

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI**

**FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI
“MATEMATIKA” KAFEDRASI**

Mavzu: *Potensiallar va α -sig‘im*

Bajaruvchi: *R.S. Yuldasheva*

Ilmiy rahbar: *dots. M.D. Vaisova*

Urganch 2017-yil

Mundarija

Kirish.....	3
I-bob. Potensial va uning xossalari	
1.1. Funktsiyalarning ba'zi muhim sinflari	5
1.2 Potensial va uning xossalari.....	19
1.2. O'lchovning kuchsiz yaqinlashishi.....	13
II-bob. Sig'im va sig'im potentsiali	
2.1. Sig'im potentsiali va sig'im.....	28
2.2. Sig'im potentsialning tabiati.....	32
Xulosa.....	38
Foydalanilgan adabiyotlar.....	40

Kirish

Oliy ta'lim mamlakatning ertangi taraqqiyotini belgilab beradigan, jamiyat hayotining barcha jabhasini isloh etishda hal qiluvchi vazifani bajaradigan omil hisoblanadi. Shuning uchun ham mehnat bozorida raqobatdosh, yuqori malakali kadrlar tayyorlash, oliy ta'lim tizimi sifati va samaradorligini tubdan oshirish har bir mamlakat ijtimoiy siyosatining asosiy negizini tashkil etadi.

O'zbekistonni keyingi besh yilda taraqqiy toptirish bo'yicha Harakatlar strategiyasida Oliy ta'lim tizimini 2017-2021 yillarga mo'ljallangan kompleks rivojlantirish dasturini ishlab chiqish belgilangan edi. Prezidentimizning "Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi qarori bu borada muhim qadam bo'lib, tizimni yanada sifat bosqichiga ko'tarishga qaratilganligi bilan ahamiyatlidir. Qaror Oliy ta'lim tizimining zamon talablari darajasida rivojlanishiga, sohaning yurtimizda kechayotgan islohotlar bilan hamohangligini ta'minlashga zamin yaratadi.

Shu sababli qaror bilan oliy ma'lumotli kadrlarni tayyorlashning maqsadli mezonlarini shakllantirish, oliy ta'lim muassasalaridagi ixtisoslik yo'nalishlari va mutaxassisliklarni hududlar hamda sohalar bo'yicha joriy etilayotgan dasturlarning talab va ehtiyojlari, iqtisodiyot tarmoqlari hamda hududlarni kompleks taraqqiy toptirish istiqbollarini inobatga olgan holda optimallashtirish tizimni isloh qilishdagi ustuvor vazifalar sifatida belgilandi.

Bu yondashuv oliy ta'lim tizimining mehnat bozoriga, ijtimoiy-iqtisodiy islohotlar jarayoniga moslashuvchanligini oshirib, tizimda samaradorlikni yuksaltirishning muhim sharti bo'lib xizmat qiladi.

Albatta, qaror bilan oliy ta'lim tizimida o'rta uzoq muddatga mo'ljallangan prinsipial o'zgarishlar ro'yobga chiqariladi. Bu sa'y-harakatlarning vaqtida samarali bajarilishi har birimizdan qat'iy tartib-intizom hamda shaxsiy ma'suliyat talab qiladi.

Subgarmonik funksiyalarning xossalarini va ular bilan bog'liq funksiyalar sinflarini o'rganish potentsiallar nazariyasi asosini tashkil qiladi. Potentsiallar nazariyasi Brelo [1972], Kellog [1929], Rado [1937], Landkof [1966] va boshqa ko'plab olimlar tomonidan chuqur tadqiq qilingan.

Potensial, sig'im, polyar to'plam tushunchalari klassik potentsiallar nazariyasining fundamental tushunchalaridir.

$E - R^n$ dagi kompakt va

$$K_0(x) = \log|x| \quad K_\alpha(x) = -|x|^{-\alpha}, \quad \alpha > 0$$

bo'lsin.

Agar $\mu - E$ da birlik massasining taqsimoti bo'lsa, u holda

$$V(x) = \int_E K_\alpha(x - \xi) d\mu e_\xi$$

deb olamiz.

μ ni shunday tanlaymizki,

$$I_\alpha(\mu) = \int_E V(x) d\mu(x) = \iint_{E \times E} K_\alpha(x - y) d\mu(x) d\mu(y)$$

qiymat o'zining eng katta V_α qiymatiga erishsin. Agar $V_\alpha = -\infty$ bo'lsa, u holda

$C_\alpha(E) - E$ kompaktning α - sig'imi nolga teng hisoblanadi. Bu holda

$E - \alpha$ - polyar to'plam bo'ladi. Aks holda

$$C_\alpha(E) = \begin{cases} e^{V_0}, & \alpha = 0 \\ (-V_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, & \alpha > 0 \end{cases}$$

deb olamiz.

Ushbu bitiruv malakaviy ishi yuqorida aytib o'tilgan potentsiallar va α - sig'im tushunchalarini o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, kirish, ikkita bob, xulosa va adabiyotlar ro'yxatidan iborat tarzda yozilgan. Birinchi bobda dastlab garmonik va subgarmonik funksiyalar tushunchalari, potentsial va uning xossalari o'rganilgan. Ikkinchi bobda sig'im potentsiali va uning tabiati o'rganilgan.

I-bob. Potensial va uning xossalari

1.1. Funktsiyalarning ba'zi muhim sinflari

Garmonik funktsiyalar

$u(z)$ funksiya $D \subset C$ sohada aniqlangan haqiqiy funksiya bo'lsin.

1.1-ta'rif: $u(z)$ funksiya garmonik funksiya deyiladi, agar $u(z) \in C^2(D)$ bo'lib, D sohada quyidagi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

Laplas tenglamasini qanoatlantirsa. (1.1) tenglamaning chap qismidagi differensial operatorga Laplas operatori deyiladi va Δ kabi belgilanadi.

Belgilash kiritamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

U holda

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = 4 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

bo'ladi.

Garmonik va golomorf funktsiyalar orasida quyidagicha bog'lanish mavjud:

1.1-teorema. Agar $f(z)$ funksiya $D \subset C$ sohada golomorf bo'lsa, u holda uning haqiqiy va mavhum qismlari garmonik funksiya bo'ladi.

Isbot. $f(z) = u(z) + iv(z)$ bo'lsin.

$$u(z) = \operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$$

$$v(z) = \operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$$

$f(z)$ funksiya golomorf bo'lgani uchun cheksiz differensiallanuvchi. Shuning uchun $u, v \in C^2(D)$ bo'ladi.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0 \text{ tengliklarni e'tiborga olib,}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned}$$

Demak,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

Xuddi shunday $\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ ekanini ko'rsatish mumkin.

1.2–teorema. $u(z)$ funksiya $D \subset C$ bir bog'lamli sohada garmonik bo'lsin. U holda D sohada golomorf $f(z)$ funksiya mavjudki, $\operatorname{Re} f = u$ bo'ladi.

Isbot. Aytaylik,

$$W = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (1.2)$$

bo'lsin. $u(z)$ funksiya garmonik funksiya bo'lganligi sababli (1.2) forma to'la differensial forma bo'ladi. Shuning uchun (1.2) formadan D sohada yotuvchi har qanday Jordan chizig'i bo'yicha olingan integral chiziqqa bog'liq bo'lmaydi. Endi D sohada quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$\vartheta(z) = \int_{z_0}^z \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \quad (1.3)$$

bunda $z_0 \in D, \forall z \in D$.

Ravshanki, $\vartheta(z)$ funksiya $C^2(D)$ sinfdan va

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

shartlar bajariladi. Demak $f(z) = u(z) + iv(z)$ funksiya uchun Koshi – Riman shartlari bajariladi, ya'ni $f \in O(D)$ va $\operatorname{Re} f = u$.

Demak, har qanday garmonik funksiya bir bog‘lamli sohada biror golomorf funksiyaning haqiqiy yoki mavhum qismi bo‘lar ekan. 1.2 – teorema ko‘p bog‘lamli sohalar uchun o‘rinli emas.

Bunday sohalarida $\vartheta(z)$ funksiya har bir nuqtaning biror atrofida quriladi.

Endi garmonik funksiylarning ba’zi xossalarini keltiramiz.

1⁰. Agar $u(x, y)$ funksiya $D \subset C$ sohada garmonik bo‘lsa, u holda har qanday $z_0 \in D$ nuqtada istalgan tartibli xususiy hosilalarga ega.

