayotgan to'plamga tegishli bo'ladi; u kesma $[a, b]$ bilan yoki $a \leq x \leq b$ tengsizliklar bilan belgilanadi.

Agar a va b sonlardan biri, masalan a , oraliqqa qo'shilib, ikkinchisi qo'shilmasa, u holda yarim yopiq oraliq hosil bo'ladi, buni $[a, b)$ yoki $a \leq x < b$ tengsizliklar bilan belgilanadi.

Agar o'zgaruvchi x miqdor a dan katta har qanday qiymatlarni qabul qilaversa, u holda bunday interval $(a, +\infty)$ bilan belgilanadi va $a < x < \infty$ shartli tengsizliklar bilan beriladi. Shuningdek, shartli tengsizliklar $a \leq x < \infty$; $\infty < x < c$; $-\infty < x \leq c$; $-\infty < x < \infty$ bilan beriladigan cheksiz intervallar va yarim yopiq cheksiz intervallar ham qaraladi.

Yuqorida berilgan ta'riflarni «son» tushunchasi o'rni «nuqta» tushunchasidan foydalanib ifodalash mumkin, masalan: berilgan a va b nuqtalarning (kesmaning uchlari) orasida yotuvchi hamma x nuqtalar to'plami kesma deyiladi, bunda kesmaning uchlari shu to'plamga tegishli bo'ladi.

Berilgan x_0 nuqtaning atrofi deb, shu nuqtani o'z ichiga olgan, ya'ni $a < x_0 < b$ shartni qanoatlantiradigan ixtiyoriy (a, b) intervalga aytiladi. Ko'pincha x_0 nuqtaning shunday (a, b) atrofi oldinadiki, uning uchun x_0 o'rta bo'ladi. U vaqtda x_0 atrofning markazi $(b-a)/2$ miqdor atrofning radiusi deyiladi.

Ta'rif. Agar o'zgaruvchi miqdorning har bir keyingi qiymati oldingi qiymatidan katta bo'lsa, o'zgaruvchi miqdor o'suvchi deyiladi. Aks holda kamayuvchi deyiladi.

O'suvchi o'zgaruvchi miqdorlar va kamayuvchi o'zgaruvchi miqdorlar monoton o'zgaradigan o'zgaruvchi miqdorlar yoki, to'g'ridan-to'g'ri, monoton miqdorlar deyiladi. Lekin, har qanday o'zgaruvchi miqdor ham albatta o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lavermaydi. Masalan, agar α miqdor $[0, 2\pi]$ kesmada o'suvchi bo'lsa, $x = \sin \alpha$ o'zgaruvchi monoton miqdor bo'lmaydi. U avval 0 dan

1 gacha o'sadi, sungra 1 dan -1 gacha kamayadi, undan keyin 1 dan 0 gacha o'sadi.

Ta'rif. Agar shunday o'zgarmas $M > 0$ son mavjud bo'lib, o'zgaruvchining biror qiymatidan boshlab. Uning barcha keyingi qiymatlari $-M \leq x \leq M$, ya'ni $|x| \leq M$ shartni qanoatlantirsa o'zgaruvchi x miqdor cheklangan deyiladi.

2. Funksiya xaqida umumiy tushuncha.

Funksiya tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, uning qat'iy ta'rifini keltiramiz.

Ta'rif. elementlari haqiqiy sonlardan iborat X va Y to'plamlar berilgan bo'lib, X to'plamdagi har bir x haqiqiy songa biror f qonun yoki qoidaga binoan Y to'plamdagi aniq bitta y haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamda f funksiya berilgan deyiladi va $y=f(x)$ ko'rinishda yoziladi.

Bu erda X to'plamni f funksiyani berilish yoki aniqlanish sohasi, Y to'plamni uning o'zgarish sohasi yoki qiymatlar to'plami deyiladi. x erkli o'zgaruvchi yoki argument, y erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deyiladi.

Demak, funksiya berilgan bo'lishi uchun uning aniqlanish sohasi X va undagi har bir x songa mos keladigan y sonni topish qonuni yoki qoidasi berilgan bo'lishi kerak ekan.

Aniqlanish sohasi va o'zgarish sohasi haqiqiy sonlar to'plamlaridan iborat funksiyalarning berilish usullari bilan tanishamiz.

a) **Analitik usul.** Funksiya bilan argument orasidagi moslik ko'pincha biror matematik ifoda orqali beriladi. Matematik ifodada x argument va sonlar o'stida qaysi amallarni qanday tartibda bajarilishi ko'rsatilgan bo'lib, bu amallarni bajarish natijasida funksiyani mos qiymatlarini hosil qilish mumkin.

Bu holda $y=f(x)$ funksiya analitik usulda berilgan deyiladi. Agar $y=f(x)$ funksiya analitik usulda berilgan bo'lib, y ga nisbatan yechilgan bo'lsa, u holda tenglikning o'ng tomonidagi ifoda funksiyani analitik ifodasi deyiladi.

Masalan, $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$, $y = 2x^2 + 3x + 4$, $y = |x|$ funksiyalar analitik usulda berilgan funksiyalardir.

Odatda, funksiya analitik usulda berilgan bo'lsa, uning aniqlanish sohasi alohida ko'rsatilmagan bo'lishi mumkin. Bunday hollarda funksiyani aniqlanish sohasi sifatida x ning shunday haqiqiy qiymatlari to'plami tushuniladiki, ular uchun analitik ifoda sonli ma'nosini yo'qotmasdan, faqat haqiqiy qiymatlarga ega bo'ladi.

Masalan, $y = \frac{3x - 1}{x^2 + 2x - 3}$

funksiyani aniqlanish sohasi $]-\infty; -3[\cup]-3; 1[\cup]1; +\infty[$ to'plamlar birlashmasi, $x = -3$, $x = 1$ nuqtalarda yecha analitik ifoda sonli ma'nosini yo'qotadi.

b) **Grafik usul.** $Y=f(x)$ funksiya D sohada berilgan bo'lsin.

Ta'rif. XOY koordinatalar tekisligidagi absissasi $x \in D$, ordinatasi $f(x)$ lardan iborat bo'lgan $M(x; f(x))$ nuqtalar to'plami shu funksiyani grafigi deyiladi.

Funksiyani grafigi aniqlanish sohasi D ning tuzilishiga qarab, biror chiziq bo'ladi. Lekin tekislikdagi har qanday nuqtalar to'plami $y=f(x)$ funksiyani grafigi bo'lavermaydi. Agar koordinatalar tekisligidagi nuqtalar to'plami Ox o'qga parallel har qanday to'g'ri chiziq bilan bittadan ko'p nuqtada kesishmasa, u biror funksiyani grafigi bo'ladi. Koordinatalar tekisligida shunday nuqtalar to'plami berilsa, uni grafik usulda berilgan funksiya deyiladi.

v) **Jadval usuli.** Ba'zi hollarda x argumentning ba'zi bir qiymatlariga mos keladigan funksiya qiymatlari ko'rsatilgan jadval beriladi. Funksiyani jadval usulida berilishi kulaydir, chunki bir necha qiymatlar topilgan bo'ladi, lekin funksiyani aniqlanish sohasi cheksiz to'plam bo'lganda, uni barcha qiymatlarini ko'rsatib bo'lmaydi. Funksiyani grafik usulda berilishi uning o'zgarishlarini ko'rgazmali qilish imkonini beradi.

3. Haqiqiy o'zgaruvchi funksiyalarining klassifikatsiyasi.

Juft va toq funksiyalar.

1-Ta'rif. Agar $\forall x \in X$ uchun $-x \in X (X \in \mathbb{R})$ bo'lsa, u holda X to'plam son o'qining nuqtasiga nisbatan simmetrik to'plam deyiladi.

Masalan, $X = [-1; 1]$; $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ lar simmetrik to'plamlardir.

2-Ta'rif. $Y=f(x)$ funksiya simmetrik X to'plamda berilgan bo'lsin. Agar $\forall x \in X$ uchun $f(-x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ juft, $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ toq funksiya deyiladi. Masalan, $f(x)=x^2$, $f(x)=\cos x$,

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ juft funksiyalar, $f(x)=x$, $f(x)=x^3$, $f(x)=\tan x$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ yecha toq funksiyalardir

Juft funksiyani grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik, toq funksiyani grafigi yecha koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Ikkita juft funksiyani yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasi juft funksiyadir.

Ikkita toq funksiyani yig'indisi va ayirmasi toq funksiya, ko'paytmasi va bo'linmasi juft funksiya.

Juft va toq funksiyalarning ko'paytmasi va bo'linmasi toq funksiyadir.

Agar funksiyani aniqlanish sohasi O nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lmasa funksiya juft ham, toq ham bo'lmaydi.

Masalan, $f(x) = \frac{1}{x+1}$

funksiya juft ham emas, toq ham emas, chunki funksiya $x=1$ nuqtada aniqlangan, $x=-1$ nuqtada yecha aniqlanmagan, shu sababli uning aniqlanish sohasi O nuqtaga nisbatan simmetrik emas.

Shuni ham ta'kidlash kerakki, aniqlanish sohasida O nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan har qanday funksiya juft yoki toq bo'lishi shart emas.

Masalan, $y=2x+5$ funksiyani aniqlanish sohasi O nuqtaga nisbatan simmetrik, ammo u juft ham emas, toq ham emas, chunki

$$f(-x)=2(-x)+5=-2x+5=-(2x-5)$$

va demak $f(-x) \neq f(x)$ va $f(x) \neq -f(-x)$.

Davriy va davriymas funksiyalar.

1-Ta'rif. $Y=f(x)$ funksiya X to'plamda ($X \subset \mathbb{R}$) berilgan bo'lsin. Agar shunday o'zgarma T ($T \neq 0$) soni mavjud bo'lsaki, $\forall x \in X$ uchun $x+T \in X$ va $x-T \in X$, va

$$f(x \pm T) = f(x) \quad (1)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya davri T bo'lgan davriy funksiya deyiladi.

Agar $f(x)$ davriy funksiya bo'lib, uning eng kichik musbat davri T bo'lsa, kT ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) ham funksiyaning davri bo'ladi. eng kichik musbat davr mavjud bo'lishi ham mumkin, mavjud bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, $f(x) = \sin x$ funksiya davriy funksiya. Uning davrlari to'plami $\{2k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ bo'lib, eng kichik musbat davri $T_0 = 2\pi$ bo'ladi.

T davrli davriy funksiyani tekshirish va uning grafigini yasash uchun bu funksiyaning $[a, a+T]$ segmentdagi qiymatlarini belish kifoyadir.

Funksiyaning davriy yoki davriy emasligini isbotlash uning davrini topishdan iborat bo'ladi. Masalan, $f(x) = \sin(x^2)$ funksiyani qaraylik. Faraz qilaylik, bu davriy funksiya bo'lib, $T \neq 0$ son uning davri bo'lsin, uning uchun $\sin(x^2) = \sin(x+T)^2$, tenglik bajarilsin. Ammo bu tenglamani T miqdorga nisbatan yechib, T miqdor x ga bog'liq ekanini ko'rish qiyin emas. Bu yecha $\forall x \in X$ uchun $\sin(x^2) = \sin(x+T)^2$ tenglikni qanoatlantiradigan $T > 0$ soni mavjud emasligini ko'rsatadi. Demak, $f(x) = \sin(x^2)$ funksiya davriy funksiya emas.

Davriy funksiya ta'rifidan bevosita quyidagi xossalar kelib chiqadi.

1°. Agar X to'plamda berilgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri. $T \neq 0$ davrli davriy funksiyalar bo'lsa, u holda $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ va $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) funksiyalar ham T davrli davriy funksiyalar bo'ladi.

2°. X to'plamda berilgan $f(x)$ funksiya T davrli funksiya bo'lsin. $g(x)$ yecha $f(x)$ ning qiymatlari to'plami $\{f(x): x \in X\}$ da berilgan ixtiyoriy funksiya bo'lsin. U holda $g[f(x)]$ murakkab funksiya ham T davrli davriy funksiya bo'ladi. Masalan,

$$\varphi_1(x) = \arcsin(\cos x), \quad \varphi_2(x) = \log_2 \cos(x-4)$$

funksiyalar davriy funksiyalardir.

3°. Agar $f(x)$ davriy uzluksiz funksiya bo'lsa, u vaqtda bunday funksiya eng kichik musbat T davrga ega bo'ladi.

4°. Agar T_1 va T_2 ning har biri $f(x)$ funksiya uchun davr bo'lsa, u holda $T_1 \pm T_2$ ham $f(x)$ ning davri bo'ladi, ya'ni

$$f[x + (T_1 + T_2)] = f(x).$$

5°. Agar $f(x)$ davriy funksiya bo'lsa va u har bir x nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning hosilasi $f'(x)$ ham davriy funksiya bo'ladi.

