



**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

GUVOHNOMA



O'QUV ADABIYOTINING NASHR RUXSATNOMASI

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus
ta'lim vazirligining 2016 yil "26" avgust dagi
"335"-sonli buyrug'iga asosan

Q. Mamasoliev, YU. Nishonov

(muallifning familiyasi, ismi-sharifi)

5230200-Management ta'lim yo'nalishi

ning

(ta'lim yo'nalishi (mutaxassisligi))

talabalari (o'quvchilari) uchun tavsiya etilgan

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika

(o'quv adabiyotining nomi va turi: darslik, o'quv qo'llanma)

o'quv qo'llanmasi

ga

O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi tomonidan
litsenziya berilgan nashriyotlarda nashr qilishga ruxsat
beriladi.



Vazir

(imzo)

A. Vahobov

Ro'yxatga olish raqami *335-059*

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

UO'K: 529.2

KBK: 22.172

M-23

Mamasoliyev, Qazoqboy.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika [Matn]. O'quv qo'llanma / Q. Mamasoliyev, Y. Nishanov. – T.: «MASHHUR-PRESS», 2017. – 160 b.

ISBN 978-9943-4791-4-2

Taqrizchilar:

U. Mamirov,

fizika-matematika fanlari nomzodi,
SamDU "Matematik analiz" kafedrasining dotsenti,

B. Xusanov,

fizika-matematika fanlari nomzodi,
SamDAQI "Oliy matematika va fizika" kafedrasining dotsenti

O'quv qo'llanmada ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari, tasodifiy miqdorlar, hamda ularning taqsimot qonunlari, tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari, katta sonlar qonuni va tasodifiy miqdorlar sistemalari, matematik statistikaning vazifalari va asosiy masalalari, tanlab kuzatish metodi, taqsimot parametrlarini (nuqtaviy va intervalli) statistik baholash, statistik gipotezalarni tekshirish, korrelyatsion va regression tahlil usullari bayon qilingan.

O'quv qo'llanmada nazariy ma'lumotlardan tashqari har bir bo'limga ta'alluqli takrorlash uchun savollar, test savollari va mashqlar berilgan.

Ushbu o'quv qo'llanma bakalavriatning 580000 – "Arxitektura va qurilish" ta'lim sohasi va 5230200 – "Menejment" ta'lim yo'nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun Oliy va O'rta Maxsus Ta'lim Vazirligi tomonidan tasdiqlangan namunaviy dastur va ishchi o'quv reja asosida yozilgan bo'lib, boshqa ta'lim sohasidagi yo'nalishlar bo'yicha tahsil olayotgan talabalar uchun ham tavsiya qilinishi mumkin.

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi oliy o'quv yurtlari ilmiy-uslubiy va o'quv-uslubiy birlashmalari faoliyatini muvofiqlashtiruvchi kengashi o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etgan.

ISBN 978-9943-4791-4-2

© Q. Mamasoliyev, Y. Nishanov, 2017

© «MASHHUR-PRESS», 2017

"Ta'lim to'g'risi dasturi"ning qabul rivojlantirish, xalq uchun esa, yosh avlo yuklaydi. Shu sababl mental fanlar bilan kurslarning o'qitilishi riyasi va matematik amalga oshirish uchun

Bu o'quv qo'll ehtimollar nazariyasi salarning umumiy q taqsimot qonunlarini topishni, tanlanma muvofiqlik kriteriyalar regression analizni o dan iboratdir.

Fanning rivojla Galileyning izlanish chashlardagi xatolar Keyinchalik fransuz 1662), Gyuygens (16 kabi olimlar fanning

Ularning yozib olimlari qimor o'yi maqsadida qilgan ish turtki bo'ldi. Ular ta tirish natijasida ular qonuniyatlar fundame bilgan edilar. Ammo ega bo'lsada, nazariy

Keyinchalik, a nazariyasi, otishlar t statistikasi) ehtimolla

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIV VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

Q. Mamasoliyev, Y. Nishanov

EHTIMOLLAR NAZARIYASI
VA MATEMATIK
STATISTIKA

(O'quv qo'llanma)

TOSHKENT
«MASHHUR-PRESS»
2017

Q.MAMASOLIYEV

Y.NISHANOV

**EHTIMOLLAR NAZARIYASI
VA MATEMATIK STATISTIKA**

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
MIRZO ULUG`BEK NOMIDAGI SAMARQAND
DAVLAT
ARXITEKTURA-QURILISH INSTITUTI

EHTIMOLLAR NAZARIYASI
VA MATEMATIK STATISTIKA

“5230200-Menejment” ta`lim yo`nalishi
talabalari uchun o`quv qo`llanma

SAMARQAND – 2017

O`quv qo`llanmada ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari, tasodifiy miqdorlar, hamda ularning taqsimot qonunlari, tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar, katta sonlar qonuni va tasodifiy miqdorlar sistemalari, matematik statistikaning vazifalari va asosiy masalalari, tanlab kuzatish metodi, taqsimot parametrlarini (nuqtaviy va intervalli) statistik baholash, statistik gipotezalarni tekshirish, korrelyatsion va regression tahlil usullari bayon qilingan.

O`quv qo`llanmada nazariy ma`lumotlardan tashqari har bir bo`limga ta`alluqli takrorlash uchun savollar, test savollari va mashqlar berilgan.

Ushbu o`quv qo`llanma bakalavriatning “5230200-Menejment” yo`nalishida ta`lim olayotgan talabalar uchun Oliy va o`rta maxsus ta`lim vazirligi tomonidan tasdiqlangan namunaviy dastur va ishchi o`quv reja asosida yozilgan bo`lib, iqtisod ta`lim sohasidagi yo`nalishlar bo`yicha tahsil olayotgan talabalar uchun ham tavsiya qilinishi mumkin.

Taqrizchilar:

Mamirov U.E. f.-m.f.n., SamDU “Matematik analiz” kafedrasining dotsenti

Xusanov B. f.-m.f.n., SamDAQI “Fizika va matematika” kafedrasining dotsenti

Mamasoliyev Q., Nishanov Y. **Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika.**

O`quv qo`llanma.- Samarqand. SamDAQI, 2017.

SO'ZBOSHI

“Ta’lim to’g’risidagi” qonun va “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi”ning qabul qilinishi mamlakatimiz iqtisodiy taraqqiyotini rivojlantirish, xalq xo’jaligiga yangi texnologiyalar kiritish, buning uchun esa, yosh avlodga eng zamonaviy bilimlarni berish vazifasini yuklaydi. Shu sababli oliy ta’lim muassasalarida talabalarga fundamental fanlar bilan bir qatorda ular tatbiq etiladigan maxsus kurslarning o’qitilishiga ham ehtiyoj tug’ilmoqda. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining o’qitilishi aynan shu maqsadni amalga oshirish uchun xizmat qiladi.

Bu o’quv qo’llanmadan ko’zda tutilgan maqsad, talabalarga ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining (tasodifiy hodisalarning umumiy qonuniyatlarini, tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlarini, bosh to’plam tanlanmasining parametrlarini topishni, tanlanma parametrlarini baholashni, statistik gipotezalarni muvofiqlik kriteriylari yordamida tekshirishni, hamda korrelyatsion va regression analizni o’rganuvchi) asosiy tushunchalarini bayon etishdan iboratdir.

Fanning rivojlanishi XVII asrning boshlarida mashhur fizik Galileyning izlanishlaridan boshlangan. U birinchilardan bo’lib, o’lchashlardagi xatolarni ilmiy asosda tekshirishga harakat qilgan. Keyinchalik fransuz matematiklari Ferma (1601-1665), Paskal (1623-1662), Gyuygens (1629-1695), Yakob Bernulli (1654-1705) va shu kabi olimlar fanning rivojiga katta hissa qo’shdilar.

Ularning yozib qoldirishicha, o’sha davrning buyuk matematik olimlari qimor o’yinlarining qonuniyatlarini matematik ifodalash maqsadida qilgan ishlari ehtimollar nazariyasining rivojlanishiga katta turtki bo’ldi. Ular tasodifiy hodisalar yuzasidan tajribalarni ko’paytirish natijasida ularning qonuniyatlari namoyon bo’lishini va bu qonuniyatlar fundamental filosofik qonuniyat bo’lib qolishini oldindan bilgan edilar. Ammo bu izlanishlarning ko’pchiligi amaliy ahamiyatga ega bo’lsada, nazariy jihatdan yetarli darajada asoslanmagan edi.

Keyinchalik, amaliy fanlar (kuzatishda yo’l qo’yilgan xatolar nazariyasi, otishlar nazariyasi, statistika muammolari, ayniqsa aholi statistikasi) ehtimollar

nazariyasi oldiga katta vazifalar qo'ydi va bu vazifalarni hal qilish jarayonida ehtimollar nazariyasi katta analitik apparatga ega bo'ldi. Ana shu analitik metodlarni rivojlantirishda Muavr (1667-1754), Laplas (1749-1827), Gauss (1777-1855), Puasson (1781-1840) kabi olimlarning xizmatlari katta bo'ldi.

XIX asrning ikkinchi yarmidan boshlab, buyuk olimlar V.Y. Bunyakovskiy (1804-1889), P.L.Chebishev (1821-1884), A.A. Markov (1856-1922) va A.M. Lyapunov(1857-1918)lar ehtimollar nazariyasini rivojlantirish bilan birga statistika, sug'urta ishlariga, demografiya va boshqa sohalarga keng qo'lladilar.

Hozirgi zamonaviy ehtimollar nazariyasiga qiziqish ortishi bilan bu sohani rivojlantirishda S.N.Bernshteyn (1880-1968), A.N.Kolmogorov (1903-1987), A.Y.Xinchin (1894-1959), V.I.Romanovskiy(1879-1954)lar katta hissa qo'shganlar. O'zbekistonda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika maktabini asoslagan va rivojlantirgan buyuk olimlarimiz - akademiklar T.A. Sarimsoqov va S.H. Sirojiddinovlardir. Keyingi paytlarda ularning shogirdlari- akademiklar T.A. Azlarov, Sh.Farmonov, professorlar M.M.Mamatov, T.L.Malevich, M.G`afurovlar ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning rivojlanishiga katta hissa qo'shish bilan birga juda ko'p mutaxassislar tayyorlashda ham katta rol o'ynadilar.

XX asrda xorijlik N.Viner, V.Feller, D.Dub, R.Fisher, D.Neyman va G.Kramer kabi olimlar ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning rivojiga muhim fundamental ishlari bilan katta hissa qo'shdilar.

Ushbu o`quv qo`llanma mualliflarning Mirzo Ulug`bek nomidagi Samarqand davlat arxitektura-qurilish institutida keyingi yillar davomida o`qigan ma`ruzalari asosida yozildi.

I bob

**EHTIMOLLAR NAZARIYASINING ASOSIY
TUSHUNCHALARI. EHTIMOLLARNI HISOBLASH
TEOREMALARI**

I.1-§. Ehtimollar nazariyasining predmeti

Elementar matematika kursining masalalari asosan bir, ikki yoki bi necha (cheklangan) aniq yechimlarga ega bo`ladi. Masalan, kvadrat tenglama ko`pi bilan ikkita (aniq) yechimga ega, bikvadrat tenglama ham ko`pi bilan to`rtta yechimga ega bo`lishi mumkin. Bu yechimlar bir qiymatli aniqlanadi. Ammo hayotda (fan va texnika masalalarida) shunday holatlar bo`ladiki, masala yechimini bir qiymatli aniqlab bo`lmaydi. Masalan, tanga tashlanganda, u “gerb” yoki “raqam” tomoni bilan tushishini oldindan aytib bo`lmaydi. Bunday masalalarda natija bir qiymatli aniqlanmaydi. Bunaqa masalalarda natija haqida oldindan aniq fikr aytish mumkin emasday tuyulsa-da, ko`pgina holatlarda ularning qonuniyatlarini o`rganish mumkin bo`lar ekan. Ko`p sonli o`tkazilgan tajribalar ko`rsatadiki, 1 dan 6 gacha raqamlangan olti yoqli o`yin soqqasi tashlanganda 1,2,3,4,5 va 6 raqamlar chiqishi teng imkoniyatlarga egadir. Shunga o`xshash qonuniyatlarni ehtimollar nazariyasi o`rganadi. Buyerda masalaning qo`yilishi tubdan o`zgaradi, chunki bizni bitta sinov natijasi emas, bir xildagi sinovlar seriyasining natijasi qiziqtiradi.

Matematikaning tadbqiqiy bo`limlarida tabiat yoki jamiyatning ma`lum jarayonlari o`rganilsa, ehtimollar nazariyasida tasodifiy jarayonlarning matematik modellari o`rganiladi. Bu modellarda asosiy tushuncha bo`lib hodisaning ehtimoli xizmat qiladi.

Tabiat va jamiyatni kuzatish natijasida har xil hodisalarga duch kelishimiz mumkin. Biz bu hodisalarni o`rganib, ularning qonunlarini aniqlab, kundalik turmushimizda foydalanamiz.

Tajriba(sinov,kuzatish) natijasida hodisalarning ba'zilarini "ro'y berishi aniq", ba'zilarini "ro'y bermasligi aniq", ba'zilarini esa "ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin" deb aytamiz.

Buni quyidagi misollarda ko'ramiz:

- 1.Yerning quyosh atrofida aylanishi aniq.
- 2.Quyoshning oy atrofida aylanishi mumkin emas.
- 3.Qutida hammasi oliy sifatli mahsulotlar bo'lsin. Qutidan tasodifiy olingan mahsulotning oliy sifatli bo'lishi aniq.
- 4.Havodan og'ir jismni osmonga otsak, uning yerga qaytib tushishi aniq.
- 5.Normal atmosfera bosimida suvning 35°C haroratda qattiq bo'lishi mumkin emas.
- 6.Normal atmosfera bosimida suvning 0°C dan past haroratda qattiq, 0°C dan 100°C gacha bo'lgan haroratda suyuq, 100°C dan yuqori haroratda esa gaz holatida bo'lishi aniq.
- 7.Qutida hammasi oliy sifatli mahsulotlar bo'lsin. Qutidan tasodifiy olingan mahsulotning sifatsiz bo'lishi mumkin emas.
- 8.Qutida 1-nav va 2-nav mahsulotlar bo'lsa, tasodifiy olingan mahsulot 1-nav mahsulot, yoki 2-nav mahsulot bo'lishi mumkin .
- 9.Simmetrik, bir jinsli tangani tashlaganimizda "gerb" tomoni, yoki "raqam" tomoni tushishi mumkin.
- 10.Sut mahsuloti 15°C haroratda muzlashi mumkin emas.
- 11.Muz -25°C da erishi mumkin emas.

1-ta'rif.Tajriba(sinov yoki kuzatish)ning har bir natijasiga *hodisa* deyiladi.

2-ta'rif.Tajribani amalga oshirishdagi zarur bo'lgan shartlarga *kompleks shartlar* deyiladi.

Hodisalarni tekshirishda kompleks shartlar asosiy o'rinni egallaydi.Agar bir turdagi hodisalarni tekshirishda kompleks shartlarni o'zgartirsak, hodisalar ham o'zgaradi. 5-misolda normal atmosfera bosimini o'zgartirmasdan, haroratni 100°C dan orttirsak, suv gaz holatga, 0°C dan pasaytirsak, suv qattiq holatga aylanadi;

yoki haroratni o'zgartirmasdan atmosfera bosimini ma'lum darajada orttirsak, suv qattiq holatga, ma'lum darajada kamaytirsak, suv gaz holatga o'tadi.

Shuning uchun ham hodisalarni tekshirishda kompleks shartlarni o'zgarmas deb qaraymiz, ya'ni hodisalarni bir xil sharoitda kuzatamiz. Ana shunday bir xil sharoitda kuzatilayotgan hodisalarni uch turga bo'lamiz: *ishonchli*(yoki *ro'y berishi muqarrar*), *ishonchsiz*, hamda *tasodifiy hodisa* .

3-ta'rif. *Ishonchli hodisalar* deb, ma'lum S kompleks shartlar bajarilganda ro'y berishi oldindan aniq bo'lgan hodisalarga aytiladi.

Yuqoridagi 1,3,4- misollardagi hodisalar ishonchlidir.

4-ta'rif. *Ishonchsiz hodisalar* deb, ma'lum S kompleks shartlar bajarilganda, ro'y bermasligi oldindan aniq bo'lgan hodisalarga aytiladi.

Yuqoridagi 2,5,7,10 va 11-misollardagi hodisalar ishonchsizdir.

5-ta'rif. *Tasodifiy hodisalar* deb, ma'lum S kompleks shartlar bajarilganda ro'y berishi, yoki ro'y bermasligi oldindan aniq bo'lmagan hodisalarga aytiladi.

6,8,9- misollardagi hodisalar tasodifiydir. Yuqoridagi misollardan ko`rinadiki, sinovlarda ishonchli va ishonchsiz hodisalar bir qiymatli aniqlanadi, tasodifiy hodisalar esa bir qiymatli aniqlanmaydi.

Har bir tasodifiy hodisa juda ko'p tasodifiy sabablar (masalan, otilgan o'qning nishonga tegishidagi sabablar-o'qning yo'nalishi, merganning mahorati va hokazolar) oqibatidir. Bu tasodifiy sabablarning hammasini hisobga olish, hamda ularning hodisani ro'y berishiga qay darajada ta'sir etishini aniqlash mumkin emas, chunki ularning soni juda ko'p, hamda qonuniyatlari ham har xil. Shuning uchun ehtimollar nazariyasi alohida olingan hodisani tekshirmasdan, balki bir jinsli ommaviy hodisalarni tekshiradi. Ma'lum bo'lishicha, hodisalar yuzasidan qancha ko'p tajribalar o'tkazilsa, ularning qonuniyatlari ham shuncha aniq namoyon bo'ladi.

Ehtimollar nazariyasi bir jinsli, ommaviy, tasodifiy hodisalarning umumiy qonuniyatlarini o'rganadigan fandir.

Ehtimollar nazariyasi metodlari juda ko'p fanlarda qo'llaniladi: ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasida, fizikada, astronomiyada, geodeziyada, avtomatik boshqarish nazariyasida, matematik va amaliy statistikada va hokazo kabilarda.

I.2-§. Tasodifiy hodisalarning turlari

Ma'lumki, tasodifiy hodisalarga ta'rif berilganda "ma'lum S kompleks shartlarning bajarilishi" shart qilib qo'yiladi. Bundan keyin, "ma'lum S kompleks shartlarning bajarilishi" deyish o'rniga qisqacha "tajribada", "kuzatishda", yoki "sinovda" so'zlarini ishlatamiz, hamda tasodifiy hodisalarni lotin alifbosining bosh harflari A, B, C,...va h.k. belgilaymiz.

1-ta'rif. Har bir sinovda hodisaning ro'y berishi boshqalarining ro'y berishini inkor etsa, bunday hodisalarga *birga ro'y bermas hodisalar* deyiladi.

1-misol. O'yin soqqasini tashlaganimizda 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlar yozilgan tomonlardan birortasi tushsa, qolgan raqamlar tushmaydi, ya'ni tomonlardan birining tushishi, qolganlarining tushishini inkor qiladi.

2-ta'rif. Ikkita A va B hodisalardan birining ro'y berishi boshqasining ro'y berishini inkor etmasa, bunday hodisalarga *birga ro'y beruvchi hodisalar* deyiladi.

2-misol. Mo'ljalga ikki marta o'q otilganda A hodisasi birinchi o'qning mo'ljalga tegishi, B hodisasi ikkinchi o'qning mo'ljalga tegishi bo'lsin. Birinchi o'qning mo'ljalga tegishi ikkinchi o'qning mo'ljalga tegishini inkor etmaydi. Shuning uchun bu hodisalar birga ro'y beruvchi hodisalaridir.

3-ta'rif. Sinovlarda qatnashayotgan hodisalar bir nechta bo'lib, har bir sinovda ulardan faqat bittasi ro'y bersa, bunday hodisalarga *birdan-bir(yoki yagona) imkoniyatl) hodisalar* deyiladi.

3-misol. Simmetrik, bir jinsli tangani tashlaganimizda "gerb" yoki "raqam" tomonlaridan faqat bittasi tushishi mumkin.

4-ta'rif. Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalardan hech bo'lmasa bittasining ro'y berishi ishonchli bo'lsa, ularga *hodisalarning to'la gruppasi* deyiladi

4-misol. Ikkita lotereya xarid qilingan bo'lsa, quyidagilar ro'y berishi mumkin:

- a) ikkalasiga ham yutuq chiqishi;
- b) 1-siga yutuq chiqishi va 2-siga chiqmasligi;
- d) 1-siga yutuq chiqmasdan, 2-siga chiqishi;
- e) ikkalasiga ham yutuq chiqmasligi.

Bu hodisalar to'la hodisalar gruppasini tashkil etadi, chunki bu hodisalardan bittasi va faqat bittasi albatta ro'y beradi.

5-ta'rif. Agar hodisalardan birining ro'y berish darajasi boshqasining ro'y berish darajasidan ortmasa, bunday hodisalarga *teng imkoniyatli hodisalar* deyiladi.

5-misol. Simmetrik, bir jinsli tangani tashlaganda "gerb" va "raqam" tomonlari tushishi teng imkoniyatli hodisalardir.

6-misol. O'yin soqqasini tashlaganda har qanday tomonining tushishi teng imkoniyatli hodisalardir.

6-ta'rif. Birga ro'y bermas, teng imkoniyatli, hamda to'la hodisalar gruppasini tashkil etuvchi hodisalarga *elementar hodisalar* deyiladi. Tangani tashlaganda "gerb" tushishi, o'yin soqqasini tashlaganda 4 raqamli tomoni tushishi, lotereyaga yutuq chiqishi va hokazolar elementar hodisalar bo'ladi.

I.3-§. Hodisalar algebrasi. Hodisalar fazosi.

Biz tasodifiy sinovlar o'tkazayotgan paytimizda sinovlar seriyasi haqida so'z yuritamiz, ya'ni ularning soni (hech bo'lmasa nazariy jihatdan) yetarlicha katta bo'lishi lozim. Sinovlarning matematik modelini quyidagi shaklda yasaymiz:

1. Elementar hodisalar to'plami Ω ni quramiz.
2. Berilgan sinov uchun yetarli bo'lgan hodisalar sinfi $\mathfrak{F}$ ni ajratamiz.
3. Shu hodisalar sinfi ustida ma'lum kompleks shartlarni qanoatlantiruvchi sonli funksiya-hodisaning ehtimoli P ni aniqlaymiz. Natijaviy uchlik $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ to'plam *ehtimollar fazosi* deb ataladi.

Sinov natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha birga ro'y bermas hodisalar to'plamini Ω - elementar hodisalar to'plami deb olamiz. Uning elementlarini $\omega_i, i=1, 2, \dots, n$ bilan belgilaymiz, ya'ni n - Ω to'plamning elementlari

soni. Shu sababli harqanday hodisa Ω - elementar hodisalar to'plamining to'plam osti bo'ladi.

1-misol. Sinovda o'yin soqqasi tashlangan bo'lsin.

Buyerda $\Omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ - elementar hodisalar to'plami, ω_i - o'yin soqqasi tashlanganda i raqami tushish hodisasi (elementar hodisa). Quyidagi hodisalarni qaraylik:

A- tushgan raqamning toq bo'lishi, $A = \omega_1, \omega_3, \omega_5$

B- tushgan raqamning juft bo'lishi, $B = \omega_2, \omega_4, \omega_6$

C- tushgan raqamning uchga bo'linishi, $C = \omega_3, \omega_6$

D- tushgan raqamning to'rt dan kichik emasligi, $D = \omega_4, \omega_5, \omega_6$

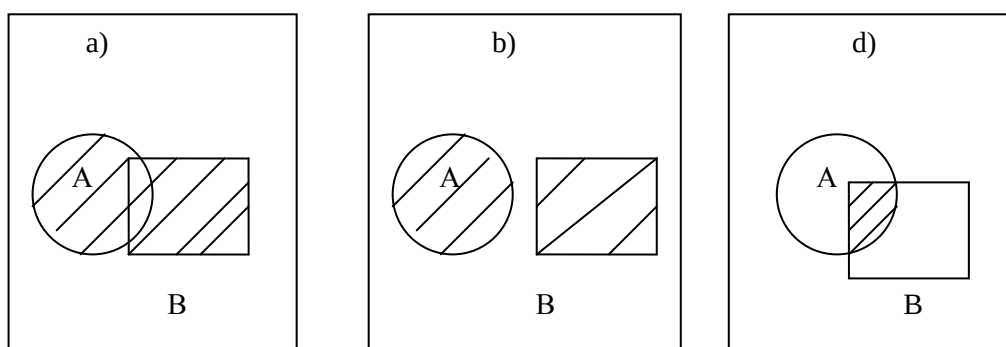
1- ta'rif. A hodisaga *qarama-qarshi hodisa* deb, shu A hodisaga kirmagan barcha elementar hodisalar to'plamiga aytiladi va A bilan belgilanadi.

2-misol. 1-misoldan foydalansak, $A = B$, $B = A$, $C = \omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5$, $D = \omega_1, \omega_2, \omega_3$.

2-ta'rif. A va B hodisalarining *yig'indisi* (yoki birlashmasi) $A + B$ deb, A ning ro'y berishi, yoki B ning ro'y berishi, yoki ikkalasining ham birgalikda ro'y berishiga aytiladi (1-shakl, a)).

$A + B$ yig'indi deb, bu hodisalardan hech bo'lmasa bittasiga tegishli bo'lgan elementar hodisalar to'plamiga aytiladi

3-misol. Agar ikkita o'q otikgan bo'lib, A hodisasi 1-otilgan o'qning nishonga tegishini, B - 2-otilgan o'qning nishonga tegishini bildirsa, $A + B$ - hodisasi, 1-o'qning yoki 2-o'qning, yoki ikkala o'qning ham nishonga tegish hodisasini bildiradi.