Isbot. 1.2–teoremaga ko‘ra z_0 nuqtaning biror $U(z_0) \subset D$ atrofida $f(z)$ golomorf funksiya mavjudki, $\operatorname{Re} f = u$ bo‘ladi.

f – cheksiz marta differensiallanuvchi bo‘lgani uchun $u(x, y)$ funksiya ham istalgan tartibli xususiy hosilaga ega.

2⁰. O‘rta qiymat haqidagi teorema. Agar $u(z)$ funksiya $V = \{\xi : |\xi - z| < R\}$ doirada garmonik bo‘lsa, u holda har qanday $0 < r < R$ uchun

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it}) dt$$

tenglik o'rinlidir.

Isbot. 1.2–teoremaga ko'ra shunday $f \in O(U)$ funksiya mavjudki, $\operatorname{Re} f = u$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$$

bundan

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it}) dt$$

bo'ladi.

3⁰. Yagonalik teoremasi. Agar $u_1(z)$ va $u_2(z)$ funksiyalar $D \subset C$ sohada garmonik va ichki nuqtaga ega bo'lgan $E \subset D$ to'plamda ustma – ust tushsalar, u holda $\forall z \in D$ uchun $u_1(z) = u_2(z)$ bo'ladi.

Isbot. $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ funksiya D sohada garmonik.

$$F = \{z \in D, \quad u(z) = 0\} \neq \emptyset$$

$u(z)$ funksiya uzluksiz bo'lgani uchun $\overset{0}{F}$ – yopiq to'plam. $E \subset F$. E –

to'plamning ichki nuqtasi z_0 bo'lsin. $U(z_0)$ doira mavjudki, $U(z_0) \subset \overset{0}{F}$.

1.2–teoremani qo'llasak, $u(z) = 0, \quad \forall z \in \overset{0}{F}$ kelib chiqadi. $\overset{0}{F}$ – ochiq va yopiq

to'plam bo'lgani uchun $\overset{0}{F} = D$ bo'ladi.

4⁰. Maksimum prinsipi. Agar $u(z)$ funksiya $D \subset C$ sohada garmonik va $z_0 \in D$ nuqtada (lokal) maksimumga (minimumga) erishsa, u holda $u(z)$ funksiya D da o'zgarmas bo'ladi.

5⁰. Liuvill teoremasi. Agar $u(z)$ funksiya C da garmonik va yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda $u(z) = \text{const}$ bo'ladi.

6⁰. Xarnak teoremasi. $u(z)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) $D \subset C$ sohada garmonik bo'lgan kamayuvchi funksiyalar ketma – ketligi bo'lsa, u holda uning limiti D da garmonik yoki aynan $-\infty$ ga teng bo'lgan funksiya bo'ladi.

$D \subset R^n$ – soha bo'lib, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ bo'lsin.

1.2-ta'rif. $u \in C^2(D)$ funksiya D sohada garmonik deyiladi, agar u

$$\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$$

Laplas tenglamasini qanoatlantirsa. $\forall x \in D, r > 0$.

$$U(x, r) = \{\xi \in D, |x - \xi| < r\} \subset D$$

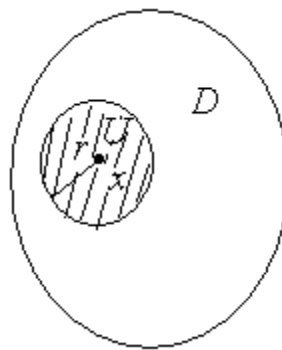
$$S(x) = \{\xi \in D, |x - \xi| = r\}$$

belgilash kiritamiz.

$$M_{x,u}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_S u(x + r \cdot \xi) d\xi$$

ω_{n-1} – S sferaning yuzi.

$M_{x,u}(r)$ – $u(z)$ funksiyaning o'rta qiymati deyiladi.



Ko'p o'zgaruvchili $u(z)$ garmonik funksiya uchun o'rta qiymat haqidagi 2⁰– xossa, maksimum prinsipi haqidagi 4⁰–xossa, 5⁰– xossa Liuvill teoremasi, 6⁰– xossa Xarnak teoremasi o'rinli bo'ladi.

Subgarmonik funksiyalar

1.3-ta'rif: $z_0 \in C$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan haqiqiy

$u(-\infty \leq u < +\infty)$ funksiya z_0 nuqtada yuqoridan yarim uzluksiz deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ soni topilib,

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} u(z) - u(z_0) < \varepsilon, & \text{agar } u(z_0) \neq -\infty \\ u(z) < -\frac{1}{\varepsilon}, & \text{agar } u(z_0) = -\infty \end{cases} \quad (1.4)$$

bo'lsa.

(1.4) munosabat $\lim_{z \rightarrow z_0} \overline{u(z)} \leq u(z_0)$ tengsizlikka ham ekvivalent bo'ladi.

Agar $u : D \rightarrow [-\infty, +\infty)$ funksiya $D \subset C$ sohaning har bir nuqtasida yuqoridan yarim uzluksiz bo'lsa, u D sohada yuqoridan yarim uzluksiz deyiladi. Ta'rifdan oson ko'rish mumkinki, $u(z)$ funksiya D sohada yuqoridan yarim uzluksiz bo'lishi uchun $\forall \alpha \in (-\infty, +\infty)$ uchun $\{z \in D : u(z) < \alpha\}$ to'plamni ochiq bo'lishi zarur va yetarli.

Faraz qilaylik, $D \subset \mathbf{R}^n$ sohada aniqlangan lokal integrallanuvchi

$$u : D \rightarrow [-\infty, +\infty)$$

funksiya berilgan bo'lsin, $u \in L_{loc}^1(D)$.

Agar bu funksiya quyidagi ikki shartni bajarsa:

1) $u(x)$ yuqoridan yarim uzluksiz:

$$\text{ya'ni } \forall x^o \in D \text{ uchun } \overline{\lim_{x \rightarrow x^o}} u(x) \leq u(x^o)$$

(bundan $u(x)$ funksiyaning D ga tegishli ixtiyoriy kompaktga yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi);

2) har bir $x^o \in D$ nuqta uchun shunday $r(x^o) > 0$ topiladiki, $r \leq r(x^o)$ uchun

$$u(x^o) \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^o, r)} u(x) d\sigma; \quad (1.5)$$

u holda $u(x)$ funksiya D sohada *subgarmonik funksiya* deyiladi.

Subgarmonik funksiyalar sinfi $Sh(D)$ kabi belgilanadi. Kelgusida qulaylik uchun biz trivial $u(x) \equiv -\infty$ funksiyasi ham D da $Sh(D)$ ga tegishli deb qaraymiz. Endi subgarmonik funksiyalarning xossalarini keltiramiz.

a) subgarmonik funksiyalarning musbat koeffisientli chiziqli kombinatias isubgarmonik funksiya bo'ladi:

$$\begin{aligned} u_k(x) \in Sh(D), \quad a_k \in R_+ \quad (k = 1, 2, \dots, m) &\Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \dots + a_m u_m(x) &\in Sh(D); \end{aligned}$$

b) chekli sondagi subgarmonik funksiyalarning maksimumi subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$\begin{aligned} u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x) \in Sh(D) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \max \{ u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x) \} &\in Sh(D); \end{aligned}$$

v) monoton kamayuvchi subgarmonik funksiyalar ketma – ketligining limiti subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$\begin{aligned} u_j(x) \in Sh(D) \quad , \quad u_j(x) \geq u_{j+1}(x) \quad (j = 1, 2, \dots) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) &\in Sh(D); \end{aligned}$$

g) tekis yaqinlashuvchi subgarmonik funksiyalar ketma – ketligi subgarmonik funksiyaga yaqinlashadi:

$$u_j(x) \in Sh(D) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad u_j(x) \rightarrow u(x) \Rightarrow u(x) \in Sh(D)$$

a) – g) xossalarning isboti bevosita yuqorida keltirilgan ta'rifdan kelib chiqadi.

d) Maksimumlar prinsipi. Agar $u(x) \in Sh(D)$ funksiya biror $x^o \in D$ nuqtada o'zining maksimumiga erishsa, ya'ni

$$u(x^o) = \sup_{x \in D} u(x) \quad (1.5)$$

bo'lsa, u holda $u(x) \equiv const$ bo'ladi.