6°. X to'plamda berilgan $f(x)$ funksiya T davrli davriy funksiya bo'lsin. Agar $x_0 \in X$ bo'lsa, u holda barcha $x_0 + kT$ nuqtalar ham shu sohaga tegishli bo'ladi:

$$x_0 + kT \in X \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Agar $x_0 \notin X$ bo'lsa, $x_0 + kT \notin X$ bo'ladi. Davriy funksiyaning berilish sohasida absolyut qiymati bo'yicha istalgancha katta bo'lgan musbat va manfiy sonlar bo'ladi.

7°. Agar $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar mos ravishda ulchovdosh ya'ni

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (2)$$

(bu erda n_1 va n_2 - biror butuni sonlar) bo'lgan T_1 va T_2 davrlarga ega bo'lsa, u holda $T = n_2 T_1 = n_1 T_2$ son har ikki funksiya uchun davr bo'ladi.

N o'lchovli haqiqiy fazoda $V = \{M(x_1; x_2; \dots; x_n)\} \in \mathbb{R}_n$ nuqtalar to'plami berilgan bo'lsin.

V to'plamga tegishli har bir $M(x_1; x_2; \dots; x_n)$ nuqtaga aniq biror-bir u haqiqiy sonni mos qo'yuvchi f qonunga $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarning V nuqtalar to'plamida berilgan funksiyasi deyiladi. **n ta o'zgaruvchilarning funksiyasi** $u = f(M)$ yoki $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ ko'rinishda yoziladi. $f(M)$ haqiqiy son u funksiyaning M nuqtada erishadigan qiymatini anglatadi.

Xususan, agar $V \in \mathbb{R}_1$ bo'lib, V to'plam $\mathbb{R}_1 = \{x\}$ haqiqiy sonlar to'plamining qism osti to'plamidan iborat bo'lsa, V to'plamda **bir o'zgaruvchili** $u = f(x)$ funksiya berilgan deyiladi.

Misollar: 1) $f(x) = \ln x - V = \{x \in \mathbb{R}_1 \mid x > 0\}$ to'plamda berilgan bir x o'zgaruvchili funksiya. Xususan, $f(e) = \ln e = 1$.

2) $f(M) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} - V = \mathbb{R}_2 \setminus O(0; 0)$ to'plamda berilgan ikki x_1 va x_2 o'zgaruvchili funksiya.

$M(-1; 2)$ nuqtada $f(-1; 2) = 0,2$.

$$3) f(M) = \sqrt{7 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} - V = \{M(x_1; x_2; x_3) \in R_3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 7\}$$

to'plamda berilgan uch x_1, x_2 va x_3 o'zgaruvchili funksiya. $M(1; -1; 1)$ nuqtada $f(1; -1; 1) = 2$.

$u = f(M) = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ funksiya berilgan R_n fazoga tegishli to'plamga uning **aniqlanish sohasi** deyiladi va $D(f)$ yoki $D(u)$ yozuv bilan ifodalanadi.

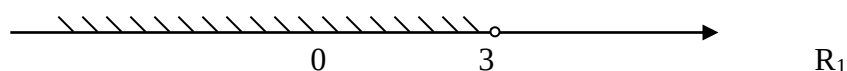
$u = f(M)$ funksiya o'z aniqlanish sohasi $D(f)$ ning har bir nuqtasida qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari to'plamiga esa uning **qiymatlari to'plami** yoki o'zgarish sohasi deyiladi. Funksiya qiymatlar to'plami R_1 haqiqiy sonlar to'plamining qism osti to'plami bo'lib, $E(f)$ yoki $E(u)$ belgilar bilan yoziladi.

Misol: Quyida berilgan funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping va tegishli fazoda tasvirlang. Funksiyalarning qiymatlar to'plamini aniqlang:

$$1) u = \log_2(3-x), \quad 2) y = \sqrt{4x_1 - x_2^2},$$

$$3) u = \arccos x_1 + \arccos x_2 + \arccos x_3.$$

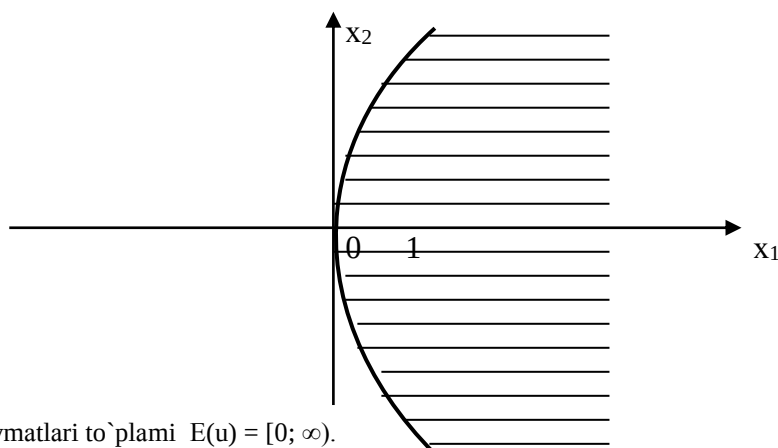
1) Bir o'zgaruvchili $u = \log_2(3-x)$ funksiya aniqlanish sohasi $D(u): 3-x > 0$ tengsizlik echimidan iborat. Shunday qilib, $D(u) = (-\infty; 3) \in R_1$. Funksiya aniqlanish sohasi sonlar o'qida $(-\infty; 3)$ ochiq nur ko'rinishida tasvirlanadi:



Funksiya qiymatlari to'plami esa sonlar o'qidan iborat, ya'ni $E(u) = R_1$.

$$2) \text{ Funksiya ikki o'zgaruvchili bo'lib, uning aniqlanish sohasi } D(u) = \{M(x_1; x_2) \in R_2 \mid x_1 \geq \frac{x_2^2}{4}\}.$$

Funksiya aniqlanish sohasi haqiqiy koordinatalar tekisligi R_2 da quyidagicha tasvirlanadi:

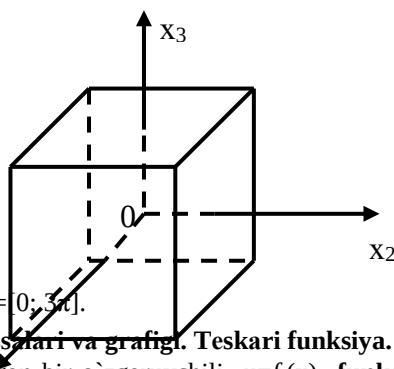


Funksiya qiymatlari to'plami $E(u) = [0; \infty)$.

3) Berilgan uch o'zgaruvchili funksiya aniqlanish sohasi

$$D(u) = \{M(x_1; x_2; x_3) \in R_3 \mid -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, -1 \leq x_3 \leq 1\}.$$

Funksiya aniqlanish sohasi R_3 fazoda qirras 2 ga teng, simmetriya markazi koordinatalar boshida, yoqlari esa koordinatalar tekisliklariga parallel bo'lgan kubdan iborat:



Funksiya qiymatlari to'plami $E(u) = [0; 3\pi]$.

2. Bir o'zgaruvchili funksiya umumiy xarakteristika va grafi. Teskari funksiya.

$V \subseteq R_1$ nuqtalar to'plamida aniqlangan bir o'zgaruvchili $u = f(x)$ **funksiyaning grafi** deb, mumkin bo'lgan barcha $(x; f(x))$, $x \in V$ juftliklarning xOy to'g'ri burchakli koordinatalar tekisligidagi aksiga aytiladi.

R_1 fazoda, $x=0$ nuqtaga nisbatan simmetrik, nuqtalarning V qism to'plami va unda aniqlangan $u=f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

Agar har qanday $\pm x \in V$ lar uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, bir o'zgaruvchili $u=f(x)$ funksiya V to'plamda **juft funksiya** deyiladi. Juft funksiya grafigi Ou ordinata o'qiga nisbatan simmetrikdir.

Agar har qanday $\pm x \in V$ lar uchun $f(-x) = -f(x)$ munosabat o'rinli bo'lsa, $u=f(x)$ V to'plamda **toq funksiya** deyiladi. Toq funksiya grafigi esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrikdir.

Masalan, juft natural darajali $u=x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) funksiya juft funksiyaga misol bo'lsa, toq natural darajali $u=x^{2n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$) toq funksiyaga misoldir.

$u=f(x)$ funksiya uchun shunday bir musbat t son mavjud bo'lsaki, funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli har qanday x va $x+t$ nuqtalari uchun $f(x+t) = f(x)$ tenglik bajarilsa, $u=f(x)$ funksiya **davriy funksiya** deyiladi. t soni esa **funksiya davri** deb yuritiladi. Amalda funksiya davrlari ichidan eng kichigi T ni topish masalasi qo'yiladi, qolgan barcha davrlar uning butun karralesidan iborat bo'ladi.

Masalan, $u=5\sin(0,25\pi x)$ funksiyaning eng kichik musbat davri $T = \frac{2\pi}{0,25\pi} = 8$.

$u=f(x)$ funksiya $V \subseteq R_1$ to'plamda aniqlangan bo'lib, uning biror-bir V_1 qism osti to'plamidan ixtiyoriy ravishda tanlanadigan ikki x_1 va x_2 nuqtalar uchun $x_1 < x_2$ munosabatdan $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$) tengsizlik kelib chiqsa, u holda $u=f(x)$ funksiya V_1 **to'plamda o'suvchi (kamayuvchi emas)** deyiladi.

Agarda funksiya aniqlanish sohasiga tegishli V_1 to'plamdan ixtiyoriy ravishda tanlanadigan ikki x_1 va x_2 nuqtalar uchun $x_1 < x_2$ shartdan $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$) tengsizlik kelib chiqsa, $u=f(x)$ funksiya V_1 **to'plamda kamayuvchi (o'suvchi emas)** deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi funksiyalarga qat'iy **monoton funksiyalar** deyiladi.

Masalan, $u=e^x$ aniqlanish sohasi R_1 da qat'iy monoton o'suvchi funksiyaga misol bo'lsa, x haqiqiy sonning butun qismi $u=[x]$ esa kamayuvchimas funksiyaga misol bo'la oladi.

$u=f(x)$ funksiya $D(u) \subseteq R_1$ sohada aniqlangan bo'lib, $E(u)$ uning qiymatlar to'plami bo'lsin. Ushbu funksiya uchun har qanday $x_1, x_2 \in D(u)$ lar qaralmasin, $x_1 \neq x_2$ shart qanoatlantirilganda, $f(x_1) \neq f(x_2)$ munosabat bajarilsin. U holda, har bir $u \in E(u)$ songa $f(x)=u$ tenglikni qanoatlantiruvchi aniq bir $x \in D(u)$ sonni mos qo'yish mumkin, boshqacha aytganda, $E(u)$ to'plamda berilgan **$u=f(x)$ funksiyaga teskari $x=g(u)$ funksiyani** aniqlash mumkin.

27. Berilgan $u=f(x)$ funksiyaning qiymatlari to'plami $E(u)$ teskari funksiya uchun aniqlanish sohasi bo'lsa, $u=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(u)$ teskari funksiya uchun qiymatlar sohasi rolini o'taydi.

Biror-bir $[a; b]$ kesmada aniqlangan, qat'iy monoton va uzluksiz $u=f(x)$ funksiya, o'zining $[f(a); f(b)]$ kesmada aniqlangan, qat'iy monoton va uzluksiz $x=g(u)$ teskari funksiyasiga ega.

28. Masalan, $u=\sin x$ funksiya $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada aniqlangan, qat'iy monoton o'suvchi va uzluksiz

bo'lganidan, $[-1; 1]$ kesmada aniqlangan, qat'iy o'suvchi va uzluksiz $x=\arcsin u$ teskari funksiyasiga ega.

O'zaro teskari $f(x)$ va $g(x)$ funksiya graflari birinchi chorak simmetriya o'qi $u=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrikdir.

3. Chegaralangan funksiya. Qavariq va botiq funksiyalar haqida tushuncha.

$V_1 \subseteq D(u)$ nuqtalar to'plamida berilgan $u=f(x)$ funksiyaning V_1 da erishadigan qiymatlari to'plami Yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, **funksiya V_1 da Yuqoridan (quyidan) chegaralangan** deyiladi.

$u=f(x)$ funksiyaning Yuqoridan (quyidan) chegaralanganligi, shunday bir K son mavjudligini anglatadiki, barcha $M \in V_1$ nuqtalar uchun $f(M) \leq K$ ($f(M) \geq K$) tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$V_1 \subseteq D(u)$ nuqtalar to'plamida ham quyidan, va ham Yuqoridan chegaralangan funksiyaga, V_1 **to'plamda chegaralangan funksiya** deb ataladi. Ushbu holda, agar $V_1=D(u)$ bo'lsa, $u=f(M)$ funksiya aniqlanish sohasida chegaralangan deyiladi va uning qiymatlari to'plami chegaralangan sonlar to'plamidan iborat bo'ladi.

Agar $u=f(M)$ funksiya V_1 to'plamda Yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan bo'lsa, V_1 to'plamga tegishli $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi mavjudki, $\lim_{k \rightarrow \infty} \{f(M_k)\} = +\infty$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} \{f(M_k)\} = -\infty$) munosabat o'rinlidir.