1-shakl

Xususiy holda, agar A va B hodisalar birga ro'y bermas bo'lsa, u holda $A+B$ hodisasi A ning ro'y berishi yoki B ning ro'y berishini bildiradi (1-shakl b)). Agar tashlangan nuqta katta to'rtburchakka tushishi aniq bo'lsa, hamda A hodisa nuqtaning A sohaga tushishini, B hodisa nuqtaning B sohaga tushishini bildirsa, $A+B$ hodisasi nuqtaning A sohaga yoki B sohaga tushishini bildiradi.

4-misol. Yana 1-misoldan foydalansak, $M=B+D= \omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ hodisalar yig'indisi-o'yin soqqasi tashlanganda juft yoki to'rt dan kichik bo'lmagan raqam tushishini bildiradi.

3-ta'rif. A va B hodisalarining ko'paytmasi $A \cdot B$ deb, shu hodisalarining ikkalasining ham birgalikda ro'y berishiga aytiladi.

Demak, $A \cdot B$ ko'paytma deb, ikkala hodisaga ham tegishli bo'lgan elementar hodisalar to'plamiga aytiladi.

5-misol. 1-misoldan, $F=B \cdot C= \omega_6$ hodisalarining ko'paytmasi- o'yin soqqasi tashlanganda juft va uchga bo'linadigan raqam tushishini bildiradi.

Hodisalarining yig'indisi va ko'paytmasi ikkitadan ortiq hodisalar uchun ham shunga o'xshash ta'riflanadi.

Agar $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ hodisalar uchun $A_i A_j = \emptyset (i \neq j)$ va $A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = \Omega$ bo'lsa, ular birga ro'y bermas hodisalarining to'la gruppasini tashkil qiladi. Shu sababli ikkita qarama-qarshi hodisalar ham birga ro'y bermas hodisalarining to'la gruppasini tashkil qiladi.

**4-ta`rif.**  $A$  va  $B$  hodisalarning ayirmasi  $A/B$  deb,  $A$  hodisaning  $B$  hodisaga yegishli bo`lmagan elementar hodisalari to`plamiga aytiladi (1-shakl,d)).

6-misol. 1-misoldan foydalansak, $K=D-B=\omega_5$ hodisalar ayirmasi-o`yin soqqasi tashlanganda to`rttan kichik bo`lmagan, hamda juft bo`lmagan raqam tushishini bildiradi.

Yuqoridagi misollarni yanada aniqroq tasavvur etish uchun, Venn diagrammalaridan foydalanamiz(2-shakl). Ω -to`g`ri to`rtburchakka tegishli nuqtalar to`plami.

1-misolda kiritilgan hodisalarga murojaat qilsak,

A va B birga ro`y bermas hodisalar, $A \cdot B = \emptyset$,

A va C birga ro`y beruvchi hodisalar, $A \cdot C = \omega_3$,

A va B qarama-qarshi hodisalar bo`ladi.

**5-ta`rif.** Agar  $A$  hodisaning ro`y berishi B hodisaning ro`y berishiga olib kelsa, u holda  $A$  hodisadan  $B$  hodisa kelib chiqadi deyiladi va  $A \subset B$  shaklida belgilanadi. Agar  $A \subset B$  bo`lsa, har bir A hodisaga tegishli elementar hodisa B hodisaga ham tegishli bo`ladi. Agar bir vaqtda  $A \subset B$  va  $B \subset A$  bo`lsa, A va B hodisalar teng kuchli deyiladi va $A = B$ shaklda yoziladi. Bularni ham Venn diagrammalari yordamida tasvirlaymiz(3-shakl).

Hodisalar ustida aniqlangan amallar quyidagi xossalarga ega bo`ladi:

$$1) A+B=B+A$$

$$10) A\Omega=A$$

$$2) AB=BA$$

$$11) A \setminus B = AB$$

$$3) A+A=A$$

$$12) \emptyset = \Omega$$

$$4) AA=A$$

$$13) A(B+C)=AB+AC$$

$$5) A+A=\Omega$$

$$14) A+BC=(A+B)(A+C)$$

$$6) AA=\emptyset$$

$$15) \cup_n A_n = \cap_n A_n$$

$$7) A+\emptyset=A$$

$$16) \cap_n A_n = \cup_n A_n$$

$$8) A\emptyset=\emptyset$$

$$17) A \subseteq B \Rightarrow B \subseteq A$$

$$9) A+\Omega=\Omega$$

Biz yuqorida hodisa ehtimolini haqiqiy o'zgaruvchining funksiyasi shaklida aniqlaganimiz uchun, u Ω to'plamning harqanday to'plam ostida ham aniqlanavermaydi. Ω to'plamning to'plam ostilaridan tuzilgan to'plamlar sinfini $\mathcal{F}$ bilan belgilaylik.

6-ta`rif. Agar $\mathcal{F}$ uchun:

- 1) $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$;
- 2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$;
- 3) $(A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A \cap B \in \mathcal{F}, A \cup B \in \mathcal{F})$,

bo'lsa, unga $\mathcal{F}$ — *algebra* deyiladi.

**7-ta`rif.** Agar oldingi ta`rifda

$$3) (A_n \in \mathcal{F}, n=1,2,3,\dots) \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}, \bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$$

bo'lsa, unga σ — *algebra* deyiladi. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ eng kichik algebraga misol bo'la oladi.

Endi hodisa ehtimolining *aksiomatik* ta`rifini beramiz.

8-ta`rif. Agar σ — *algebra* tashkil etuvchi $\mathcal{F}$ da aniqlangan P sonli funksiya uchun:

1. Barcha $A \in \mathcal{F}$ hodisalar uchun $P(A) \geq 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $i \neq j$ larda $A_i \cdot A_j = \emptyset$ bo'lgan $\{A_n\} \in \mathcal{F} \quad (n=1,2,\dots)$ hodisalar uchun $P(\bigcup A_n) = \sum P(A_n)$ shartlar bajarilsa, P sonli funksiya A hodisaning ehtimoli deb ataladi.

Shunday qilib, biz $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimollar fazosini qurdik.

I.4.-§. Kombinatorika elementlari

Kombinatorikaning ba`zi qoida va usullarini qarab chiqaylik. Uning hisoblashlarda muhim rol o'ynovchi ikki qoidasi bor: **qo'shish** va **ko'paytirish qoidalari**.

Qo'shish qoidasi: Agar $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ to'plamning elementlari soni $|A|=n$ ta, $B=\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ to'plamning elementlari soni esa $|B|=m$ ta bo'lib, bu ikki to'plamlar o'zaro kesishmasa, $A+B$ to'plamda $|A+B|=n+m$ ta element bo'ladi.

Ko'paytirish qoidasi: Agar $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ va $B=\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ to'plamlar chekli bo'lib, bu to'plamlardan tuzilgan barcha (a_i, b_j) juftliklar to'plami $C=\{a_i, b_j\}$ ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m$) $n \cdot m$ ta elementdan iborat bo'ladi.

1-ta'rif. Turli to'plam elementlaridan tuzilgan kombinatsiyalarga *birlashmalar* deyiladi.

Hodisaning ehtimolini hisoblash uchun zarur bo'lgan birlashmalarni qaraymiz.

1.O'rin almashtirishlar. n ta har xil elementlardan tuzilgan *o'rin almashtirishlar* deb, bir-biridan faqat elementlarining o'rinlari bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi. Ularning soni quyidagicha aniqlanadi:

$$P_n = n!, \text{ bu yerda } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n,$$

(buyurda keyinchalik qarama-qarshilikka duch kelmaslik va qulaylik uchun $0! = 1$ deb qabul qilamiz). Masalan, 3 ta nomzoddan guruhga sardor, sardor yordamchisi va sport tashkilotchisi tayinlash uchun $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ xil imkoniyat bor; biror tanlovda 6 ishtirokchining o'rinlarni egallash tartiblari $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ xil bo'lishi mumkin.

2.O'rinlashtirishlar. n ta har xil elementlardan k ($k \leq n$) tadan tuzilgan *o'rinlashtirishlar* deb, bir-biridan elementlari bilan hamda elementlarining o'rinlari bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi. Ularning soni quyidagicha aniqlanadi:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

1-misol: Uchta A, B, C elementlardan ikkitadan tuzilgan o'rinlashtirishlar soni topilsin.

Yechish. Ta'rifga asosan, bir-biridan elementlari, hamda elementlarining o'rinlari bilan farq qiladigan birlashmalar tuzamiz, ya'ni

$$\begin{array}{ccc} AB & AC & BC \\ BA & CA & CB \end{array}$$

Demak, ularning soni 6 ta ekan. Agar buni formulada hisoblasak:

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6.$$

2-misol. Guruhdagi 25 talabadan kasaba utushmasining anjumaniga 3 ta vakil saylash kerak, bu esa 25 elementdan 3 tadan o'rinlashtirishlar soniga teng bo'ladi:

$$A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$$

3-misol. Shahardagi 12 ta yirik qurilish tashkilotlaridan 2 tasi madaniyat saroyi qurilishiga jalb qilinishi kerak bo'lsa, bu necha usulda bo'lishi mumkin?

Yechish. Bu 12 elementdan 2 tadan o'rinlashtirishlar soniga teng bo'ladi,

$$A_{12}^2 = 12 \cdot 11 = 132$$

3.Gruppalashlar. n ta har xil elementlardan k tadan tuzilgan *gruppashlar* deb, bir-biridan faqat elementlari bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi. Ularning soni quyidagicha topiladi:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Agar gruppashlarda $k > \frac{n}{2}$ bo'lsa, $C_n^k = C_n^{n-k}$ tenglikdan foydalaniladi.

4-misol. To'rtta: a, b, c, d elementlardan ikkitadan tuzilgan gruppashlar soni topilsin.

Yechish. Ta'rifga asosan 4 ta elementdan 2 tadan bir-biridan hech bo'lmasa bitta elementi bilan farq qiladigan birlashmalar tuzamiz:

$$ab, ac, bc, ad, bd, cd.$$

Buni formula bilan hisoblasak:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

5-misol. Guruhdagi 25 talabadan guruhga sardor, sardor yordamchisi va sport tashkilotchisi necha xil usulda tayinlanishi mumkin?

Yechish.Buyerda 25 elementdan 3 tadan tuzilgan gruppalar soniga teng bo'ladi:

$$C_{25}^3 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300$$

6-misol. Olimpiya stadioni qurilishi uchun mamlakatdagi eng yirik 20 ta qurilish tashkilotlaridan 1 tasi bosh pudratchi, yana 2 tasi 1-yordamchi va 2-yordamchi pudratchi sifatida tanlanishi kerak. Bu tanlov necha xil usulda amalga oshirilishi mumkin?

Yechish. Tanlov

$$C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \cdot 19 \cdot 3 = 1140$$

xil usulda amalga oshirilishi mumkin ekan.

Agar birlashmalarda elementlar soni ko'p bo'lsa, uni oddiy yo'l bilan hisoblash qiyin, shu sababli ko'pincha tegishli formula bilan hisoblash qulaydir. Biz ko'rgan birlashmalar o'zaro quyidagicha bog'lanishga ega:

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k.$$

I.5.-§. Ehtimolning klassik ta'rif

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimollar fazosida $\Omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ chekli elementar hodisalar to'plami bo'lsin. Agar $P(A)$ ehtimollar funksiyasi uchun

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\omega_i) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1, \quad P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, u ehtimollarning barcha shartlarini bajaradi.

Agar barcha ω_i larning ro'y berishini teng imkoniyatli deb faraz qilsak, ya'ni harqanday $1 \leq i \leq n$ uchun

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}$$

bo'lsa, undan ehtimolning klassik ta'rif kelib chiqadi. $|A|$ bilan A to'plamning elementlari sonini belgilasak,

$$P(\Omega) = \sum_{i \in \Omega} P(\omega_i) \Rightarrow 1 = P(\omega_i) \cdot |\Omega|,$$

yoki

$$P(\omega_i) = \frac{1}{|\Omega|} \Rightarrow P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = |A| \cdot P(\omega_i) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Bundan,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Endi $|A|=k$ bo'lsa,

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

1-ta'rif. *A hodisaning ehtimoli deb, shu hodisaning ro'y berishiga sharoit yaratuvchi elementar hodisalar sonining, hamma mumkin bo'lgan elementar hodisalar soniga nisbatiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:*

$$P(A) = \frac{k}{n},$$

bu yerda k - A hodisaning ro'y berishiga sharoit yaratuvchi elementar hodisalar soni, n - hamma mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni. Bu ta'rifdan quyidagi xossalr kelib chiqadi:

1-xossa. Ishonchli hodisaning ehtimoli birga teng:

$$P(\Omega) = 1.$$

2-xossa. Ishonchsiz hodisaning ehtimoli nolga teng:

$$P(\emptyset) = 0.$$

3-xossa. Tasodifiy hodisaning ehtimoli nol va bir oralig'idagi songa teng:

$$0 < P(A) < 1.$$

4-xossa. $A \subseteq B \Rightarrow P(B|A) = P(B) - P(A).$

Isbot. $B = A + (B|A)$ va $A \cap (B|A) = \emptyset$, shu sababli $P(B) = P(A) + P(B|A).$

5-xossa. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$

6-xossa. $P(A) + P(\bar{A}) = 1.$

Isbot. Bevosita $AB = \emptyset$ va $A + B = \Omega$ munosabatlardan kelib chiqadi.

7-xossa. Ixtiyoriy A va B lar uchun $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A|B)$.

Isbot. $A \cup B = A + (B|AB)$ bo'lgani uchun, $P(A \cup B) = P(A) + P(B|AB)$ va 4-xossadan $P(B|AB) = P(B) - P(AB)$ kelib chiqadi, hamda xossa isbot bo'ladi.

Shunday qilib, hodisaning ehtimoli quyidagi qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Demak, agar hodisaning ehtimoli nolga teng bo'lsa, hodisa ishonchsiz, agar birga teng bo'lsa, hodisa ishonchli, agar nol bilan bir oralig'ida bo'lsa, tasodifiy bo'ladi. Agar tasodifiy hodisaning ehtimoli nolga yaqin bo'lsa, hodisa juda ham kam ro'y beradi, agar birga yaqin bo'lsa, hodisa tez-tez ro'y beradi. Shunday qilib, hodisaning ehtimoli uning ro'y berish darajasini ko'rsatadi.

1-misol. Do'konda 15 ta televizor bo'lib, shulardan 12 tasi a'lo sifatli. Tasodifiy ravishda 5 ta televizor ajratildi. Ajratilgan televizorlar orasida 4 ta a'lo sifatli televizor bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra, 15 ta televizordan 12 tasi a'lo sifatli va 3 tasi a'lo sifatli emas. Demak, $15 = 12 + 3$. Tasodifiy ravishda 5 tasini olsak, shulardan 4 tasi a'lo sifatli, bittasi a'lo sifatli bo'lmaslik ($5 = 4 + 1$) ehtimolini topamiz. Bu yerda hamma mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni C_{15}^5 - 15 ta televizordan 5 tadan olingan gruppalar soniga, sharoit yaratuvchi hodisalar soni esa $C_{12}^4 \cdot C_3^1$ - ya'ni, 12 ta a'lo sifatli televizordan 4 tadan, 3 a'lo sifatli bo'lmagan televizordan bittadan tuzilgan gruppalar soniga teng. Demak, ta'rifga asosan

$$P(A) = \frac{C_{12}^4 \cdot C_3^1}{C_{15}^5} = \frac{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{3}{1}}{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{45}{91}$$

2-misol. Temir-beton buyumlar zavodidagi jami rigellarning 60% i 1-sexda, qolgan 40% i 2-sexda ishlab chiqariladi. Zavoddagi tayyor rigellar 20 ta bo'lsa, tavakkaliga olingan 4 ta rigeldan 3 tasi 1-sexda tayyorlanganlik ehtimoli topilsin.

Yechish. Masala shartiga ko'ra, $n=20$ ta rigeldan 4 tadan gruppalar soniga, m esa 1-sexda ishlab chiqarilgan 20.0,4=8 ta rigeldan 3 tadan gruppalar sonining 2-sexda ishlab chiqarilgan 20.0,6=12 ta rigeldan 1 tadan gruppalar soniga ko'paytmasiga teng bo'ladi. Demak, tavakkaliga olingan 4 ta rigeldan 3 tasi 1-sexda tayyorlanganlik ehtimoli

$$P(A) = \frac{C_{12}^1 C_8^3}{C_{20}^4} = \frac{\frac{12 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{12 \cdot 8 \cdot 7}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 17}{4}} = \frac{672}{5 \cdot 19 \cdot 17} = \frac{672}{1615} \approx 0,416$$

ga teng bo'ladi.

I.6.-§. Nisbiy sanoq (nisbiy chastota, statistik ehtimol)

Tajriba jarayonida n ta bir xil sinovlar o'tkazilgan bo'lib, har bir sinovda A hodisaning ro'y berishi, yoki ro'y bermasligi kuzatilayotgan bo'lsin.

Ta'rif. A hodisaning *nisbiy sanog'i (chastotasi)* deb, uning sinovlar paytidagi ro'y berishlar sonining hamma sinovlar soniga nisbatiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$W(A) = \frac{\mu}{n},$$

bu yerda μ - hodisaning ro'y berishlar soni, n - hamma sinovlar soni.

Tabiiyki, sinovlar soni oshgan sayin nisbiy sanoqning qiymati hodisaning ehtimoliga yaqinlashib boradi. Shu sababli nisbiy sanoqning qiymati taxminan hodisaning ehtimoliga teng deb qabul qilinadi.

Nisbiy sanoqni hisoblashda albatta tajriba o'tkaziladi. Eramizdan XXII asr oldin Xitoyda o'g'il bolalar tug'ilish sonining hamma tug'ilgan bolalar soniga nisbati $1/2$ ga yaqinligi aniqlangan. Laplas juda ko'p statistik ma'lumotlarga asoslanib, tug'ilgan o'g'il bolalar sonining jami tug'ilgan bolalar soniga nisbati taxminan $22/43$ ga tengligini ko'rsatgan. Nisbiy sanoq ba'zi adabiyotlarda *statistik ehtimol* ham deb ataladi.

Xuddi shunday, Byuffon tangani 4040 marta tashlaganda 2048 marta "gerb" tushgan, ya'ni "gerb" tushish nisbiy sanog'i $W(G) = 0,5069$ ga teng bo'lgan. Pirson tangani 24000 marta tashlaganda 12012 marta "gerb" tushgan, ya'ni "gerb" tushish nisbiy sanog'i $W(G) = 0,5005$ bo'lgan.

Ehtimolning klassik taʼrifida elementar hodisalar fazosi Ω chekli deb faraz qilinadi. Tajribalar jarayonida esa koʻplab cheksiz sondagi sinovlar seriyalari, yaʼni cheksiz sondagi hodisalar elementar fazosi yuzaga keladi. Bu esa ehtimolning klassik taʼrifining chegaralanganligini koʻrsatadi. Bundan tashqari, koʻpincha tajriba natijalarini elementar hodisalar toʻplami shaklida ifodalab boʻlmaydi va elementar hodisalar teng imkoniyatli boʻlmasligi mumkin. Shu sababli ham, ehtimolning klassik taʼrifidan tashqari nisbiy sanoq (yoki boshqacha nomlanishi- *statistik ehtimol*) tushunchasi kiritiladi. Bulardan koʻrinayaptiki, klassik ehtimol tajribagacha topiladi, statistik ehtimol esa tajribadan soʻng aniqlanadi.

Mizes A hodisaning ehtimolini quyidagi munosabat yordamida koʻrsatgan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu}{n} = P(A).$$

1-misol. Ishlab chiqarilayotgan shlakli beton bloklardan 100 ta olib, tekshirish natijasida 5 tasi yaroqsizligi aniqlandi. Ishlab chiqarilgan bloklarning yaroqsiz boʻlish nisbiy sanogʻi topilsin.

Yechish. Shartga koʻra, $\mu = 5$, $n = 100$, demak,

$$W(A) = 5/100 = 0,05.$$

Agar tekshirish uchun qancha koʻp mahsulot olinsa, natija shuncha aniq boʻladi (yaʼni sinovlar soni oshib botishi bilan nisbiy sanoq ehtimolga yaqinlashib boradi)

2-misol. Maktab sport zalining qurilishida maydonchada toʻplangan 140 ta armaturadan tavakkaliga olingan 50 tasi tekshirilganda, ulardan 48 tasi yaroqli ekanligi aniqlandi. Tavakkaliga olingan armaturalarning yaroqli boʻlish nisbiy sanogʻi topilsin.

Yechish. Masala shartiga koʻra, $\mu = 48$, $n = 50$, demak nisbiy sanoq

$$W(A) = \frac{\mu}{n} = \frac{48}{50} = 0.96.$$

Umuman olganda ehtimollar nazariyasi usullarini qoʻllash jarayonida yakuniy xulosa chiqarish qanaqa tipdagi masala qoʻyilganligiga bogʻliq ekanligini unutmaslik kerak boʻladi. Masalan, “korxonada ishlab chiqarilayotgan mahsulotning aʼlo sifatli boʻlish ehtimoli 0,8 ga teng” degan jumla mahsulotlar katta seriyalarda,

bir xil sharoitda, ommaviy tarzda ishlab chiqarilayotganligi sababli, aniq ma`noga ega bo`ladi. Ammo “olimlarimiz oldiga qo`yilgan ilmiy muammoning to`g`ri yechilganlik ehtimoli 0,8 ga teng” qabilidagi da`vo mutlaqo o`rinsiz bo`lardi, chunki ilmiy natijalarning qiymatini ehtimollar nazariyasi usullari bilan baholash mumkin emas.

I.7.-§.Geometrik ehtimol

Ehtimolning klassik ta`rifida elementar hodisalar soni chekli deb faraz qilinadi, ammo amaliyotda(tajribada) ko`pincha mumkin bo`lgan natijalar soni cheksiz ko`p bo`ladi. Bunday holatlarda klassik ta`rifdan foydalanib bo`lmaydi.

Geometrik masalalarda ehtimolni hisoblash jarayonida ham, elementar hodisalar soni cheksiz bo`ladi. Bunda  $\Omega$  deb  $n$ -o`lchovli evklid fazosining cheklangan to`plamini olish mumkin.  $\Omega$  ning har qanday o`lchovini aniqlash mumkin bo`lgan to`plam ostisini *hodisa* deb qaraymiz. Ω ning barcha o`lchovga ega bo`lgan to`plam ostilari sinfini F bilan belgilaymiz.

U holda har qanday $A \in F$ uchun

$$P(A) = \mu(A)/\mu(\Omega)$$

tenglikni o`rinli deb qaraymiz va bunga A hodisaning *geometrik ehtimoli* deyiladi.

$\mu(A)$ – A to`plamning o`lchami ($n=1$ da uzunlikning, $n=2$ da yuzaning, $n=3$ da hajmning o`lchami).

Misol. Radiusi 1 ga teng bo`lgan doiraga kvadrat ichki chizilgan. Doira ichiga nuqta tashlangan bo`lsa, uning kvadrat ichiga tushishi ehtimoli topilsin.

Yechilishi: Shartga ko`ra $OA=1$. U holda $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{2}$ ba

$$S_{doira} = \pi r^2 = \pi; S_{kvadrat} = AB^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ shu sababli nuqtaning kvadratga}$$

tushishi ehtimoli $P \left(\text{v.ga tushishi} \right) = \frac{S_{kvadrat}}{S_{doira}} = \frac{2}{\pi}$ bo`ladi.

1-shakl chiziladi

I.8.-§. Hodisalarning ehtimollarini qo'shish va ko'paytirish teoremlari. Shartli ehtimol

1-teorema. Ikkita birga ro'y bermas hodisalar yig'indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig'indisiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Xulosa. $A_1, A_2, \dots, A_n$ birga ro'y bermas hodisalar yig'indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig'indisiga teng.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

1-ta'rif. Bir nechta $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarning ko'paytmasi deb, shu hodisalarning hammasining birgalikda ro'y berishiga aytiladi.

Tasodifiy hodisaga ta'rif berilganda ma'lum S kompleks shartlar bajarilishi talab etilgan edi. Agar ehtimolni hisoblashda tasodifiy hodisaga S kompleks shartlardan tashqari yana qo'shimcha shartlar qo'yilmasa, bunday ehtimol *shartsiz ehtimol* deyiladi. Agar qo'shimcha shartlar ham qo'yilsa, bunday ehtimol *shartli* deyiladi.

2-ta'rif. B hodisaning *shartli ehtimoli* $P_A(B)$ - deb, A hodisa ro'y bergandan keyin B hodisaning ro'y berish ehtimoliga aytiladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad (P(A) > 0).$$

1-misol. 28 ta domino donasidan ketma-ket ikkitasi olinadi. 1- olingan domino donasi (5;5) bo'lsa, 2-olingan domino donasi bilan o'yinni davom ettirish ehtimoli topilsin.

Yechish. A hodisasi 1-olingan domino donasining (5;5) chiqishini, B hodisasi 1-olingan domino donasi (5;5) chiqqandan keyin 5 raqamli domino donasi chiqishini bildirsin. 28 ta domino donasidan (5;5) domino donasi olingandan keyin $(28-1) = 27$ ta domino donasi qoladi. (0;5), (1;5), (2;5), (3;5), (4;5), (5;5), (6;5) domino donalaridan ham (5;5) olindi va bularning soni 7 ta hodisadan bittaga kamaydi, ya'ni $7-1=6$ ta qoladi. Demak, 1-

olingan domino donasi (5;5) bo'lsa, qolgan mumkin bo'lgan hamma hodisalar soni 27 ta va B hodisasining ro'y berishiga sharoit yaratuvchi hodisalar soni 6 ta. Shunday qilib 1-olingan domino donasi (5;5) bo'lsa, 2-olingan domino donasi bilan o'yinni davom ettirish ehtimoli:

$$P_A(B) = 6/27 = 2/9.$$

2-misol. Qurilish maydonchasida 120 ta shlakli va 80 ta shlaksiz beton bloklar quyilgan. Tavakkaliga 2 ta blok olingan bo'lsa, ularning ikkalasi ham shlakli ekanlik ehtimoli topilsin.