Ushbu

$$M = \left\{ x \in D : u(x) = u(x^o) \right\}$$

to'plamni qaraylik. $u(x)$ funksiyaning yuqoridan yarim uzluksiz bo'lganligidan va (1.5) shartdan M to'plamning D da yopiqqligi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, ixtiyoriy $p \in M$ uchun (1.3) formulaga ko'ra

$$u(x^o) = u(p) \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(p,r)} u(x) d\sigma \leq u(x^o), \quad r \leq r(p),$$

bo'ladi. Bu munosabatdan $u|_{S(p,r)} \equiv u(x^o)$, ya'ni p ning $B(p, r(p))$ atrofida $u(x) = u(x^o)$ bo'lishini ko'ramiz. Bu esa M to'plamning D da ochiq ekanligini ko'rsatadi. Demak, $M = D$.

e) Agar $\vartheta(x) \in Sh(D)$, $u(x) \in H(D)$ funksiyalar uchun $S(x^o, r) \subset\subset D$ sferada

$$\vartheta|_S \leq u|_S$$

bo'lsa, u holda $B(x^o, r)$ sharda $\vartheta(x) \leq u(x)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bu xossaning isboti yuqoridagi *d)* xossadan kelib chiqadi;

e) –xossadan quyidagi muhim xulosaga kelamiz:

Faraz qilaylik,

$$\vartheta(x) \in Sh(D) \cap C(D)$$

berilgan bo'lib, $B(x^o, r) \subset\subset D$ bo'lsin. Ushbu

$$u(x) = \int_{S(x^o, r)} \vartheta(y) P(x, y) d\sigma(y), \quad x \in B(x^o, r),$$

Puasson integralini qaraylik. $u(x) \in h(B)$, $u|_S = \vartheta|_S$ bo'lib, $e)$ – xossaga ko'ra $B = B(x^o, r)$ da $\vartheta(x) \leq u(x)$ bo'ladi. Uzluksiz funksiyalar uchun isbotlangan bu xossa ixtiyoriy $\vartheta \in Sh(D)$ uchun ham o'rinlidir: $\vartheta(x) \leq u(x)$ va deyarli barcha $x \in S$ lar uchun $\vartheta(x) = u(x)$ o'rinlidir;

j) aytaylik, $u(x) \in Sh(D)$ funksiya va $x^o \in D$ nuqta berilgan bo'lsin. Ushbu

$$m(x^o, r) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^o, r)} u(x) d\sigma$$

va

$$n(x^o, r) = \frac{1}{V_n r^n} \int_{B(x^o, r)} u(x) dV,$$

bunda $V_n r^n$ miqdor $B(x^o, r)$ ning hajmi, integrallarni (o'rta qiymatlarni) qaraylik.

1.3-teorema. Faraz qilaylik, $u(x) \in Sh(D)$ va $u(x) \not\equiv -\infty$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $x^o \in D$ uchun

$$u(x^o) \leq n(x^o, r) \leq m(x^o, r), \quad n(x^o, r) > -\infty, \quad 0 < r < \rho(x^o, \partial D)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari, agar r monoton kamayib nolga intilsa, unda $n(x^o, r)$ va $m(x^o, r)$ o'rta qiymatlar monoton kamayib, $u(x^o)$ ga intiladi.

1.3-teoremadan ushbu muhim natijaga ega bo'lamiz: $D \subset \mathbf{R}^n$ sohada subgarmonik $u(x) \neq -\infty$ funksiya D da lokal integrallanuvchidir, ya'ni ixtiyoriy $B \subset\subset D$ uchun $\int_B u(x) dV$ integral mavjuddir;

z) subgarmonik funksiya D sohaning har bir nuqtasida uzilishga ega bo'lishi mumkin. Ayni paytda, quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

1.4-teorema. Agar $u(x) \in Sh(D)$ bo'lsa, u holda shunday monoton to'plamlar

$$D_j \subset D_{j+1} \subset D, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j = D$$

ketma-ketligi va shunday monoton kamayuvchi funksiyalar

$$u_j(x) \in Sh(D_j) \cap C^\infty(D_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

ketma-ketligi mavjudki,

$$u(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \quad (x \in D)$$

bo'ladi.

Isboti. Ushbu

$$K(x) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-|x|}}, & \text{agar } |x| \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } |x| > 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ sinfga tegishli bo'lib, uning salmog'i $\sup pK(x) = B(0,1)$ dir. Endi $K(x)$ ning ifodasidagi o'zgarma c ni shunday tanlab olamizki,

$$\int_{\mathbf{R}^n} K(x) dV = 1$$

bo'lsin. $u(x) \not\equiv -\infty$ deb, bu yadro yordamida ushbu

$$u_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \int_{|y-x| \leq \delta} u(y) K\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dV, \quad \delta > 0 \quad (1.6)$$

integralni qaraylik. $u_\delta(x)$ funksiyasi

$$D_\delta = \left\{ x \in D : \rho(x, \partial D) < \delta \right\}$$

ochiq to'plamda aniqlangan bo'lib, $x \in D_\delta$ da

$$u_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \int_{\mathbf{R}^n} u(y) K\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dV = \int_{\mathbf{R}^n} u(x + \delta y) K(y) dV$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdagi birinchi integral $C^\infty(D_\delta)$ sinfga, ikkinchi integral esa $Sh(D_\delta)$ sinfga tegishli bo'ladi. Binobarin,

$$u_\delta(x) \in Sh(D_\delta) \cap C^\infty(D_\delta).$$

$u(x)$ ning subgarmonik funksiya ekanligidan, u_δ ning $\delta \downarrow 0$ da, monoton kamayuvchi bo'lishligi va

$$\int_{\mathbf{R}^n} K(x) dV = 1$$

tenglikdan, $u_\delta(x)$ ning $u(x)$ ga intilishini topamiz. Teorema isbotlandi.

i) subgarmonik funksiyalar umumiy holda C^2 sinfga tegishli bo'lmashligidan, Δu -Laplas operatorini faqat umumlashgan funksiya sifatida qarash mumkin bo'ladi:

$$\Delta u(\phi) = \int u \Delta \phi, \quad \phi \in F(D).$$

1.5-teorema. Har qanday subgarmonik funksiya $u(x) \in Sh(D)$, $u \not\equiv -\infty$, uchun umumlashgan ma'noda $\Delta u \geq 0$ bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy $\phi \in F(D)$, $\phi \geq 0$ uchun $\int u \Delta \phi \geq 0$ munosabat o'rinlidir. Jumladan, $u(x)$ funksiya C^2 sinfga

tegishli bo'lib, u subgarmonik bo'lsa, $u \in Sh(D) \cap C^2(D)$, u holda

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \geq 0 \text{ dir.}$$

Yuqorida keltirilgan teoremaning aksi ham o'rinli: agar umumlashgan funksiya u uchun

$$\Delta u(\phi) = \int u \Delta \phi \geq 0, \quad \phi \in F(D), \quad \phi \geq 0,$$

munosabat bajarilsa, u holda u subgarmonik funksiya bo'ladi.

1.2. Potensial va uning xossalari

$$K_{\alpha}(x) = -|x|^{-\alpha}, \alpha > 0$$

$$K_0(x) = \log|x|$$

$E - R^n$ fazodagi kompakt to'plam, $\mu - E$ dagi shunday o'lchovki $\mu(E) = 1$.

$x \in R^n$ uchun $V_{\alpha}(x)$ α -potensialni quyidagicha aniqlaymiz

$$V_{\alpha}(x) = \int_E K_{\alpha}(x - y) d\mu(y)$$

$K_{\alpha}(x)$ funksiya $\alpha \leq m - 2$ da R^n da subgarmonikligidan $V_{\alpha}(x)$ bu holda R^n da subgarmonik bo'ladi. Bundan tashqari $\alpha = m - 2$ bo'lsa, $V_{\alpha}(x)$ funksiya E to'plamdan tashqarida garmonik bo'ladi. Bu quyidagi teoramadan kelib chiqadi:

1.6-teorema. Faraz qilaylik

$$F(x) = \int K\delta(y)f(x + y)d\mu(y)$$

bo'lsin, bu yerda $K\delta(y)$ -chegaralangan Borel funksiyasi.

Agar $f(x)$ funksiya D da subgarmonik va $K\delta(y) \geq 0$ bo'lsa, u holda $F(x)$ $D_0(\delta)$ da subgarmonik. Agar $f(x)$ funksiya D da garmonik bo'lsa, $F(x)$ $D_0(\delta)$ da garmonik bo'ladi.

$\alpha = m - 2$ bo'lgan holda $K_{\alpha}(x)$ va $V_{\alpha}(x)$ funksiyalarni $K(x)$ va $V(x)$ orqali belgilaymiz.