Misollar:

1) Bir o'zgaruvchili $u=x^2$ funksiya aniqlanish sohasi R_1 da quyidan chegaralangan funksiyadir, chunki $E(u)=[0; \infty)$;

2) Ikki o'zgaruvchili $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ funksiya o'z aniqlanish sohasi

$D(u) = \{M(x_1; x_2) \in R_2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ to'plamda chegaralangandir, chunki $E(u)=[0; 1]$.

$u=f(M)$ funksiya qavariq $V \subseteq R_n$ nuqtalar to'plamida aniqlangan bo'lsin.

V qavariq to'plamga tegishli har qanday ikki $M_1(x_1; x_2; \dots; x_n)$ va $M_2(u_1; u_2; \dots; u_n)$ nuqtalar va ixtiyoriy $0 \leq \alpha \leq 1$ son uchun $f(P) \leq \alpha f(M_1) + (1-\alpha)f(M_2)$ ($f(P) \geq \alpha f(M_1) + (1-\alpha)f(M_2)$) tengsizliklar o'rinli bo'lsa, bu erda $R(\alpha x_1 + (1-\alpha)u_1; \alpha x_2 + (1-\alpha)u_2; \dots; \alpha x_n + (1-\alpha)u_n)$, u holda, $u=f(M)$ funksiya **V to'plamda qavariq (botiq) funksiya** deyiladi.

Masalan, $u=x^2$ funksiya R_1 da qavariq funksiyaga misol bo'lsa, $u=-x^2$ funksiya esa R_1 da botiq funksiyaga misol bo'ladi. n o'zgaruvchili chiziqli $u=a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ funksiya R_n fazoda bir vaqtda ham qavariq va ham botiq funksiyadir.

Qavariq funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

1. $-f(M)$ funksiya V to'plamda botiq bo'lgandagina, $f(M)$ funksiya V da qavariq funksiya bo'ladi.
2. $f_1(M)$ va $f_2(M)$ funksiyalar V to'plamda qavariq bo'lsa, ularning ixtiyoriy nomanfiy k_1 va k_2 koeffisientli chiziqli $k_1f_1(M) + k_2f_2(M)$ kombinatsiyasi V to'plamda qavariq bo'ladi.
3. $f(M)$ funksiya V to'plamda qavariq bo'lib, $\{M \in V \mid f(M) \leq b\}$ to'plam bo'sh bo'lmasa, bu erda b ixtiyoriy son, u holda to'plamning o'zi ham qavariq to'plamdir.

Botiq funksiyalar ham Yuqoridagi xossalarga o'xshash xossalarga ega.

MAVZU № 14

KETMA –KETLIK VA UNING LIMITI.YAQINLASHUVCHI KETMA –KETLIKLAR.

REJA

1.Ketma –ketlik va uning limiti.

2. Yaqinlashuvchi ketma –ketliklar.

Biror a nuqta (son) hamda ixtiyoriy musbat ε soni ($\forall \varepsilon > 0$) berilgan bo'lsin.

Ta'rif. a nuqtaning ε atrifi deb, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ intervalga aytiladi.

Ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ nomer mavjud bo'lsaki, barcha $n > n_0$ da

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (1)$$

tengsizlik bajarilsa, a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va $y \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ko'rinishda yoziladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik a liitga ega bo'lsa, bunday ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi. Liitga ega bo'lmagan ketma-ketlik uzoqlashuvchi deyiladi.

(1) tengsizliêda ε ixtiyoriy ilingan musbat (ε ixtiyoriy) son bo'lgani uchun bu tengsizliê ketma-ketlikning biror nomerli hadidan bishlab keyingi barcha hadlari a nuqtaning ε atrifiga tegishli e'lonligini bildiradi, n_0 nomer yecha (1) tengsizlik ketma-ketlikning qaysi nomerli hadidan keyin bajarila boshlashini ko'rsatadi. n_0 nomer umuman aytganda ε

ga bog'liq bo'ladi. Masalan, $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} : 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$ ketma-ketlik va $a=0$ nuqtaning $(-1/5, 1/5)$ atrofni qaraylik. Bu ketma-ketlikning

$$\underbrace{x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = -\frac{1}{4}, x_5 = \frac{1}{5}, x_6 = -\frac{1}{6}, x_7 = \frac{1}{7}, \dots}_{5.} \quad \underbrace{\dots}_{n > n_0 \in \mathbb{N}}$$

birinchi bir nechta hadlari a nuqtaning $(-1/5, 1/5)$ atrofiga tegishli bo'lmaydi. Berilgan ketma-ketlikning x_6 hadidan boshlab keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'ladi. a nuqtaning atrofi toraysa yoki kengaysa n_0 ning qiymati o'zgaradi.

Ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti 0 teng bo'lsa, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Teorema. Ikkita cheksiz kichik miqdorning algebraik yig'indisi yana cheksiz kichik miqdordir.

Teorema. Chegaralangan $\{x_n\}$ ketma-ketlik bilan $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik miqdorning ko'paytmasi cheksiz kichik miqdordir, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \alpha_n = 0$$

Agar har qanday masbat M son uchun shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topilsaki, barcha $n > n_0$ uchun

$$x_n > M \text{ (} x_n < -M \text{)}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti $+\infty$ ($-\infty$) deb qaraladi.

Ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor deyiladi.

Teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik ∞ ga intilsa, $\alpha_n = \{1/x_n\}$ ketma-ketlik nolga intiladi.

Teorema. $\{x_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, $\{1/x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladi.

Teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lib, $\{u_n\} \infty$ ga intilsa, $\{x_n/u_n\}$ ketma-ketlik nolga intiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik noldan farqli limitga ega yoki cheksiz katta bo'lsa va $\{y_n\}$ cheksiz kichik miqdor bo'lsa, x_n/y_n nisbat ∞ ga intiladi.

Sonlar ketma-ketligining limiti.

Biror a nuqta (son) hamda ixtiyoriy musbat ε soni ($\forall \varepsilon > 0$) berilgan bo'lsin.

Ta'rif. a nuqtaning ε atrofida $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ intervalga aytiladi.

Ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ nomer mavjud bo'lsaki, barcha $n > n_0$ da

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (1)$$

tengsizlik bajarilsa, a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va u $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ko'rinishda yoziladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo'lsa, bunday ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi. Limitga ega bo'lmagan ketma-ketlik uzoqlashuvchi deyiladi.

(1) tengsizlikda ε ixtiyoriy ilingan musbat (ε son) bo'lgani uchun bu tengsizlik ketma-ketlikning biror nomerli hadidan boshlab keyingi barcha hadlari a nuqtaning ε atrofida tegishli ekanligini bildiradi, n_0 nomer yecha (1) tengsizlik ketma-ketlikning qaysi nomerli hadidan keyin bajarila boshlashini ko'rsatadi. n_0 nomer umuman aytganda ε

ga bog'liq bo'ladi. Masalan, $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} : 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$ ketma-ketlik va $a=0$ nuqtaning $(-1/5, 1/5)$ atrofida qaraylik. Bu ketma-ketlikning

$$\underbrace{x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = -\frac{1}{4}, x_5 = \frac{1}{5}, x_6 = -\frac{1}{6}, x_7 = \frac{1}{7}, \dots}_{n > n_0 \in \mathbb{N}}$$

birinchi bir nechta hadlari a nuqtaning $(-1/5, 1/5)$ atrofida tegishli bo'lmaydi. Berilgan ketma-ketlikning x_6 hadidan boshlab keyingi barcha hadlari shu atrofda tegishli bo'ladi. a nuqtaning atrofi toraysa yoki kengaysa n_0 ning qiymati o'zgaradi.

Ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti 0 teng bo'lsa, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Teorema. Ikkita cheksiz kichik miqdorning algebraik yig'indisi yana cheksiz kichik miqdordir.

Teorema. Chegaralangan $\{x_n\}$ ketma-ketlik bilan $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik miqdorning ko'paytmasi cheksiz kichik miqdordir, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \alpha_n = 0$$

Agar har qanday masbat M son uchun shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topilsaki, barcha $n > n_0$ uchun

$$x_n > M \quad (x_n < -M)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti $+\infty$ ($-\infty$) deb qaraladi.

Ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor deyiladi.

Teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik ∞ ga intilsa, $\alpha_n = \{1/x_n\}$ ketma-ketlik nolga intiladi.

Teorema. $\{x_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, $\{1/x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladi.

Teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lib, $\{u_n\} \infty$ ga intilsa, $\{x_n/u_n\}$ ketma-ketlik nolga intiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik noldan farqli limitga ega yoki cheksiz katta bo'lsa va $\{u_n\}$ cheksiz kichik miqdor bo'lsa, x_n/u_n nisbat ∞ ga intiladi.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari.

1°. Ketma-ketlik faqat bitta limitga ega bo'ladi.

2°. Har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangandir.

3°. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar to'rtlasha a va b limitlarga ega, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ hamda $a < b$ bo'lsa,

shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ nomer topiladiki, $n > n_0$ bo'lganda $x_n < y_n$ bo'ladi.

4°. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar a va b limitga, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ ga ega bo'lib, ular uchun biror n_0

nîmerdan boshlab $x_n \geq y_n$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $a \geq b$ bo'ladi.

5°. Agar $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ va $\{z_n\}$ ketma-ketliklar uchun $x_n \leq y_n \leq z_n$ tengsizliklar barabar, $\{x_n\}$ va $\{z_n\}$ ketma-ketliklar uiliy a limitga ega, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ bo'lsa, $\{y_n\}$ ketma-ketlik ham o'sha a limitga ega, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ bo'ladi.

mavjud bo'lib,

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$$

29. munosabat o'rinli bo'ladi.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi bunday uzilishi bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilish deyiladi.

Misol. $\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning $x=0$ uzilish nuqtasi bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilish nuqtadir.

2°. $x \rightarrow x_0$ da $f(x)$ funksiyaning chap va o'ng limitlari mavjud va chekli, ular bir-biriga teng emas:

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$$

Funksiyaning x_0 nuqtadagi bunday uzilishi birinchi tur uzilish va $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ ayirma uning δ_0 nuqtadagi sakrashi deyiladi.

3°. $x \rightarrow x_0$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng va chap limitlaridan hech biri mavjud emas.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi bunday uzilishi ikkinchi tur uzilish deyiladi.

4°. $x \rightarrow x_0$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng va chap limitlaridan biri cheksiz yoki o'ng va chap limitlar turli ishorali cheksiz.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi bunday uzilishi ham ikkinchi tur uzilish deyiladi.

Misol. $f(x) = \tan x$ funksiyaning $x = \frac{\pi}{2}$ nuqtadagi o'ng va chap limitlari

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \tan x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \tan x = \infty$$

bo'ladi. Demak, $f(x) = \tan x$ funksiya $x = \frac{\pi}{2}$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

5°. $x \rightarrow x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti cheksiz bo'lsa, x_0 nuqtada funksiya ikkinchi to'r uzilishga ega.

Masalan, ushbu $f(x) = \frac{1}{x^2}$ funksiyaning $x \rightarrow 0$ dagi limiti ∞ dir. Demak, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

MAVZU № 15

Funksiyaning uzkuksizligi va uzilish turlari. Ajoyib limitlar

REJA

1. Funksiya limiti.

2. Limitga ega funksiylarning xossalari.

1-Ta'rif. Barcha $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ natural sonlar to'plamida aniqlangan $f(n)$ funksiya cheksiz sonlar ketma-ketligi deyiladi.

f moslik har bir n nat'ral songa $f(n)$ funksiyaning aniq qiymatini mos qilib qo'yadi. $f(n)$ funksiyaning bu qiymatlari quyidagicha yoziladi:

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots \quad (1)$$

$f(1)$ qiymatni x_1 orqali, $f(2)$ qiymatni x_2 orqali va xokazo $f(n)$ qiymatni x_n orqali belgilaymiz.

Bunday belgilashlar yordamida (1) sonlar ketma-ketligi quyidagicha yoziladi:

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n, \dots, \quad (2)$$

bu erda $x_n = f(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Sonlar ketma-ketligini tashkil kiluvchi $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n, \dots$, sonlarning har biri ketma-ketlikning hadi deyiladi. x_1 -birinchi had, x_2 -ikkinchi had va xokazo x_n element n -had yoki sonlar ketma-ketligining umumiy hadi deyiladi. n natural son o'ziga mos kelgan x_n hadning nomerini bildiradi. (2) sonlar ketma-ketligi qisqacha $\{x_n\}$ kabi belgilanadi.