Yechish. A -1-blokning shlakli bo'lish hodisasi, B -2-blokning shlakli bo'lish hodisasi bo'lsin. U holda AB - ularning ikkalasi ham shlakli ekanlik hodisasi va

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{120}{200} \cdot \frac{119}{199} = \frac{6 \cdot 119}{10 \cdot 199} = \frac{357}{995} \approx 0,3588.$$

3-ta'rif. Agar A va B hodisalardan birining ro'y berishi boshqasining ro'y berish ehtimolini o'zgartirsa, bunday hodisalarga *erksiz (bir-biriga o'zaro bog'liq) hodisalar* deyiladi.

2-teorema. Ikkita A va B erksiz hodisalar ko'paytmasining ehtimoli shu hodisalardan birining ehtimoli bilan boshqasining oldingi hodisa ro'y bergandagi shartli ehtimoli ko'paytmasiga teng:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B).$$

4-ta'rif. A va B hodisalardan birining ro'y berishi boshqasining ro'y berish ehtimoliga ta'sir etmasa, bunday hodisalarga *erkli (o'zaro bog'liqmas) hodisalar* deyiladi, ya'ni B hodisaning A hodisa ro'y bergandan keyingi ehtimoli B hodisaning ehtimoliga teng bo'ladi

$$P_A(B) = P(B).$$

3-teorema. Ikkita A va B erkli hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari ko'paytmasiga teng:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Xulosa. Bir nechta $A_1, A_2, \dots, A_n$ erkli hodisalarning birga ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari ko'paytmasiga teng:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Erkli hodisalarni ko'paytirish va qo'shish teoremlaridan foydalanib, quyidagi ehtimollarni aniqlaymiz.

I.9.-§. Hech bo'lmasa bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli

Faraz qilaylik, A_1, A_2, A_3 o'zaro erkli hodisalar bo'lib, ularning ro'y berish, hamda ro'y bermaslik ehtimollari ma'lum bo'lsin:

$$\begin{aligned} p_1 &= P(A_1), & p_2 &= P(A_2), & p_3 &= P(A_3) \\ q_1 &= P(\overline{A_1}), & q_2 &= P(\overline{A_2}), & q_3 &= P(\overline{A_3}) \end{aligned}$$

U holda A_1, A_2, A_3 hodisalardan faqat bittasining ro'y berishini B_1 , faqat ikkitasining ro'y berishining B_2 va uchalasining birgalikda ro'y berishini B_3 bilan belgilasak, B_1 ning ehtimoli

$$P(B_1) = P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3)$$

A_1, A_2, A_3 hodisalari erkli bo'lgani uchun

$$P(B_1) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3)$$

bo'lib, yuqoridagi belgilashlarga asosan

$$P(B_1) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3$$

bo'ladi. Bu A_1, A_2, A_3 hodisalaridan faqat bittasining ro'y berish ehtimolini aniqlaydi.

Xuddi shunday A_1, A_2, A_3 erkli hodisalardan faqat ikkitasining ro'y berish ehtimoli

qo'yidagicha bo'ladi: $P(B_2) = p_1 p_2 q_3 + q_1 p_2 p_3 + p_1 q_2 p_3$

Uchala hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli esa

$$P(B_3) = p_1 p_2 p_3$$

B_1, B_2, B_3 hodisalar yig'indisining ehtimoli

$$P(A) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$$

esa, hech bo'lmasa bitta hodisaning ro'y berish ehtimolini bildiradi.

Agar B_1, B_2, B_3 hodisalari, hamda $B_0 = A_1, A_2, A_3$ hodisalardan birortasining ham ro'y bermasligi, birgalikda to'la hodisalar gruppasini tashkil etadi. To'la hodisalar gruppasi ehtimollarining yig'indisi birga tengligi bizga ma'lum. Demak,

$$P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 1$$

yoki

$$P(B_0) + P(A) = 1$$

bundan

$$P(A) = 1 - P(B_0)$$

ya'ni birdan hodisalarning hammasining ro'y bermaslik ehtimolini ayirsak, hech bo'lmasa bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli kelib chiqadi.

Biz yuqorida hech bo'lmasa bitta hodisaning ro'y berish ehtimolini, xususiyl holda aniqladik. Endi umumiy formulani aniqlaymiz.

Faraz qilaylik $A_1, A_2, \dots, A_n$ tasodifiy hodisalar erkli bo'lib, ularning ro'y berish ehtimollari $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ lar ma'lum bo'lsin.

Teorema. $A_1, A_2, \dots, A_n$ bir-biriga bog'liq bo'lmagan erkli hodisalardan hech bo'lmasa bittasining ro'y berish ehtimoli, birdan shu hodisalarga qarama-qarshi $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ hodisalar ehtimollarining ko'paytmasining ayirmasiga teng:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n.$$

1-misol. Ishchi 4 ta stanokni boshqarayapti. Bir soat davomida stanoklarning ishlamay qolishi ehtimollari mos holda 0,4; 0,5; 0,45; 0,6. Shu vaqt davomida hech bo'lmasa bitta stanokning ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra, bir soat davomida stanoklarning ishlamay qolish ehtimollari mos holda $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,5$, $p_3 = 0,45$, $p_4 = 0,6$.

Demak, stanoklarning bir soat davomida ishlab turish ehtimollari mos holda quyidagicha

$$q_1 = 1 - p_1 = 0,6, \quad q_2 = 1 - p_2 = 0,5, \quad q_3 = 1 - p_3 = 0,55, \quad q_4 = 1 - p_4 = 0,4.$$

Endi teoremaga asosan hech bo'lmasa bitta stanokning ishdan chiqish ehtimolini topamiz.

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 = 1 - 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,55 \cdot 0,4 = 1 - 0,066 = 0,934.$$

Demak, alohida olingan stanoklarning ishdan chiqish ehtimoli katta bo'lmasa ham, hech bo'lmasa bitta stanokning ishdan chiqishi katta ehtimolga ega bo'lar ekan.

Xususiyl holda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarning ro'y berish ehtimollari bir xil bo'lsa, ya'ni $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = p$ bo'lsa, bu hodisalardan hech bo'lmasa bittasining ro'y berish ehtimoli quyidagicha bo'ladi.

$$P(A) = 1 - q^n.$$

2-misol. Uy qurish kombinatidagi 3 ta sexda temir-beton rigellar ishlab chiqariladi. Yarim soat davomida shu sexlardagi yuk ortish kranlarining ishlamay qolish ehtimollari bir xil bo'lib, 0,02ga teng. Shu vaqt davomida hech bo'lmasa bitta kranning ishlamay qolish ehtimoli topilsin.

Yechish. p_1, p_2 va p_3 – mos ravishda 1, 2 va 3-yuk ko'tarish kranlarining yarim soat davomida ishlamay qolish ehtimollari bo'lsa, ya'ni $p_1 = p_2 = p_3 = 0,02$ bo'lsa, shu vaqt davomida hech bo'lmasa bitta yuk ko'tarish kranning ishlamay qolish ehtimoli ($q_1 = q_2 = q_3 = q = 1 - 0,02 = 0,98$ bo'lgani uchun)

$$P(A) = 1 - q^3 = 1 - 0,98^3 = 1 - 0,941192 = 0,058808 \text{ bo'ladi.}$$

I.10.-§. Birga ro'y beruvchi hodisalar

ehtimollarini qo'shish teoremasi

Faraz qilaylik, A va B hodisalari birga ro'y beruvchi hodisalar bo'lib, ularning ro'y berish ehtimollari ma'lum bo'lsin.

Teorema. Ikkita A va B hodisalardan hech bo'lmasa bittasining ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolining ayirmasiga teng:

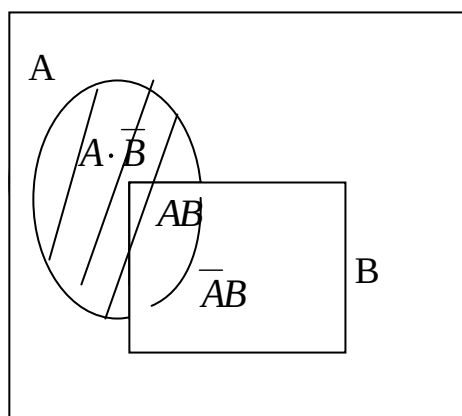
$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Isbot. A va B hodisalari birga ro'y beruvchi bo'lganligi uchun $A+B$ ning ro'y berishi (2- shaklga qarang) $\overline{A}\overline{B}$, AB , $\overline{A}B$ birga ro'y bermas hodisalardan birining, ya'ni $A\cdot\overline{B}$ ning, yoki AB ning, yoki $\overline{A}\cdot B$ ning ro'y berishidan iborat bo'ladi. Demak,

$$P(A+B) = P(\overline{A}\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB) \quad (1)$$

2-shakldan

$$P(A) = P(\overline{A}\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB), \quad P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB) + P(AB\overline{B})$$



2-shakl

Bulardan

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(A) - P(\overline{A}B) - P(AB), \quad P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) - P(AB\overline{B})$$

Keyingi tengliklarni (1) ga qo'ysak

$$P(A+B) = P(A) - P(\overline{A}B) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB),$$

bu tenglikdan $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

1-misol. Xaridor avtosalongdan O'zbekistonda ishlab chiqarilgan yoki oq rangli avtomobil sotib olmoqchi. Avtosalongdagi avtomobillarning 80% i O'zbekistonda ishlab chiqarilgan bo'lib, ulardan 70% i oq rangli; jami avtomobillarning esa 60% i oq rangli bo'lsin Xaridor avtosalongdan tavakkaliga tanlagan avtomobilning O'zbekistonda ishlab chiqarilgan yoki oq rangli bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish. A - xaridor tavakkaliga tanlagan avtomobilning O'zbekistonda ishlab chiqarilganlik hodisasi, B - tavakkaliga tanlagan avtomobilning oq rangli bo'lish hodisasi bo'lsin. U holda AB - tavakkaliga tanlagan avtomobilning O'zbekistonda ishlab chiqarilgan yoki oq rangli bo'lishini bildiradi va $P(A)=0,8$, $P(B)=0,6$, $P(AB)=P(A) \cdot P(B)=0,8 \cdot 0,7=0,56$ bo'ladi. Shu sababli, avtosalongdan tavakkaliga tanlagan avtomobilning O'zbekistonda ishlab chiqarilgan yoki oq rangli bo'lish ehtimoli quyidagicha topiladi:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,8+0,6-0,56=0,84$$

2-misol. Qurilish tashkilotining vakili sement sotish bazasidan M-400 markali sement yoki Qizilqumda ishlab chiqarilgan sement sotib olmoqchi. Sotuv bazasidagi sementning 35% i Qizilqumda, 25% i Navoiyda, 10% i Quvasoyda va 30% i Jizzaxda ishlab chiqarilgan. Sotuv bazasidagi sementning 70% i M-400 markali bo`lib, ulardan 20% i Navoiyda, 40% i Qizilqumda, 30% i Quvasoyda, qolgan 10% i esa Jizzaxda ishlab chiqarigan. Qurilish tashkilotining vakili sementning qayerda ishlab chiqarilganligiga e`tibor bermay sotib olish shartnomasini imzolagan bo`lsa, vakilning M-400 markali sement yoki Qizilqumda ishlab chiqarilgan sement sotib olish haqidagi shartnomani imzolaganlik ehtimoli topilsin.

Yechish. A-qurilish tashkiloti vakilining M-400 markali sement sotib olish haqidagi shartnomani imzolaganligi hodisasi, B- qurilish tashkiloti vakilining Qizilqumda ishlab chiqarilgan sement sotib olish haqidagi shartnomani imzolaganligi hodisasi bo`lsin. U holda, $P(A)=0,7$, $P(B)=0,35$, $P(AB)=0,4$, $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,7+0,35-0,4=0,65$.

Takrorlash uchun savollar

1. Hodisaning turlarini ayting.
2. Kompleks shartlar nima?
3. Tasodifiy hodisani ta`riflang.
4. Ehtimollar nazariyasining predmeti nima?
5. Tasodifiy hodisalarning turlarini ayting.
6. Birga ro`y bermas hodisalarni ta`riflang.
7. Birga ro`y beruvchi hodisalarni ta`riflang.
8. Teng imkoniyatli hodisalarni ta`riflang.
9. Hodisalarning to`la gruppasini ta`riflang.
10. Elementar hodisa nima?
11. Ehtimollar fazosini ta`riflang.
12. Qarama-qarshi hodisalarni nimani anglatadi?
13. Hodisalar yig`indisini ta`riflang.

14. Hodisalar ko`paytmasi nimani anglatadi?
15. Hodisalar ayirmasini ta`riflang.
16. $\mathcal{E}$ – *algebrani* ta`riflang.
17. σ – *algebrani* ta`riflang.
18. O`rinlashtirishlarni ta`riflang.
19. O`rin almashtirishlarni ta`riflang.
20. Gruppalashlarni ta`riflang.
21. Ehtimolning klassik ta`rifi.
22. Nisbiy sanoqni ta`riflang.
23. Nisbiy sanoq bilan hodisaning ehtimoli orasidagi bog`lanishlari va farqlarini ayting.
24. Hodisalar yigindisini ta`riflang.
25. Hodisalar ko`paytmasini ta`riflang.
26. Hodisalar yigindisining ehtimoli nima?
27. Hodisalar ko`paytmasining ehtimoli nima?
28. Shartli ehtimolni tariflang.
29. Ehtimolning aksiomatik ta`rifini ayting.
30. Aksiomatik ta`rifdagi ehtimol qanday shartlarni qanoatlantiradi?
31. Hech bo`lmasa bitta hodisaning ro`y berish ehtimolini turli usullar bilan ko`rsating.

Mavzu bo'yicha test savollari

1. Hodisalarning turlarini ayting.
 - A) ishonchli, ishonchsiz, muqarrar
 - B) ishonchli, ishonchsiz, tasodifiy
 - C) ishonchli, muqarrar, tasodifiy
 - D) mumkin bo`lmagan, ishonchsiz, tasodifiy
 - E) ishonchli, ishonchsiz, mumkin bo`lmagan
2. Ehtimollar nazariyasining predmeti:
 - A) bir jinsli ommaviy hodisalarning umumiy qonuniyatlarini o`rganadi

B) bir jinsli ommaviy tasodifiy hodisalarning umumiy qonuniyatlarini o'rganadi

C) tasodifiy miqdorlarning umumiy qonuniyatlarini o'rganadi

D) tasodifiy hodisalarning qonuniyatlarini o'rganadi

E) bir jinsli ommaviy, tasodifiy hodisalarni o'rganadi

3. Tasodifiy hodisalarning turlari (5 tasi).

A) ishonchli, birga ro'y bermas, birga ro'y beruvchi, erkli, erksiz

B) birga ro'y beruvchi, erkli, erksiz, tasodifiy, teng imkoniyatli

C) ishonchli, ishonchsiz, birga ro'y beruvchi, erkli, erksiz

D) birga ro'y beruvchi, birga ruy bermas, teng imkoniyatli, elementar, yagona imkoniyatli

E) ishonchli, ishonchsiz, erkli, erksiz, birga ro'y beruvchi

4. Simmetrik, bir jinsli tanga tashlaganda "gerb" va "raqam" tomonlari tushishi:

1) birga ruy bermas hodisalar 2) birga ruy beruvchi hodisalar

3) teng imkoniyatli hodisalar 4) hodisalarning to'la gruppasi

A) 1,2 va 3 B) 1,3 va 4 C) 1,2 va 4 D) 2,3 va 4 E) 1,2,3 va 4

5. Hodisalar ustidagi amallardan noto'g'risini ko'rsating.

A) $A+B=B+A$ C) $A\Omega=A$

B) $AB\neq BA$ D) $A\backslash B=AB$

6. Hodisalar ustidagi amallardan noto'g'risini ko'rsating.

A) $A+A=A$ C) $\emptyset=\Omega$

B) $AA=A$ D) $A(B+C)\neq AB+AC$

7. Hodisalar ustidagi amallardan noto'g'risini ko'rsating.

A) $AA=\emptyset$ C) $A+\emptyset=\Omega$

B) $A\emptyset=\emptyset$ D) $A+\Omega=\Omega$

8. Qarama-qarshi hodisalarni aniqlang.

A) B va B C) A va $\emptyset$

B) A va B D) $\emptyset$ va Ω

9. Hodisalar ustidagi amallardan to'g'rilarini ko'rsating.

1. $AA\neq A$ 2. $A(B+C)=AB+AC$ 3. $A+A=\emptyset$ 4. $A+BC=(A+B)(A+C)$

A) 1 va 2 B) 1 va 3 C) 2 va 4 D) 3 va 4

10. Ehtimolning klassik ta'rifi:

- A) A hodisaning ehtimoli deb, unga sharoit yaratuvchi hodisalarni hamma mumkin bo'lgan hodisalar soniga nisbatiga aytiladi
- B) A hodisaning ehtimoli deb, uning ro'y berishlar sonining sinashlar soniga nisbatiga aytiladi
- C) A hodisaning ehtimoli deb, unga sharoit yaratuvchi hodisalar sonining hamma mumkin bo'lgan elementar hodisalar soniga nisbatiga aytiladi
- D) $P(A)=k/n$, buyerda k-sinovlar soni
- E) A hodisaning ehtimoli deb, unga sharoit yaratuvchi hodisalar sonining hamma hodisalarga nisbatiga aytiladi

11. Quyidagilardan eng kattasi topilsin.

a) A_{10}^5 b) A_{10}^4 d) P_6 e) C_{10}^4 f) C_{10}^6

12. Qutida 10 ta mahsulot bo'lib, 3 tasi yaroqli. Tasodifiy ravishda 4 ta mahsulot olinganda quyidagi hodisalardan qaysisining ehtimoli katta?

- A) 3 ta yaroqli va 1 ta yaroqsiz
- B) hammasi yaroqli
- C) yarmi yaroqli
- D) 4 tasi yaroqsiz
- E) 1 ta yaroqli va 3 tasi yaroqsiz

13. Qutida 50 ta shar bo'lib, shulardan 10 tasi ko'k, 5 tasi qizil, 15 tasi pushti, qolganlari ranglanmagan. Tasodifiy olingan sharning rangli chiqish ehtimolini toping.

A) 0,5 B) 0,7 C) 1,2 D) 0,6 E) 0,8

14. Ikki xonali sonlar berilgan. Tasodifiy olingan ikki xonali sonda 5 raqami bo'lish ehtimoli topilsin.

A) 21/90 B) 19/90 C) 1/4 D) 1/5 E) 20/91

15. Qutida 15 ta detal bo'lib, ulardan 10 tasi bo'yalgan. Yig'uvchi tavakkaliga 3 ta detal oladi. Olingan detallarning bo'yalgan bo'lishi ehtimolini toping.

A) 21/91 B) 23 /98 C) 24/91 D) 21/90 E) 24/92

16. Qurilma 5 ta elementdan iborat bo'lib, ularning 2 tasi chet elda ishlab chiqarilgan. Qurilma ishga tushirilganda tasodifiy ravishda 2 ta element ulanadi. Ishga tushirishda O'zbekistonda ishlab chiqarilgan elementlar ulangan bo'lish ehtimolini toping.

A) 0,3 B) 0,6 C) 0,9 D) 0,8 E) 1,2

17. Abonent, telefon nomerini terayotib nomerning oxirgi uch raqamini eslay olmadi va bu raqamlar turli ekanligini bilgani holda ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilgan bo'lish ehtimolini toping.

. A) 1/721 B) 1/768 C) 1/722 D) 2/721 E) 1/720

18. A hodisaning roy berish ehtimoli 0,8 ga, B hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,7 ga teng bo'lsa, hech bo'lmasa bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli topilsin.

A) 0,78 B) 0,94 C) 0,98 D) 0,86 E) 0,88

19. A hodisaning roy berish ehtimoli 0,8 ga, B hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,9 ga teng bo'lsa, faqat bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli topilsin.

A) 0,72 B) 0,74 C) 0,98 D) 0,26 E) 0,28

20. Qurilish tashkiloti bazasida 60 ta isitish batareyasi bo'lib, shulardan 10 tasi Toshkentda, 5 tasi Bekobodda, 15 tasi Samarqandda, qolganlari chet elda ishlab chiqarilgan. Tasodifiy olingan batareyaning O'zbekistonda ishlab chiqarilganlik ehtimolini toping.

A) 0,5 B) 0,7 C) 1,2 D) 0,6 E) 0,8

21. A, B va C hodisalar birga ro'y beruvchi bo'lib, A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,6 ga, B hodisasining ro'y berish ehtimoli 0,8 ga va C hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,8 ga teng. Quyidagi ehtimollardan qaysisi katta?

A) uchalasining birga ro'y berishi

B) hech bo'lmasa bittasining ro'y berishi

C) faqat bittasining ro'y berishi

D) faqat ikkitasining ro'y berishi

E) birortasining ham ro'y bermasligi

22. Shartli ehtimolni hisoblash formulasini aniqlang.

A) $P(AB)=P(A) \cdot P_A(B)$

B) $P(AB)=P(A) \cdot P(B)$

C) $P(A+B)=P(A) \cdot P_A(B)$

D) $P(AB)=P(A)+P_A(B)$

E) $P(A+B)=P(A)+P_A(B)$

22. Qurilish maydonida 10 ta temir-beton plita bo'lib, 3 tasi yaroqli. Tasodifiy ravishda 4 ta temir-beton plita olinganda quyidagi hodisalardan qaysisining ehtimoli katta?

A) 3 ta yaroqli va 1 ta yaroqsiz

B) hammasi yaroqli

C) yarmi yaroqli

D) 4 tasi yaroqsiz

E) 1 ta yaroqli va 3 tasi yaroqsiz

II bob

TO'LA EHTIMOL FORMULASI. SINOVLARNI TAKRORLASH VA BERNULLI SXEMASI

II.1-§.To'la ehtimol formulasi

Faraz qilaylik $B_1, B_2, \dots, B_n$ birga ro'y bermas va to'la hodisalar gruppasini tashkil etuvchi hodisalardan birining ro'y berishi bilan A hodisasi ham ro'y berishi mumkin bo'lsin. $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalardan qaysi biri oldindan ro'y berishi ma'lum bo'lmagani uchun bularga *gipotezalar* deyiladi. $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalar ro'y bergandan

so'ng, A hodisaning ro'y berish shartli ehtimollari $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$ lar ma'lum bo'lsin.

Teorema. Birga ro'y bermas va to'la hodisalar gruppasini tashkil etuvchi $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalardan birining ro'y berishi bilan A hodisasining ro'y berish ehtimoli, shu hodisalar ehtimollari bilan A hodisasining shartli ehtimollarining mos holda ko'paytmalarining yig'indisiga teng:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)$$

Isbot. $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalar gipotezalar bo'lgani uchun, to'la gruppasi tashkil qiladi, ya'ni A hodisa faqat ulardan biri ro'y bergandagina ro'y beradi. Demak,

$$A = B_1A + B_2A + \dots + B_nA.$$

$B_1, B_2, \dots, B_n$ gipotezalar birga ro'y bermas bo'lgani uchun, $B_1A, B_2A, \dots, B_nA$ kombinatsiyalar ham birga ro'y bermas hodisalaridir. U holda qo'shish teoremasiga asosan:

$$P(A) = P(B_1A + B_2A + \dots + B_nA) = \sum_{i=1}^n P(B_iA).$$

Endi esa B_iA hodisaga ko'paytirish teoremasini qo'llaymiz:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P_{B_i}(A)$$

1-misol. Ikkita temir-beton buyumlar ishlab chiqaruvchi zavodlar bir xildagi mahsulotlar ishlab chiqarayapti. 60% (prosent) mahsulotni birinchi zavod, 40% (prosent) mahsulotni ikkinchi zavod ishlab chiqarayapti. 1- zavod ishlab chiqargan mahsulotning oliy sifatli bo'lish ehtimoli 0,7 ga, 2- zavod ishlab chiqargan mahsulotning oliy sifatli bo'lish ehtimoli 0,8 ga teng. Ishlab chiqarilgan mahsulotlardan tasodifiy olingan mahsulotning oliy sifatli bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: A – ishlab chiqarilgan mahsulotning oliy sifatli ekanini bildirsin. Mahsulotni birinchi zavod ishlab chiqarganligi hodisasini B_1 , ikkinchi zavod ishlab chiqarganligi hodisasini B_2 bilan belgilaymiz. 60% mahsulotni birinchi zavod, 40% mahsulotni ikkinchi zavod ishlab chiqargan, shuning uchun

$$P(B_1) = \frac{60\%}{100\%} = 0,6, \quad P(B_2) = \frac{40\%}{100\%} = 0,4.$$

Shartga ko'ra, agar mahsulotni birinchi zavod ishlab chiqargan bo'lsa, uning oliy sifatli bo'lish ehtimoli $P_{B_1}(A) = 0,7$, ikkinchi zavod ishlab chiqargan mahsulotning oliy sifatli bo'lishi ehtimoli $P_{B_2}(A) = 0,8$. Tasodifiy olingan mahsulotning oliy sifatli bo'lishi ehtimoli to'la ehtimol formulasiga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,8 = 0,74.$$

Demak, tasodifiy olingan mahsulotning oliy sifatli ekanligi ehtimoli 0,74 ga teng ekan.

2-misol. Avtomobilga yoqilgi quyish shoxobchasi yonidan o'tayotgan yengil avtomobilning yoqilgi quyish ehtimoli 0,8 ga, yuk avtomobilniki 0,7 va boshqa turdagi avtomobillarniki esa 0,6 ga teng. O'tayotgan avtomobillarning 85% i yengil avtomobil, 10% i yuk avtomobili ekanligi ma'lum bo'lsa, shoxobcha yonidan o'tayotgan avtomobillarning yoqilgi quyish ehtimoli topilsin.