Qaralayotgan hollarda $K_{\alpha}(x)$ yuqoridan yarim uzluksiz. Demak $V_{\alpha}(x)$ ham R^n da yuqoridan yarim uzluksiz. Shunga ko'ra $V_{\alpha}(x)$ E to'plamdan tashqarida uzluksizdir.

Biz undan ko'proq natijani isbotlaymiz.

1.7-teorema. (uzluksizlik prinsipi) Agar $x_0 \in E$ to'plam nuqtasi va $V_\alpha(x)$ potensial x_0 da faqat E da aniqlangan funksiya sifatida uzluksiz bo'lsa, u holda $V_\alpha(x)$ x_0 nuqtada (uzluksiz) R^n ning barcha joyida aniqlangan funksiya sifatida uzluksiz bo'ladi.

Isbot. $V_\alpha(x)$ funksiya x_0 nuqtada E to'plamdagi funksiya sifatida uzluksiz ekanligidan

$$V_\alpha(x_0) = V_0 > -\infty$$

Bundan tashqari, $V_\alpha(x)$ funksiya yuqoridan yarim uzluksizligidan

$$\overline{\lim_{x \rightarrow x_0}} V_\alpha(x) \leq V_0$$

Endi

$$\underline{\lim_{x \rightarrow x_0}} V_\alpha(x) \geq V_0 \quad (1.7)$$

munosabat E bo'yicha $x \rightarrow x_0$ da bajarilishini ko'rsatamiz.

V_0 qiymat chekli ekanligidan x_0 nuqta o'lchovi musbat bo'lishi mumkin emas. ρ - kichik musbat son bo'lsin. D orqali E to'plam to'ldiruvchisini belgilaymiz va

$$D_\rho = D \cap D(x_0, \rho), \quad E_\rho = E \cap C(x_0, \rho)$$

bu yerda

$$D(x_0, \rho) = \{x \in R^n : |x - x_0| < \rho\}$$

$$C(x_0, \rho) = \{x \in R^n : |x - x_0| \leq \rho\}$$

Agar $x_0 \in E$ ning yakkaalangan nuqtasi bo'lsa, u holda x_0 hech qanday massani tashimaydi va shuning uchun $V_\alpha(x)$ har qanday holda x_0 da uzluksizdir.

Agar $x_0 \in E$ to'plamning ichki nuqtasi bo'lsa, u E da butunlay yotuvchi $D(x_0, \rho_0)$ atrofga ega va teorema tasdig'i trivial holda bajariladi.

Shuning uchun $x_0 \in E$ va D ning chegaraviy nuqtasi deb hisoblaymiz.

$x \in D_\rho$ va $x_1 \in E_\rho$ ning x ga yaqin joylashgan nuqtasi, ya'ni barcha $a \in E_\rho$ uchun

$$|x_1 - x| \leq |x - a|$$

U holda barcha $a \in E_\rho$ uchun

$$|x_1 - a| \leq |x - x_1| + |x - a| \leq 2|x - a| \quad (1.8)$$

Endi berilgan $\varepsilon > 0$ uchun ρ sonini yetarlicha kichik qilib tanlaymizki,

$$\int_{E_\rho} -K_\alpha(x_0 - a) d\mu(a) < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsin.

$V_\alpha(x_0)$ chekli ekanidan bunday tanlash mumkin.

$$\int_{E \setminus E_\rho} K_\alpha(x - a) d\mu(a)$$

funksiya x_0 nuqtada uzluksizdir. $x_1 \in E$ uchun x_1 o'zgaruvchining funksiyasi sifatida $V_\alpha(x_1)$ potensial x_0 nuqtada uzluksizligidan, u holda

$$\int_{E_\rho} K_\alpha(x_1 - a) d\mu(a) = V_\alpha(x_1) - \int_{E \setminus E_\rho} K_\alpha(x - a) d\mu(a)$$

funksiya ham x_1 ning funksiyasi sifatida x_0 nuqtada uzluksizdir. Shuning uchun agar $|x_1 - x_0| < \rho_1 < \rho$ bo'lsa, u holda

$$\int_{E_p} -K_\alpha(x_0 - a) d\mu(a) < \int_{E_p} -K_\alpha(x_1 - a) d\mu(a) + \varepsilon < 2\varepsilon$$

bo'ladi.

Endi $|x - x_0| < \rho_2 < \rho_1 / 2$ deb faraz qilamiz. U holda (1.8) ga ko'ra $|x_1 - x_0| < \rho_1$.

Agar $\alpha = 0$ bo'lsa, u holda (1.8) dan

$$-K_\alpha(x - a) \leq -K_\alpha(x_1 - a) + \log 2$$

ni olamiz.

Binobarin, agar ρ ni $\mu(E_p) < \varepsilon$ bajariladigan qilib, yetarlicha kichik qilib tanlasak, u holda

$$\int_{E_p} -K_\alpha(x - a) d\mu(a) \leq \int_{E_p} -K_\alpha(x_1 - a) d\mu(a) + \mu(E_p) \log 2 < 3\varepsilon.$$

Agar $\alpha > 0$ bo'lsa, u holda (1.8) dan

$$\int_{E_p} -K_\alpha(x - a) d\mu(a) \leq 2^\alpha \int_{E_p} -K_\alpha(x_1 - a) d\mu(a) < 2^{1+\alpha} \varepsilon$$

kelib chiqadi. $\int_{E|E_p} K_\alpha(x - a) d\mu(a)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksizligidan,

$|x - x_0| < \rho_2$ uchun va demak $|x_1 - x_0| < 2\rho_2$ uchun yetarlicha kichik ρ_2 larda

$$\left| \int_{E|E_p} K_\alpha(x - a) d\mu(a) - \int_{E|E_p} K_\alpha(x_1 - a) d\mu(a) \right| < \varepsilon$$

ga ega bo‘lamiz. O‘z navbatida bu tengsizlikka kiruvchi integral

$$\int_{E|E_p} K_{\alpha}(x_0 - a) d\mu(a) \text{ ga intiladi.}$$

Shunday qilib, biz oxirgi

$$\begin{aligned} |V_{\alpha}(x) - V_{\alpha}(x_1)| &\leq \left| \int_{E|E_p} (K_{\alpha}(x - a) - K_{\alpha}(x_1 - a)) d\mu(a) \right| + \\ &+ \left| \int_{E_p} K_{\alpha}(x - a) d\mu(a) \right| + \left| \int_{E_p} K_{\alpha}(x_1 - a) d\mu(a) \right| < 6^{1+\alpha} \varepsilon \end{aligned}$$

tengsizlikni olamiz.

$V_{\alpha}(x_1)$ funksiya $x = x_1$ nuqtada uzluksizligidan (1.7) tengsizlik kelib chiqadi. Bu teoremani isbotlaydi.

1.8-teorema. 1.7-teorema shartlari bajariladi va bundan tashqari E da $V_{\alpha}(x) \geq \mu_0$ bo‘lsin deb faraz qilamiz. U holda R^n da $V_{\alpha}(x) \geq \mu_0'$, bu yerda $\mu_0' = 2^{\alpha} \mu_0$, $\alpha > 0$ va $\mu_0' = \mu_0 - \log 2$, $\alpha = 0$.

Isbot. Oldingidek D orqali E to‘plamni R^n gacha to‘ldiruvchini belgilaymiz. x sifatida D ning ixtiyoriy nuqtasini olamiz va $x_1 - E$ ning x ga yaqin joylashgan nuqtasi bo‘lsin. U holda (1.8) dagi kabi istalgan $a \in E$ uchun

$$|x_1 - x| \leq |x - a| \text{ va } |x_1 - a| \leq 2|x - a| \text{ bajariladi. } \alpha > 0 \text{ uchun bu}$$

$$K_{\alpha}(x - a) \geq 2^{\alpha} K_{\alpha}(x_1 - a)$$

tengsizlikni beradi va

$$V_{\alpha}(x) \geq 2^{\alpha} V_{\alpha}(x_1) \geq \mu_0'$$

talab qilingan tengsizlik kelib chiqadi. $\alpha = 0$ bo‘lsa, u holda

$$K_o(x-a) \geq K_o(x_1-a) - \log 2$$

va bu holda

$$V_0(x) \geq V_0(x_1) - \log 2 \int_E d\mu \geq \mu_0 - \log 2 = \mu_0'$$

Teorema isbotlandi.

$$I_\alpha(\mu) = \int_E V_\alpha(x) d\mu(x) = \iint_{E \times E} K_\alpha(x-y) d\mu(x) d\mu(y)$$

deb olamiz. $K_\alpha(x-y)$ funksiya E to'plamda yuqoridan chegaralangani uchun bu integral hamisha mavjud.

$$V_\alpha = \sup_\mu I_\alpha(\mu) \text{ deb olamiz va } V_\alpha \text{ ni } E \text{ to'plamning o'zgarmas}$$

muvazanatlovchisi deyiladi.

d - E to'plamning diametri bo'lsin, ya'ni, E da $|x-y| \leq d$ bo'lsin. U holda

$$K_0(x-y) \leq \log d, \quad K_\alpha(x-y) \leq -d^{-\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad \mu(E) = 1$$

ekanligidan $V_0 \leq \log d$, $V_\alpha \leq -d^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ ni hosil qilamiz.