2-Ta'rif. Ketma-ketlikning istalgan hadini shu hadning nomeri orqali ifodalaydigan formulaga (agar shunday formula mavjud bo'lsa) ketma-ketlikni umumiy (n) hadi formulasi deyiladi. Masalan,

2, 4, 6, 8, ... ketma-ketlikning umumiy hadi $x_n = 2n$,

$$1; -1/2, 1/3, -1/4, \dots \text{ ketma-ketlikning umumiy hadi } x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

-1, 1, -1, 1, ... ketma-ketlikning umumiy hadi $x_n = (-1)^n$

Ketma-ketlikning istalgan hadini topadigan qoida ko'rsatilgan bo'la, ketma-ketlik berilgan deyiladi.

3-Ta'rif. Agar ketma-ketlikning har bir keyingi hadi oldingisidan katta (kichik), ya'ni $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) bo'lsa, bu ketma-ketlik o'suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik deyiladi.

Ketma-ketlik o'suvchi (kamayuvchi) ekanini aniqlash kerak bo'lsa, uning ixtiyoriy ikkita ketma-ket hadi uchun $a_n - a_{n+1} > 0$ ($a_n - a_{n+1} < 0$) munosabat o'rinli bo'lishi ko'rsatiladi. Masalan, $\left\{ \frac{n+1}{3n-1} \right\}$ ketma-ketlik kamayuvchidir.

Haqiqatan ham, $a_n = \frac{n+1}{3n-1}$ va $a_{n+1} = \frac{n+2}{3n+2}$ bo'lgani uchun

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{4}{(3n+2)(3n-1)} < 0,$$

$n \in \mathbb{N}$ bo'lganda oxirgi kasr maxraji musbatdir. $a_{n+1} - a_n < 0$ dan $a_{n+1} < a_n$. Xuddi shuningdek, $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ ketma-ketlikning o'suvchi ekanini ko'rsatish mumkin.

4-Ta'rif. Agar ketma-ketlikning barcha hadlari uchun $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} \leq a_n$) o'rinli bo'lsa, bunday ketma-ketlik kamaymaydigan (o'smaydigan) ketma-ketlik deyiladi.

O'smaydigan va kamaymaydigan, o'suvchi va kamayuvchi ketma-ketliklar birgalikda monoton ketma-ketliklar deyiladi.

Har qanday ketma-ketlik ham monoton bo'lavermaydi.

Masalan.

- a) $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$
- b) $1, 3, 1, 3, \dots, 2+(-1)^n, \dots$
- v) $2, 1, 4, 3, \dots, n-(-1)^n, \dots$

5-Ta'rif. Agar shunday o'zgarmas $\bar{I}$ son mavjud bo'lsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan katta bo'lmasa, ya'ni $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $x_n \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

6-Ta'rif. Agar shunday o'zgarmas m son mavjud bo'lsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan kichik bo'lmasa, ya'ni $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $x_n \geq m$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ quyidan chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

7-Ta'rif. Agar ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday o'zgarmas m va M sonlar topilsaki, $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $m \leq x_n \leq M$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

Misollar.

1. Ushbu $1 + 1, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{9}, \dots, 1 + \frac{1}{n^2}, \dots$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan, chunki $\forall n \in \mathbb{N}$

uchun $x_n \leq 2$ ($\bar{I}=2$)

2. tengsizliklar o'rinli.

2. Ushbu $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \dots$ ketma-ketlik quyidan chegaralangan, chunki $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $x_n \geq -1/4$ ($m=-1/4$)

tengsizliklar o'rinli.

3. Ushbu $0, \frac{3}{4}, \frac{8}{4}, \dots, \frac{n^2-1}{n^2}, \dots$ ketma-ketlik chegaralangan, chunki $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $m \leq x_n \leq M$ tengsizlik o'rinli.

Faraz qilaylik $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$$

quyidagi

$$x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, \dots, x_n+y_n, \dots$$

$$x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3, \dots, x_n-y_n, \dots$$

ketma-ketliklar iis ravshida $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yig'indisi hamda ayirmasi deyiladi va $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$ kabi belgilanadi.

Ushbu $x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3, \dots, x_n \cdot y_n, \dots$ ketma-ketlik $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$

ketma-ketliklar ko'paytmasi deyiladi va $\{x_n \cdot y_n\}$ kabi belgilanadi.

quyidagi

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots (y \neq 0, k = 1, 2, \dots)$$

ketma-ketlik $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar nisbati deyiladi va $\{x_n/y_n\}$ kabi belgilanadi.

Bir va ko'p o'zgaruvchili funksiya limiti haqida tushuncha. Ajoyib limitlar. Yaqinlashuvchi funksiya xossalari.

$u=f(M)=f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ funksiya $V \subseteq R_n$ to'plamda aniqlangan bo'lib, $M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ nuqta V to'plamning quyuqlanish nuqtasi bo'lsin. Funksiya limitining bir-biriga o'zaro teng kuchli Geyne va Koshi tillaridagi ta'riflari mavjud.

Ko'p o'zgaruvchili funksiya limiti Geyne yoki nuqtalar ketma-ketligi tilida quyidagicha ta'riflanadi: Har bir hadi V to'plamga tegishli va M_0 quyuqlanish nuqtasidan farqli har qanday $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots$ nuqtalar ketma-ketligi M_0 nuqtaga intilganda, mos funksiya qiymatlari $f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_k), \dots$ sonli ketma-ketligi b songa intilsa, u holda b soni **$f(M)$ funksiyaning $M \rightarrow M_0$ dagi limiti** deyiladi va

$$b = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \quad \text{yoki} \quad b = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0 \\ \dots \dots \dots \\ x_n \rightarrow x_n^0}} f(M)$$

ko'rinishda yoziladi.

Xususan, bir o'zgaruvchili $u=f(x)$ funksiya uchun: Har qanday x_0 songa intiluvchi argument qiymatlari $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ sonli ketma – ketligi uchun, bu erda $x_k \in V$, $x_k \neq x_0$ ($k=1, 2, 3, \dots$), funksiya qiymatlari $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k), \dots$ sonli ketma – ketligi b songa intilsa, b soni **$f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow x_0$ dagi limiti** deyiladi va

$$b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ ko'rinishda yoziladi.}$$

Funksiya limiti Koshi yoki $\varepsilon - \delta$ tilida quyidagicha ta'riflanadi:

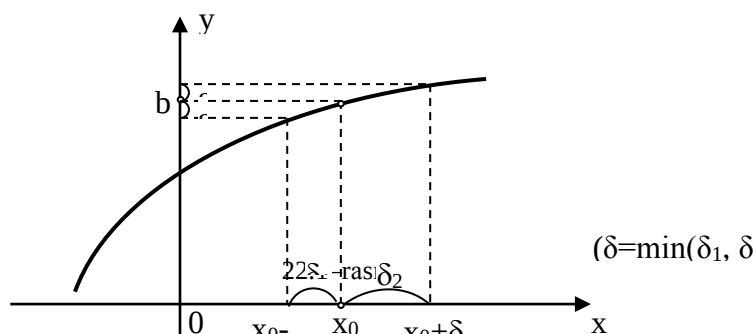
Har qanday oldindan tayinlanadigan $\varepsilon > 0$ son uchun M_0 nuqtaning δ atrofi $S_\delta(M_0)$ ni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, barcha $M \in S_\delta(M_0) \cap V$, $M \neq M_0$ nuqtalar uchun $|f(M) - b| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda b soni **$f(M)$ funksiyaning $M \rightarrow M_0$ dagi limiti** deyiladi.

Xususiyl holda, bir o'zgaruvchili $u=f(x)$ funksiya uchun: Har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday bir $\delta > 0$ son tanlash mumkin bo'lsaki, V to'plamga tegishli va $0 < |x - x_0| < \delta$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi har bir x uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b soni **$f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow x_0$ dagi limiti** deyiladi (22.1–rasm).

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan birini qo'llab, masalan,

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1, \quad 2) \quad \lim_{\substack{x_1 \rightarrow -1 \\ x_2 \rightarrow 2}} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = 0,2 \quad \text{yoki} \quad 3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \text{ mavjud}$$

emasligini isbotlash mumkin.



Quyida sanab o'tiladigan va **ajoyib limitlar** nomini olgan limitlar ham ta'riflar asosida isbotlanadi.

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 & (1 - \text{ajoyib limit asosiy shakli}). \\ 2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= 1. & 3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} &= 1. & 4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} &= 1. \\ 5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} &= e. & (2 - \text{ajoyib limit asosiy shakli}). \end{aligned}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \log_a \frac{1+x}{x} = \log_a e.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = 1.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

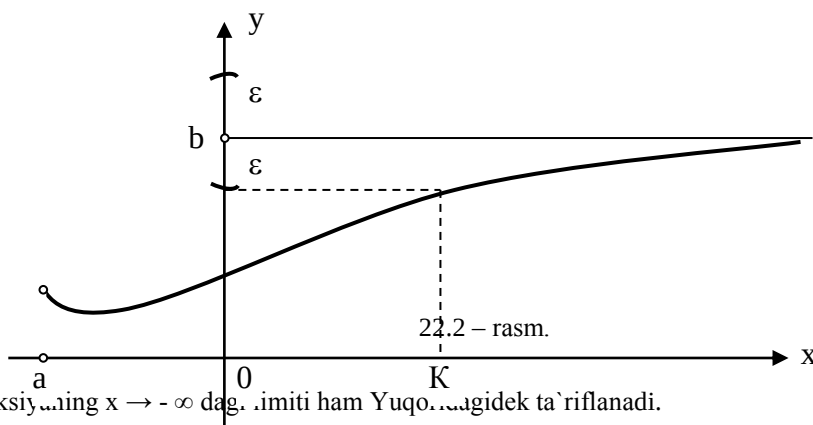
Limitga ega funksiyalar o'zlarining quyidagi xossalari bilan xarakterlanadi:

1) $u=f(M)$ funksiya $M \rightarrow M_0$ da limitga ega bo'lsa, ushbu limit yagonadir;

2) $u=f(M)$ funksiya $M \rightarrow M_0$ da chekli limitga ega bo'lsa, M_0 nuqtaning δ atrofi $S_\delta(M_0)$ mavjudki, $S_\delta(M_0) \cap V$ to'plamda $f(M)$ funksiya chegaralangan bo'ladi.

2. Bir o'zgaruvchili funksiya uchun bir tomonlama va $x \rightarrow \infty$ dagi limitlar.

Bir o'zgaruvchili $u=f(x)$ funksiya biror $V=(a; \infty)$ nurda aniqlangan bo'lsin (22.2–rasm). Har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $K > 0$ sonni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, barcha $|x| > K$ munosabatni qanoatlantiruvchi x lar uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, b soni **$f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi limiti** deyiladi.



$u=f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow -\infty$ dagi limiti ham Yuqoridagidek ta'riflanadi.

Masalan, 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^x} = 3$, chunki $x \rightarrow +\infty$ da $\left(\frac{1}{5}\right)^x \rightarrow 0$;

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^x} = 0$, chunki $x \rightarrow -\infty$ da $\left(\frac{1}{5}\right)^x \rightarrow +\infty$;

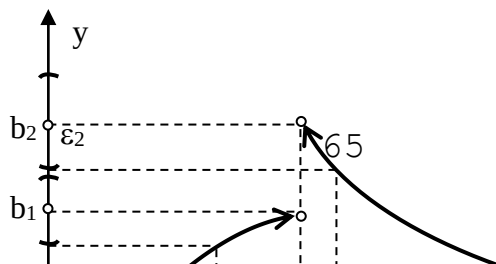
3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Bir o'zgaruvchili $u=f(x)$ funksiya $x < x_0$ da aniqlangan bo'lib, x_0 nuqta aniqlanish sohasining quyuqlanish nuqtasi bo'lsin (22.3–rasm).

Har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun $\delta_1 > 0$ sonni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - b_1| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $b_1 = f(x_0 - 0)$ son **$f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow x_0$ da chapdan limiti** deyiladi va $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ ko'rinishda yoziladi.

$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$

$u=f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow x_0$ da o'ngdan limiti ham shunga o'xshash aniqlanadi va $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ ko'rinishda yoziladi (22.3 – rasm).



22.3–rasm.

$$\text{Masalan, 1) } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + 5^x} = 1; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + 5^x} = 0.$$

$u=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada limiti, funksiya shu nuqtada chapdan va o'ngdan limitlarga ega bo'lib, $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ tenglik bajarilganda, mavjud bo'ladi.

Limitlar haqida asosiy teoremlar. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar.