Yechish: A- shoxobcha yonidan o'tayotgan avtomobilning yoqilgi quyish hodisasi, B_1 -uning yengil avtomobili ekanligi, B_2 - uning yuk avtomobil ekanligi, B_3 -uning boshqa turdagi avtomobil ekanligi bo'lsin. U holda

$$P(B_1) = \frac{85\%}{100\%} = 0,85, \quad P(B_2) = \frac{10\%}{100\%} = 0,1, \quad P(B_3) = \frac{5\%}{100\%} = 0,05$$

$$P_{B_1}(A) = 0,8, \quad P_{B_2}(A) = 0,7, \quad P_{B_3}(A) = 0,6.$$

Bulardan, $A = AB_1 + AB_2 + AB_3$ va shoxobcha yonidan o'tayotgan avtomobillarning

yoqilgi quyish ehtimoli $P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) +$

$$P(B_3)P_{B_3}(A) = 0,85 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,7 + 0,05 \cdot 0,6 = 0,68 + 0,07 + 0,03 = 0,78$$

ya'ni, $P(A) = 0,78$ bo'ladi.

II.2-§. Gipotezalar ehtimoli. Beyes formulasi

Faraz qilaylik, $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalarning to'la gruppasini tashkil etuvchi va birga ro'y bermas hodisalar bo'lsin. Ulardan birortasining ro'y berishi bilan A hodisasi ro'y berishi mumkin bo'lsin. Biz to'la ehtimol formulasi bilan $B_1, B_2, \dots, B_n$

hodisalardan birining ro'y berishi bilan A hodisaning ro'y berish ehtimolini hisobladik. Endi A hodisasi ro'y bergandan keyin $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalar(gipotezalar)ning ro'y berish ehtimolini hisoblaymiz. A hodisa ro'y bergandan keyingi $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalarning ro'y berish ehtimollari $P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$ larni hisoblaymiz. Buning uchun erksiz hodisalarni ko'paytirish teoremasidan foydalanamiz:

$$P(A \cap B_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_A(A)$$

bundan $P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_A(A)$. Bu tenglikdan $P_A(B_1)$ ni topamiz:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_A(A)}{P(A)}, P(A) > 0$$

$P_A(B_1)$ - A hodisa ro'y bergandan keyin B_1 hodisaning ro'y berish ehtimoli. Xuddi shunday, $P_A(B_2)$ - A hodisa ro'y bergandan keyin B_2 ning ro'y berish ehtimoli.

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_A(A)}{P(A)}, P(A) > 0$$

va hokazo. Umumiy holda esa A hodisa ro'y bergandan keyingi B_i hodisaning ro'y berish ehtimoli

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_A(A)}{P(A)}, P(A) > 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunga *Beyes formulasi* deyiladi. Bu yerda $P(A)$ – to'la ehtimol formulasidan topiladi.

1-misol. Temir-beton mahsulotlari zavodning ikkita sexi bir xil mahsulot ishlab chiqarayapti. Ishlab chiqarilgan mahsulotning $3/5$ qismini 1-sex, $2/5$ qismini 2-sex ishlab chiqaradi, 1-sexda ishlab chiqarilgan mahsulotning yaroqsiz bo'lish ehtimoli $0,1$ ga, 2-sexda ishlab chiqarilgan mahsulotning yaroqsiz bo'lish ehtimoli $0,05$ ga teng. Texnik kontrol bo'limi tasodifiy olingan mahsulotni yaroqsiz deb topdi. Shu mahsulot 1-sexda ishlab chiqarilgan bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: B_1 – mahsulotning 1-sexda ishlab chiqarilganligini, B_2 – mahsulotning 2-sexda ishlab chiqarilganligini bildirsin. U holda

$$P(B_1) = 3/5 = 0,6, \quad P(B_2) = 2/5 = 0,4$$

A hodisasi ishlab chiqarilgan mahsulotlarning yaroqsiz ekanini bildirsa, shartga ko'ra 1-sexda ishlab chiqarilgan mahsulotning yaroqsiz bo'lish ehtimoli $P_{B_1}(A) = 0,1$, 2-sexda ishlab chiqarilgan mahsulotning yaroqsiz bo'lish ehtimoli $P_{B_2}(A) = 0,05$.

Beyes formulasiga asosan ishlab chiqarilgan yaroqsiz mahsulotning 1-sexga tegishli bo'lish ehtimolini topamiz:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,1}{0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,05} = \frac{0,06}{0,08} = \frac{3}{4}.$$

2-misol. II.1-§ dagi 2-misolda A hodisasi yuz bergan bo'lsin, ya'ni shoxobcha yonidan o'tayotgan avtomobil yoqilgi quygan bo'lsin. Shu avtomobilning yengil avtomobil, yuk avtomobili, boshqa turdagi avtomobil ekanligi ehtimollari topilsin.

Yechish: $P_A(B_1)$ - agar shoxobcha yonidan o'tayotgan avtomobilning yoqilgi quyganligi ma'lum bo'lsa, uning yengil avtomobil ekanligi ehtimoli

$$\text{bo'lsa, u holda } P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,85 \cdot 0,8}{0,78} = \frac{0,68}{0,78} = \frac{34}{39}$$

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,1 \cdot 0,7}{0,7} = \frac{7}{78} \quad \text{va}$$

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3)P_{B_3}(A)}{P(A)} = \frac{0,05 \cdot 0,6}{0,78} = \frac{0,03}{0,78} = \frac{1}{26}.$$

II.3-§. Bernulli formulasi

Faraz qilaylik, n marta erkli sinovlar o'tkazilgan bo'lsin. Agar bir necha marta sinovlar o'tkazilgan bo'lib, har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli boshqa sinovlar natijasiga bog'liq bo'lmasa, bunday sinovlarga *erkli sinovlarni takrorlash* deyiladi. Har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil (o'yin

kubini, tangani tashlaganda), yoki har xil (gugurt qutisini tashlaganda) bo'lishi mumkin.

Biz har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil bo'lib, p ga teng bo'lgan va ro'y bermasligi $q = 1 - p$ ga teng bo'lgan holni qaraymiz.

A_i - A hodisaning i -sinovda ro'y berishini, $\overline{A_i}$ - A hodisaning i -sinovda ro'y bermasligini bildirsin, bu yerda $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas bo'lganda $P_n(k)$ - n ta sinovda hodisaning ro'y berish k marta ro'y berib, $n - k$ marta ro'y bermaslik ehtimolini bildirsin. U holda

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Bunga *Bernulli formulasi* deyiladi.

1-misol. Tangani 6 marta tashlaganda 4 marta «gerb» tushish ehtimoli topilsin.

Yechish. Sinovlar soni $n = 6$ ta, hodisaning ro'y berish soni $k = 4$ ta. Har bir sinovda hodisaning ro'y berish va ro'y bermaslik ehtimollari mos ravishda $p = 1/2$, $q = 1/2$ bo'lsin. Demak,

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{64} = \frac{15}{64}.$$

Murakkab ehtimollarni bevosita hisoblashda quyidagilardan keyinchalik ko'p foydalaniladi:

$P_n(k_1) = C_n^{k_1} p^{k_1} q^{n-k_1}$ - bu n ta sinovda hodisaning ko'pi bilan k_1 marta ro'y berish ehtimoli.

$P_n(k_2) = C_n^{k_2} p^{k_2} q^{n-k_2}$ - bu n ta sinovda hodisaning kamida k_2 marta ro'y berish ehtimoli.

$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = P_n(k_1) - P_n(k_2 + 1)$ - bu n ta sinovda hodisaning kamida k_1 marta, ko'pi bilan k_2 marta ro'y berish ehtimoli.

2-misol. Qurilish maydonchasida poydevorning o'ni simga osilgan temir bolg'a yordamida mustahkamlanmoqda. Temir bolg'a har tashlanganda uning

yerga kuchsiz zarb bilan tushish ehtimoli 0,05 ga teng. Temir bolg`a 10 marta tashlanganda, uning 7 marta kuchsiz zarb bilan tushish ehtimoli topilsin.

Yechish. Bernulli formulasidan foydalanamiz. $n=10, k=7, p=0,05. q=0,95$ bo`lgani uchun,

$$P_n(k)=P_{10}(7)=C_{10}^7 \cdot 0,05^7 \cdot 0,95^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 7,8125 \cdot 10^{-10} \cdot 0,857375 = \\ = 120 \cdot 6,6982421 \cdot 10^{-10} = 8,0378905 \cdot 10^{-8} \text{ bo`ladi.}$$

II.4-§.Laplasning lokal teoremasi

Faraz qilaylik, n marta erkli sinovlar o`tkazilgan bo`lib, har bir sinovda hodisaning ro`y berish ehtimoli o`zgarmas bo`lsin. Biz  $P_n(k)$  -  $n$  marta sinovda hodisaning  $k$  marta ro`y berish ehtimolini Bernulli formulasi bilan hisobladik. Agar n va k yetarlicha katta sonlar bo`lsa, Bernulli formulasidan foydalanish ancha qiyinlashadi, chunki  $C_n^k$  ni hisoblash murakkablashadi. Masalan  $n=150$ ,  $k=80$ ,  $p=1/2$ ,  $q=1/2$  bo`lsin, u holda

$$P_{150}(80) = C_{150}^{80} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{80} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{70}$$

ehtimolni topish juda katta hisoblashlarga olib keladi. Shuning uchun bunday hollarda Laplasning lokal teoremasidan foydalaniladi.

Teorema. Agar har bir sinovda hodisaning ro`y berish ehtimoli o`zgarmas bo`lib, nol va birdan ( $0 < p < 1$ ) farqli bo`lsa, u holda $P_n(k)$ - ehtimolning taqribiy qiymati quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot f(x), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Bu yerda $f(-x) = f(x)$ - juft funksiya bo`lib, uning qiymatlarini ko`pchilik adabiyotlarning oxiridagi ilovadan topamiz.

II.5-§.Laplasning integral teoremasi

Faraz qilaylik, har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas bo'lib, $P_n(k_1, k_2)$ - n marta sinovda hodisaning k_1 bilan k_2 oralig'ida ro'y berish ehtimolini hisoblash talab qilingan bo'lsin. Bu ehtimolni quyidagicha hisoblash mumkin:

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \dots + P_n(k_2)$$

Demak bunda $k_2 - k_1 + 1$ ta ehtimolning yig'indisi qatnashadi va bu esa juda ko'p hisoblashga olib keladi. Shuning uchun bunday hollarda Laplasning integral teoremasidan foydalaniladi.

Teorema: Agar har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas bo'lib, nol va birdan farqli ($0 < p < 1$) bo'lsa, $P_n(k_1, k_2)$ - n marta sinovda hodisaning k_1 bilan k_2 oralig'ida ro'y berish ehtimoli taqriban quyidagi aniq integralga teng bo'ladi:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

bu yerda

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Bu integralga o'zgartirish kiritamiz:

$$\begin{aligned} P_n(k_1, k_2) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned} \quad (*)$$

Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad (**)$$

bu yerda

$$x_1 = \xi_1 - np \sqrt{npq}, \quad x_2 = \xi_2 - np \sqrt{npq}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{(-t^2/2)} dt.$$

$\Phi(x)$ uchun ham maxsus jadvallar tuzilgan.

II.6-§.Takror erkli sinovlarda nisbiy sanoq(chastota)ning o'zgarmas ehtimoldan chetlanishining ehtimoli

Faraz qilaylik, n marta erkli sinovlar o'tkazilgan bo'lib, har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas, hamda nol va birdan farqli bo'lsin ($0 < p < 1$). Bizdan nisbiy sanoq(chastota)ning o'zgarmas ehtimoldan chetlanishining absolyut qiymati bo'yicha oldindan berilgan $\varepsilon > 0$ sonidan kichik, ya'ni

$$|\mu/n - p| < \varepsilon \quad (1)$$

bo'lish ehtimolini hisoblash talab qilingan bo'lsin. Laplasning integral teoremasidan kelib chiqqan xulosaga asosan

$$\begin{aligned} P\left(-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq (\mu - np) / \sqrt{npq} \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \end{aligned}$$

Nihoyat, qavs ichidagi tengsizliklarni ularga teng kuchli bo'lgan dastlabki tengsizlik bilan almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(|\mu/n - p| < \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{n/pq}\right)$$

II.7-§.Eng katta ehtimolli son

Faraz qilaylik, n ta erkli sinovlar o'tkazilgan bo'lib, har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas bo'lsin.

Ta'rif. Eng katta ehtimolli son deb, shunday k_0 songa aytiladiki, n ta sinovda hodisaning k_0 marta ro'y berish ehtimoli boshqa ehtimollardan katta bo'ladi, ya'ni

$$P_n \binom{n}{k_0} p^{k_0} q^{n-k_0} \geq P_n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Agar sinovlar soni n ta bo'lsa, k_0 ni topish uchun quyidagi ikkilangan tengsizlikdan foydalanamiz:

$$np - q \leq k_0 < np + p.$$

Bu yerda uchta hol bo'lishi mumkin:

1. Agar np butun son bo'lsa, k_0 shu butun songa teng bo'ladi : $k_0 = np$
2. Agar $np - q$ butun son bo'lsa, u holda

$$np + p - (np - q) = np + p - np + q = p + q = 1$$

bo'lib, $np + p$ ham butun son bo'ladi. Bunda eng katta ehtimolni takrorlash soni ikkita bo'ladi:

$$k_0 = np - q \text{ va } k_0 + 1 = np + p$$

3. Agar $np - q$ kasr son bo'lsa, u holda $np + p$ ham kasr son bo'lib, k_0 shu kasr sonlar orasidagi butun songa teng bo'ladi.

Misol. Har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli $p = 1/3$ bo'lsa, 50 marta sinovda hodisa ro'y berishining eng katta ehtimolli soni topilsin.

Yechish. Shartga asosan $p = 1/3$, $q = 2/3$, $n = 50$.

Formulaga asosan:

$$\begin{aligned} 1. \quad np &= 50 \cdot \frac{1}{3} = 50/3 \\ np - q &\leq k_0 < np + p. \quad 2. \quad np - q = 50 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 48/3 = 16 \\ np + p &= 50 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 51/3 = 17, \quad k_0 = 16, k_0 + 1 = 17. \end{aligned}$$

Demak, eng katta ehtimolli son k_0 ikkita qiymatga ega (16 va 17)

II.8-§.Puasson formulasi

Faraz qilaylik, n marta erkli sinovlar o'tkazilgan bo'lib, har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas bo'lsin. Agar n yetarlicha kichik bo'lsa, $P_n(k)$ ehtimolni Bernulli formulasi, agar n katta bo'lsa, Laplasning lokal teoremasi bilan hisobladik.

Agar sinovlar soni katta bo'lsa Bernulli formulasida $P_n(k)$ ni hisoblash qiyinchiliklarga olib keladi. Ammo hodisaning ehtimoli kichik bo'lsa, uni Laplasning lokal teoremasida hisoblash xatoga yo'l qo'yadi. Shuning uchun sinovlar soni katta bo'lib, hodisaning ro'y berish ehtimoli kichik bo'lganda $P_n(k)$ ni hisoblashda *Puasson formulasidan* foydalaniladi. Bu formulani bevosita Bernulli formulasidan foydalanib keltirib chiqarishimiz mumkin.

$$P_n(k \leq k_1) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k_1 - 1)$$

$\lambda = np$ belgilash kiritamiz, bundan $p = \lambda / n$, buni yuqoridagi formulaga qo'ysak

$$P_n(k \geq k_2) = P_n(k_2) + P_n(k_2 + 1) + \dots + P_n(n)$$

Endi $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak,

Demak,

$$P_n(k_1 \leq k_0 \leq k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \dots + P_n(k_2)$$

Misol. Zavod ishlab chiqargan mahsulotlardan 10000 tasini omborga yubordi. Har bir mahsulotning yo'lda ishdan chiqish ehtimoli 0,0001 bo'lsa, mahsulotlar omborga yetguncha 3 tasining ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

Yechish: Shartga ko'ra $n = 10000$, $p = 0,0001$, $k = 3$, λ ni topamiz.

$\lambda = np = 10000 \cdot 0,0001 = 1$. Puasson formulasiga asosan:

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k! = P_{10000}(3) = \frac{1 \cdot e^{-1}}{3!} = 1/6e \approx 0,06$$

Takrorlash uchun savollar

1. Hodisalar yig'indisi, ko'paytmasi tushunchalari.
2. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish tushunchalari.
3. Shartli ehtimol ta'rifi.
4. Hech bo'lmasa bitta hodisani ro'y berish ehtimolining turlicha talqin qilish.

5. To'la ehtimol formulasi.
6. Gipotezalar ehtimoli.
7. Binomial sxema deganda nimani tushunasiz?
8. Erkli sinovlar(tajribalar) qanday aniqlanadi?
9. Bernulli teoremasi qachon qo'llaniladi?
10. Puasson formulasini ta'riflang.
11. Laplasning lokal teoremasi qanday shartlarda bajariladi?
12. Laplasning integral teoremasi qanday hollarda qo'llaniladi?
13. Eng katta ehtimolli son qanday topiladi?
14. Nisbiy sanoq(chastota)ning o'zgarma ehtimoldan chetlanishining ehtimoli qanday aniqlanadi?

Mavzu bo'yicha test savollari

1. Sinovda A yoki B hodisa ro'y berishi mumkin. A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,6 ga, B hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,7 ga teng bo'lsa, ikkita sinovda hech bo'lmasa bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli topilsin.
a) 0,78 b) 0,42 d) 0,98 e) 0,86 f) 0,88
2. Zavoddagi 1-sexda ishlab chiqarilgan mahsulotning a'lo sifatli bo'lish ehtimoli 0,6 ga, 2-sexdagi 0,8 ga teng. Mahsulotning 45% i 1-sexda, qolganlari 2-sexda ishlab chiqarilgan. Zavod ishlab chiqargan mahsulotning a'lo sifatli bolish ehtimoli topilsin.
a) 0,67 b) 0,88 d) 0,48 e) 0,69 f) 0,71
3. Qutida 60 ta shar bo'lib, shulardan 10 tasi ko'k, 5 tasi qizil, 15 tasi pushti va qolganlari ranglanmagan. Tasodifiy olingan sharning rangli chiqish ehtimolini toping.
a) 0,5 b) 0,7 d) 1,2 e) 0,6 f) 0,8
4. To'la ehtimol formulasini ko'rsating.
a) $P(AB)=P(A) \cdot P_A(B)$
b) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
d) $P(A \cdot B_j) = P(A) P_A(B_j) = P(B_j) \cdot P_{B_j}(A)$

$$e) P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

$$f) P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

5. Bayes formulasini aniqlang.

$$a) P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

$$b) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$d) P(A \cdot B_j) = P(A) P_A(B_j) = P(B_j) \cdot P_{B_j}(A)$$

$$e) P_A(B_j) = \frac{P(B_j) \cdot P_{B_j}(A)}{P(A)}$$

$$f) P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

6. A, B va C hodisalar birga ro'y beruvchi hodisalar. A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,6 ga, B hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,8 ga va C hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,8 ga teng bo'lsa, qo'yidagi ehtimollardan qaysisi katta?

a) uchalasining birga ro'y berishi

b) hech bo'lmasa bittasining ro'y berishi

d) faqat bittasining ro'y berishi

e) faqat ikkitasining ro'y berishi

f) birortasining ham ro'y bermasligi

7. Bernulli formulasini aniqlang.

$$a) P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \quad b) P_n(k) = \frac{k!}{n!(n-k)!} p^k q^{n-k} \quad d) P_n(k) = \frac{n!}{k!} p^k q^{n-k}$$

$$e) P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} q^{n-k} p^k \quad f) P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} q^n p^k$$

8. 366 ta erkli tajriba utkazilib, ularning har birida A hodisaning yuz berish ehtimoli 0,2 ga teng. A hodisaning eng katta ehtimolli yuz berishlar soni topilsin.

a) 72

b) 73

d) 71

e) 70

f) 74

9. Texnologik jarayonga ko'ra ishlab chiqarilayotgan mahsulotlarning 75%i oliy navlidir. 150 ta mahsulotdan oliy navlilarining eng katta ehtimolli soni topilsin.

a) 112

b) 113

d) 114

e) 115

f) 111

10. Yo'lovchining poyezd jo'nashiga kech qolish ehtimoli 0,003 ga teng. 800 ta yo'lovchidan 3 tasining kech qolish ehtimoli topilsin (Puasson formulasi).

- a) $(24^3/3)e^{-2,4}$ b) $(2,4^3/3)e^{-2,4}$ d) $(2,4^{3/2}/3)e^{-2,4}$
 e) $(2,4^3/6)e^{-2,4}$ f) $(2,4^3/6)e^{-2,4}$

11. Ishlab chiqarish jarayonida mahsulotning yaroqsiz bo'lish ehtimoli 0,015 ga teng. 500 ta mahsulotdan 2 tasining yaroqsiz bo'lishi ehtimoli topilsin (Puasson formulasi).

- a) $\frac{7,5}{3!}e^{-7,5}$ b) $7,5 \cdot e^{-7,5}$ d) $\frac{7,5^2}{2!}e^{-7,5}$
 e) $\frac{7,5^2}{2!}e^{-7,5}$ f) $\frac{7,5^2}{3!}e^{-7,5}$

12. Qishloqda yashovchi oilaning shaxsiy otga ega bo'lish ehtimoli 0,4 bo'lsa, 100 ta oiladan 50 tasining shaxsiy otga ega bo'lish ehtimolini toping (Laplasning integral teoremasi).

- a) 0,0106 b) 0,0204 d) 0,0108
 e) 0,0107 f) 0,0171

13. Zavod ishlab chiqargan mahsulotning 1 – sort bo'lish ehtimoli 0,84 bo'lsa, ishlab chiqarilgan 210 ta mahsulotdan kamida 160 tasi va ko'pi bilan 180 tasi 1 – sort bo'lish ehtimolini toping (Laplasning integral teoremasi).

- a) 0,97 b) 0,74 d) 0,86 e) 0,56 f) 0,64

14. Bitta uyda yashovchi kvartira egasining kommunal to'lovlarni o'z vaqtida to'lash ehtimoli 0,7 bo'lsa, 2100 ta kvartira egalaridan kamida 1400 tasining va ko'pi bilan 1500 tasining kommunal to'lovlarni o'z vaqtida to'lash ehtimolini toping (Laplasning integral teoremasi).

- a) 0,93 b) 0,87 d) 0,76 e) 0,83 f) 0,98

III bob. TASODIFIY MIQDORLAR. DISKRET VA UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLAR

III.1-§. Tasodifiy miqdorlar. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar

Ishlab chiqarish jarayonida sifatli mahsulotlar soni eng asosiy faktorlardan biri bo'lib hisoblanadi. Har bir ishlab chiqarilgan mahsulotning sifatli bo'lishi esa, juda ko'p tasodifiy omillarga bog'liq. Mahsulot sifati yangi texnologiyalarning joriy etilishiga, xom ashyoning sifatli bo'lishiga, stanokning yaxshi ishlashiga, ishchining mahoratiga, kayfiyatiga, sharoitiga va hokazolarga bog'liq-ki, bu faktorlarning hammasini to'liq hisobga olib bo'lmaydi. Agar bu omillardan ijobiylari ko'p bo'lsa, sifatli mahsulotlarning soni ham ko'p bo'ladi.

Misol. O'yin soqqasini tashlaganda 1,2,3,4,5,6 ochkolardan bittasi tushadi, lekin ko'p marta tashlaganimizda shu ochkolardan 6 ning necha marta tushishi aniq emas. Chunki bu aniq hisobga olib bo'lmaydigan juda ko'p tasodifiy sabablarga bog'liq.

1-ta'rif. *Tasodifiy miqdor* deb, tajriba natijasida qabul qilinishi mumkin bo'lgan qiymatlardan bitta va faqat bittasini qabul qiladigan va bu qiymatlarni qabul qilishi juda ko'p, hisobga olib bo'lmaydigan darajadagi tasodifiy sabablarga bog'liq bo'lgan miqdorlarga aytiladi.

1-misol. 100 ta ishlab chiqarilgan mahsulotlardan sifatlilarining soni tasodifiy miqdor bo'lib, 0,1,2,...,100 qiymatlardan faqat bittasini qabul qiladi.

2-misol. Miltiqlardan otilgan o'qning borib tushish masofasi tasodifiy miqdor bo'lib, qandaydir $[a, b]$ oraliqdagi qiymatlardan albatta bittasini qabul qiladi.

1-misolda tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari diskret (0 va natural sonlardan iborat). 2-misolda esa tasodifiy miqdor $[a, b]$ oraliqdagi harqanday haqiqiy sonlarni qabul qilishi mumkin. Shunga ko'ra, tasodifiy miqdorlarni shartli ravishda diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlarga ajratamiz.

2-ta’rif. Ma’lum ehtimol bilan ayrim, chekli yoki sanoqli aniq qiymatlarni qabul qiluvchi miqdorlarga *diskret tasodifiy miqdorlar* deyiladi.

Masalan: tanga 1000 marta tashlanganda “gerb” tushishlar soni, o’yin soqqasini 100 marta tashlaganda 5 ochko tushishlar soni, n marta erkli sinovlarda hodisaning ro’y berish soni k -diskret tasodifiy miqdorlardir. Diskret tasodifiy miqdorlarning qabul qilishi mumkin bo’lgan qiymatlari to’plami chekli yoki cheksiz (sanoqli) bo’ladi.

3-ta’rif. Chekli yoki cheksiz oraliqdagi qiymatlarning hammasini qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlarga *uzluksiz tasodifiy miqdorlar* deyiladi.

Masalan: otilgan o’qning nishondan chetlanishi, biror kattalikni o’lchashda yo’l qo’yiladigan xatolar, kesilgan materialning uzunligi, bo’yining o’lchami, enining uzunligi, ajratilgan mahsulotning og’irligi, hajmi va hokazolar uzluksiz tasodifiy miqdorlardir. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning qabul qilishi mumkin bo’lgan qiymatlari soni faqat cheksizdir. Tasodifiy miqdorlarni $X, Y, Z, \dots$ -katta harflar bilan va ularga mos qiymatlarni esa $x, y, z, \dots$ – kichik harflar bilan belgilaymiz.

III.2-§. Diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni

Faraz qilaylik, bizga X tasodifiy miqdor va uning qabul qilishi mumkin bo’lgan qiymatlari $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar berilgan bo’lsin. Biz bu qiymatlarga mos ehtimollarni topamiz.