Endi E to'plamning $C_\alpha(E)$ α - sig'imini aniqlaymiz:

$$C_0(E) = e^{V_0}, \quad \alpha = 0$$

$$C_\alpha(E) = (-V_\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

$-\infty \leq V_\alpha < \infty$ bo'ladi.

Agar $C_\alpha(E) = 0$ bo'lsa istalgan μ o'lchov uchun $I_\alpha(\mu) = -\infty$. Bu tenglik $\alpha \geq n$ holda har safar bajariladi. $\alpha < n$ da biror E to'plamlar uchun ham bajarilishi mumkin.

1.3. O'lchovlarning kuchsiz yaqinlashishi.

$V_\alpha = \sup I_\alpha(\mu)$ yuqori chegaraga E da mos o'lchovlar μ uchun erishishimiz mumkinligini ko'rsatamiz. Biz uni muvozanatlovchi taqsimot deb ataymiz.

Buning uchun bizga o'lchovning kuchsiz yaqinlashishi haqidagi quyidagi teorema kerak bo'ladi.

1.9-teorema. $\mu_n - R^n$ dagi E kompakt to'plamda shunday o'lchovlar ketma-ketligi bo'lsinki, barcha n -larda $\mu_n(E) \leq A$ bo'lsin, bu yerda A biror o'zarmas. U holda E da μ limitik sust yaqinlashuvchi μ_{n_p} ketma-ketlik mavjud, ya'ni E da istalgan uzluksiz $\varphi(x)$ funksiya uchun

$$\int_E \varphi(x) d\mu_{n_p} \rightarrow \int_E \varphi(x) d\mu, \quad \rho \rightarrow \infty$$

o'rinli.

Isbot. E to'plam $|x_i| \leq M, \quad i = \overline{1, m}$ giperkubda joylashgan deb faraz qilamiz, bu yerda $x_i - x$ nuqtaning koordinatalari.

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \tag{1.9}$$

ko'rinishdagi barcha C giperkublarni qaraymiz, bu yerda a_i, b_i lar shunday ratsional sonlarki, $-\mu \leq a_i < b_i \leq \mu$ bajariladi.

Bunday giperkublar to‘plami sanoqli, shuning uchun ularni nomerlab chiqishimiz mumkin, natijada $\{c_k\}$ ketma-ketlikka ega bo‘lamiz. Tayinlangan k uchun $\mu_n(c_k)$ qiymat A o‘zgaras bilan chegaralangan, shuning uchun shunday $(n, 1)$ butun sonlar qisman ketma-ketligini topishimiz mumkinki, $n \rightarrow \infty$ da

$$\mu_{n,1}(C_1) \rightarrow l_1.$$

Keyin shunday $(n, 2)$ ketma-ketlikni tanlash mumkinki,

$$\mu_{n,2}(c_2) \rightarrow l_2, \quad n \rightarrow \infty.$$

Bu jarayonni qadamma-qadam davom qildirib, har bir musbat butun k uchun shunday (n, k) ketma-ketlik topiladiki, $n \rightarrow \infty$ da $\mu_{n,k}(ck) \rightarrow l_k$.

Bu yerda (n, k) orqali k -ketma-ketlikning n -hadini belgilaymiz.

Endi (n, n) ketma-ketlikni qaraymiz va $n > k$ uchun (n, n) ketma-ketlik k -ketma-ketlikka tegishli ekanini ta’kidlaymiz. Binobarin, istalgan musbat k son uchun $n \rightarrow \infty$ da $\mu_{n,n}(ck) \rightarrow l_k$. (p, p) ni n_p orqali belgilaymiz. U holda $n_p \geq p$, $p \rightarrow \infty$ da $n_p \rightarrow \infty$ va shuning uchun $\mu_{n_p}(c_k)$ biror $\mu(c_k)$ limitga ratsional koordinatali chegaralar bilan chegaralangan har bir c_k giperkub uchun yaqinlashadi.

Endi E da uzluksiz funksiyalar to‘plamida chiziqli funksional quramiz. $\varphi(x)$ -shunday funksiya bo‘lsin. $\Delta = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ -birlashmasi E ni o‘z ichiga oluvchi kesishmaydigan c giperkublarning ixtiyoriy chekli oilasi bo‘lsin.

M_f va $m_f - \varphi(x)$ funksiyaning c_j dagi aniq yuqori va aniq quyi chegaralari bo‘lsin.

$$s(\Delta, \varphi) = \sum_{j=1}^t m_j \mu(c_j), \quad S(\Delta, \varphi) = \sum_{j=1}^t M_j \mu(c_j)$$

deb olib, quyi va yuqori yig'indilarni tuzamiz.

Agar $c_j \in E$ to'plam bilan kesishmasa, har bir n uchun $\mu_n(c_j) = 0$ va $\mu(c_j) = 0$. Shuning uchun yig'indilardagi mos qo'shiluvchilarni nolga teng qilib olish mumkin.

Δ' oilani Δ oilaning qism bo'linishi deb ataymiz, agar $\Delta' \subset \Delta$ dan bitta c giperkubni ikkita c' va c'' giperkublarga ajratish orqali olingan bo'lsa. Agar c giperkub (1.9) tengsizliklar bilan berilsa, u holda c' va c'' giperkublar bu tengsizliklar bilan biror $i = i_0$ qiymat olib tashlangan barcha i indekslar to'plami uchun beriladi. $i = i_0$ uchun c' da $a_{i_0} \leq x_{i_0} < c_{i_0}$, c'' da $c_{i_0} \leq x_{i_0} < b_{i_0}$ ga ega bo'lamiz.

$$\mu_{n_p}(c') + \mu_{n_p}(c'') = \mu_{n_p}(c) \text{ ligidan}$$

$$\mu(c') + \mu(c'') = \mu(c) \text{ bo'ladi.}$$

m' , m'' , m orqali $\varphi(x)$ funksiyaning c' , c'' , c dagi quyi chegaralarini, μ' , μ'' , μ orqali yuqori chegaralarini belgilasak, $s(\Delta')$ yig'indi $s(\Delta)$ dan kichik emas. Bu $s(\Delta)$ da $m_j \mu(c_j)$ qo'shiluvchini $m'_j \mu(c'_j) + m''_j \mu(c''_j)$ bilan almashtirishdan kelib chiqadi.

c' va c'' lar E bilan kesishmasa, $s(\Delta') = s(\Delta)$. shunday qilib bo'laklash quyi chegarani oshiradi, yuqori yig'indini kamaytiradi.

E to'plamga kiruvchi istalgan ikkita chekli Δ' va Δ oilalar bu oilalar giperkublari chegaralaridan hosil qilingan barcha giperkublardan iborat umumiy Δ'' bo'laklashga ega. Binobarin,

$$s(\Delta, \varphi) \leq s(\Delta'', \varphi) \leq S(\Delta'', \varphi) \leq S(\Delta', \varphi)$$

I quyi yig'indilarning aniq yuqori chegarasi, J barcha yuqori chegaralarning aniq quyi chegarasi bo'lsin. U holda $I \leq J$. Boshqa tomondan, $\varphi(x)$ ning E da uzluksizligidan, u tekis uzluksiz va shuning uchun istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjudki, agar $x, x' \in E$ va $|x - x'| < \delta$ bo'lsa, $|\varphi(x) - \varphi(x')| < \varepsilon$ bo'ladi.

Xususan, bu tengsizlik diametri δ dan kichik giperkubga tegishli barcha x va x' lar uchun ham bajariladi.

Shunday qilib, agar Δ -diametri δ dan oshmaydigan c_i -giperkublarning ixtiyoriy oilasi bo'lsa, u holda $M_i - m_i < \varepsilon$ va shuning uchun

$$J - I \leq S(\Delta, \varphi) - s(\Delta, \varphi) \leq \sum_i (M_i - m_i) \mu(c_i) \leq \varepsilon \sum_i \mu(c_i) \leq \varepsilon A_1$$

Chunki giperkublar kesishmaydi. ε ning ixtiyoriyligidan, $I = J$ bo'ladi.