Limitlar haqidagi asosiy teoremlar quyidagilardan iborat:

1. Agar $u = f(M) = S$ (S – o'zgarmas) bo'lsa, u holda $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = C$.

2. $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ mavjud bo'lsa, u holda ixtiyoriy k son uchun

$$\lim_{M \rightarrow M_0} [kf(M)] = k \lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$$

3. Agar $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ va $\lim_{M \rightarrow M_0} g(M)$ mavjud bo'lsa,

a) $\lim_{M \rightarrow M_0} [f(M) \pm g(M)]$ ham mavjud bo'ladi va

$$\lim_{M \rightarrow M_0} [f(M) \pm g(M)] = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \pm \lim_{M \rightarrow M_0} g(M).$$

b) $\lim_{M \rightarrow M_0} [f(M) \cdot g(M)]$ mavjud bo'ladi va

$$\lim_{M \rightarrow M_0} [f(M) \cdot g(M)] = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \cdot \lim_{M \rightarrow M_0} g(M)$$

v) $\lim_{M \rightarrow M_0} g(M) \neq 0$ o'rinli bo'lganda, $\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M)}{g(M)}$ ham mavjud bo'ladi va

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)}{\lim_{M \rightarrow M_0} g(M)}.$$

g) M_0 nuqtaning biror atrofida $f(M) \leq g(M)$ munosabat bajarilsa, u holda

$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \leq \lim_{M \rightarrow M_0} g(M)$ tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

Limitlar haqidagi teoremlar bir va ko'p o'zgaruvchili funksiya limitlarini hisoblashda qo'llaniladi.

$$\text{Masalan, } \lim_{\substack{x_1 \rightarrow -1 \\ x_2 \rightarrow 2}} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{\lim_{\substack{x_1 \rightarrow -1 \\ x_2 \rightarrow 2}} x_1^2 + \lim_{\substack{x_1 \rightarrow -1 \\ x_2 \rightarrow 2}} x_2^2} = \frac{1}{(-1)^2 + 2^2} = 0,2.$$

Agar $\lim_{M \rightarrow M_0} \alpha(M) = 0$ bo'lsa, $\alpha(M)$ funksiya $M \rightarrow M_0$ da cheksiz kichik funksiya deyiladi.

Xususan, agar $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ bo'lsa, bir o'zgaruvchili $\alpha(x)$ funksiya $x \rightarrow x_0$ da cheksiz kichik deb ataladi.

Masalan, $\alpha(x) = \frac{x+1}{x^2}$ funksiya $x \rightarrow -1$ va $x \rightarrow \infty$ larda cheksiz kichik funksiya.

Cheksiz kichik funksiya o'zining quyidagi xossalriga ega:

1) $M \rightarrow M_0$ da $\alpha(M)$ cheksiz kichik funksiya bo'lib, $f(M) = b + \alpha(M)$ bo'lganda, $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ mavjud

va aynan b ga tengdir;

2) Chekli sondagi va har biri $M \rightarrow M_0$ da cheksiz kichik funksiylarning yig'indisi yoki ko'paytmasi cheksiz kichik funksiylardir.

3) $M \rightarrow M_0$ da cheksiz kichik funksiyaning, M_0 nuqtaning biror atrofida chegaralangan funksiya ko'paytmasi, cheksiz kichik funksiya.

Agar $\lim_{M \rightarrow M_0} \gamma(M) = \infty$ (yoki $-\infty$) bo'lsa, $\gamma(M)$ funksiya $M \rightarrow M_0$ da cheksiz katta funksiya deyiladi.

Xususan, agar $\lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) = \infty$ (yoki $-\infty$) bo'lsa, $\gamma(x)$ funksiya $x \rightarrow x_0$ da cheksiz katta bir o'zgaruvchili

funksiya deb ataladi.

Masalan, $\gamma(x) = \frac{x+1}{x^2}$ funksiya $x \rightarrow 0$ da cheksiz kattadir.

4. Ekvivalent cheksiz kichik funksiylar. Funksiyalarni taqqoslash.

Bir o'zgaruvchili $f(x)$ va $g(x)$ funksiylar berilgan bo'lib, $x \neq x_0$ da $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ va $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

mavjud bo'lsin. U holda, quyidagi xollarning biri o'rinli bo'ladi:

a) Agar $l \neq 0$ va $l \neq \infty$ bo'lsa, $f(x)$ va $g(x)$ funksiylar $x \rightarrow x_0$ da teng tartibli funksiylar deyilib, $f(x) = O^*(g(x))$ ko'rinishda yoziladi;

b) Agar $l = 1$ bo'lsa, $f(x)$ va $g(x)$ funksiylar $x \rightarrow x_0$ da ekvivalent yoki teng kuchli deyilib, $f(x) \sim g(x)$ yozuvda ifodalanadi;

v) Agar $l = 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x \rightarrow x_0$ da $g(x)$ funksiya nisbatan Yuqori tartibli kichik deyiladi va $f(x) = o(g(x))$ yozuvda yoziladi;

g) Agarda $l = \infty$ bo'lsa, unda $g(x) = o(f(x))$.

Masalan: 1. $x \rightarrow 0$ da $\lg(2x) = O^*(5x)$, chunki $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg 2x}{5x} = \frac{2}{5}$.

2. $x \rightarrow 0$ da $x^3 = o(x^2)$, chunki $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$.

3. $x \rightarrow \infty$ da $x^2 = o(x^3)$, chunki $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = 0$.

4. $x \rightarrow 0$ da $\lg 2x \sim \sin 2x$ chunki $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg 2x}{\sin 2x} = 1$.

Agar $x \rightarrow x_0$ da $\alpha(x)$ funksiya cheksiz kichik bo'lsa, quyidagi teng kuchliliklar (ekvivalentliklar) o'rinli:

1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 2. $\lg \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 3. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 4. $\arctg \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 5. $\log_a [1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x) \log_a e$;

6. $\ln [1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x)$; 7. $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$;

$$8. a^{\alpha(x)} - 1 \quad \alpha'(x) \ln a; \quad 9. e^{\alpha(x)} - 1 \quad \alpha(x); \quad \cup$$

$$10. [1 + \alpha(x)]^n - 1 \quad n \alpha(x)^{n-1}; \quad 11. \sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \quad \frac{\alpha(x)}{n}. \quad \cup$$

Yuqorida keltirilgan ekvivalentliklardan funksiyalar limitini hisoblashda foydalanish maksadga muvofiq.

Masalan, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{(1-\cos x)\arctg x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2}x} = 2.$

MAVZU № 16

FUNKSIYA HOSILASI VA DIFFERENSIALI. HOSILANING GEOMETRIK VA TEXNIK MA'NOSI.

REJA

1. Funksiya hosilasi va differensial.
2. Hosilaning geometrik va texnik ma'nosi.

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda berilgan bo'lib, x_0 shu intervalning biror nuqtasi bo'lsin. Bu x_0 nuqtaga Δx ($\Delta x \neq 0$, $x_0 + \Delta x \in (a,b)$) ortirma berib berilgan funksiyaning ortirtirishini topamiz:

$$\Delta y \text{ yoki } \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Ravshanki, funksiyaning ortirtirishi Δx ga bog'liq bo'ladi.

1-ta'rif. Agar $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ mavjud va chekli bo'lsa, limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi

va $f'(x_0)$, $df(x_0)/dx$ yoki $y'/x=x_0$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Agar $x_0 + \Delta x = x$ deb olinsa, unda $\Delta x = x - x_0$ va $\Delta x \rightarrow 0$ da $x \rightarrow x_0$ bo'lib,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bo'ladi. Bu xol funksiya hosilasini $x \rightarrow x_0$ da

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nisbatning limiti sifatida ham ta'riflash mumkinligini ko'rsatadi.

1-misol. Ushbu $f(x)=x^2$ funksiyaning $x_0=1$ nuqtadagi hosilasini toping. Berilgan funksiya $(-\infty, +\infty)$ da aniqlangan. Uning $x_0=1$ nuqtadagi ortirtirishi $\Delta f(1)=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1^2=2\Delta x+\Delta x^2$ ga teng.

Undan $\frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x$ bo'lib, $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$

Demak, berilgan funksiyaning $x_0=1$ nuqtadagi hosilasi 2 ga teng ekan.

2-misol. $f(x)=1/x$ ($x \neq 0$)

funksiyaning ixtiyoriy x nuqtadagi hosilasi topilsin.

Bu funksiyaning x nuqtadagi ortirtirishi

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)} \text{ bo'lib,}$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}, \text{ bo'ladi.}$$

Keyingi tenglikdan $\Delta x \rightarrow 0$ da limitga o'tib

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right) = -\frac{1}{x^2} \text{ ni topamiz.}$$

Demak, berilgan funksiyaning x nuqtadagi ($x \neq 0$) hosilasi $f'(x)=-1/x^2$ bo'lar ekan.

3-misol. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi hosilasi hisoblansin. Bu funksiyaning $x_0=0$ nuqtadagi ortirtirishi

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt{0 + \Delta x} - \sqrt{0} = \sqrt{\Delta x}$$

ga teng. U xolda $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$; bo'lib, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$ ning limiti mavjud emas. Demak, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

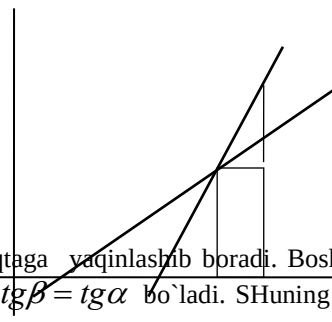
Isbot. Berilgan $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin. Hosila ta'rifidan $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ bo'ladi. Bundan yechsa, $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$ tenglikni yozish mumkin. Bunda $\Delta x \rightarrow 0$ da $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ kelib chiqadi. Oxirgi tenglikdan $\Delta f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$ bo'lishi kelib chiqadi. $\Delta x \rightarrow 0$ da limitga o'tsak, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(x_0) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x] = 0$ bo'ladi. Bu yecha $f(x)$ funksiyani x_0 nuqtada uzluksiz ekanini bildiradi. Teorema isbot bo'ldi.

Lekin, aksi o'rinli emas, ya'ni uzluksiz likdan shu nuqtada hosilaga ega kelib chikmaydi.

Tekis egri chiziq S da M_0 nuqta berilgan bo'lsin. Bu egri chiziqning boshqa M nuqtasini qaraymiz. M_0M kesuvchini o'tkazamiz.

Agar M nuqta S egri chiziq bo'yicha M_0 nuqta tamonga siljiy boshlasa, M_0 nuqta yecha qo'zgalmasa, bu xolatda kesuvchi bilan L to'g'ri chiziq orasidagi burchak nolga intiladi. U xolda bu L to'g'ri chiziq S egri chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma deyiladi.

Qisqacha aytganda, urinma bu kesuvchining limit xolatini egallagan to'g'ri chiziqdir. $U=f(x)$ uzluksiz funksiya grafigiga x_0 nuqtada o'tkazilgan urinmani ko'rib chiqaylik. Urinmaning Ox o'qi bilan hosil qilgan burchagi α bo'lsa, $k=tg\alpha$ ni topamiz. Buning uchun M_0 nuqta



va $x_0 + \Delta x$ absisali M nuqta orqali koeffitsienti $k_1 = tg\beta = \Delta y / \Delta x$, bu yerdagi β -kesuvchi bilan Ox o'qi orasidagi burchakdir. $\Delta x \rightarrow 0$ va M nuqta siljib M_0 nuqtaga yaqinlashib boradi. Boshqacha aytganda, kesuvchi urinma bilan ustma-ust tushadi va $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta = \alpha$ hamda $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg\beta = tg\alpha$ bo'ladi. SHuning uchun

urinmaning burchak koeffitsienti $k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

SHunday qilib, funksiya grafigiga abstsissasi x_0 bo'lgan nuqtadan o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti bu funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasiga teng.

$$K=f'(x_0)$$

Bu yecha hosilaning geometrik ma'nosidir.

Misol. $U=x^2$ parabolaga $M_0(2,4)$ nuqtadan o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini toping.

$$y'=2x; k=f'(x_0)=2x_0=2 \cdot 2=4$$

Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab, $S=f(t)$ qonun bo'yicha xarakat qilayotgan bo'lsin, bu yyerda t -vaqt, S -bosib o'tilgan yo'l. Vaqtning t_0 momentini belgilab olaylik. Bu momentgacha nuqta $S_0=f(t_0)$ yo'lni bosib o'tadi. Moddiy nuqtaning t_0 momentdagi v_0 tezligini aniqlaylik.

Buning uchun vaqtning boshqa bir $t_0 + \Delta t$ momentini qaraymiz. Unga bosib o'tilgan $S_0=f(t_0 + \Delta t)$ yo'l mos keladi. U xolda vaqtning $\Delta t = t - t_0$ oralig'ida nuqta $\Delta S = S - S_0 = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ yo'lni bosib o'tadi. Vaqtning Δt oralig'idagi xarakatning o'rtacha tezligi $v_{o'r}$ o'tilgan yo'lnig vaqtga nisbati bo'lgan $v_{o'r} = \Delta S / \Delta t$ munosabat bilan aniqlanadi. Vaqtning boshlangich t_0 momentini fiksirlangan deb, Δt vaqt oralig'ini yecha o'zgaruvchi deb hisoblaymiz. U xolda $v_{o'r}$ o'rtacha tezlik Δt ga bog'liq bo'lgan o'zgaruvchi miqdordir.