1-ta’rif. Diskret taqsimlangan tasodifiy miqdor X ning *taqsimot qonuni* deb, uning qabul qilishi mumkin bo’lgan qiymatlari bilan, ularga mos ehtimollar orasidagi moslikka aytiladi. Bu moslik quyidagi jadvaldagi kabi ifodalanadi:

$$\begin{array}{c} X \quad x_1 \quad x_2 \dots x_n \\ P \quad p_1 \quad p_2 \dots p_n \end{array}$$

bu yerda

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Bu moslikka *taqsimot jadvali* ham deyiladi. Ehtimollarni hisoblovchi formulalarning analitik ko’rinishi esa

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\lambda = np$ va hokazo kabi ko'rinishda bo'ladi,

Misol. Tangani 5 marta tashlaganda “gerb” tushishlar sonini ifodalovchi tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni topilsin.

Yechish. Tanga bir marta tashlanganda “gerb” tushish ehtimoli $p = \frac{1}{2}$

va tushmaslik ehtimoli esa $q = 1 - p = \frac{1}{2}$ ga teng.

Bernulli formulasi $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ dan foydalanamiz. 5 marta tangani tashlaganda tasodifiy miqdor $k: 0, 1, 2, 3, 4, 5$ qiymatlarni qabul qiladi. Endi shu qiymatlarga mos ehtimollarni hisoblaymiz:

$$P_5(0) = C_5^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}, \quad P_5(1) = C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32},$$

$$P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}, \quad P_5(3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32},$$

$$P_5(4) = C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}, \quad P_5(5) = C_5^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}.$$

Endi k ning taqsimotini tuzamiz.

k	0	1	2	3	4	5
$P_n(k)$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

Tekshirish: $\frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = 1.$

III.3-§. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimotlari.

Binomial taqsimot.

Binomial taqsimot. Faraz qilaylik, n marta erkli sinovlar o'tkazilgan bo'lib, har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli p va ro'y bermaslik

ehtimoli $q = 1 - p$ bo'lsin. Bu yerda tasodifiy miqdor k ning qiymatlari $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$ bo'ladi. Uning taqsimoti $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ (Bernulli formulasi) bilan aniqlanib, quyidagi jadval ko'rinishda bo'ladi:

$X = k$	0	1	2	...	k	...	$n-1$	n
$P_n(k)$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^{n-1} p^{n-1} q$	$C_n^n p^n q^0$

Nyuton binomini qaraymiz.

$$(q + p)^n = C_n^0 q^n p^0 + C_n^1 q^{n-1} p^1 + \dots + C_n^k q^{n-k} p^k + \dots + C_n^n q^0 p^n = 1$$

Yuqoridagi taqsimotning mos ehtimollar binomning koeffitsientlari bilan mos tushganligi uchun bu taqsimotga *binominal taqsimot* deyiladi. Yuqorida keltirilgan misoldagi taqsimot ham binomial taqsimotdir.

Puasson taqsimoti. Puasson taqsimotining analitik ko'rinishi

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda = np$$

Buning jadval ko'rinishi:

$X = k$	0	1	2	3	
$P_n(k)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda}$	

Bu *Puasson taqsimoti* deyiladi.

Geometrik taqsimot. Faraz qilaylik, erkli sinovlar o'tkazilgan bo'lib, har bir sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ($0 < p < 1$) va ro'y bermaslik ehtimoli $q = 1 - p$ ga teng bo'lsin. Tajribani A hodisa ro'y berguncha davom ettiramiz. Agar A hodisa k - sinovda ro'y bersa, demak oldingi $k - 1$ ta sinovda ro'y bermagan bo'ladi. Bu yerda tasodifiy miqdor X hodisaning 1 marta ro'y berishi uchun o'tkazilgan sinashlar soni uning qabul kilishi mumkin bo'lgan

qiymatlari $x_1, x_2, \dots$. Demak, erkli hodisalarni ko'paytirish teoremasiga asosan

hodisaning k - sinovda ro'y berishi $P(X = k) = pq^{k-1}$ (*)

k ning $1, 2, 3, \dots$, qiymatlarini formulaga qo'yib quyidagi qatorga ega bo'lamiz:

$p, pq, pq^2, \dots, pq^{k-1}, \dots$. Bu qator geometrik progressiyani tashkil etadi.

Shuning uchun quyidagi taqsimot *geometrik taqsimot* deyiladi.

$X = k$	1	2	3		k	...
$P(X = k)$	p	pq	pq^2		pq^{n-k}	

Buyerda $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$.

Misollar

1-misol. Merganning nishonga tegizish ehtimoli barcha sinovlar uchun bir xil bo'lib, 0,8 ga teng. Mergan 4 marta o'q uzgan bo'lsa, X tasodifiy miqdor-tekkan o'qlar sonining taqsimot qonuni topilsin.

Yechish: Bu yerda X tasodifiy miqdor binomial taqsimot qonuniga bo'ysunadi, shu sababli u 0,1,2,3,4 qiymatlarni qabul qiladi. Bernulli formulasiga asosan ($n=4, p=0,8, q=1-p=0,2$):

$$P(X = 0) = C_4^0 \cdot p^0 \cdot q^4 = 1 \cdot 1 \cdot 0,2^4 = 0,0016, \quad P(X = 1) = C_4^1 \cdot p^1 \cdot q^3 = 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2^3 = 0,0256$$

$$P(X = 2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1536, \quad P(X = 3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q^1 = 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096$$

$$P(X = 4) = C_4^4 \cdot p^4 \cdot q^0 = 1 \cdot 0,8^4 \cdot 1 = 0,4096$$

Taqsimot jadvalini yozamiz.

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Tekshirish: $\sum_{i=1}^5 P_i = 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 + 0,4096 = 1$

2-misol. O'yin soqqasi 5 marta tashlangan bo'lsa, X tasodifiy miqdor – 3 ochko chiqishlar soni bo'lganda, taqsimot qonuni topilsin.

Yechish: Taqsimot binomial bo'lgani uchun, Bernulli formulasidan foydalanamiz $\left(n = 5, p = \frac{1}{6}, q = 1 - p = \frac{5}{6} \right)$:

$$P(X=0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776}; \quad P(X=1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3125}{7776},$$

$$P(X=2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1250}{7776}, \quad P(X=3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{250}{7776},$$

$$P(X=4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{25}{7776}, \quad P(X=5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot 1 = \frac{1}{7776}$$

Taqdimot jadvalini tuzamiz:

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{3125}{7776}$	$\frac{3125}{7776}$	$\frac{1250}{7776}$	$\frac{250}{7776}$	$\frac{25}{7776}$	$\frac{1}{7776}$

Tekshirish: $\sum_{i=1}^5 P_i = \frac{3125}{7776} + \frac{3125}{7776} + \frac{1250}{7776} + \frac{250}{7776} + \frac{25}{7776} + \frac{1}{7776} = 1$

3-misol. Shahar avtomatik telefon stantsiyasiga 1 soat mobaynida tushadigan chaqiriqlarning o'rtacha soni k ta ekanligi ma'lum. Chaqiriqlar soni vaqtning harqanday oralig'ida Puasson qonuniga asosan taqsimlangan deb hisoblab, stantsiyaga 2 minut vaqt oralig'ida 3 ta chaqiriq tushish ehtimoli topilsin.

Yechish: 1 soat (60 minut) da k ta chaqiriq tushganligi uchun, 2 minutda tushadigan chaqiriqlar soni

$$a = 2(k/60) = k/30$$

bo`ladi. Puasson formulasiga asosan, 2 minutda 3 ta chaqiriq tushish ehtimolini

topamiz:

$$P_3 = \frac{(k/30)^3}{3!} e^{-(k/30)}$$

bo`ladi.

4-misol: O`q otuvchi kishi nishon qayerda ekanligini bilmasdan, atrofga otadigan o`qlar sonining taqsimot qonuni aniqlansin.

Yechish: Buerda taqsimot geometrik bo`ladi, shu sababli tegishli ehtimollarni hisoblaymiz. Bu taqsimot qonunining ehtimolni hisoblash formulasi

$$P(X = k) = p \cdot q^{k-1} \text{ dan foydalansak } p = 0,01, \quad q = 0,99,$$

$$P(X = 1) = p = 0,01, \quad P(X = 2) = pq = 0,01 \cdot 0,99 = 0,0099, \quad P(X = 3) = pq^2 = 0,01^2$$

$$P(X = 4) = pq^3 = 0,01 \cdot 0,99^3, \dots, \quad P(X = k) = 0,01 \cdot 0,99^{k-1}, \text{ va } h \cdot k$$

Taqsimot qonunini yozamiz:

X	1	2	3	4	...	k	...
P	0,01	0,01·0,99	0,01·0,99 ²	0,01·0,99 ³	...	0,01·0,99 ^k	...

Tekshirish:

$$0,01 + 0,01 \cdot 0,99 + 0,01 \cdot 0,99^2 + \dots + 0,01 \cdot 0,99^k + \dots = \frac{0,01}{1 - 0,99} = 1$$

5-misol. Merganda 4 o`q bo`lib, u nishonga 1 marta tekizguncha otadi. X tasodifiy miqdor – merganning nishonga otgan o`qlari sonining taqsimot qonuni topilsin. Har safar merganning nishonga tegizish ehtimoli $P = 0,7$ deb olinsin/

Yechish: Buerda X tasodifiy miqdor 1,2,3 va 4 qiymatlarni qabul qiladi. Geometrik taqsimot qonunidan ($X = 1,2,3$) uchun foydalanamiz:

$$P(X = 1) = p = 0,7;$$

$$P(X = 2) = pq = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49;$$

$$P(X = 3) = pq^2 = 0,7 \cdot 0,7^2 = 0,7 \cdot 0,49 = 0,343 \text{ ni topamiz.}$$

4-o`q otilgach, otish to`xtatiladi (o`qning tekkan yoki tegmaganligidan qat`iy nazar). Shu sababli

$$\begin{aligned}
 P(X=4) &= P(\text{dastlabki 3 ta o`q tegmadi va 4-o`q tegdi, yoki dastlabki 3 ta o`q tegmadi va 4-o`q ham tegmadi}) = P(\text{dastlabki 3 ta o`q tegmadi va 4-o`q tegdi}) + \\
 &+ P(\text{dastlabki 3 ta o`q tegmadi va 4-o`q ham tegmadi}) = pq^3 + q^4 = \\
 &= 0,7 \cdot 0,3^3 + 0,3^4 = 0,0189 + 0,0081 = 0,027
 \end{aligned}$$

Taqsimot jadvalini tuzamiz:

X	1	2	3	4
P	0,7	0,21	0,063	0,027

Tekshirish: $\sum_{i=1}^4 P_i = 0,7 + 0,21 + 0,063 + 0,027 = 1$

III.4- §. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va uning xossalari.

Tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni uni ko'p tomonlama ifodalaydi, lekin tasodifiy miqdorlarni o'rganishda bundan tashqari ba'zi asosiy tushunchalarni, ya'ni o'rta qiymat, chetlanishi kabi tushunchalarni kiritishga to'g'ri keladi. Faraz qilaylik, diskret tasodifiy miqdor berilgan bo'lsin.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

bu yerda

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Ta'rif. Diskret taqsimlangan tasodifiy miqdorning *matematik kutilishi* deb, uning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bilan ularga mos ehtimollari ko'paytmalarining yig'indisiga aytiladi:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Yoki

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Misol. O'yin soqqasi 3 marta tashlanganda 6 ochko tushish soni bilan aniqlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

Oldin taqsimotini topamiz.

X	0	1	2	3
P	125/216	75/216	15/216	1/216

Endi $M(X)$ ni hisoblaymiz.

$$M(X) = 0 \cdot 125/216 + 1 \cdot 75/216 + 2 \cdot 15/216 + 3 \cdot 1/216 = \\ = \frac{75 + 30 + 3}{216} = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$$

1- xossa. O'zgarmas sonning matematik kutilishi o'ziga teng:

$$M(C) = C.$$

2-xossa. O'zgarmas sonni matematik kutilish belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$M(CX) = CM(X).$$

3-xossa. Ikki ta o'zaro erkli tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining (yig'indisining) matematik kutilishi shu tasodifiy miqdorlar matematik kutilishlari ko'paytmasiga (yig'indisiga) teng:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y), \quad M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Umumiy holda

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)$$

Matematik kutilishning ma'nosi uning o'rta qiymatga taxminan tengligidir:

$$M(X) \approx \tilde{x}.$$

n ta erkli sinovlar takrorlanganda va har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli p bo'lsa, hodisaning ro'y berish sonining matematik kutilishi quyidagiga teng: $M(X) = np$.

III.5-§. Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi va o'rta kvadratik chetlanishi, ularning xossalari

Faraz qilaylik, x – tasodifiy miqdor, $M(X)$ esa uning matematik kutilishi bo'lsin.

1- ta’rif. X tasodifiy miqdor bilan uning matematik kutilishi orasidagi farqqa (ya’ni $X - M(X)$ ga) *chetlanish* deyiladi.

Teorema. Chetlanishning matematik kutilishi nolga teng.
Haqiqatdan,

$$M[X - M(X)] = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

1-misol. Diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni bilan berilgan.

$$\begin{array}{cccc} X & 2,5 & 3,2 & 5,0 \\ p & 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{array}$$

Chetlanishini (matematik kutilishini) toping.

Yechish. $M(X) = 2,5 \cdot 0,4 + 3,2 \cdot 0,5 + 5,0 \cdot 0,1 = 3,1.$

$X - M(X)$	-0,6	0,1	1,9
p	0,4	0,5	0,1

$$M[X - M(X)] = -0,6 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,5 + 1,9 \cdot 0,1 = -0,24 + 0,05 + 0,19 = 0$$

O’rtacha chetlanish, ya’ni chetlanishning matematik kutilishi har doim nolga teng bo’lganligi uchun, chetlanishni kvadratga ko’tarib, undan matematik kutilish olamiz va chiqqan natijalardan kvadrat ildiz chiqarib, o’rtacha chetlanishning o’rniga ishlatamiz.

2-ta’rif. Chetlanishning kvadratidan olingan matematik kutilishga *dispersiya* deyiladi:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

3-ta’rif. Dispersiyadan olingan kvadrat ildizga *o’rta kvadratik chetlanish* deyiladi:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Ta’rifga ko’ra dispersiya quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{aligned} D(X) &= M[X - M(X)]^2 = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + \\ &+ [x_2 - M(X)]^2 p_2 + \dots + [x_n - M(X)]^2 p_n \end{aligned}$$

2-misol. Quyidagicha taqsimlangan diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

Yechish. Matematik kutilishni topamiz:

$$M(X) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,2 = 2,3$$

Chetlanishlarining kvadratlarini topamiz:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (1 - 2,3)^2 = 1,69, \quad [x_2 - M(X)]^2 = (2 - 2,3)^2 = 0,09, \\ [x_3 - M(X)]^2 = (5 - 2,3)^2 = 7,29.$$

Dispersiyaning ta'rifiga ko'ra

$$D(X) = 1,69 \cdot 0,3 + 0,09 \cdot 0,5 + 7,29 \cdot 0,2 = 2,01.$$

Teorema. Tasodifiy miqdor X ning dispersiyasi tasodifiy miqdor kvadratining matematik kutilishi bilan matematik kutilish kvadrati ayirmasiga teng:

$$D(X) = M[X^2] - [M(X)]^2$$

Isbot.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] = M[X^2] - \\ - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M[X^2] - 2M^2(X) + M^2(X) = M[X^2] - [M(X)]^2$$

Bunga dispersiyani hisoblash formulasi deyiladi.

3-misol. Quyidagi X tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Yechish. Matematik kutilishni topamiz:

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,3 = 3,5$$

X^2 ning taqsimotini topamiz.

X^2	4	9	25
p	0,1	0,6	0,3

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 25 \cdot 0,3 = 13,3$$

$$D(X) = M[X^2] - [M(X)]^2 = 13,3 - (3,5)^2 = 1,05.$$

Endi dispersiyaning xossalari ko'ramiz.

1-xossa. O'zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng:

$$D(C) = 0.$$

Haqiqatdan,

$$D(C) = M[C - M(C)]^2 = M[C - C] = M(0) = 0.$$

2-xossa. O'zgarmas sonni dispersiya ishorasidan tashqariga kvadratga ko'tarib chiqarish mumkin:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Haqiqatdan,

$$\begin{aligned} D(CX) &= M[CX - M(CX)]^2 = M[C^2(X - M(X))^2] = \\ &= C^2 M[(X - M(X))^2] = C^2 D(X). \end{aligned}$$

3-xossa. Ikkita erkli tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi shu tasodifiy miqdorlar dispersiyalari yig'indisiga teng:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Umumiy holda

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$$

Bundan tashqari

$$D(X + C) = D(X).$$

Xulosa. Erkli(bog'liqsiz) tasodifiy miqdorlar ayirmasining dispersiyasi dispersiyalar yig'indisiga teng:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Isbot. 3-xossaga ko'ra

$$D(X - Y) = D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y).$$

4-xossa. Erkli(bog'liqsiz) tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining dispersiyasi shu tasodifiy miqdorlar dispersiyalari ko'paytmasiga teng:

$$D(X \cdot Y) = D(X) \cdot D(Y).$$

Takroriy erkli sinovlarda hodisa ro'y berishlar sonining dispersiyasi:

$$D(X) = npq$$

bo'ladi.

III.6-§.Diskret tasodifiy miqdorning modasi, medianasi va momentlari

Tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishi, dispersiyasi va o`rta kvadratik chetlanishlaridan tashqari yana ba`zi sonli xarakteristikalarini ham o`rganish foydalidir.

**1-ta`rif.** Tasodifiy miqdorlarning *modasi* deb, uning eng katta ehtimolga ega bo`lgan qiymatiga aytiladi.

Umuman olganda “eng katta ehtimolga ega bo`lgan qiymat” tushunchasi faqat diskret tasodifiy miqdorlar uchun ishlatiladi. Uzluksiz tasodifiy miqdorning modasi deb, uning zichlik funksiyasining maksimumiga aytiladi. Agar taqsimot ko`pburchagi (taqsimotning zichlik funksiyasi) bir necha maksimumga ega bo`lsa, unga *polimodal* taqsimot deyiladi. Ba`zi hollatda maksimumga ega bo`lmay, minimumga ega bo`lgan taqsimotlar ham uchraydi. Bunday taqsimotlar *antimodal* deb ataladi.

Umumiy holda tasodifiy miqdorlarning modasi va matematik kutilishi bir xil bo`lmaydi. Faqat taqsimot simmetrik bo`lib, uning modasi va matematik kutilishi mavjud bo`lsa, ular bir xil bo`ladi.

2-ta`rif. Tasodifiy miqdorlarning *medianasi* deb,

$$P(X < \mathbf{Me}) = P(X > \mathbf{Me})$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi **Me** soniga aytiladi.

Odatda mediana uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun aniqlanadi, hamda u tasodifiy miqdorlarning medianadan kichik va medianadan katta qiymatlarni qabul qilish ehtimollarining tengligini bildiradi. Simmetrik modal taqsimotda mediana moda va matematik kutilish bilan ustma-ust tushadi,

Yuqoridagi barcha sonli xarakteristikalar tasodifiy miqdor qiymatlarining holati yoki o`rnini aniqlaydigan kattaliklardir. Tasodifiy miqdorlar taqsimotining ba`zi boshqa xossalarini ko`rsatuvchi sonli xarakteristikalarini qaraymiz.

**3-ta`rif.** X diskret tasodifiy miqdorning *s-tartibli boshlang`ich momenti* deb,

$$\alpha_s X = \sum_{i=1}^n x_i^s p_i$$

ga aytiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, X diskret tasodifiy miqdorning s -tartibli boshlang'ich momenti shu tasodifiy miqdor s -darajasining matematik kutilishiga aytiladi:

$$\alpha_s X = M X^s$$

X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishini m_x bilan belgilaylik. U holda X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi m_x dan chetlanishiga, ya'ni

$$X = X - m_x$$

ga markazlashgan tasodifiy miqdor deyiladi.

4-ta'rif. X diskret tasodifiy miqdorning s -tartibli markaziy momenti deb, markazlashgan tasodifiy miqdor X ning matematik kutilishiga aytiladi:

$$\mu_s X = M X^s = M (X - m_x)^s = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^s p_i.$$

Bundan keyin qisqalik uchun $\alpha_s X$ va $\mu_s X$ o'rniga α_s va μ_s belgilarini ishlatamiz. Ba'zi markaziy momentlarni qaraylik:

$$\mu_1 = M X = M X - m_x = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x) p_i = 0,$$

$$\mu_2 = \alpha_2 - m_x^2,$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3m_x \alpha_2 + 2m_x^3.$$

III.7-§. Taqsimot funksiyasi va uning xossalari

Agar tasodifiy miqdorning qiymatlari soni chekli yoki sanoqli bo'lsa, ularning qiymatlari, hamda mos ehtimollari aniqlanib, taqsimot qonuni taqsimotlar jadvali shaklida topilar edi.

Ammo tasodifiy miqdorlar qiymatlarining soni cheksiz bo'lsa, ularning ehtimollarini hisoblab bo'lmaydi. Ko'pincha, hatto qiymatlarini ham topishning iloji bo'lmaydi. Bunday hollarda tasodifiy miqdorlarni o'rganish uchun taqsimot funksiyasi tushunchasi kiritiladi.

Faraz qilaylik, X – tasodifiy miqdor, x – haqiqiy son bo'lsin.

Ta'rif. X tasodifiy miqdorning x – haqiqiy sondan kichik qiymat qabul qilish ehtimoli

$$F(x) = P(X < x) \quad \text{ga shu tasodifiy}$$

miqdorning *taqsimot funksiyasi* deyiladi.

1-xossa. Taqsimot funksiyasi kamaymovchi funksiya, ya'ni uning argumentlari uchun $x_2 > x_1$ bo'lsa,

$$F(x_2) \geq F(x_1)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2-xossa. Minus cheksizlikda taqsimot funksiyasining qiymati nulgacha teng:

$$F(-\infty) = 0.$$

3-xossa. Plus cheksizlikda taqsimot funksiyasining qiymati birga teng:

$$F(+\infty) = 1.$$

4-xossa. Taqsimot funksiyasining qiymatlari $[0,1]$ segmentda yotadi:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

Isboti bevosita hodisa ehtimolning xossasidan kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $x_1 < x_2$ bo'lsin, hamda $X < x_2$ hodisani A bilan, $X < x_1$ hodisani B bilan va $x_1 \leq X < x_2$ hodisani esa C bilan belgilaymiz. U holda $A = B + C$ va qo'shish teoremasiga ko'ra

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2).$$

Bundan

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq X < x_2), \text{ yoki}$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad (*)$$

1-xulosa. Agar $(*)$ tenglamada $a = x_1$, $b = x_2$ deb olsak,

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \quad (**)$$

hosil bo'ladi. Bu tasodifiy miqdor X ning berilgan oraliqqa tushish ehtimoli.

2-xulosa. Agar $(**)$ tenglikda $a = x_1$, $b = x_1 + \Delta x$ bo'lsa,

$$P(x_1 \leq X \leq x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1).$$

$F(x)$ uzluksiz bo'lsa va $\Delta x \rightarrow 0$ da limitga o'tsak, $P(X = x_1) = 0$.

Demak, uzluksiz tasodifiy miqdorning aniq bir, alohida qiymatni qabul qilish ehtimoli nolga teng, shuning uchun

$$P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

tengliklar o'rinli.

5-xossa. Agar tasodifiy miqdorning qiymatlari faqat (a, b) oraliqda bo'lsa, $x \leq a$ bo'lsa, $F(x) = 0$ va $x \geq b$ bo'lsa, $F(x) = 1$ bo'ladi.

Natija. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari butun Ox o'qda joylashgan bo'lsa, u holda quyidagi limit munosabatlar o'rinli:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

III.8-§. Taqsimot zichligi funksiyasi va uning xossalari

Faraz qilaylik, $F(x)$ taqsimot funksiyasi uzluksiz bo'lib, 1-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsin.

1-ta'rif. Taqsimot funksiyasidan olingan 1-tartibli hosilaga *taqsimot zichligi funksiyasi* deyiladi:

$$f(x) = F'(x).$$

1-xossa. Taqsimot zichligi funksiyasi manfiy emas:

$$f(x) \geq 0.$$

Haqiqatdan, taqsimot zichligi funksiyasi kamaymovchi funksiyaning hosilasi, shuning uchun uning qiymatlari manfiy bo'lmaydi.

2-xossa. Taqsimot zichligi funksiyasidan $-\infty$ dan $+\infty$ gacha olingan

xosmas integral 1 ga teng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Bu integral tasodifiy miqdor qiymatlarining son o'qiga tushish ehtimolini bildiradi. Bu hodisa ishonchli, shuning uchun uning ehtimoli 1 ga teng.

Teorema. Uzluksiz tasodifiy miqdorning berilgan (a,b) oraliqdagi qiymatlarni qabul qilish ehtimoli taqsimotning zichligi funksiyasidan shu oraliq bo'yicha olingan aniq integralga teng:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Misol. X tasodifiy miqdor taqsimot zichligi funksiyasi bilan berilgan.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 2x, & \text{agar } 0 < x \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x > 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Tajriba natijasida tasodifiy miqdorning $(0,5;1)$ intervaldagi qiymatlarni qabul qilish ehtimoli topilsin.

Yechish.

$$P(0,5 < x < 1) = 2 \int_{0,5}^1 x dx = x^2 \Big|_{0,5}^1 = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Agar taqsimot zichligi funksiyasi aniq bo'lsa, taqsimot funksiyasi quyidagi

formula bilan topiladi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

III.9-§.Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi

Faraz qilaylik, X – tasodifiy miqdor bo'lib, $f(x)$ uning taqsimot zichligi funksiyasi bo'lsin. X tasodifiy miqdorning qiymatlari (a,b) oraliqda bo'lsin.