Endi $L(\varphi) = I(\varphi) = J(\varphi)$ deb olamiz va $L(\varphi) \in C_0^\infty(D)$ da aniqlangan funksional ekanini ko'rsatamiz.

Haqiqatan, $0 \leq L(\varphi) < \infty$. Agar $\alpha > 0$ bo'lsa, $s(\Delta, \alpha\varphi) = \alpha s(\Delta, \varphi)$, demak, $L(\alpha\varphi) = \alpha L(\varphi)$. Agar $\alpha < 0$ bo'lsa ham $s(\Delta, \alpha\varphi) = \alpha s(\Delta, \varphi)$.

Agar f va g -uzluksiz funksiyalar bo'lsa,

$$s(\Delta, f) + s(\Delta, g) \leq s(\Delta, f + g) \leq S(\Delta, f + g) \leq S(\Delta, f) + S(\Delta, g)$$

Agar Δ -yetarlicha kichik giperkublar oilasi bo'lsa, bu tengsizlikning birinchi va oxirgi hadi $L(f) + L(g)$ dan kam farq qiladi, shuning uchun

$$L(f + g) = L(f) + L(g).$$

Demak, $L(f)$ - E dagi musbat chiziqli funksional. Riss teoremasiga ko'ra, $L(f)$ funksional E dagi biror μ o'lchov bo'yicha integral ko'rinishida tasvirlanadi, ya'ni istalgan uzluksiz f funksiya uchun

$$L(f) = \int_E f d\mu$$

o'rinli.

Endi E da uzluksiz ixtiyoriy f funksiya uchun

$$\int f d\mu_{n_p} \rightarrow L(f) = \int f d\mu, \quad \rho \rightarrow \infty \text{ ni ko'rsatish qoldi.}$$

Buning uchun c_i giperkublarning biror Δ oilasini olamiz. U holda agar, m_i va M_i - f ning c_i dagi quyi va yuqori chegaralari bo'lsa, u holda

$$\underline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \int f d\mu_{n_p} \geq \underline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \sum m_i \mu_{n_p}(c_i) = \sum_i m_i \mu(c_i) = s(\Delta, f)$$

Shunga o'xshash, $\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \int f d\mu_{n_p} \leq S(\Delta, f)$

Bu tengsizliklar istalgan Δ -giperkublar oilasi uchun o'rinli ekanidan,

$$I \leq \underline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \int f d\mu_{n_p} \leq \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \int f d\mu_{n_p} \leq J$$

Bu yerdan, $\lim_{p \rightarrow \infty} \int f d\mu_{n_p} = L(f)$ kelib chiqadi.

II-bob. α – sig‘im va sig‘im potentsiali

2.1. Sig‘im potentsiali va sig‘im

2.1.-teorema. E - R^n dagi kompakt to‘plam va $V_\alpha(E) > -\infty$ bo‘lsin. U holda E da μ birlik massaning shunday taqsimoti mavjudki, $I_\alpha(\mu) = V_\alpha(\mu)$ bo‘ladi.

Isbot. μ_n - E dagi birlik massaning taqsimotlar ketma-ketligi bo‘lib, $I_\alpha(\mu) \rightarrow V_\alpha(\mu)$ bo‘lsin. 1.9- teoreмага ko‘ra, qisman ketma-ketliklarga o‘tib, μ_n ketma-ketlik E da biror μ o‘lchovga kuchsiz yaqinlashadi deb hisoblashimiz mumkin.

E da $f = 1$ deb olib, $\mu(E) = \int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E) = 1$ ni olamiz. Shunday qilib, μ -birlik massa.

Endi quyidagi tasdiqni isbotlaymiz.

Lemma2.1. Agar, μ_n o‘lchovlar ketma-ketligi tayinlangan kompakt F to‘plamda μ o‘lchovga kuchsiz yaqinlashsa, va agar $f(x)$ F da yuqoridan yarim uzluksiz bo‘lsa, u holda $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_F f(x) d\mu_n(x)} \leq \int_F f(x) d\mu(x)$ bo‘ladi.

Isbot. $f(x)$ yuqoridan yarim uzluksiz ekanidan, shunday kamayuvchi uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi mavjudki, $f_m(x) \rightarrow f(x)$, $m \rightarrow \infty$ da

$$\int_F f_m(x) d\mu(x) \rightarrow \int_F f(x) d\mu(x)$$

Binobarin, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday m nomer topiladiki

$$\int_F f_m(x) d\mu(x) < \int_F f(x) d\mu(x) + \varepsilon$$

Shunday qilib,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_F d\mu_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_F f_n d\mu_n = \int_F f_n d\mu < \int_F f d\mu + \varepsilon$$

va bu lemmani isbotlaydi.

Bu lemmani $E \times E$ to'plamda berilgan $K_\alpha(x - y)$ funksiyaga qo'llab,

$$I_\alpha(\mu) \geq \overline{\lim} I_\alpha(\mu_n) = V_\alpha(E)$$

ni olamiz. Teskari tengsizlik ta'rifidan kelib chiqadi. 2.1-teorema isbotlandi.

μ o'lchov E da sig'im taqsimoti deyiladi,

$$U_\alpha(y) = \int_E K_\alpha(x - y) d\mu(x)$$

funksiya esa E to'plamning sig'im potentsiali deyiladi.

Endi kompakt bo'lmagan to'plamlarning sig'imini aniqlaymiz. E ixtiyoriy to'plam bo'lsin. $C_\alpha(E)$ (ichki) sig'im deb E ga kiruvchi barcha nolmas F qism to'plamlarning $C_\alpha(F)$ sig'imlarining aniq yuqori chegarasiga aytiladi.

Tashqi sig'imni $C_\alpha^*(E) = \inf C_\alpha(G)$ deb olish orqali aniqlaymiz, bu yerda quyi chegara E ni o'z ichiga oluvchi barcha G ochiq to'plamlar bo'yicha olinadi. Agar E_1 va E_2 lar $E_1 \subset E_2$ bo'gan ixtiyoriy to'plam bo'lsa, $C_\alpha(E_1) \leq C_\alpha(E_2)$ bo'ladi.

Binobarin, agar E -ixtiyoriy chegaralangan to'plam bo'lsa, u holda hamisha $C_\alpha(E_1) \leq C_\alpha^*(E_2)$ bo'ladi. Agar bu tengsizlik tenglikka aylansa, E to'plam sig'im bo'yicha o'lchovli deyiladi.

Hozircha biz sig'im va tashqi sig'im orsidagi farq bor deb faraz qilamiz. Agar $E_1 \subset E_2$ bo'lsa, $C_\alpha^*(E_1) \leq C_\alpha^*(E_2)$ bo'ladi.

Agar G ochiq to'plam bo'lsa, u holda, $C_\alpha^*(G) = C_\alpha(G)$, demak, barcha ochiq to'plamlar sig'im bo'yicha o'lchovli.

Quyidagi teorema kompakt to'plamlar uchun mos natijani beradi.

2.2-teorema. E kompakt to'plam va G_n - shunday chegaralangan ochiq to'plamlar ketma-ketligi,

$$\overline{G_{n+1}} \subset G_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{va} \quad \bigcap G_n = E$$

U holda, $n \rightarrow \infty$ da

$$C_\alpha(G_n) \rightarrow C_\alpha(E) \quad (2.1)$$

Shunday qilib, kompakt to'plamlar sig'im bo'yicha o'lchovli.

Isbot. Sig'imning monotonligidan agar $G_n = C_\alpha(G_n)$ bo'lsa,

$$C_n \geq C_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Har bir tayinlangan n uchun

$$C_\alpha(E) \leq C_n$$

Binobarin, $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ mavjud va $C_\alpha(E) \leq C$. μ_n birlik massaning $\overline{G_n}$ kompakt to'plamda

$$V_n = I_\alpha(\mu_n) = \int_{\overline{G_n} \times \overline{G_n}} K_\alpha(x - y) d\mu_n(x) d\mu_n(y)$$

maksimal qiymatli taqsimoti bo'lsin. U holda 1.9-teoremadagi tanlovga ko'ra μ birlik massaga kuchsiz yaqinlashuvchi μ_{n_p} qisman ketma-ketlik topish mumkin.

Bu limitik μ o'lchov har bir p uchun $\overline{G_{n_p}}$ ga taqsimlanadi va shuning uchun E to'plamda ham taqsimlanadi.