Berilgan t_0 momentdagi v_0 tezlik deb $\Delta t \rightarrow 0$ dagi o'rtacha $v_{o'r}$ tezlikning limitiga aytiladi, ya'ni

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'_t$$

yoki

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Moddiy nuqta vaqtning t momentidagi to'g'ri chiziq bo'yicha xarakatining v tezligi S yo'ldan t vaqt bo'yicha olingan hosiladir. Bu hosilaning mexanik ma'nosi bo'ladi.

Xosilaning iqtisodiy ma'nosi. Shuni ta'kidlash lozimki, xosilaning iqtisodiy ma'nosi ko'p qirrali bo'lib, muayyan ob'ektga yo'naltirilgan maqsaddan kelib chiqadi. Biz shu masalalardan birini keltiramiz. $U = U(t)$

funktsiya t -vaqt davomida ishlab chiqarilgan maxsulot hajmi o'zgarishini bildirsin. Ishlab chiqarishning $t = t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligini topish masalasini ko'raylik. Buning uchun t -vaqtga Δt - orttirma beramiz, u holda mana shu vaqt davomida ma'lum miqdordagi $\Delta U = U(t_0 + \Delta t) - U(t_0)$ maxsulot ishlab chiqariladi, o'rtacha mehnat unumdorlik $Z_{ypma} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$ tenglik orqali topiladi. Yuqoridagi mulohazalarga o'xshash $t = t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligi uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$Z(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} Z_{ypma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = U'(t_0)$$

Demak, maxsulot xajmini vaqt bilan bog'lovchi $U(t)$ funktsiyaning vaqt bo'yicha $U'(t)$ xosilasi, ishlab chiqarishning $Z(t)$ unumdorligini berar ekan, ya'ni

$$U'(t) = Z(t)$$

MAVZU № 17 DIFFERENSIAL.DIFFERENSIALNI HISOBLASH QOIDALARI. YUQORI TARTIBLI HOSILA VA DIFFERENSIALLAR

REJA

1. Hosila va differensialni hisoblash qoidalari.
2. Yuqori tartibli hosila va differensiallar
3. Murakkab funksiya hosilasi va differensial.

1. Differensiallanuvchi funksiyalar haqida teoremlar. Elementar funksiyalar hosilalari jadvali.

Limitlar haqida teoremlar kabi, differensiallanuvchi funksiyalar haqida ham teoremlar mavjud.

$u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, k biror-bir o'zgarmas son bo'lsa, u holda x nuqtada

$$\text{a) } u(x) + v(x); \quad \text{b) } k u(x); \quad \text{v) } u(x) \cdot v(x); \quad \text{g) } \frac{u(x)}{v(x)}$$

funksiyalar ham differensiallanuvchi bo'ladi va quyidagilar o'rinli :

$$1) [u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x); \quad d[u(x) + v(x)] = du(x) + dv(x).$$

$$2) [k u(x)]' = k u'(x); \quad d[k u(x)] = k du(x).$$

$$3) [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$$

$$d[u(x) \cdot v(x)] = u(x) \cdot dv(x) + v(x) \cdot du(x).$$

$$4) \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)};$$

$$d \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right] = \frac{du(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot dv(x)}{v^2(x)}, \quad (v(x) \neq 0).$$

Funksiya hosilasini hisoblashda **differensiallash qoidalari**dan tashqari, elementar funksiyalar hosilalari jadvalidan ham foydalaniladi.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C (o'zgarmas)	0	$\sin x$	$\cos x$
x^p	x^{p-1}	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{\sqrt[n]{x}}{n x}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$

e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\log_a x $	$\frac{1}{x \ln a}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
		$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Misolalar. Differensiallash qoidalari va hosilalar jadvalidan foydalanib, quyidagi funksiyalar hosilalarini hisoblang:

$$1. y = \sqrt[3]{x^2} + 5^x e^x - x^2 \operatorname{arctg} x. \quad 2. y = \frac{2^x + 3x^2}{\ln x}.$$

$$1. y' = [\sqrt[3]{x^2} + 5^x e^x - x^2 \operatorname{arctg} x]' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + (5e)^x \ln(5e) - (x^2)' \cdot \operatorname{arctg} x -$$

$$- x^2 \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 5^x e^x \ln(5e) - 2x \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{1+x^2}.$$

$$2. y' = \frac{(2^x + 3x^2)' \ln x - (2^x + 3x^2) \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{(2^x \ln 2 + 6x) \cdot \ln x - (2^x + 3x^2) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

2. Murakkab funksiya hosilasi va differensial.

$u = f(u)$ va $u = g(x)$ funksiyalarning superpozitsiyasidan iborat $u = f[g(x)]$ murakkab funksiya berilgan bo'lsin.

Agar $u = g(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi, o'z navbatida $u = f(u)$ funksiya $u_0 = g(x_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $u = f[g(x)]$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du} \right) \cdot \left(\frac{du}{dx} \right) \text{ yoki } u'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0).$$

30. Murakkab funksiyaning erkli o'zgaruvchi bo'yicha hosilasi, shu funksiyaning tashkil etgan (superpozitsiyalanuvchi) funksiya hosilalarining ko'paytmasiga teng.

Murakkab funksiya differensial uchun $du = u'(x_0) \cdot dx = f'(u_0) \cdot du$ tengliklar o'rinli, bu erda $du = g'(x_0) \cdot dx$. Murakkab funksiya birinchi tartibli differensialini hisoblash uchun uning biror o'zgaruvchi bo'yicha hosilasini shu o'zgaruvchining differensialiga ko'paytirish etarli. Bunda differensialni hisoblash shakli o'zgarishsiz qolib, o'zgaruvchilarning tanlanilishiga yoki ularning erkli yoki erksizligiga bog'liq emas. Ushbu xossa birinchi tartibli differensial shaklining invariantlik xossasi deyiladi.

Misol.

$$1. y = \operatorname{Intg} \frac{x}{2} \text{ funksiyaning birinchi tartibli hosilasi va differensialini hisoblaymiz:}$$

$$y' = \left[\operatorname{Intg} \frac{x}{2} \right]' = \frac{\left[\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right]'}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

$$dy = y' dx = \frac{1}{\sin x}$$

2. $u = x^{\sin x}$ ($x > 0$) funksiya hosilasini hisoblash uchun, dastlab tenglikning ikkala tomonini logarifmlaymiz va so`ngra hosila olamiz:

$$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)' \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}.$$

$$\text{Natijada, } y' = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

3. Yuqori tartibli hosilalar va differensiallar.

$u = f(x)$ funksiya uchun birinchi tartibli hosila u' aniqlangan bo`lsin. Funksiyaning ikkinchi tartibli u'' hosilasi u' dan olinadigan hosila (agar uning mavjudlik sharti bajarilsa) sifatida aniqlanadi: $y'' = (y')'$.

Yuqoridagi mulohazani davom ettirib, funksiyaning uchinchi, to`rtinchi va hokazo, ixtiyoriy  **$n$  – tartibli hosilalarini** aniqlash mumkin. Yuqori tartibli hosilalarni yozishda quyidagi belgilar qo`llaniladi:

$$f^{(n)}(x), u'''_{xxx}, u^V, u, \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Shunday qilib, $u''' = (u'')'$, $u^{(4)} = (u''')'$, $\dots$, $u^{(n)} = (u^{(n-1)})'$.

Yuqori tartibli hosilalarni hisoblashda, birinchi tartibli hosilani hisoblash qoidalar kabi qoidalar qo`llaniladi. Masalan,  $u = \sin^2 x$  funksiya uchun  $u' = (\sin^2 x)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ ,  $y'' = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x$ ,  $y''' = (2 \cos 2x)' = -4 \sin 2x$  va hokazo. Quyida keltirilgan ba`zi funksiyalarning Yuqori n – tartibli hosilalari uchun tegishli formulalarni olish va ularni jadval holida yig`ish mumkin:

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
x^p	$p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)x^{p-n}$
e^x	e^x
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
$\ln x$	$\frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$
$\sin kx$	$k^n \sin(kx + \frac{\pi n}{2})$
$\cos kx$	$k^n \sin(kx + \frac{\pi n}{2})$

$u = f(x)$ funksiyaning **Yuqori tartibli differensiallari** ham ketma – ket ravishda, mos hosilalari kabi aniqlanadi:

$d^2 u = d(du)$ - ikkinchi tartibli differensial;

$d^3 u = d(d^2 u)$ – uchinchi tartibli differensial;

$\dots$

$d^n y = d(d^{n-1} y)$ - n -tartibli differensial.

Agar $u = f(u)$ funksiya berilgan bo`lib,  $u$  erkli o`zgaruvchi yoki x ning chiziqli $u = kx + b$ funksiyasidan iborat bo`lsa, u holda:

$$d^2 y = y''(du)^2, d^3 y = y^{(3)}(du)^3, \dots, d^n y = y^{(n)}(du)^n.$$

Agarda $u = f(x)$ funksiyada $u = g(x) \neq kx + b$ bo`lsa,  $u$  holda Yuqori tartibli differensiallar uchun **invariantlik xossasi** o`rinli bo`lmaydi, chunki $d^2 y = f''(u) \cdot (du)^2 + f'(u) \cdot d^2 u$ va hokazo.

4. Teskari funksiya hosilalari.

$u = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi bo`lib, shu intervalda uzluksiz $x = g(u)$ teskari

funksiyaga ega va $u'(x) \neq 0$ bo`lsin. U holda,  $x = g(u)$  teskari funksiya ham differensiallanuvchi bo`lib, $x'_y = \frac{1}{y'_x}$

tenglik o`rinli bo`ladi.

Oxirgi tenglikni u bo`yicha differensiallaymiz va  $u''_{xx}$  mavjud bo`lsa,

$$x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^2} x'_y = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$$

Differensiallashni davom etib, teskari funksiyaning istalgan tartibli hosilasini aniqlash mumkin.

Masalan, $u = e^x$ ($u > 0$) funksiya uchun $x = \ln y$ teskari funktsiyadir.

$$\text{Uninghosilasi } x'_y = (\ln y)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}.$$

MAVZU 18

DIFFERENTIAL HISOBNING ASOSIY TEORIMALARI. TEYLOR – MAKLERON FORMULALARI. LOPITAL QOIDASI. FUNKSIYANI HOSILA YORDAMIDA TO'LA TEKSHIRISH VA UNING GRAFIGINI CHIZISH

Reja:

1. Differensiallanuvchi funksiya uchun o'rta qiymat haqida
Roll va Lagranj teoremlari.
2. Teylor – Makloren formulalari va ularning qo'llanilishi
3. Aniqlanishlarni ochish Lopital qoidasi.

Differensiallanuvchi funksiya uchun o'rta qiymat haqida Roll va Lagranj teoremlari.

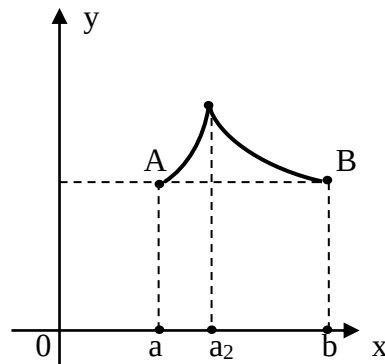
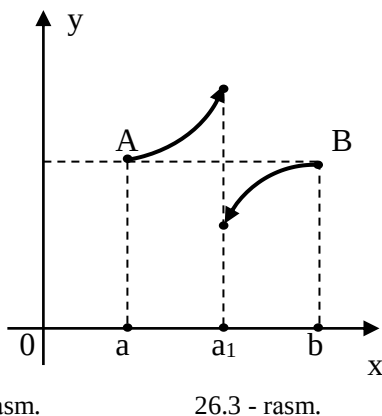
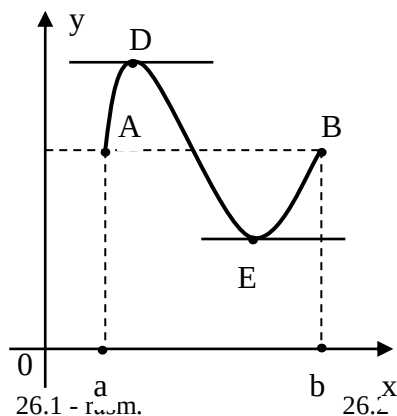
Differensiallanuvchi funksiyalar uchun o'rta qiymat haqidagi teoremlar nomini olgan tasdiqlardan asosiylari bilan tanishamiz.

Roll teoremasi: $y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar funksiya $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi bo'lib, $f(a) = f(b)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $(a; b)$ intervalga tegishli hech bo'lmaganda bitta shunday bir s nuqta topiladiki, $f'(s) = 0$ bo'ladi.

31. Teoremani geometrik izohlaydigan bo'lsak, teorema shartlari bajarilganda, $u = f(x)$ funksiya grafigi AV yoyga tegishli hech bo'lmaganda bitta (26.1 – rasmda ikkita D va E) nuqta topiladiki, chiziqning shu nuqtasiga o'tkazilgan urinma Ox absissalar o'qiga parallel bo'ladi. Teoremaning har bir sharti ahamiyatlidir, chunki ulardan biri bajarilmasa, $(a; b)$ intervalda $f'(s) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi s nuqta topilmasligi mumkin. Masalan, 26.2 – rasmda grafigi keltirilgan funksiya uchun uzluksizlik sharti bajarilmagan, a_1 nuqta uning uzilish nuqtasi.