1-ta'rif. Qiymatlari (a,b) oraliqda bo'lgan tasodifiy miqdor X ning matematik kutilishi deb, quyidagi aniq integralga aytiladi:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx \quad (1)$$

(1) formulada $f(x)$ – taqsimotning zichlik funksiyasi. Matematik kutilish quyidagi sodda mexanik ma'noga ega: agar massa abssissalar o'qida uzluksiz

ravishda joylashgan bo'lsa, matematik kutilish massaning og'irlik markazida joylashgan bo'ladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishining barcha xossalriga ega, ya'ni

1⁰. O'zgarmas sonning matematik kutilishi shu sonning o'ziga teng. $M(C)=C$

2⁰. $M(CX)=CM(X)$

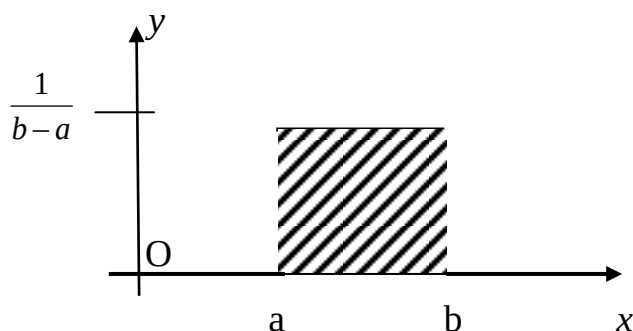
3⁰. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$

4⁰. Bog'liqmas tasodifiy miqdorlar X va Y lar uchun $M(XY)=M(X) \cdot M(Y)$

1-misol. Quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a; b] \\ 0, & x \notin [a; b] \end{cases} \quad \text{Bu funksiya zichlik funksiyasi ekanligini}$$

isbotlaymiz.



1⁰. $f(x) \geq 0$ ta'rifdan kelib chiqadi.

$$\begin{aligned} 2^0. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \left(\int_{-\infty}^a + \int_a^b + \int_b^{+\infty} \right) f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \\ &= \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx = \frac{1}{b-a} x \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} (b-a) = 1. \end{aligned}$$

Bu zichlik funksiyasi *tekis taqsimlangan* tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi deyiladi.

2-ta'rif. X uzluksiz tasodifiy miqdorning *modasi* $M_0(X)$ deb, zichlik funksiyasi maksimumga ega bo'lgan qiymatlarga aytiladi.

3-ta'rif. X uzluksiz tasodifiy miqdorning *medianasi* $M_e(X)$ deb, uning $P(X < M_e(X)) = P(X > M_e(X))$ shartni qanoatlantiruvchi qiymatiga aytiladi.

2-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq -c \text{ bo'lsa,} \\ 1/(\pi\sqrt{c^2 - x^2}), & \text{agar } -c < x \leq c \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x > c \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

matematik kutilishi topilsin.

Yechish: $M(X) = \int_a^b xf(x)dx$ formuladan foydalanamiz. $a = -c$ va $b = c$,

$f(x) = 1/(\pi\sqrt{c^2 - x^2})$ bo'lgani uchun,

$$M(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{xdx}{\sqrt{c^2 - x^2}}.$$

Integral ostidagi funksiya toq va integrallash chegaralari koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun, bu integral nolga teng bo'ladi. Demak, $M(X) = 0$.

III.10-§.Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi

1-ta'rif. Qiymatlari (a,b) oraliqda bo'lgan X tasodifiy miqdorning *dispersiyasi* deb, chetlanishning kvadratidan olingan matematik kutilishga aytiladi.

$$D(X) = \int_a^b [X - M(X)]^2 f(x)dx$$

yoki

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi diskert tasodifiy miqdor dispersiyaning barcha xossalariga ega, ya'ni

1⁰. O'zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng. $D(C) = 0$.

2⁰. $D(CX) = C^2 D(X)$.

3⁰. Agar X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro erkli bo'lsa, $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

4⁰. Agar X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro erkli bo'lsa, $D(XY)=D(X)D(Y)$.

2-ta'rif. O'rta kvadratik chetlanish deb,

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

qiymatga aytiladi.

O'rta kvadratik chetlanishning xossalari

1⁰. O'zgarmas sonning o'rta kvadratik chetlanishi nolga teng, ya'ni $\sigma(C) = 0$.

2⁰. $\sigma(CX) = C\sigma(X)$.

1-misol. Uzluksiz tasodifiy miqdor X taqsimot funksiyasi bilan berilgan.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0 \quad \text{bo'lsa,} \\ \frac{x^2}{9}, & \text{agar } 0 < x \leq 3 \quad \text{bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x > 3 \quad \text{bo'lsa.} \end{cases}$$

X ning matematik kutilishi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

Oldin zichlik funksiyasini topamiz:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0 \quad \text{bo'lsa,} \\ \frac{2x}{9}, & \text{agar } 0 < x \leq 3 \quad \text{bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x > 3 \quad \text{bo'lsa.} \end{cases}$$

Endi $M(X)$ ni topamiz:

$$M(X) = \int_0^3 x \frac{2x}{9} dx = \frac{2}{9} \int_0^3 x^2 dx = \frac{2}{9} \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{2}{9} \cdot \frac{3^3}{3} - \frac{2}{9} \cdot \frac{0^3}{3} = 2.$$

Demak; X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi 2 ga teng ekan.

Endi dispersiyani hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_0^3 x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{2x}{9} dx - 2^2 = \frac{2}{9} \int_0^3 x^3 dx - 4 = \\ &= \frac{2}{9} \frac{x^4}{4} \Big|_0^3 - 4 = \frac{3^4}{9 \cdot 2} - \frac{0^4}{9 \cdot 4} - 4 = \frac{9}{2} - 4 = 4,5 - 4 = 0,5 \end{aligned}$$

O'rta kvadratik chetlanishi esa

$$\sigma(X) = \sqrt{0,5} \approx 0,7071.$$

2-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^n \cdot e^{-x}}{n!}, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

X ning matematik kutilishi va dispersiyasi topilsin.

Yechish: X ning matematik kutilishi

$$M(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x \cdot x^n \cdot e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+1} e^{-x} dx$$

Gamma-funksiya deb,

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} dx$$

ga aytiladi. Shu sababli,

$$M(X) = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+1} \cdot e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \Gamma(n+2).$$

Gamma-funksiya quyidagi xossaga ega: $\Gamma(n) = (n-1)!$ Demak,

$$M(X) = \frac{1}{n!} \Gamma(n+2) = \frac{1}{n!} (n+1)! = \frac{n!(n+1)}{n!} = n+1, \quad M(X) = n+1.$$

Tasodifiy miqdorning dispersiyasini topamiz:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{x^n \cdot e^{-x}}{n!} dx - (n+1)^2 = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+2} \cdot e^{-x} dx - (n+1)^2 =$$

$$= \frac{1}{n!} \Gamma(n+3) - (n+1)^2 + \frac{1}{n!} (n+2)! - (n+1)^2 = \frac{n!(n+1)(n+2)}{n!} - (n+1)^2 = n+1$$

Demak, $D(X) = n+1$ bo'ladi.

3-misol. Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasini topamiz.

$$\begin{aligned}
M(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) = \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a)(b^2 + 2ab + a^2)}{3} = \frac{b^2 + 2ab + a^2}{3} \\
D(X) &= \frac{b^2 + 2ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{b^2 + 2ab + a^2}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} = \\
&= \frac{4b^2 + 4ba + 4a^2 - 3b^2 - 6ba - 3a^2}{12} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}.
\end{aligned}$$

III.11-§. Boshlang'ich va markaziy momentlar.

1-ta'rif. X uzluksiz tasodifiy miqdorning s – tartibli boshlang'ich momenti deb

$$\alpha_s(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx$$

integralga aytiladi.

U holda tasodifiy miqdor X ning matematik kutilishi X miqdorning 1-tartibli boshlang'ich momenti bo'ladi. Bu ta'rifni boshqacha aytish ham mumkin: X tasodifiy miqdorning s – tartibli boshlang'ich momenti shu tasodifiy miqdor s – darajasining matematik kutilishiga teng, ya'ni

$$\alpha_s(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx = M(X^s).$$

X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi m_x bo'lsin. U holda $\dot{X} = X - m_x$ ga X tasodifiy miqdorga mos keluvchi *markazlashgan tasodifiy miqdor* deyiladi. Markazlashgan tasodifiy miqdorning momentlari *markaziy momentlar* deb ataladi.

2-ta'rif. X tasodifiy miqdorning s – tartibli markaziy momenti deb, unga mos keluvchi s – tartibli markazlashgan tasodifiy miqdorning matematik kutilishiga aytiladi:

$$\mu_s(X) = M(\dot{X}^s) = M((X - m_x)^s).$$

Bundan matematik kutilish ta'rifiga ko'ra

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s f(x) dx.$$

Ba'zi markaziy momentlarni qaraymiz:

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx - m_x \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = m_x - m_x \cdot 1 = 0.$$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - 2m_x \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + m_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx =$$

$$= M(X^2) - 2 \cdot m_x \cdot m_x + m_x^2 \cdot 1 = M(X^2) - m_x^2 = D(X), \text{ yoki}$$

$$\mu_2 = D(X) = \alpha_2 - m_x^2. \text{ xuddi shunday, } \mu_3 = \alpha_3 - 3m_x \alpha_2 + 2m_x^3.$$

Taqsimot zichligi funksiyasi har doim ham simmetrik joylashgan bo'lavermaydi.

3-ta'rif. Taqsimotning *asimmetriya koeffitsiyenti* deb

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

o'lchamsiz xarakteristikaga aytiladi.

Bu xarakteristika modaning matematik kutilishdan chapda ($Sk > 0$), yoki o'ngda ($Sk < 0$) joylashishini ko'rsatadi.

4-ta'rif. X tasodifiy miqdorning *ekssessi* deb

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

o'lchamsiz xarakteristikaga aytiladi.

Ekssess taqsimot zichligi funksiyasi grafigining o'tkir uchli ($E_x > 0$), yoki o'tmas uchli ($E_x < 0$) shaklda bo'lishini aniqlaydi.

III.12-§. Tekis taqsimot

Ta'rif. Tekis taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdor deb, zichligi biror $[a, b]$ kesmada o'zgarmas va $1/(b-a)$ ga teng, bu kesmadan tashqarida esa nolga teng, ya'ni

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < a \quad \text{bo'lsa} \\ \frac{1}{b-a}, & \text{agar } a \leq x \leq b \quad \text{bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x > b \quad \text{bo'lsa} \end{cases}$$

bo'lgan tasodifiy miqdorga aytiladi.

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \text{ ekanligini tekshiramiz.}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot x \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} (b-a) = 1$$

Bu taqsimotning taqsimot funksiyasi $F(x)$ ni topamiz.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \cdot t \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a} \quad (x \in [a, b]).$$

Albatta $x > a$ da $F(x)=0$, $x < b$ da $F(x)=1$. Shunday qilib,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < a \quad \text{bo'lsa,} \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{agar } a \leq x \leq b \quad \text{bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x > b \quad \text{bo'lsa.} \end{cases}$$

Tekis taqsimotning asosiy sonli xarakteristikalarini topamiz:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

III.13-§. Normal taqsimot

Ta'rif. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot zichligi funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'lsa, bunday taqsimotga *normal taqsimot* deyiladi:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

bu yerda a va σ lar normal taqsimotning parametrlari, a – matematik kutilishi, σ – o'rta kvadratik chetlanishi.

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishini topamiz.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (1)$$

buni integrallash uchun o'zgaruvchilarni almashtiramiz.

$$z = \frac{x-a}{\sigma}, \quad \text{bundan} \quad x = \sigma z + a$$

$$dx = \sigma dz, \quad x = -\infty, \quad z = -\infty, \quad x = +\infty, \quad z = +\infty$$

Integralning chegaralari o'zgarmaydi. Topilganlarni (1) ga qo'ysak,

$$M(X) = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + a) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Birinchii integral nolga teng, ikkinchi integral Pusson integrali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi},$$

Shuning uchun $M(X)=a$ kelib chiqadi.

Xuddi shunday $D(X) = \sigma^2$, $\sigma(X) = \sigma$, agar normal taqsimotda $a=0$, $\sigma=1$

bo'lsa,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ga **normallashtirilgan normal taqsimotning** zichlik funksiyasi deyiladi. Normal taqsimotning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz$$

bo'lgani uchun normallashtirilgan normal taqsimotning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

bo'ladi.

$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - Laplas funksiyasi ekanini eslab, X tasodifiy miqdorning berilgan oraliqqa tushish ehtimolidan

$$P(0 < X < x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x).$$

Normal taqsimotda a – o'rta qiymatni ko'rsatadi. σ esa o'rtacha kvadratik chetlanishni, σ ning o'sishi bilan normal taqsimot grafigining cho'qqisi pasayib boradi, ya'ni tarqoqlik ko'payadi.

a) Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning berilgan oraliqqa tushish ehtimoli.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lsa hamda $f(x)$ uning taqsimot zichligi funksiyasi bo'lsa, X ning (α, β) oraliqqa tushish ehtimoli

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Agar X normal taqsimlangan bo'lsa,

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

integralga ega bo'lamiz. Buni integrallash uchun o'zgartiruvchini almashtiramiz.

$$z = \frac{x-a}{\sigma}, \quad x = \sigma z + a, \quad dx = \sigma dz$$

$$x=\alpha \text{ bo'lsa, } z = \frac{\alpha-a}{\sigma}, \quad x=\beta \text{ bo'lsa, } z = \frac{\beta-a}{\sigma} \text{ bo'ladi.}$$

Shunday qilib, Laplas funksiyasi

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

ekanini e'tiborga olsak,

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

kelib chiqadi.

Misol. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdor X ning matematik kutilishi 30 ga, o'rta kvadratik chetlanishi 10 ga teng. Tajriba natijasida shu tasodifiy miqdor qiymatlarining (10;40) oraliqqa tushish ehtimoli topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $a=30$, $\sigma=10$, $\alpha=10$, $\beta=40$

$$\begin{aligned} P(10 \leq X \leq 40) &= \Phi\left(\frac{40-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \\ &= \Phi(1) + \Phi(2) = 0,3413 + 0,4772 = 0,8185. \end{aligned}$$

b) Chetlanishning ehtimoli.

Ko'p hollarda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning chetlanishi $X - a$ ning absolyut qiymati bo'yicha biror $\delta > 0$ sonidan kichik qiymat qabul qilishini baholashga to'g'ri keladi, ya'ni

$$|x - a| < \delta$$

tengsizlikning ro'y berish ehtimolini toppish talab qilinadi. Bu tengsizlikni quyidagi ikkilangan tengsizlik bilan almashtiramiz:

$$-\delta < x - a < \delta$$

bu tengsizlikning hamma tomoniga a ni qo'shsak,

$$a - \delta < x < \delta + a$$

qo'sh tengsizlikni hosil qilamiz.

Demak,

$$\begin{aligned} P(|X - a| < \delta) &= P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left[\frac{(a + \delta) - a}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{(a - \delta) - a}{\sigma}\right] = \\ &= \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

(Bu yerda $\Phi(x)$ funksiyaning toqligi hisobga olindi).

Shunday qilib,
$$P(|x - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Agar $a=0$ bo'lsa,
$$P(|x| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Bu ehtimol a ga bog'liq bo'lmasdan oraliqning uzunligiga, to'g'ri proporsional va o'rta kvadratik chetlanish σ ga teskari proporsionaldir.

III.14-§. Ko'rsatkichli taqsimot

Ta'rif. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot zichligi funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'lsa, bunday taqsimotga ko'rsatkichli (eksponensial) taqsimot deyiladi.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

bu yerda λ - musbat o'zgarmas son. Taqsimot funksiyasini topamiz:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^x = -e^{-\lambda x} + e^0 = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Demak,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bularni grafuklari mos holda pastdagi shakillarda ko'rsatiladi:

Ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorning berilgan (a, b) oraliqqa tushishi ehtimoli:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

$F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$, $F(b) = 1 - e^{-\lambda b}$; bularni e'tiborga olsak, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutilishi

$$M(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Bu integralni bo'laklab integrallash usuli bo'yacha integrallaymiz:

$$u=x, \quad e^{-\lambda x} dx = dv,$$

$$dx = du, \quad v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

$$M(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx =$$

$$= -xe^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot 0} = \frac{1}{\lambda}. \quad (*)$$

Ko'rsatkichli taqsimotning dispersiyasini topamiz:

$$D(x) = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Bu integralni ham bo'laklab integrallash usuli bo'yacha integrallaymiz:

$$\lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

$$\text{Buni yuqoridagi formulaga qo'ysak,} \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (**).$$

(*) va (**) ni taqqoslab, quyidagi xulosaga kelamiz:

$$M(X) = \sigma(X) = 1/\lambda,$$

ya'ni ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutilishi va o'rtacha kvadratik chetlanishi o'zaro teng.

Misol. Uzluksiz X tasodifiy miqdor ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'lib,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 2e^{-2x}, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

bo'lsin. Shu tasodifiy miqdorning a) $(0,3;1)$ oraliqqa tushish ehtimoli

b) matematik kutilishi va dispersiyasi topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $\lambda=2$. demak,

$$a) P(0,3 < X < 1) = e^{-(2 \cdot 0,3)} - e^{-(2 \cdot 1)} = 2^{-0,6} - e^{-2} = 0,54881 - 0,13534 \approx 0,41.$$

$$b) \lambda = 2. M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}, \sigma(X) = \frac{1}{2}.$$

III.15-§.Katta sonlar qonuni.Chebishev tengsizligi

Bizga ma'lumki, tasodifiy miqdorlarning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari juda ko'p tasodifiy sabablarga bog'liqdir. Aslini olganda ularning qonuniyatlari sinashlar soni ortishi bilan namoyon bo'ladi. Lekin ba'zi shartlarni

qo'yish natijasida tasodifiy miqdorlar yig'indilari qonuniyatga ega bo'ladi. Ana shunday qonuniyatlarni va ularga qo'yiladigan shartlarni bilish amaliyotda juda katta ahamiyatga ega. Bu masalalarga bag'ishlangan eng asosiy teoremlarni Bernulli va Chebishevlar yaratgan. Bu teoremlarni isbotlash uchun Chebishev tengsizligidan foydalaniladi.

Quyidagicha taqsimot bilan berilgan X tasodifiy miqdorini qaraymiz:

$$\begin{array}{c} X \quad x_1 \quad x_2 \dots x_n \\ p \quad p_1 \quad p_2 \dots p_n \end{array}$$

Tasodifiy miqdor chetlanishining absolyut qiymati jihatidan oldindan berilgan musbat $\varepsilon > 0$ sonidan kichik qiymat qabul qilish ehtimolini baholashni maqsad qilib qo'yaylik. Bu masalani Chebishev tengsizligi yoritadi.

Teorema. X tasodifiy miqdorining matematik kutilishidan chetlanishining absolyut qiymati bo'yicha oldindan berilgan musbat $\varepsilon > 0$ sonidan kichik qiymat qabul qilish ehtimoli $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ dan kichik emas.

Isbot. Quyidagi tengsizliklar $|X - M(X)| < \varepsilon$ va $|X - M(X)| \geq \varepsilon$ bir-biriga teskari hodisalar bo'lgani uchun ularning ehtimollari yig'indisi 1 ga teng, ya'ni

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) + P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = 1.$$

Bundan

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) = 1 - P(|X - M(X)| \geq \varepsilon). \quad (1)$$

$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$ ehtimolni hisoblab (1) ga qo'ysak, masala yechiladi.

Dispersiyani hisoblash formulasida

$$D(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 2M(X) \sum_{i=1}^n x_i p_i + M(X)^2 \sum_{i=1}^n p_i$$

chetlanishlari $|x_i - M(X)| < \varepsilon$ ($i = \overline{1, k}$) bo'lganlarini tashlab yuboramiz, u holda

$|x_j - M(X)| \geq \varepsilon$ ($j = \overline{k+1, n}$) bo'lganlari qoladi va natijada yig'indi kamayadi, ya'ni

$$D(X) \geq \sum_{j=k+1}^n [x_j - M(X)]^2 p_j = \sum_{j=k+1}^n x_j^2 p_j - 2M(X) \sum_{j=k+1}^n x_j p_j + M(X)^2 \sum_{j=k+1}^n p_j \quad (*)$$

Bizga ma'lumki $|x_j - M(X)| \geq \varepsilon$ ($j = k+1, n$) tengsizlikning ikkala tomoni musbat, shuning uchun ularni kvadratga ko'tarsak, quyidagi teng kuchli tengsizlikga ega bo'lamiz:

$$|x_j - M(X)|^2 \geq \varepsilon^2$$

Yuqoridagi (*) tengsizlikda $|x_i - M(X)|^2$ ni ε^2 bilan almashtirsak, tengsizlik yanada kuchayadi va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$D(X) \geq \varepsilon^2 (p_{k+1} + p_{k+2} + \dots + p_n) \quad (2)$$

Agar $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = p_{k+1} + p_{k+2} + \dots + p_n$

ekanini hisobga olsak,

$$D(X) \geq \varepsilon^2 \cdot P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$$

kelib chiqadi.

Bundan $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad (3)$

(3) tengsizlikni (1) tenglikka qo'ysak, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Oxirgi tengsizlikka Chebishev tengsizligi deyiladi.

III.16-§. Chebishev teoremasi

Teorema. Agar $X_1, X_2, \dots, X_n$ - o'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning dispersiyalari tekis chegaralangan ($D(X_i) \leq C$) bo'lsin, u holda musbat $\varepsilon > 0$ soni har qancha kichik bo'lsa ham, quyidagi tengsizlikning

$$\left| \frac{\sum X_i}{n} - \frac{\sum M(X_i)}{n} \right| < \varepsilon$$

bajarilish ehtimoli tasodifiy miqdorlar soni ortishi bilan birga yaqinlashadi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{\sum X_i}{n} - \frac{\sum M(X_i)}{n} \right| < \varepsilon\right) = 1$$

Isbot. Yangi tasodifiy miqdor kiritamiz

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}.$$

Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilishini topamiz:

$$\begin{aligned} M(\bar{X}) &= M\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \\ &= \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} = \frac{\sum M(X_i)}{n} \end{aligned}$$

Dispersiyasini topamiz:

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)}{n^2}$$

$D(X_i) \leq C$ ni hisobga olsak,

$$D(\bar{X}) \leq \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Bularni hisobga olib limitga o'tsak teorema isbot bo'ladi. Agar xususiy holda $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishlari o'zaro teng bo'lsa, ya'ni $M(X_i) = a$ bo'lsa,

$$M(\bar{X}) = M\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{\sum M(X_i)}{n} = \frac{na}{n} = a.$$

Bunday holda quyidagi Chebishev teoremasining xususiy holi kelib chiqadi.

Teorema. Agar $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar o'zaro erkli bo'lib, matematik kutilishlari teng bo'lsa, hamda dispersiyalari tekis chegaralangan bo'lsa, har qanday kichik $\varepsilon > 0$ musbat son uchun

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilish ehtimoli 1 ga teng bo'ladi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon\right) = 1.$$

III.17-§. Bernulli teoremasi

Faraz qilaylik, n marta erkli sinashlar o'tkazilgan bo'lib, har bir sinashda hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas bo'lib, p ga teng bo'lsin.

Teorema. Agar har bir sinashda hodisaning ro'y berish ehtimoli p o'zgarmas bo'lsa, n marta erkli sinashlarda nisbiy sanoqning o'zgarmas ehtimoldan chetlanishining absolyut qiymati oldindan berilgan musbat $\varepsilon > 0$ sonidan kichik bo'lish ehtimoli sinashlar soni ortishi bilan 1 ga teng bo'ladi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Isbot. Faraz qilaylik, X_1 - 1-sinashda, X_2 - 2-sinashda, ..., X_n - n -sinashda hodisaning ro'y berish soni bo'lsin. Bu tasodifiy miqdorlar hodisa ro'y bersa 1 qiymatni p ehtimol bilan, hodisa ro'y bermasa 0 qiymatni q ehtimol bilan qabul qiladi. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar o'zaro erkli va dispersiyalari $pq < 1/4$ bilan chegaralanganligini hamda bu tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishi p ga tengligini hisobga olib, Chebishev teoremasining xususiy holini qo'llasak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Har bir X_i miqdorning a matematik kutilishi hodisaning ro'y berish ehtimoli p ga teng ekanligini e'tiborga olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Endi $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ kasr n ta sinashda A hodisa ro'y berishining nisbiy sanog'i μ/n ga tengligini ko'rsatish qoldi, xolos. Haqiqatan, $X_1, X_2, \dots, X_n$ miqdorlarning har biri hodisa mos sinashda ro'y berganida 1 ni qabul qiladi, demak $X_1, X_2, \dots, X_n$ yig'indi n ta sinashda hodisaning ro'y berish soni μ ga teng, demak,

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\mu}{n}.$$

Bu tenglikni hisobga olsak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

tenglikni hosil qilamiz.

III.18-§. Markaziy limit teoremasi

Markaziy limit teoremlari tasodifiy miqdorlar yig'indilari ketma-ketliklarining qachon normal taqsimotga bo'ysunishini aniqlab beruvchi teoremlardir. Ular bir-biridan yig'indini hosil qiladigan tasodifiy miqdorlar taqsimot qonunlariga qo'yiladigan shartlar bilan farq qiladi.

Biz bu yerda markaziy limit teoremaning eng sodda shaklini ta'riflaymiz.

Teorema. Agar $X_1, X_2, \dots, X_n$ - bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lib, matematik kutilishi m va dispersiyasi σ^2 bo'lgan bir xil taqsimot qonuniga ega

bo'lsa, u holda n cheksiz ortganida $\frac{\sum_{k=1}^n X_k - nm}{\sqrt{n}\sigma}$ ning taqsimot qonuni matematik kutilishi 0 va dispersiyasi 1 bo'lga normal taqsimotga yaqinlashadi.

Muavr-Laplasning lokal teoremasi bu teoremaning xususiy holidir.