Agar zarur bo'lsa qisman ketma-ketliklarga o'tib, umumiylikka xilof qilmagan holda μ_n ketma-ketlik μ ga kuchsiz yaqinlashadi deb faraz qilishimiz mumkin.

2.1-lemmani qo'llab,

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} V_n} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{G_n \times G_n} K_\alpha(x-y) d\mu_n(x) d\mu_n(y)} \leq V = \int \int_{E \times E} K_\alpha(x-y) d\mu(x) d\mu(y)$$

Bu yerdan va sig'imning xossasidan

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} C_\alpha(\overline{G_n}) \leq C_\alpha(E)$$

kelib chiqadi. Bu (2.1) ni isbotlaydi. Agar E - biror kompakt to'plam bo'lsa, G_n

sifatida E dan $\frac{1}{n}$ ga qaraganda kichikroq uzoqlashgan nuqtalar to'plamini

olishimiz mumkin. U holda 2.2- teorema shartlari bajariladi va shuning uchun (2.1) o'rinli bo'ladi.

Xususan, berilgan $\varepsilon > 0$ uchun E ni o'z ichiga oluvchi va $C_\alpha(G_n) < C_\alpha(E) + \varepsilon$ bo'lgan shunday G_n ochiq to'plam topiladi. Shunday qilib,

$$C_\alpha^*(E) < C_\alpha(E) + \varepsilon$$

va shuning uchun $C_\alpha^*(E) \leq C_\alpha(E)$. Binobarin, $C_\alpha^*(E) = C_\alpha(E)$ va E to'plam sig'im bo'yicha o'lchovli.

2.2. Sig'im potensialning tabiati.

Endi biz ixtiyoriy E kompakt to'plam uchun sig'im potensialning tabiatini tadqiq qilamiz. Asosiy natija isboti uchun bizga quyidagi teorema kerak bo'ladi.

2.3-teorema. E kompakt to'plam va ν - E dagi musbat massaning shunday taqsimotiki, $0 < \nu(E) < \infty$ va

$$I(\nu) = \int_E K_\alpha(x-y) d\nu(x) > -\infty \quad (2.2)$$

(Xususan, $C_\alpha(E) > 0$) u holda agar E_1 - E ning shunday kompakt qism to'plami bo'lsaki $C_\alpha(E_1) = 0$. Yoki shunday to'plamlarning sanoqli sondagi birlashmasi bo'lsa, u holda $\nu(E_1) = 0$ bo'ladi.

Isbot. E to'plam kompakt ekanidan, barcha $x, y \in E$ va biror d musbat son uchun $|x - y| \leq d$ tengsizlik bajariladigan

$$\begin{aligned} K_\alpha(x-y) &\leq 0, \quad \alpha > 0 \\ K_\alpha(x-y) &\leq \log^{+d}, \quad \alpha = 0 \end{aligned}$$

Binobarin, agar $d_1 = \log^{+d}$ deb olsak, u holda istalgan $x, y \in E$ uchun

$$K(x-y) = K_\alpha(x-y) - d_1 \leq 0$$

Shuningdek,

$$\int_E K(x-y) d\nu(x) d\nu(y) > -\infty$$

o'rinli va shuning uchun har qanday kompakt $E_1 \in E$ qism to'plam uchun

$$\int_{E_1} K(x-y) d\nu(x) d\nu(y) \geq \int_E K(x-y) d\nu(x) d\nu(y) > -\infty$$

Shunday qilib,

$$\int_{E_1} K(x-y) d\nu(x) d\nu(y) > -\infty$$

Agar $\nu(E_1) > 0$ bo'lsa, u holda bu yerdan $C(E_1) > 0$ kelib chiqadi, bu esa farazimizga zid.

Agar $E_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ bo'lsa, bu yerda $C_\alpha(F_n) = 0$, u holda har bir n uchun $\nu(F_n) = 0$. O'lchovning additivligidan, $\nu(E_1) = 0$ ni olamiz. Teorema isbotlandi.

E to'plamni α -polyar to'plam deb ataymiz, agar $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ bo'lib, bu yerda F_n - shunday kompakt to'plamlarki, $C_\alpha(F_n) = 0$. Biz keyinroq α -polyar to'plamlar uchun $C_\alpha^*(E) = 0$ ekanini isbotlaymiz. E kompakt to'plam va μ - E da musbat massaning taqsimoti bo'lsin. x_0 nuqta μ o'lchovning E^* tashuvchisiga tegishli deyiladi, agar istalgan r musbat son uchun $\mu\{D(x_0, r)\} > 0$ bo'lsa.

E^* yopiqqligi ravshan, demak E^* kompakt qism to'plam bo'ladi. Quyidagi teorema o'rinli.

2.4-teorema. E shunday kompakt to'plamki, $C_\alpha(E) > 0$, μ - E da mos muvozanatlovchi taqsimot, $E^* - \mu$ ning tashuvchisi bo'lsin. U holda $C_\alpha(E^*) = C_\alpha(E)$ bo'ladi.

Isbot. Albatta $E_0 = E - E^*$ bo'lsa, $\mu(E_0) = 0$ ekanini ta'kidlaymiz.

Haqiqatan, agar x_0 - E_0 ning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, markazi x_0 nuqtada bo'lgan E^* bilan kesishmaydigan shunday D ochiq shar topiladiki, $\mu(D) = 0$ bo'ladi. U holda markazi ratsional koordinatali nuqtada bo'lgan ratsional radiusli shunday D_0

ochiq shar topiladiki, $x_0 \in D_0 \subset D$; Binobarin $\mu(D_0) = 0$. Bunday polyar to'plami sanoqli, shuning uchun ularni D_i ketma-ketlikka joylashtirish mumkinki

$$\mu(E_0) \leq \sum_i \mu(D_i) = 0$$

bo'ladi.

Shunday qilib, μ E^* da birlik massaning taqsimotini ifodalaydi va

$$V_\alpha(E^*) \geq \int_{E^* \times E^*} K_\alpha(x-y) d\mu(x) d\mu(y) = \int_{E \times E} K_\alpha(x-y) d\mu(x) d\mu(y) = V_\alpha(E)$$

Binobarin, $C_\alpha(E^*) \geq C_\alpha(E)$. Teskari tengsizlik $E^* \subset E$ ekanidan kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Quyidagi teorema Frostman (1935), Kudzi (1959) ga tegishli bo'lib, sig'im potensial haqidagi fundamental teorema hisoblanadi.

2.5-teorema. $E - R^n$ dagi shunday kompakt to'plam bo'lsinki, $C_\alpha(E) > 0$ va $u(x)$ unga mos sig'im potensial, μ -mos muvozanatlovchi taqsimot va $E^* - \mu$ ning shunday tashuvchisiki

$$I_\alpha(\mu) = \iint_{E^*} K_\alpha(x-y) d\mu(x) d\mu(y) = V > -\infty \quad (2.3)$$

bo'lsin. U holda E^* ning barcha joyida

$$u(x) = \int_{E^*} K_\alpha(x-y) d\mu(y) \geq V \quad (2.4)$$

E da esa α - deyarli barcha joyda

$$u(x) \leq V \quad (2.5)$$

Shuningdek, xususan, E^* da α - deyarli barcha joyda

$$u(x) = V \quad (2.6)$$

Bundan tashqari R^n da

$$u(x) \geq V' \quad (2.7)$$

Bu yerda $\alpha > 0$ da $V' = 2^\alpha V$ va $\alpha = 0$ da

$$V' = V - \log 2 \quad (2.8)$$

bo'ladi.

Isbot. Oldin (2.5) ni isbotlaymiz.

A_n shunday $x \in E$ nuqtalar to'plamiki,

$$u(x) \geq V + \frac{1}{n}$$

bajariladi. $u(x)$ funksiya yuqoridan yarim uzluksiz funksiya ekanligidan, A_n to'plam kompaktidir. U holda E dan olingan (2.5) bajarilmaydigan nuqtalar to'plami $A - A_n$ to'plamlar birlashmasini ifodalaydi:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Binobarin, (2.5) ni isboti uchun $C_\alpha(A_n) = 0$ ni ko'satish kerak.