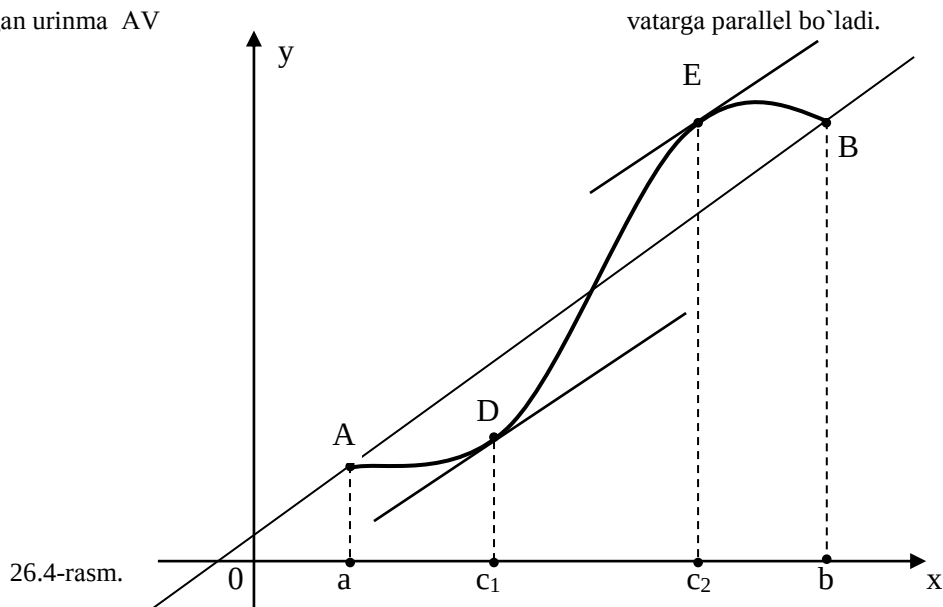
32. 26.3 – rasmda tasvirlangan funksiya uchun esa uning differensiallanuvchanlik sharti bajarilmagan, a_2 nuqtada funksiya hosilaga ega emas. Egri chiziqlarga tegishli va $(a; b)$ interval doirasida urinmalari Ox o'qiga parallel bo'ladigan biror – bir nuqta mavjud emas.

33. Lagranj teoremasi: $u = f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $(a; b)$ intervalga tegishli kamida bitta s nuqta topiladiki, $f(b) - f(a) = f'(s) \cdot (b-a)$ munosabat o'rinli bo'ladi.



34. Lagranj teoremasida Roll teoremasidagidek, funksiyaning $[a; b]$ kesmaning chetki nuqtalarida teng qiymatlarga erishishi talab qilinmaydi. Teoremadan xususiy $f(a) = f(b)$ holda, $f'(s) = 0$ ekanligi kelib chiqadi, shu ma'noda Lagranj teoremasi Roll teoremasining umumlashmasi hisoblanadi.

35. Teoremani geometrik izohlaydigan bo'lsak, uning har bir sharti o'rinli bo'lganda, $u = f(x)$ funksiya grafigi AB yoyga tegishli hech bo'lmaganda bitta (26.4–rasmda ikkita D va E) nuqta topiladiki, chiziqning shu nuqtasiga



Agar $b = a + \Delta x$ almashtirish kiritsak, c nuqtani $s = a + \theta(b - a) = a + \theta\Delta x$ ($\theta \in (0; 1)$) ko'rinishda ifodalash mumkin. Almashtirishlar e'tiborga olinsa, **Lagranj formulasi** $f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a + \theta\Delta x)\Delta x$ shaklda yoziladi va **Lagranjning chekli orttirmalar formulasi** deyiladi.

2. Teylor – Makloren formulalari va ularning qo'llanilishi.

$u = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va shu atrofda $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda atrofga tegishli har bir x uchun **Teylor formulasi**

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

tengligi o'rinli bo'ladi, bu erda $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ - Teylor formulasining Lagranj

shaklidagi **qoldiq hadi** deb yuritiladi.

Agar $x = a + \Delta x$ almashtirish kiritsak, Teylor formulasi

$$f(a + \Delta x) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}(\Delta x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(a + \theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}$$

($\theta \in (0; 1)$) **Lagranjning umumlashma chekli orttirmalar formulasi** deb ataladigan ko'rinishini oladi.

Agar Teylor formulasida $a = 0$ bo'lsa, ushbu

$$f(a) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (\theta \in (0; 1))$$

Makloren formulasi deb ataladigan formulani olamiz.

36. Teylor – Makloren formulalari funksiyalarni ko'phad shaklida ifodalashda, funksiyalarning taqribiy qiymatlarini hisoblashda, funksiyalarni tekshirish va limitlarni aniqlashda qo'llaniladi.

Masalan, $x = 0$ nuqta atrofidagi har bir x uchun quyidagilar o'rinli:

$$1) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x);$$

$$2) (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x);$$

$$3) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x);$$

$$4) \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x);$$

$$5) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x).$$

3. Aniqmasliklarni ochish Lopital qoidasi.

Lopital qoidasi: a nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi, nuqtaning o'zida differensiallanuvchi bo'lishi shart bo'lmagan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun, shu atrofda $g'(x) \neq 0$ va yoki $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

yoki $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ shartlar o'rinli bo'lib, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ ham mavjud bo'ladi va } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ tenglik o'rinli.}$$

Yuqoridagi qoida a ni ∞ bilan almashtirilgan hol uchun ham o'rinli.

Lopital qoidasi $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmasliklarni ochishda qo'llaniladi. Agar $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbat $x = a$

nuqtada $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmasliklardan iborat bo'lsa, u holda qoida $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbatga qo'llaniladi va

jarayon aniqmaslik ochilmaguncha davom ettiriladi.

Algebraik almashtirishlar yordamida $(0 \cdot \infty)$ yoki $(\infty - \infty)$ ko'rinishdagi aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$

aniqmasliklarning biriga keltiriladi, so'ngra Lopital qoidasi qo'llanilib, aniqmasliklar ochiladi.

Dastlab logarifmlash yo'li bilan esa (1^∞) , (∞^0) , (0^0) ko'rinishdagi aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ aniqmasliklarga

keltiriladi.

Misol. Lopital qoidasini qo'llab, limitlarni toping:

$$1. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{\ln(x+4)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 - x - 12)'}{[\ln(x+4)]'} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x-1}{\frac{1}{x+4}} = -7.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x-1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right] = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2})'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin^2 \frac{\pi x}{2}}{-\pi} = -\frac{2}{\pi}.$$

1. Funksiyaning o'sish va kamayish shartlari.

$y = f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan va differensiallanuvchi bo'lsin.

Teorema. $y = f(x)$ funksiya (a,b) intervalda kamaymaydigan (o'smaydigan) funksiya bo'lishi uchun (a,b) intervalning barcha nuqtalarida $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) bo'lishi zarur va etarli.

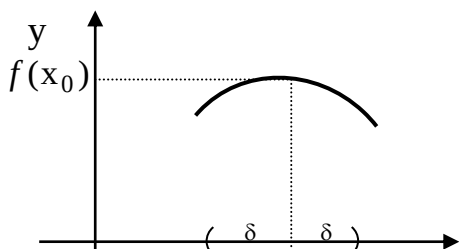
Misol. $f(x) = x^2 e^{-x}$ funksiya uchun $f'(x) = x e^{-x}(2-x)$. Agar $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ bo'lsa, $f'(x) < 0$ bo'ladi va bu oraliqlarda funksiya qat'iy kamayadi; $x \in (0, 2)$ bo'lsa, $f'(x) > 0$ bo'ladi va bu oraliqda funksiya qat'iy o'sadi.

2. Funksiyaning ekstremum nuqtalari.

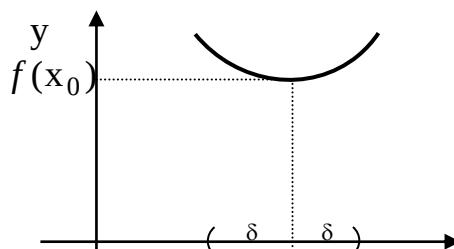
Agar x_0 nuqtaning δ atrofi mavjud bo'lib, barcha $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ nuqtalar uchun $f(x) \geq f(x_0)$

($f(x) \leq f(x_0)$) tengsizlik bajarilsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning qat'iy bo'lmagan minimum (qat'iy bo'lmagan maksimum) nuqtasi deyiladi.

Agar ko'rsatilgan δ atrofda ($x \neq x_0$) qat'iy $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$) tengsizlik bajarilsa, x_0 nuqtaga qat'iy minimum (qat'iy maksimum) nuqta deyiladi (27.1-rasm). Funksiyaning qat'iy maksimum va minimum nuqtalari uning **ekstremum nuqtalari** deb ataladi.

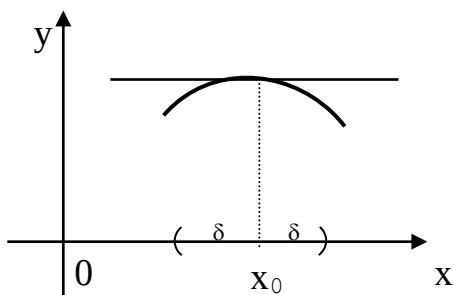


27.1-rasm

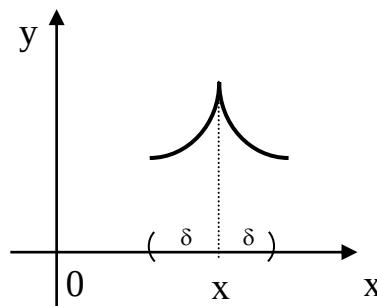


Teorema. (ekstremumning zaruriy sharti). Agar x_0 nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lib, funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsa, u holda yoki $f'(x_0) = 0$, yoki $f'(x_0)$ – mavjud emas.

$y = f(x)$ funksiya aniqlanish sohasining ichki nuqtalari bo'lib, funksiya hosilasi nolga aylanadigan yoki mavjud bo'lmaydigan nuqtalarga **kritik nuqtalar** deyiladi (27.2-rasm). Funksiyaning ekstremum nuqtalari uning kritik nuqtalari orasidan tanlaniladi.



27.2 – rasm.



Masalan, $f(x) = \frac{x - f'(x_0)}{\sqrt[3]{x^2}}$ funksiya uchun $f'(x) = \frac{x+2}{3\sqrt[3]{x^5}}$ bo'ladi. Demak, $x = -2$ da $f'(-2) = 0$, $x = 0$

da esa $f'(x)$ mavjud emas. Funksiyaning ekstremum nuqtalari mavjud bo'lsa, bu nuqtalar $x = 0$ va $x = -2$ kritik nuqtalar bo'lishi mumkin.

Funksiyaning birinchi tartibli hosilasini 0 ga aylantiradigan kritik nuqtalariga, uning stasionar nuqtalari deyiladi. Ekstremumning etarililik shartlari:

1) Birinchi tartibli hosila bo'yicha tekshirish: Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ da aniqlangan va x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi shart emas, ammo uzluksiz bo'lsin. Agar $f'(x)$ hosila $(x_0 - \delta, x_0)$ va $(x_0, x_0 + \delta)$ intervallarda qarama-qarshi ishoraga ega bo'lsa, u holda x_0 nuqta ekstremum nuqtasi bo'ladi:

a) $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) > 0$ va $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) < 0$ bo'lsa, ya'ni x_0 nuqtadan o'tishda hosila o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartirsa, x_0 nuqta qat'iy maksimum nuqtasi;

b) $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ uchun $f'(x) < 0$ va $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ uchun esa $f'(x) > 0$ bo'lsa, ya'ni x_0 kritik nuqtadan o'tishda hosila o'z ishorasini «-» dan «+» ga o'zgartirsa, x_0 nuqta qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi.

Agar $f'(x)$ barcha $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ nuqtalarda o'z ishorasini saqlab qolsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lmaydi.

2) Ikkinchi tartibli hosila bo'yicha tekshirish: Aytaylik, x_0 nuqta stasionar nuqta bo'lib, $f'(x_0) = 0$ bo'lsin. $y = f(x)$ funksiya x_0 stasionar nuqta atrofida ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lib, u" uzluksiz bo'lsin. U holda:

a) agar $f''(x_0) < 0$ bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning qat'iy maksimum nuqtasi bo'ladi;

b) agar $f''(x_0) > 0$ bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi;

v) agar $f''(x_0) = 0$ bo'lsa, x_0 nuqtada ekstremumning mavjudlik masalasi ochiq qoladi.