Bizning tasdig'imiz noto'g'ri deb faraz qilamiz. $E_1 \subset E$ dagi shunday kompakt qism to'plam bo'lsinki, biror $\varepsilon > 0$ uchun $u(x) \geq V + 2\varepsilon$, $x \in E_1$ va $C_\alpha(E_1) > 0$ bo'lsin. Mos keluvchi n lar uchun $E_1 = A_n$ deb olishimiz va

$\varepsilon = (3n)^{-1}$ deb oʻrniga qoʻyishimiz mumkin. 2.4– teorema koʻra μ E^* dagi kabi E da muvozanatli taqsimot boʻlsin va

$$\int_{E^*} u(x) d\mu = V$$

Xususan, shunday $\alpha_0 \in E^*$ mavjudki, $u(a_0) < V + \varepsilon$. Binobarin a_0 E_1

toʻplamdan tashqarida yotadi, $u(x)$ yuqoridan yariu uzluksizligidan, a_0 ning

$D(a_0, r)$ atrofida $u(x) < V + \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. r radiusni yetarlicha kichik

qilib tanlash hisobiga $D(a_0, r)$ ni E_1 dan musbat masofada joylashtiramiz.

$a_0 \in E^*$ ligidan, $\mu(D(a_0, r)) = m > 0$.

$C_\alpha(E_1) > 0$ ekanligidan E_1 da σ musbat massaning shunday taqsimoti mavjudki,

$$I_\alpha(\sigma) = \int_{E_1 \times E_1} K_\alpha(x - y) d\sigma(x) d\sigma(y) > -\infty, \quad \sigma(E_1) = m > 0$$

E_1 da σ_1 massaning taqsimotini quyidagicha aniqlaymiz: E_1 da $\sigma_1 = \sigma$, $D(a_0, r)$

da $\sigma_1 = -\mu$, bu toʻplamlardan tashqarida $\sigma_1 = 0$. U holda agar $0 < \eta < 1$ boʻlsa,

$\mu_1 = \mu + 4\sigma_1$ E da musbat massaning taqsimoti boʻladi va $\int_E d\mu_1 = 1$.

Shuningdek, agar η yetarlicha kichik boʻlsa, u holda,

$$\begin{aligned} \delta(I) &= I_\alpha(\mu_1) - I_\alpha(\mu) = \iint_{E \times E} K_\alpha(x - y) d\mu_1(x) d\mu_1(y) - \iint_{E \times E} K_\alpha(x - y) d\mu(x) d\mu(y) = \\ &= 2\eta \iint_{E \times E} K_\alpha(x - y) d\mu(x) d\sigma_1(y) + \eta^2 \iint_{E \times E} K_\alpha(x - y) d\sigma_1(x) d\sigma_1(y) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\eta \int_E \mu(y) d\mu_1(y) + \eta^2 I_\alpha(\sigma_1) \geq 2\eta \left[(\nu + 2\varepsilon)m - (\nu + \varepsilon)m + \frac{1}{2}\eta I_\alpha(\sigma_1) \right] = \\
&= 2\eta \left(2m + \frac{1}{2}\eta I_\alpha(\sigma_1) \right) > 0
\end{aligned}$$

Bu $I_\alpha(\mu)$ ning maksimaligiga zid. Shuning uchun barcha n lar uchun $C_\alpha(A_n) = 0$ va (2.5) isbotlandi.

Endi (2.4) ni ko'rsatamiz. Buning uchun yana teskarisini faraz qilamiz, ya'ni, biror $x = x_0 \in E^*$ uchun $u(x) < V - \varepsilon$ tengsizlik bajarilsin. $u(x)$ - yuqoridan yarim uzluksizligidan, bu tengsizlik x_0 nuqtaning biror $D(x_0, r)$ atrofida bajariladi, $x_0 \in E^*$ ekanligidan, $\mu\{D(x_0, r)\} = m_0 > 0$ bo'ladi.

E_2 — $u(x) > V$ bo'lgan barcha $x \in E^*$ nuqtalar to'plami bo'lsin. U holda (2.5) ga ko'ra $\mu(E_2) = 0$. $E_3 = E^* \cap D(x_0, r)$ va $E_4 = E^* - E_3$ deb olamiz. u holda

$$\begin{aligned}
V &= \int_E u(x) d\mu = \int_{E^*} u(x) d\mu = \sum_{j=1}^4 \int_{E_j} u(x) d\mu = \\
&= \int_{E_3} u(x) d\mu + \int_{E_4} u(x) d\mu \leq m_0(V - \varepsilon) + (1 - m_0)V = V - m_0\varepsilon
\end{aligned}$$

Bu tengsizlik bizning farazimizga zid va shuning uchun, E^* da $u(x) \geq V$. (2.5) ga ko'ra $u(x) = V$ ning E^* da α - deyarli barcha joyda bajarilishi kelib chiqadi. Nohoyat, μ - o'lchov E^* da bajarilishi kelib chiqadi. Nihoyat, m o'lchov E^* da taqsimlanganidan 5.2 teorema ko'ra (2.4)dan (2.7) kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Xulosa

Ushbu bitiruv malakaviy ishida potentsiallar va α -sig‘im tushunchalari o‘rganildi.

Quyidagi

$$K_{\alpha}(x) = -|x|^{-\alpha}, \alpha > 0$$

$$K_0(x) = \log|x|$$

yadroni qaraymiz. $E - R^n$ fazodagi kompakt to‘plam, $\mu - E$ dagi shunday o‘lchovki $\mu(E) = 1$. $x \in R^n$ uchun $V_{\alpha}(x)$ α -potensialni quyidagicha aniqlanar ekan:

$$V_{\alpha}(x) = \int_E K_{\alpha}(x - y) d\mu(y)$$

$K_{\alpha}(x)$ funksiya $\alpha \leq m - 2$ da R^n da subgarmonikligidan $V_{\alpha}(x)$ bu holda R^n da subgarmonik bo‘ladi. Bundan tashqari $\alpha = m - 2$ bo‘lsa, $V_{\alpha}(x)$ funksiya E to‘plamdan tashqarida garmonik bo‘ladi.

$$I_{\alpha}(\mu) = \int_E V_{\alpha}(x) d\mu(x) = \iint_{E \times E} K_{\alpha}(x - y) d\mu(x) d\mu(y)$$

deb olamiz. E to‘plamning $C_{\alpha}(E)$ α - sig‘imi quyidagicha aniqlanadi:

$$C_0(E) = e^{V_0}, \alpha = 0$$

$$C_{\alpha}(E) = (-V_{\alpha})^{-\frac{1}{\alpha}}, \alpha > 0$$

$-\infty \leq V_{\alpha} < \infty$ bo‘ladi.

Agar $C_{\alpha}(E) = 0$ bo‘lsa istalgan μ o‘lchov uchun $I_{\alpha}(\mu) = -\infty$.

Quyidagi teorema Frostman (1935), Kudzi (1959) ga tegishli boʻlib, sigʻim potentsiali haqidagi fundamental teorema hisoblanadi.

Teorema. $E - R^n$ dagi shunday kompakt toʻplam boʻlsinki, $C_\alpha(E) > 0$ va $u(x)$ unga mos sigʻim potentsial, μ -mos muvozanatlovchi taqsimot va $E^* - \mu$ ning shunday tashuvchisiki

$$I_\alpha(\mu) = \iint_{E^*} K_\alpha(x-y) d\mu(x) d\mu(y) = V > -\infty$$

boʻlsin. U holda E^* ning barcha joyida

$$u(x) = \int_{E^*} K_\alpha(x-y) d\mu(y) \geq V$$

E da esa α - deyarli barcha joyda

$$u(x) \leq V$$

Shuningdek, xususan, E^* da α - deyarli barcha joyda

$$u(x) = V$$

Bundan tashqari R^n da

$$u(x) \geq V'$$

Bu yerda $\alpha > 0$ da $V' = 2^\alpha V$ va $\alpha = 0$ da

$$V' = V - \log 2$$

boʻladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. N. Wiener. Certain notions in potential theory. J. Math. Mass. 3, 1924, p. 24-51.
2. O. Forstman. Potential d'équilibre et capacite des ensembles avec quelques applications a la theorie des fonctions. Meddel. Lunds. Univ. Mat. Sem.3, 1935, p. 1-118.
3. И.И.. Привалов. Субгармонические функции. Москва, 1937 г.
4. М. Брело. Основы классической теории потенциала. Москва, «Мир», 1964 г.
5. Г.М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М, «Наука», 1966 г.
6. А.И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Т 1,2. М., «Наука», 1968 г.
7. А. Гурвиц, Р. Курант. Теория функций. Москва, “Наука”, 1968.
8. У. Хейман, П. Кеннеди. Субгармонические функции. Москва, «Мир», 1980 г.
9. Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ. В 2-томах, М., «Наука», 1976 г.
10. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1987 г.
11. Internet saytlar: www.arxiv.org, www.mathnet.ru, www.ziyouet.uz.