3) Yuqori tartibli hosilalar bo'yicha tekshirish. Aytaylik,

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ bo'lib, } f^{(n)}(x_0) \neq 0 \text{ bo'lsin. U holda:}$$

a) agar n juft bo'lib, $f^{(n)}(x_0) < 0$ bo'lsa, x_0 nuqta qat'iy maksimum nuqtasi, $f^{(n)}(x_0) > 0$ bo'lsa, qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi;

b) n toq bo'lsa, x_0 nuqta ekstremum nuqtasi bo'lmaydi.

1-misol. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}$ funksiya uchun $x=-2$ va $x=0$ nuqtalar kritik nuqtalar edi. Bu nuqtalar sonlar o'qini

uchta intervallarga bo'ladi: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, +\infty)$. Hosil qilingan intervallarda hosila ishorasini aniqlaymiz:

$(-\infty, -2)$ intervalda $f'(-3) > 0$;

$(-2, 0)$ intervalda $f'(-1) < 0$;

$(0, +\infty)$ intervalda $f'(3) > 0$.

Demak, faqat $x=-2$ nuqta ekstremum – maksimum nuqta bo'lib, $x=0$ nuqta ekstremum nuqta emas, chunki bu nuqtada funksiya aniqlanmagan. SHunday qilib, funksiya $f(-2) = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ ga teng bo'lgan ekstremal maksimum qiymatga ega.

2-misol. $f(x) = x^3 - 3x^2$ funksiyaning ekstremum nuqtalarini toping.

Bu funksiya uchun $f'(x) = 3x(x-2)$ bo'ladi. $x=0$ va $x=2$ da $f'(x) = 0$. Ikkinchi tartibli hosila $f''(x) = 6x-6$ bo'lib, $f''(0) = -6 < 0$ va $f''(2) = 6 > 0$. Demak, $x=0$ nuqta funksiyaning qat'iy maksimum nuqtasi, $x=2$ nuqta esa qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi. Bu nuqtalarda, mos ravishda, funksiyaning qiymatlari $f(0) = 0$ va $f(2) = -4$ ga teng bo'ladi.

3-misol. $f(x) = x^4$ funksiyaning ekstremum nuqtalarini toping. Bu funksiya uchun $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, $f^{IV}(x) = 24$ bo'ladi va $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{IV}(0) = 24 > 0$ bajariladi. Demak, $x=0$ nuqta qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi.

3. Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari.

$y = f(x)$ funksiya $V \subseteq \mathbb{R}^1$ to'plamda aniqlangan va $x_0 \in V$ bo'lsin.

Agar barcha $x \in V$ uchun $f(x) \leq f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, u holda x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya V to'plamda o'zining eng katta qiymati $f(x_0)$ ni qabul qiladi va aksincha, barcha $x \in V$ uchun $f(x) \geq f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, u holda x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya V to'plamda o'zining eng kichik qiymatini qabul qiladi.

Agar $f(x)$ $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Funksiyaning kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun:

a) funksiyaning $[a, b]$ kesmada barcha kritik nuqtalari topiladi;

b) funksiyaning kritik nuqtalardagi va berilgan kesmaning chetki $x=a$ va $x=b$ nuqtalaridagi qiymatlari hisoblanadi;

v) bu qiymatlar ichidan eng katta va eng kichigi tanlab olinadi.

Misol. $y = \frac{x^2 + 8}{x-1}$ funksiyaning $[-5, -1]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. a) Birinchi tartibli hosilasini topamiz: $y' = \frac{x^2 - 2x - 8}{(x-1)^2}$.

37. b) $[-5, -1]$ kesmaga tegishli bo'lgan kritik nuqtalarni ajratib olamiz.

$y'(x)=0$ tenglamadan $x_1=-2$ va $x_2=4$ topiladi. $x=-2$ nuqta $[-5,-1]$ kesmaga tegishli, $x=4$ stasionar nuqta va $x=1$ uzilish nuqtasi esa kesmaga kirmaydi.

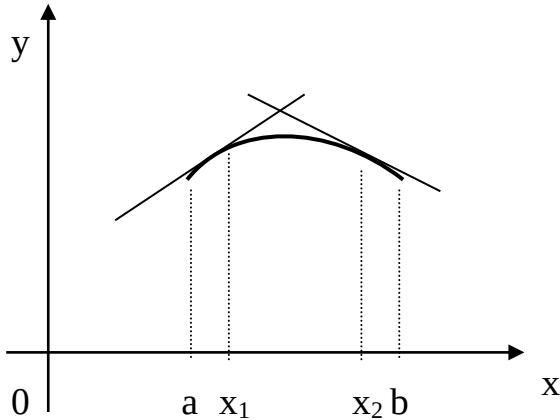
v) $x=-5$, $x=-2$ va $x=-1$ nuqtalarda funksiyaning qiymatlarini hisoblaymiz $y(-5)=-5,5$; $y(-2)=-4$; $y(-1)=-4,5$.

g) Topilgan qiymatlarni taqqoslab, funksiya $x=-2$ kritik nuqtada eng katta $y(-2)=-4$ va $x=-5$ nuqtada esa eng kichik $y(-5)=-5,5$ qiymatga erishini aniqlaymiz.

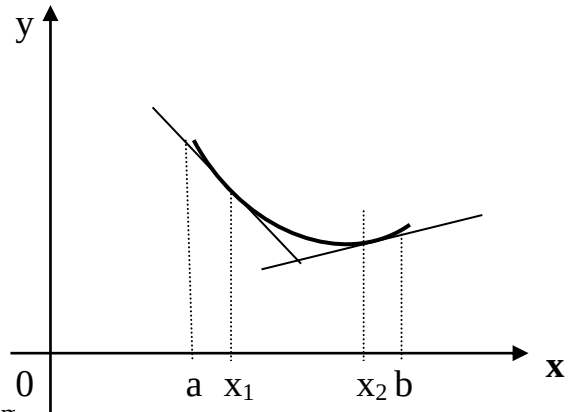
FUNKSIYANI TEKSHIRISH VA UNING GRAFIGINI CHIZISH.

Funksiya grafigining qavariqligi. Egilish nuqtalari.

$y = f(x)$ differensiallanuvchi funksiya grafigi (a,b) da, agar bu interval ichidagi har bir nuqtada o'tkazilgan urinmadan quyida (Yuqorida) joylashsa, **qavariqligi bilan Yuqoriga (quyiga) yo'nalgan** deyiladi (27.3-rasm).



27.3-rasm.

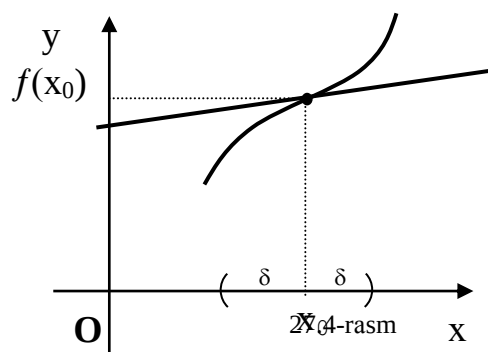


Funksiya grafigi qavariqligining etarlilik shartlari. $y = f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda aniqlangan va ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lsin. U holda:

a) agar (a,b) oraliqning barcha nuqtalarida $f''(x) < 0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning grafigi bu oraliqda qavariqligi bilan Yuqoriga yo'nalgan;

b) agar (a,b) oraliqning barcha nuqtalarida $f''(x) > 0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning grafigi bu oraliqda qavariqligi bilan quyiga yo'nalgan bo'ladi.

Agar x_0 nuqtaning shunday δ atrofi mavjud bo'lsaki, $(x_0-\delta, x_0)$ va $(x_0, x_0+\delta)$ oraliqlarda qavariqlik turlicha yo'nalgan va x_0 absissali nuqtada urinma mavjud bo'lsa, $(x_0, f(x_0))$ nuqta $y = f(x)$ funksiya grafigining **egilish nuqtasi** deyiladi (27.4-rasm).



27.4-rasm

$(x_0, f(x_0))$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'lsin. U holda $f''(x_0)=0$ shart yoki $f''(x_0)$ – mavjud emasligi, berilgan nuqta egilish nuqta bo'lishligining zaruriy shartlaridan iborat.

Faraz qilaylik, $(x_0, f(x_0))$ nuqtada $y = f(x)$ funksiya grafigiga urinma o'tkazish mumkin bo'lsin va x_0 nuqtadan tashqari barcha $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ nuqtalarda $f''(x)$ mavjud bo'lsin. x_0 nuqtada esa $f''(x)=0$ yoki $f''(x)$ mavjud bo'lmasin. Agar $(x_0-\delta, x_0)$ va $(x_0, x_0+\delta)$ oraliqlarda $f''(x)$ qarama-qarshi ishoraga ega bo'lsa, u holda $(x_0, f(x_0))$ nuqta $y = f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi (egilish nuqta bo'lishligining etarlilik sharti).

Egri chiziqlarning asimptotalari.

$y = f(x)$ funksiya grafigining o'zgaruvchi nuqtasi cheksiz uzoqlashganda undan biror to'g'ri chiziqqacha

bo'lgan masofa nolga intilsa, bu to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining **asimptotasi** deb ataladi.

a) **Vertikal asimptotalar.** Vertikal asimptota uchun $f(x)$ funksiya cheksizlikka aylanadigan $x=a$ qiymatni, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ni topish kerak. SHunda $x=a$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi.

Misol. $y = \frac{1}{x+3}$ funksiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

Yechish. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} = \infty$, shuning uchun $x=-3$ to'g'ri chiziq berilgan funksiya uchun vertikal asimptota bo'ladi.

b) **Og'ma asimptotalar.** Og'ma asimptota tenglamasi $y=kx+b$ ko'rinishga ega. Bu erda k va b mos ravishda

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$$

formulalardan topiladi.

Misol. $y = \frac{x^2}{x+3}$ funksiya grafigining asimptotasini toping.

Yechish. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2}{x+3} = \infty$ bo'lgani uchun $x=-3$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi. $y=kx+b$ og'ma

asimptotani izlaymiz:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{x+3} = -3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+3} = -3.$$

Demak, $y=x-3$ - og'ma asimptotadir.

Funksiya grafigini yasashning umumiy sxemasi.

Funksiyani tekshirish va grafigini yasash quyidagi umumiy sxema bo'yicha bajariladi:

1) Funksiyaning aniqlanish sohasi topiladi, uzilish nuqtalari aniqlanadi va ularning atrofida funksiyaning o'zini tutishi tekshiriladi.

2) Funksiya juft ($f(-x) = f(x)$, $\pm x \in D(f)$), toqligi ($f(-x) = -f(x)$, $\pm x \in D(f)$) yoki juft ham emas, toq ham emasligi aniqlanadi. Agar funksiyaning juft yoki toqligi aniqlansa, funksiyaning musbat yoki manfiy haqiqiy sonlar yarim o'qida tekshirish etarli.

Agar funksiya juft funksiya bo'lsa, bu funksiyaning grafigi Oy o'qiga nisbatan simmetrik, toq bo'lsa koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Davriy yoki davriyemasligi aniqlanadi. Davriy funksiyaning bir davr oralig'ida tekshirish etarli.

3) Funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari topiladi. Ox o'qi bilan kesishish nuqtalari

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$ sistema, Oy o'qi bilan kesishish nuqtalari esa $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$ sistemani yechish bilan topiladi. Funksiya

grafigining asimptotalari quriladi.

4) Funksiyaning o'sish va kamayish intervallari, maksimum va minimum nuqtalari topiladi. Yig'ilgan ma'lumotlar jadval ko'rinishda tuziladi.

5) Funksiya grafigining qavariqligi va egilish nuqtalari topiladi.

6) Funksiya grafigi yasaladi.

Asosiy adabiyotlar

1. Jo'rayev T.J. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1,2-qism. Toshkent, 1995
2. Soatov Yo.U. Oliy matematika, Toshkent, 1993
3. Минорский В.П. Олий математикадан масалалар туплами. 1988
4. Tojiyev Sh.I. Oliy matematikadan masalalar yechish. T. "O'zbekiston" 2002

Qo'shimcha adabiyotlar

5. Фадеев Д.К., Соминский И.С. «Сборник задач по высшей алгебре» М. «Наука» 1977
6. Цубербиллер О.Н. «Задачи и упражнения по аналитической геометрии» М. «Наука» 1966
7. Садуллаев А., Худойбергандов Г., Мансуров Х., Ворисов А., Гуломов Р. «Математик анализдан мисол ва масалалар туплами» Т. «Ўзбекистон» 1992
8. Филлипов Л.Б. «Сборник задач по дифференциальным уравнениям» М. «Наука» 1979
9. P.E.Danko, A.G. Papov "Oliy matematika misol va masalalarda" Toshkent 2007
10. X.P.Латилов ва бошқалар «Аналитик геометрия ва чизикли алгебрадан масалалар ечиш буйича кулланма» Фан. 1999
11. Кареев А.И., Аксютин З.М., Савельев Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. М. «Высшая школа» I,II, 1982, 1983
12. Курганов К.А. Варианты домашних контрольных работ по высш. математике. УзМУ 2005