Misol. Har biri $[0, 4]$ kesmada tekis taqsimlangan 75 ta bog'liqmas tasodifiy miqdorlar qo'shilmoqda. Bu tasodifiy miqdorlar yig'indisining zichligi uchun taqribiy ifoda yozilsin va yig'indi 120 dan 160 gacha oraliqda bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: $\sum_{i=1}^{75} X_i$, bunda X_i lar $[0, 4]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorlar. U holda

$$m_k = M(X_i) = \frac{4+0}{2} = 2, \quad D(X_i) = \frac{4^2 - 0^2}{12} = \frac{4}{3}.$$

Markaziy limit teoremasining shartlari bajarilmoqda. Shu sababli tasodifiy miqdor zichligi $f(x)$ taqriban normal taqsimot zichligiga teng bo'ladi, ya'ni

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}},$$

bu yerda

$$m_x = M\left(\sum_{i=1}^{75} X_i\right) = \sum_{i=1}^{75} M(X_i) = 75 \cdot 2 = 150,$$

$$\sigma_x^2 = D\left(\sum_{i=1}^{75} X_i\right) = 75 \cdot \frac{4}{3} = 100$$

va, demak,

$$f(x) \approx \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-150)^2}{200}}.$$

Endi izlanayotgan ehtimolni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} P(20 \leq X \leq 160) &= \Phi\left(\frac{160-150}{10}\right) - \Phi\left(\frac{120-150}{10}\right) = \\ &= \Phi(1) - \Phi(-3) = 0,3413 + 0,49865 \approx 0,84. \end{aligned}$$

III.19-§. Katta sonlar qonunining qo'llanilishi.

Katta sonlar qonuni statistikaning tanlab kuzatish metodini nazariy asosini tashkil qiladi. Tanlab kuzatish metodi juda katta to'plam, ya'ni bosh to'plamni tekshirish imkoniyati bo'lmaganligi sababli undan kichik bir to'plam ajratib olinadi va olingan to'plam tekshirilib, natija butun to'plamga yoyiladi. Masalan, paxta tolasini mustahkamligini tekshirish uchun hamma ishlab chiqilgan paxtani tekshirib bo'lmaydi faqat har-har joydan kamroq olib, tekshirilib xulosa hamma yetishtirilgan paxtaga yoyiladi. Boshqa misol,

yetishtirilgan bug'doyni sifatini aniqlash uchun atigi kamgina olib tekshiriladi, lekin kichkina xatolik bilan ma'lum ombordagi bug'doyni sifati aniqlanadi. Xullas, katta sonlar qonunini hamma tajribaga asoslangan amaliy fanlarda qo'llaniladi.

III.20-§. Tasodifiy miqdorlar sistemasi

Shu paytgacha o'rganilgan tasodifiy miqdorlar son o'qidagi qiymatlardan bittasini qabul qilar edi.

Bunday tasodifiy miqdorlar bir o'lchovli deb ataladi. Bular tangani tashlaganda gerb tushishlar soni, ishlab chikarilgan maxsulotlardan yaroqlilar soni, sotuvdan tushgan bir kunlik daromad va hokazolardir.

Agar biror plastinkaning faqat bo'yini (uzunligini) o'lchash natijasida bir o'lchovli, agar bo'yi va enini o'lchasak ikki o'lchovli, bo'yi, eni va balandligini o'lchasak, 3 o'lchovli tasodifiy miqdorlarga ega bo'lamiz. Biz faqat ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlarni o'rganamiz. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlarni (X, Y) bilan belgilab, ularning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarini mos holda $\langle \xi_i; y_j \rangle (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$ bilan belgilaymiz.

X va Y larni alohida olinganlarini ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlarni tashkil etuvchilari deyiladi. (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdor, $\langle \xi_i; y_j \rangle (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$ ularning mos qiymatlarini bildirsin.

III.21-§. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

Ta'rif. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb, ularning qabul qilishi mumkin bo'lgan juft $\langle \xi_i; y_j \rangle (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$ qiymatlari va ularga mos ehtimollari $P_{\langle \xi_i; y_j \rangle}$ orasidagi bog'lanishga aytiladi.

$\begin{array}{c} X \\ \diagdown \\ Y \end{array}$	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n	Σ
y_1	$P_{\langle \xi_1, y_1 \rangle}$	$P_{\langle \xi_2, y_1 \rangle}$		$P_{\langle \xi_i, y_1 \rangle}$		$P_{\langle \xi_n, y_1 \rangle}$	$P(y_1)$
...	...	...	...	...	...	...	
y_j	$P_{\langle \xi_1, y_j \rangle}$	$P_{\langle \xi_2, y_j \rangle}$	...	$P_{\langle \xi_i, y_j \rangle}$	...	$P_{\langle \xi_n, y_j \rangle}$	$P(y_j)$
...	...	...	...	...	...	...	
y_m	$P_{\langle \xi_1, y_m \rangle}$	$P_{\langle \xi_2, y_m \rangle}$	...	$P_{\langle \xi_i, y_m \rangle}$	...	$P_{\langle \xi_n, y_m \rangle}$	$P(y_m)$
Σ	$P(x_1)$	$P(x_2)$	...	$P(x_i)$		$P(x_n)$	1

Jadvaldagi 1-satr X tashkil etuvchining qiymatlaridan iborat. 1-ustun Y tashkil etuvchining qiymatlaridan iborat. $P(x_i, y_j)$ esa X tashkil etuvchi $X = x_i$ qiymatni qabul qilganda Y tashkil etuvchini $Y = y_j$ qiymatni qabul qilish ehtimoli

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(x_i; y_j) = 1.$$

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni ma'lum bo'lsa, uni tashkil etuvchilarining taqsimotini topish mumkin. Haqiqatan, masalan,

$$(X = x_1; Y = y_1), (X = x_1; Y = y_2), \dots, (X = x_1; Y = y_m)$$

hodisalar birga ro'y bermas, shuning uchun X ning x_1 qiymat qabul qilish $P(x_1)$ ehtimoli qo'shish teoremasiga ko'ra:

$$P(x_1) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) + \dots + p(x_1, y_m).$$

Shunday qilib, X ning x_1 qiymat qabul qilish $P(x_1)$ ehtimoli « x_1 ustundagi» ehtimollar yig'indisiga teng. Umumiy holda $P(X = x_i)$ ehtimolni topish uchun x_i ustundagi ehtimollarni qo'shish lozim. Shunga o'xshash, « y_j satrdagi» ehtimollarni qo'shib, $P(Y = y_j)$ ehtimolni hosil qilamiz.

Misol. Quyidagi ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan.

$X \backslash Y$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,15	0,12	0,08
y_2	0,25	0,18	0,22

X tashkil etuvchining taqsimot qonuni topilsin.

$$P(x_1) = 0,15 + 0,25 = 0,4 \quad P(x_2) = 0,12 + 0,18 = 0,3 \quad P(x_3) = 0,08 + 0,22 = 0,3$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) = 0,4 + 0,3 + 0,3 = 1$$

Taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi.

X	x_1	x_2	x_3
-----	-------	-------	-------

R	0,4	0,3	0,3
---	-----	-----	-----

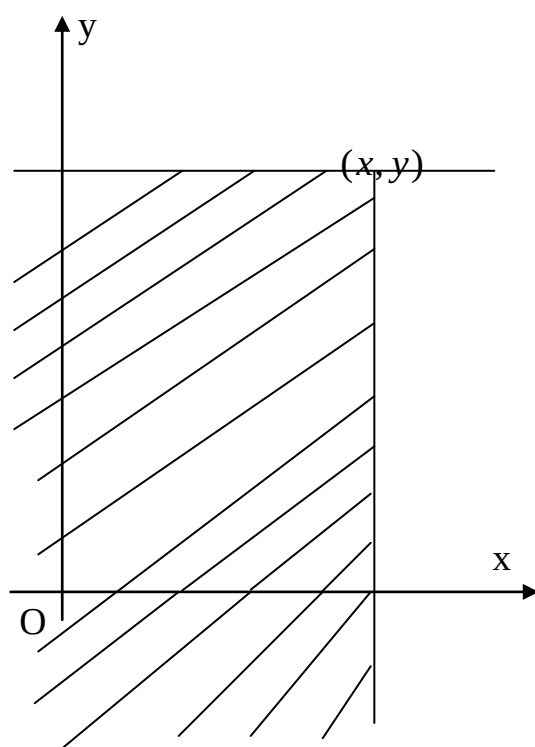
Tekshirish: $0,4 + 0,4 + 0,2 = 1$.

III.22-§. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyasi va uning xossalari.

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor (X, Y) ni qaraymiz. Faraz qilaylik x va y haqiqiy sonlar jufti bulsin.

Ta'rif. X tasodifiy miqdorni x haqiqiy son dan kichik qiymat qabul qilganda Y tasodifiy miqdorning ham y haqiqiy son dan kichik qiymat qabul qilishdan iborat hodisa ehtimoliga (X, Y) ning *taqsimot funksiyasi* deyiladi, ya'ni

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$



3-shakl

1-xossa. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$0 \leq F(x, y) \leq 1.$$

Isboti. Xossa taqsimot funksiyaning ehtimoli sifatida ta'riflashdan kelib chiqadi: ehtimol har doim 1 dan katta bo'lmagan manfiy bo'lmagan sonidir.

2-xossa. $F(x, y)$ ikkala argument bo'yicha ham kamaymovchi funksiyadir, ya'ni

$$F(x_1, y) \leq F(x_2, y), \text{ agar } x_1 < x_2 \text{ bo'lsa,}$$

$$F(x, y_1) \leq F(x, y_2), \text{ agar } y_1 < y_2 \text{ bo'lsa.}$$

3-xossa. $F(x, y)$ uchun quyidagi limit munosabatlar o'rinli;

$$1. F(-\infty, y) = 0, \quad 2. F(x, -\infty) = 0,$$

$$3. F(-\infty, -\infty) = 0, \quad 4. F(\infty, \infty) = 1.$$

Ko'rinib turibdiki, agar $F(x, y)$ funksiyaning argumentlaridan birortasi $-\infty$ bo'lsa, funksiya qiymati nolga teng bo'ladi.

Demak, X va Y tashkil etuvchilarning $-\infty$ dan kichik qiymat qabul qilish ehtimoli nolga teng.

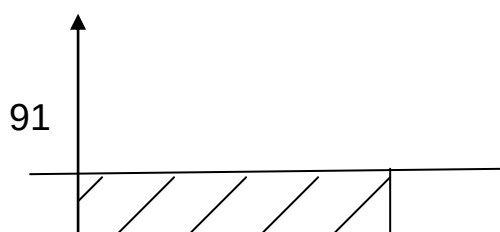
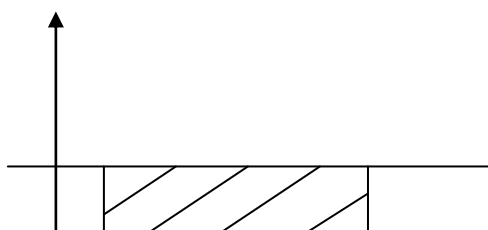
Agar $x = \infty; y = \infty$ bo'lsa, (X, Y) ning butun tekislikdagi qiymatlarini qabul qilish ehtimoli 1 ga teng.

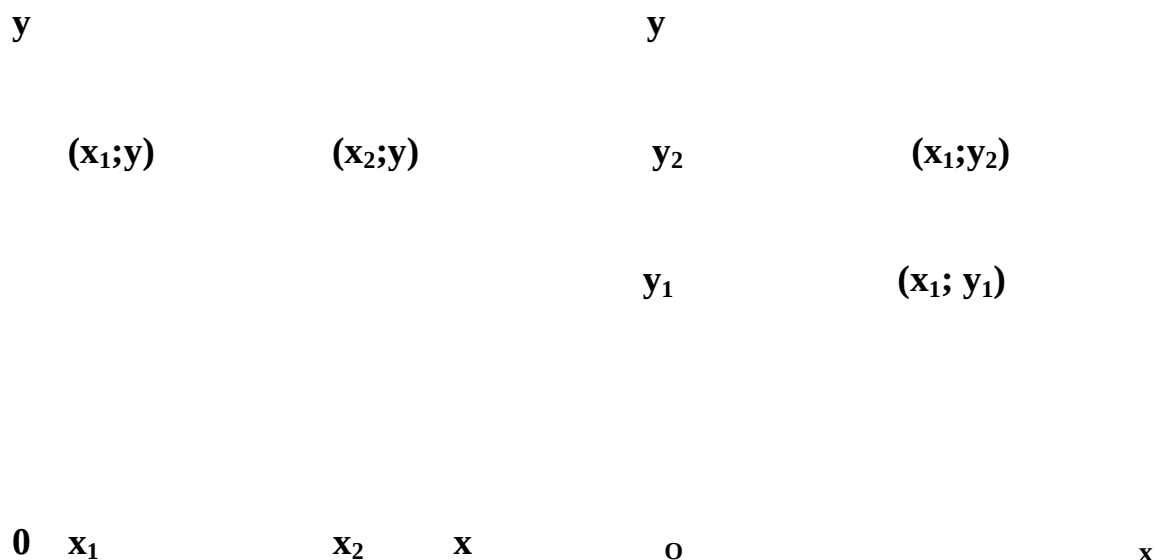
4-xossa. Agar $F(x, y)$ funksiyaning argumentlaridan birortasi ∞ ga teng bo'lsa, u 2-argumentning funksiyasiga aylanadi:

$$F(x, \infty) = F_1(x), \quad F(\infty, y) = F_2(y).$$

Tashlangan nuqtaning yarim tekislikka tushishini ifodalovchi ehtimollar quyidagicha:

$$P(x_1 \leq X < x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y) \quad (\text{a) shakl}$$





(a)

(b)

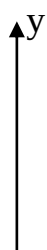
Shunga o'xshash

$$P(X < x, y_1 \leq Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1) \quad \text{(b) shakl.}$$

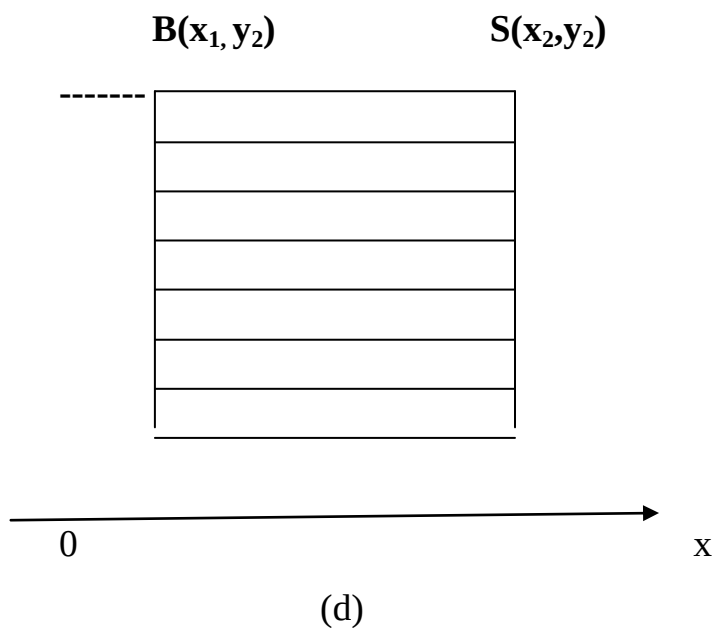
Shunday qilib, tasodifiy nuqtaning yarim tekislikka tushish ehtimoli taqsimot funksiyaning argumentlaridan biri bo'yicha orttirmasiga teng.

Tasodifiy tashlangan nuqtaning to'g'ri to'rtburchakka tushish ehtimoli quyidagicha bo'ladi:

$$P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$



(d) shakl



III.23-§. Ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot zichligi funksiyasi va uning xossalari

Faraz qilaylik, $F(x, y)$ ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi hamma joyda uzluksiz bo'lib, 2-tartibli aralash xususiy hosilaga ega bo'lsin.

Ta'rif. Ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdor (X, Y) ni taqsimot funksiyasidan olingan 2-tartibli aralash xususiy hosilaga, shu tasodifiy miqdorning *taqsimot zichligi funksiyasi* deyiladi:

$$f(x; y) = \frac{\partial^2 F(x; y)}{\partial x \partial y}$$

1-xossa. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi manfiy emas:

$$f(x; y) \geq 0$$

Isboti. $F(x, y)$ funksiyani ikkala argumenti bo'yicha ham kamaymovchi ekanidan kelib chiqadi.

2-xossa. Ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot zichligi funksiyasidan olingan chegaralari cheksiz ikki karrali xosmas integral 1 ga teng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x; y) dx dy = 1.$$

Isbot. Zichlik funksiyasidan olingan chegaralari cheksiz xosmas integral xOy sohaning yuzini ifodalaydi. Tashlangan nuqtaning esa butun tekislikka tushishi ishonchli hodisa. Ishonchli hodisani ehtimoli 1 ga teng.

Agar $f(x; y)$ ma'lum bo'lsa, $F(x, y)$ ni topishda quyidagi formuladan foydalaniladi:

$$F(x; y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x; y) dx dy.$$

III.24-§. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdorlarning tashkil etuvchilarining shartli taqsimoti. Shartli matematik kutilish

Bizga ma'lumki, A va B hodisalar bog'liq bo'lsa, u holda

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

edi. Shu munosabatni boshqacha belgilaymiz, ya'ni

$$P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

$P(B \setminus A)$ – A ro'y bergandan keyingi B hodisani ro'y berish ehtimoli. Endi ana shuni (X, Y) – tasodifiy miqdorlar sistemasiga qo'llaymiz. Faraz qilaylik, X tashkil etuvchining qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari $x_1, x_2, \dots, x_n$ va Y tashkil etuvchining qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari $y_1, y_2, \dots, y_m$ bo'lsin.

Faraz qilaylik, sinov natijasida Y miqdor $Y = y_1$ qiymat qabul qilgan bo'lsin; bunda X tasodifiy miqdor o'zining mumkin bo'lgan qiymatlaridan birini: x_1 ni, yoki x_2 ni, .., yoki x_n ni qabul qiladi. X ning $Y = y_1$ shartda, masalan, x_1 qiymat qabul qilishi shartli ehtimolini $p(x_1 | y_1)$ orqali belgilaymiz. Bu ehtimol, umuman aytganda, $p(x_1)$ shartsiz ehtimolga teng bo'lmaydi.

Tashkil qiluvchining shartli ehtimollarini umumiy holda quyidagicha belgilaymiz: $p(x_i | y_j) \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m).$

X tashkil etuvchining $Y = y_j$ bo'lganda shartli taqsimoti deb $Y = y_j$ hodisa ro'y berdi degan farazda hisoblangan

$$p(x_1 | y_j), p(x_2 | y_j), \dots, p(x_n | y_j)$$

shartli ehtimollar to'plamiga aytiladi.

Y tashkil etuvchining shartli taqsimoti shunga o'xshash aniqlanadi. Masalan, X ning $Y = y_1$ hodisa ro'y berdi degan shartli taqsimoti qonuni **ushbu** formuladan topilishi mumkin:

$$p(x_i | y_1) = \frac{p(x_i, y_1)}{p(y_1)}, \quad p(y_1) > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

X tashkil etuvchining shartli taqsimot qonunlari umumiy holda ushbu munosabat orqali aniqlanadi:

$$p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}.$$

Y tashkil etuvchining shartli taqsimot qonunlari shunga o'xshash aniqlanadi:

$$p(y_j | x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

Umumiy holda $X = x_i \quad (i = \overline{1, n})$ qiymatni qabul qilganda $Y = y_j \quad (j = \overline{1, m})$ qiymatni qabul qilish shartli ehtimollari quyidagicha:

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)},$$

shu bilan birga $\sum_{j=1}^n P(Y = y_j | X = x_i) = 1.$

Misol. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor taqsimoti quyidagi jadvalda berilgan:

Y X		x_1	x_2	x_3

$y_1 = 0,5$	0,25	0,10	0,30
$y_2 = 0,8$	0,23	0,14	0,08

$Y = y_1$ bo'lgandagi X tashkil etuvchining taqsimot qonuni topilsin. $p(y_1)$ ni topamiz:

$$p(y_1) = p(x_1; y_1) + p(x_2; y_1) + p(x_3; y_1) = 0,25 + 0,10 + 0,30 = 0,65.$$

Endi $p(x_1 | y_1)$, $p(x_2 | y_1)$, $p(x_3 | y_1)$ larni quyidagicha topamiz:

$$P(x_1/y_1) = \frac{P(x_1; y_1)}{P(y_1)} = \frac{0,25}{0,65} = \frac{5}{13},$$

$$P(x_2/y_1) = \frac{P(x_2; y_1)}{P(y_1)} = \frac{0,10}{0,65} = \frac{2}{13},$$

$$P(x_3/y_1) = \frac{P(x_3; y_1)}{P(y_1)} = \frac{0,30}{0,65} = \frac{6}{13}.$$

Izlanayotgan X ni tashkil etuvchini taqsimoti quyidagicha bo'ladi:

X	3	5	8
$P(X/Y = y_1)$	$\frac{5}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{6}{13}$

Tekshirish $\frac{5}{13} + \frac{2}{13} + \frac{6}{13} = 1$. Demak, taqsimot to'g'ri tuzilgan.

Ta'rif. X tasodifiy miqdor $X = x$ qiymatni qabul qilgandan keyingi Y ning shartli matematik kutishlari deb, Y ning qiymatlari bilan shartli ehtimollari ko'paytmalarining yig'indisiga aytiladi.

$$M(Y | X = x) = \sum_{j=1}^m y_j p(y_j | x).$$

Shartli matematik kutilish $M(Y | x)$ - x ning funksiyasi. Shuni quyidagicha ifodalaymiz:

$$M(Y | x) = f(x)$$

va buni Y ning X ga regressiya tenglamasi deb ataymiz.

Xuddi shunday X ning Y ga regressiya tenglamasi quyidagicha belgilanadi:

$$M(X | y) = \varphi(y)$$

Misol. Ikki o'lchovli deskret tasodifiy miqdor quyidagi jadvalda berilgan.

$X \backslash U$	$x_1 = 4$	$x_2 = 8$	$x_3 = 10$
$y_1 = 2$	0,12	0,08	0,35
$y_2 = 6$	0,18	0,22	0,05

Y tashkil etuvchining $X = x_1 = 4$ qiymatdagi shartli matematik kutilishi topilsin.

Yechish: $p(x_1) = p(x_1; y_1) + p(x_1; y_2) = 0,12 + 0,18 = 0,30$.

Endi shartli taqsimotlarni topamiz:

$$p(y_1 | x_1) = \frac{P(x_1; y_1)}{P(x_1)} = \frac{0,12}{0,30} = \frac{4}{10} = 0,4;$$

$$p(y_2 | x_1) = \frac{P(x_1; y_2)}{P(x_1)} = \frac{0,18}{0,30} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Y	2	6
$p(y_j x_1)$	0,4	0,6

$$\begin{aligned}
 M(X | X = x_1) &= \sum_{j=1}^2 y_j p(y_j | x_1) = y_1 p(y_1 | x_1) + y_2 p(y_2 | x_1) \\
 &= 2 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,6 = 0,8 + 3,6 = 4,4.
 \end{aligned}$$

Takrorlash uchun savollar

1. Tasodifiy miqdor deb nimaga aytiladi?
2. Diskret tasodifiy miqdor nima?

3. Uzluksiz tasodifiy miqdor deb nimaga aytiladi?
4. Taqsimot jadvali nima?
5. Taqsimot qonuni nima?
6. Diskret tasodifiy miqdor qanday qiymatlar qabul qiladi?
7. Binomial taqsimotda qancha qiymat bor?
8. Tasodifiy miqdor matematik kutilishi deb nimaga aytiladi?
9. Diskret tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalarini deb nimaga aytiladi?
10. Diskret tasodifiy miqdor dispersiyasi ta'rifini bering.
11. O'rtacha kvadratik chetlanish tushunchasini kiritilish sababi nimada?
12. Boshlang'ich moment deb nimaga aytiladi?
13. Markaziy moment deb nimaga aytiladi?
14. Markaziy va boshlang'ich momentlar o'zaro qanday bog'langan?
15. Tasodifiy miqdor matematik kutilishi deb nimaga aytiladi?
16. Diskret tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalarini deb nimaga aytiladi?
17. Diskret tasodifiy miqdor dispersiyasi ta'rifini bering.
18. O'rtacha kvadratik chetlanish tushunchasini kiritilish sababi nimada?
19. Boshlang'ich moment deb nimaga aytiladi?
20. Markaziy moment deb nimaga aytiladi?
21. Markaziy va boshlang'ich momentlar orasida qanday bog'lanish bor?
22. Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini ta'riflang.
23. Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
24. Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bilan zichlik funksiyasi o'zaro qanday bog'langan?
25. Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi qanday shartni qanoatlantiradi?
26. Normal taqsimot qonuni deb nimaga aytiladi?
27. Ko'rsatkichli taqsimot qonunining formulasi qanday bo'ladi?
28. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishini ta'riflang.

29. Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi qaysi formula bilan hisoblanadi?

30. Normal taqsimot qonuni deb nimaga aytiladi?

31. Dispersiya va o'rta kvadratik chetlanish orasidagi bog'lanishni ayting.

32. Matematik kutilish taqsimot qonunining qaysi xarakterli tomonini ifodalaydi?

33. Dispersiya taqsimot qonunida nimani ifodalaydi?

34. Matematik kutilish va moda qachon teng bo'ladi?

35. Qachon mediana va moda teng bo'ladi?

36. Asimmetriya koeffitsiyentini ta'riflang.

37. Tasodifiy miqdorning eksessi deb nimaga aytiladi?

38. Uzluksiz tasodifiy miqdor diskret tasodifiy miqdordan qanday farq qiladi?

39. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar taqsimotlar qonunlarini ayting.

40. Tekis taqsimot nima?

41. Ko'rsatkichli taqsimot nima?

42. Normal taqsimot nima?

43. Normal taqsimot parametrlari nimani bildiradi?

44. Normallangan normal taqsimot qanday bo'ladi?

45. "Uch sigma qoidasi" nimani anglatadi?

46. Chebishev tengsizligining ikkala ko'rinishini aytib bering.

47. Chebishev teoremasi qanday ta'riflanadi?

48. Bernulli teoremasining ta'rifini ayting.

49. Xinchin teoremasining ta'rifini ayting.

50. Katta sonlar qonuni va uning iqtisodiy ahamiyatini ayting.

51. Ehtimol bo'yicha yaqinlashishni ta'riflang.

52. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasini ta'riflang.

53. Ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorni zichlik funksiyasini ta'riflang.

54. Shartli taqsimot nima?

55. Shartli matematik kutilishni ta'riflang.

Mavzu bo'yicha test savollari

1. Qaysi taqsimot qonuni diskret shaklda emas?
a) binomial b) geometrik d) Puasson e) tekis
2. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunlarini toping.
1. binomial 2. tekis 3. geometrik 4. notekis
a) 1 va 2 b) 1 va 3 d) 2 va 3 e) 3 va 4

3. Taqsimot qonuni

X	x_1	x_2	x_3
P	0,3	0,5	P_3

bo'lsa, p_3 ni tohing.

- a) 0,1 b) 0,2 d) 0,3 e) 0,4
4. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni qanday shaklda bo'ladi?
a) grafik b) funksiya d) jadval e) uzluksis funksiya f)diagramma
5. Diskret tasodifiy miqdor qiymatlari soni qancha bo'ladi?
a) chekli yoki sanoqli b) faqat chekli d) n ta e) cheksiz ko'p f)2 ta
6. Taqsimot qonuni

X	x_1	x_2	x_3	x_4
P	p_1	0,4	p_3	0,2

berilgan bo'lsa, p_1 va p_3 qanday munosabatda bo'ladi?

- a) $p_1 = p_3$ b) $p_1 \neq p_3$ d) $p_1 + p_3 = 1$ e) $p_1 + p_3 = 0,4$ f) $p_1 > p_3$
7. Tasodifiy miqdorning qiymatlari soni chekli bo'lsa, u qanday tasodifiy niqdor deyiladi?
a) uzluksiz b) chiziqli d) diskret e) funksional f) chekli
8. Qaysi diskret tasodifiy miqdor qiymatlari soni cheksiz bo'ladi?
1. Puasson 2. geometrik 3. binomial
a) 1 va 2 b) 1 va 3 d) 2 va 3 e) faqat 2 f) faqat 3
9. Diskret taqsimlangan tasodifiy miqdor X taqsimot bilan berilgan.

- | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|---------------------|
| X | 0,5 | 8 | 10 | 15 | |
| p | 0,2 | 0,5 | 0,1 | 0,2 | $M(X)=?$, $D(X)=?$ |
- a) 8,1 va 2,4 b) 8,1 va 21,14 d) 10 va 21,14
e) 10 va 21,4 f) 8,1 va 21,44

10. Diskret taqsimlangan tasodifiy miqdor X taqsimot bilan berilgan.

X	5	8	12
p	0,2	0,5	0,3

Chetlanishining matematik kutilishi topilsin.

- a) 3 b) 2 d) 0,9 e) 0 f) 0,1

11. Diskret taqsimlangan tasodifiy miqdor X taqsimoti bilan berilgan.

X	4	8	10
p	0,5	0,3	0,2

Tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

- a) 6,24 b) 6,22 d) 6,79 e) 5,24 f) 8,1

12. Agar ikkita erkli sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil va $M X = 0,9$ ekanligi ma'lum bo'lsa, bu sinovlarda A hodisaning ro'y berishlari sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

- a) 1,5355 b) 1,195 d) 1,1025 e) 0,4955 f) 1,1035

13. A hodisaning har bir sinovda ro'y berish ehtimoli 0,4 ga teng. X diskret tasodifiy miqdor - A hodisaning 3 ta erkli sinovda ro'y berish sonining dispersiyasini toping.

- a) 1,72 b) 2,72 d) 0,144 e) 7,2 f) 0,72

14. 2 ta o'yin soqqasi tashlanadi. Ikkita yog'ida chiqadigan ochkolar yig'indisining matematik kutilishini toping.

- a) $M(X) = 6,5$ b) $M(X) = 7,5$ d) $M(X) = 7$
e) $M(X) = 7,05$ f) $M(X) = 6,95$

15. $M(XY) = M(X) M(Y)$ munosabat bajarilishi uchun X va Y tasodifiy miqdorlar qanday bo'lishi kerak?

- a) birgalikda bo'lgan
b) birgalikda bo'lmagan
d) bog'liq bo'lmagan
e) bog'liq bo'lgan
f) ixtiyoriy tasodifiy miqdorlar

16. Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi uchun qaysi munosabat to'g'ri emas?

- a) $f(x) \leq 0$ b) $f(x) \geq 0$ d) $f(x) = F'(x)$ e) $P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$

17. Quyidagilardan qaysisi uzluksiz taqsimot emas?

- a) normal b) binomial d) ko'rsatkichli e) tekis

18. Quyidagilardan qaysisi uzluksiz taqsimot?

- a) binomial b) geometrik d) tekis e) Puasson

19. Taqsimot funksiya uchun quyidagi munosabatlardan qaysi biri o'rinli emas?

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ d) $F(x)$ kamaymovchi e) $F'(x) = \int_a^b f(x) dx$

20. Zichlik funksiyasi va taqsimot funksiyasi mos ravishda $f(x)$ va $F(x)$ bo'lsa, qaysi munosabat to'g'ri?

- a) $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ b) $F'(x) = f(x)$ d) $\int_0^x f(t) dt = 1$ e) $F(x) = f'(x)$

21. Taqsimotning zichlik funksiyasi $f(x)$ bo'lsa, qaysi munosabat noto'g'ri?

- a) $F'(x) = f(x)$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ d) $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ e) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

22. Taqsimotning zichlik funksiyasi $f(x)$ uchun qaysi xossa to'g'ri?

- a) $f(x)$ -o'suvchi b) $f(x)$ -kamaymovchi d) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
e) $f(x)$ -monoton f) $f(x)$ -diskret

23. Taqsimotning zichlik funksiyasi $f(x)$ uchun qaysi xossa noto'g'ri?

- a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ b) har qanday alohida x nuqtada $f(x)=0$ d) $f(x)$ -kamaymovchi funksiya e) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$
 f) $F'(x) = f(x)$

24. Quyidagi taqsimotlardan qaysisining zichlik funksiyasi mavjud?

- a) Puasson b) binomial d) geometrik e) normal

25. Quyidagi taqsimotlardan qaysisining zichlik funksiyasi mavjud emas?

- a) ko'rsatkichli b) normal c) binomial d) tekis

26. Zichlik funksiyasining qaysi xossasi notug'ri?

- a) $f(x) = F'(x)$ b) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ d) $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$ e) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

27. Tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi uchun qaysi xossa noto'g'ri?

- a) $F(+\infty) = 1$ b) $0 \leq F(x) \leq 1$ d) $F(-\infty) = 0$ e) $x_1 < x_2$ uchun $F(x_1) \geq F(x_2)$

f) $F(x)$ -kamaymovchi funksiya

28. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun quyidagilardan qaysilari mavjud?

- a) taqsimot funksiyasi va zichlik funksiyasi
 b) taqsimot funksiyasi va binomial taqsimot
 d) zichlik funksiyasi va geometrik taqsimot
 e) binomial taqsimot va zichlik funksiyasi
 f) geometrik taqsimot va zichlik funksiyasi

29. Uzluksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalarini aniqlang.

- a) matematik kutilish, zichlik funksiyasi b) dispersiya, taqsimot funksiyasi
 d) dispersiya, matematik kutilish e) matematik kutilish, nisbiy sanoq
 f) dispersiya, diskert tasodifiy miqdor

30. Noto'g'ri munosabatni aniqlang (bu yerda $C = \text{const}$):

$$a) D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 \quad b) \sigma(X) = \sqrt{D(X)} \quad d) D(CX) = CD(X) \\ e) M(CX) = CM(X) \quad f) M(X+Y) = M(X) + M(Y)$$

31. $[a; b]$ kesmada tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

$$a) \frac{a+b}{2} \quad b) \frac{b-a}{2} \quad d) \frac{a^2+ab+b^2}{12} \quad e) \frac{b-a}{12} \quad f) \frac{a-b}{2}$$

32. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$ munosabat o'rinli bo'lishi uchun X va Y tasodifiy miqdorlar qanday bo'lishi kerak?

$$a) \text{chiziqli bog'langan} \quad b) \text{bog'liqmas} \quad d) \text{ixtiyoriy} \\ e) \text{birgalikda bo'lmagan} \quad f) \text{teng imkoniyatli}$$

33. Ko'rsatkichli taqsimotning dispersiyasini aniqlang.

$$a) \frac{1}{\lambda} \quad b) \frac{1}{\lambda^2} \quad d) \lambda \quad e) \lambda^2 \quad f) \lambda + 1$$

34. $[a; b]$ kesmada tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

$$a) \frac{a+b}{2} \quad b) \frac{b-a}{2} \quad d) \frac{a+b^2}{6} \quad e) \frac{a^2-b^3}{12} \quad f) \frac{a^2+b^3}{12}$$

35. Quyidagi munosabatlardan qaysilari ayniyat?

$$1. \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B} \quad 2. A + \overline{A} = \Omega \quad 3. \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \\ 4. \overline{A+B} \cdot C = \overline{A} \cdot C + \overline{B} \cdot C \quad 5. A+B=AB$$

$$a) 1,3,5 \quad b) 2,3,4 \quad d) 2,3,5 \quad e) 1,3,4 \quad f) 1,2,3$$

36. Tasodifiy miqdorning matematik kutilishi uchun qaysi munosabat noto'g'ri?

$$a) M(CX) = C \cdot M(X), C - o'zgarmas son. \quad b)$$

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y). \quad d) M(X+Y) = M(X) + M(Y). \quad e)$$

$$M(X-Y) = M(X)M(Y). \quad f) M(C) = C$$

37. Tasodifiy miqdorning dispersiyasi uchun qaysi munosabat noto'g'ri?
X, Y-erkli, C- o'zgarmas son

$$a) D(CX) = C^2 \cdot D(X) \quad b) D(C) = 0. \quad d) D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

$$e) D(CX) = C \cdot D(X) \quad f) D(XY) = D(X)D(Y).$$

38. Tasodifiy miqdorning dispersiyasi uchun qaysi xossa noto'g'ri? X,Y-erkli

$$a) D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 \quad b) D(X - Y) = D(X) + D(Y) \quad d)$$

$$D(XY) = D(X) \cdot D(Y) \quad e) D(X + Y) = D(X) + D(Y) \quad f)$$

$$D(CX) = C^2 \cdot D(X)$$

39. $D(X)=3$, $D(Y)=4$ va X,Y -bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar uchun $D(2X-3Y)$ ni hisoblang.

$$a) -6 \quad b) 48 \quad d) 42 \quad e) 20 \quad f) 18$$

40. Uzlüksiz tasodifiy miqdorlar ko'proq qaysi taqsimot qonuniga bo'ysunadi?

$$a) \text{ tekis } b) \text{ binomial } d) \text{ ko'rsatkichli } e) \text{ normal}$$

41. Normal taqsimot nechta parametrga bog'liq?

$$a) 1 \text{ ta } b) 2 \text{ ta } d) 3 \text{ ta } e) \text{ parametrga bog'liq emas}$$

42. Normallangan normal taqsimot parametrlari qanday bo'ladi?

$$a) a=1, \sigma=1 \quad b) a=0, \sigma=1 \quad d) a=\sigma=0 \quad e) a=0, \sigma=1$$

43. Tekis taqsimotda kesma uzunligi nimaga teng?

$$a) \frac{a+2}{2} \quad b) \frac{a-2}{2} \quad d) b-a \quad e) \frac{b-a}{2}$$

44. Ko'rsatkichli taqsimot uchun qaysi munosabat o'rinli?

$$a) D(x) = \frac{1}{\lambda} \quad b) M(X) = \lambda \quad d) D(X) = \lambda^2 \quad e) \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

45. Ko'rsatkichli taqsimot uchun qaysi munosabat o'rinli?

$$a) D(X) = M(X^2) \quad b) M(X) = \sigma(X) \quad d) D(X) = M(X) \quad e) \sigma(X) = M(X^2)$$

46. Ko'rsatkichli taqsimot uchun qaysi munosabat o'rinli emas?

$$a) D(X) = (M(X))^2 \quad b) D(X) = M(X^2) \quad d) M(X) = \sigma(X) \quad e) M(X) = \sqrt{D(X)}$$

47. "Uch sigma qoidasi" qaysi taqsimot qonuniga tegishli?

$$a) \text{ tekis } b) \text{ ko'rsatkichli } d) \text{ Puasson, } e) \text{ norml}$$

48. Chebishev tengsizligida dispersiya qanday bo'lishi talab qilinadi?

a) ixtiyoriy b) chekli d) cheksiz e) istalganchs kichik.

49. Chebishev teoremasida dispersiya qanday bo'lishi talab qilinadi?

a) ixtiyoriy b) bir xil d) tekis chegaralangan e) o'zaro teng emas.

50. Chebishev teoremasida $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodiy miqdorlar qanday bo'lishi kerak?

a) o'zaro bog'liq b) har ikkitasi bo'g'liqmas d) ikki xil e) hammasi bir xil.

51. Chebishevning xususiy teoremasida matematik kutilishlar qanday bo'lishi talab qilinadi?

a) hammasi har xil b) bir xil d) ikki xil e) uch xil

52. Bernulli teoremasi nimalarni o'zaro bog'laydi?

a) nisbiy chastota va hodisa ehtimolini b) hodisa ehtimoli va dispersiyani
d) dispersiya va matematik kutilishni e) nisbiy chastota va dispersiyani.

53. Chebishev teoremasiga ko'ra o'lchashlar soni yetarlicha katta bo'lsa, amalda muqarrarlik bilan quyidagini tasdiqlash mumkin: o'lchash natijalarining o'rta arifmetik qiymatiistalgancha kam farq qiladi.

a) har doim b) ixtiyoriy holatda d) bundan keyin e) haqiqiy qiymatdan.

54. 1200 ta bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdor berilgan bo'lib, ulardan har birining dispersiyasi 3 dan oshmaydi. Shu tasodifiy miqdorlar o'rta arifmetik qiymatining matematik kutilishlari o'rta arifmetigidan chetlanishining absolyut qiymati bo'yicha 0,2 dan katta bo'lmaslik ehtimolini toping.

a) $p > 0,9375$ b) $p > 0,2587$ d) $p > 0,2458$ e) $p > 0,2456$ f) $p > 0,9365$

55. Zavodda ishlab chiqarilgan detalning o'rtacha uzunligi 50 sm, o'rtacha kvadratik chetlanishi 0,2 sm. Tavakkaliga olingan detal uzunligi 49,5 sm bilan 50,5 sm orasida bo'lishi ehtimolini baholang.

a) $p > 0,93$ b) $p > 0,25$ d) $p > 0,58$ e) $p > 0,46$ f) $p > 0,84$

56. O'yin kubi 350 marta tashlandi. Ochkolar tushish matematik kutilishi 3,5 dispersiyasi $35/12$ ga teng. Ochkolar tushish o'rta arifmetigining matematik kutilishidan chetlanishini absolyut qiymati 0,2 dan oshmasligi ehtimolini toping.

a) $p > 0,782$ b) $p > 0,587$ d) $p > 0,458$ e) $p > 0,456$ f) $p > 0,965$

57. Ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini toping.

Y / X	x_1	x_2	x_3
y_1	0,12	0,18	0,10
y_2	0,10	0,11	0,39

a) X x_1 x_2 x_3 Y y_1 y_2
 p 0,22 0,29 0,49 p 0,40 0,60

b) X x_1 x_2 x_3 Y y_1 y_2
 p 0,21 0,24 0,49 p 0,40 0,60

d) X x_1 x_2 x_3 Y y_1 y_2
 p 0,22 0,14 0,49 p 0,41 0,40

e) X x_1 x_2 x_3 Y y_1 y_2
 p 0,22 0,25 0,49 p 0,21 0,60

f) X x_1 x_2 x_3 Y y_1 y_2
 p 0,12 0,29 0,49 p 0,12 0,60

58. Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning ehtimollari taqsimoti berilgan

Y/X	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini toping.

a) X 26 → 30 → 41 → 50 → Y → 1,3 → 2,7 →
 p 0,14 0,42 0,19 0,25 p 0,29 0,17

b) X	26	30	41	50	Y	2,3	2,7
p	0,14	0,42	0,15	0,25	p	0,58	0,17

d) X	26	30	41	50	Y	2,3	2,7
p	0,14	0,26	0,19	0,25	p	0,25	0,75

e) X	26	30	41	50	Y	2,3	2,7
p	0,14	0,25	0,19	0,25	p	0,52	0,17

f) X	26	30	41	50	Y	2,3	2,7
p	0,12	0,42	0,25	0,25	p	0,25	0,17

59. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor berilgan.

Y / X	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

X tashkil etuvchining Y tashkil etuvchi $y_1 = 10$ qiymat qabul qiladi, degan shartda shartli taqsimot qonunini toping.

a) $X \quad 3 \quad 6$
 $p(X|y_1) \quad 5/7 \quad 2/7$

b) $X \quad 3 \quad 6$
 $p(X|y_1) \quad 5/6 \quad 2/7$

d) $X \quad 3 \quad 6$
 $p(X|y_1) \quad 5/7 \quad 1/7$

e) $X \quad 3 \quad 6$
 $p(X|y_1) \quad 5/7 \quad 3/7$

60. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor berilgan.

$Y \backslash X$	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Y tashkil etuvchining X tashkil etuvchi $x_2 = 6$ qiymat qabul qiladi, degan shartda shartli taqsimot qonunini toping.

- a) Y 10 14 18
 $p(Y | x_2)$ 5/7 2/7 2/5
- b) Y 10 14 18
 $p(Y | x_2)$ 5/6 2/7 12/15
- d) Y 10 14 18
 $p(Y | x_2)$ 5/7 1/7 15/17
- e) Y 10 14 18
 $p(Y | x_2)$ 5/14 5/28 13/28

IVbob.MATEMATIK STATISTIKA FANINING PREDMETI. EMPIRIK TAQSIMOT QONUNI

IV.1-§. O'zaro bog'liq va bog'liqmas tasodifiy miqdorlar

Tasodifiy miqdorlar sistemasi o'rganilayotganda ularning bog'liqlik xarakteri va darajasiga e'tibor beriladi. Bu bog'liqlik ma'lum darajada aniq va ravshan ifodalangan bo'lishi, yoki unchalik aniq bo'lmasligi mumkin. Ba'zi hollarda bog'liqlik shunchalik aniq bo'lishi mumkinki, tasodifiy miqdorlardan birining qiymati yordamida ikkinchisining qiymatini aniq aytish mumkin bo'ladi, boshqa holatda esa, ularning bog'liqligi shunchalik zaif bo'ladiki, ularni amalda bog'liqmas deb hisoblash mumkin.

Agar Y tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni X tasodifiy miqdorning qanday qiymat qabul qilishiga bog'liq bo'lmasa, Y tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorga bog'liq emas deyiladi.

Tasodifiy miqdorlar uzluksiz bo'lgan holda, Y miqdorning X miqdorga bog'liqmasligi har qanday y qiymat uchun

$$f(y|x) = f_2(y)$$

shaklida yoziladi.

Agar, Y miqdor X ga bog'liq bo'lsa,

$$f(y|x) \neq f_2(y)$$

shaklida yoziladi.

Tasodifiy miqdorlarning bog'liq yoki bog'liqmasligi o'zaro bo'ladi, ya'ni Y miqdor X ga bog'liq bo'lmasa, X miqdor ham Y ga bogliq bo'lmaydi, ya'ni

$$f_1(x) \cdot f(y|x) = f_2(y) \cdot f(x|y)$$

Umuman, agar X va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlaridan biri ikkinchisining qanday qiymat qabul qilganligiga bog'liq bo'lmasa, ular *bog'liqmas tasodifiy miqdorlar* deyiladi. Bu holda bog'liqmas tasodifiy miqdorlar sistemasining taqsimot zichligi ayrim olingan tasodifiy miqdorlar taqsimot zichliklari ko'paytmasiga teng:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Ba'zi hollarda $f(x, y)$ funksiyaning ko'rinishi yordamida X va Y tasodifiy miqdorlarning bog'liqmasligini aniqlash mumkin bo'ladi.

Misol. (X, Y) sistemaning taqsimot zichligi

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1)}$$

ko'rinishda bo'lsa, X va Y tasodifiy **miqdorlarning** bog'liq yoki bog'liqmasligi aniqlansin.

Yechish: Zichlik funksiyasini

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)} \cdot \frac{1}{\pi(y^2 + 1)}$$

shaklga keltiramiz.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(y^2 + 1)} dy = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}$$

va

$$f_2(y) = \frac{1}{\pi(y^2 + 1)}$$

Shu sababli $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ va X bilan Y tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'ladi.

Bu misolda (X, Y) sistemaning taqsimot qonuni (aniqrog'i zichligi) ma'lum bo'lgani uchun ularning bog'liqmasligini osonroq aniqladik. Ammo ko'pincha sistemaning taqsimot qonuni aniq bo'lmaydi, faqat X va Y tasodifiy miqdorlarning ayrim-ayrim holdagi taqsimotlari ma'lum bo'ladi, ularning ko'rinishiga qarab X va Y tasodifiy miqdorlarning bog'liq yoki bog'liqmasligini asoslaydi.

Bog'liqlik funksional yoki statistik (stoxastik, ehtimoliy) bo'lishi mumkin.

IV.2-§. Funksional va statistik bog'lanishlar.

1.Funksional bog'lanish

Agar bir miqdorning har bir qiymatiga ikkinchi miqdorning birorta qoida orqali faqat bitta qiymati mos kelsa, bunday bog'lanish *funksional bog'lanish* deyiladi. Misol, aylana uzunligi C va uning radiusi R ni ikki miqdor desak, bu miqdorlar orasidagi funksional bog'lanish quyidagicha yoziladi:

$$C=2\pi R,$$

bunda aylana radiusi R ning har bir qiymatiga uni 2π ga ko'paytirish qoidasi yordamida aylana uzunligi C ning yagona qiymati mos keladi. Afsuski tabiatda uchraydigan hamma miqdorlar ham funksional bog'langan bo'**laver**maydi.

2.Statistik bog'lanish

Agar bir miqdorning o'zgarishi ikkinchi miqdorning taqsimot qonunining o'zgarishiga olib kelsa, bunday bog'lanish *statistik (stoxastik, ehtimoliy) bog'lanish* deyiladi.

Masalan, X deb, bir gektar yerga solinadigan mineral o'g'it miqdorini, Y deb esa, shu yerdan olinadigan hosildorlik miqdorini belgilasak, u holda bu ikki

miqdorning o'zaro bog'liqligi o'z-o'zidan tushinarli, lekin bu bog'liqlikni funksional munosabat bilan bog'lab bo'lmaydi. Bunday hollarda statistik bog'lanish qaraladi.

Quyidagi misolni qaraymiz. X – tavakkaliga olingan odamning bo'yi, Y – uning og'irligi bo'lsin. Umuman olganda X va Y tasodifiy miqdorlar orasida ehtimoliy bog'lanish bor; odatda bo'yi uzun odamlarning og'irligi ham kattaroq bo'ladi. Hattoki shunday empirik formula topish mumkinki, natijada ehtimoliy bog'lanishni funksional bog'lanishga taqriban almashtirish mumkin. Xuddi shunday taqribiy formula sifatida

$$Y(kg) = X(sm) - 100$$

ni taqriban **qabul** qilish mumkin.

Bunga o'xshash formulalar aniq bo'lmasada, ba'zi chetlanishlarni hisobga olmasak, ommaviy qonuniyatlarni ifodalay oladi.

Yuqoridagi misolda biz aniq ifodalangan bog'liqlikni ko'rdik. Endi boshqa hollarni qaraylik: X – tavakkaliga olingan odamning bo'yi, Z – uning yoshi bo'lsin. Yoshi katta odamlar uchun X va Z miqdorlar amalda bog'liqmas bo'lib, yosh bolalar uchun ular bog'liq bo'ladilar.

IV.3-§. Korrelyatsion bog'lanish. Korrelyatsiya momenti.

Korrelyatsiya koeffitsiyenti

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalaridan korrelyatsiya momenti va korrelyatsiya koeffitsiyentlarini ko'rib chiqamiz.

1-ta'rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning *korrelyatsiya momenti* deb, ularning chetlanishlari ko'paytmasidan olingan matematik kutilishga aytiladi:

$$\mu_{xy} = \{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}.$$

Agar tasodifiy miqdorlar diskret bo'lsa, korrelyatsiya momenti quyidagi formula bilab hisoblanadi:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p(x_i, y_j),$$

agar uzluksiz bo'lsa,

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)][y - M(Y)] f(x, y) dx dy.$$

1-teorema. Ikkita X va Y o'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar korrelyatsiya momenti nolga teng bo'ladi.

Isbot. X va Y lar o'zaro bog'liqmas (erkli) bo'lgani uchun $X-M(X)$ va $Y-M(Y)$ lar ham o'zaro bog'liqmas bo'ladi. Matematik kutilishning va chetlanishning xossaligidan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\} = M[X - M(X)]M[Y - M(Y)] = 0.$$

2-ta'rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya momentining ularning o'rta kvadratik chetlanishlari ko'paytmasi nisbatga *korrelyatsiya koeffitsiyenti* deyiladi:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

2-teorema. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya momentining absolyut qiymati, ularning dispersiyalari o'rta geometrigidan oshmaydi:

$$|\mu_{xy}| \leq \sqrt{D_x D_y}.$$

3-teorema. Korrelyatsiya koeffitsiyenti absolyut qiymati bo'yicha 1 dan katta emas:

$$|r_{xy}| \leq 1.$$

Korrelyatsiya koeffitsiyenti tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'lanishning yo'nalishini, hamda kuchini aniqlaydi. Agar $r_{xy} < 0$ bo'lsa – bog'lanish teskari, $r_{xy} > 0$ bo'lsa – bog'lanish to'g'ri bo'ladi.

Umumiy holda $-1 < r_{xy} < 1$ bo'ladi va r_{xy} ning qiymati X va Y tasodifiy miqdorlarning bog'lanish darajasini ko'rsatadi; $r_{xy} > 0$ bo'lsa, X va Y tasodifiy miqdorlar orasida musbat korrelyatsiya mavjud bo'ladi, agar $r_{xy} < 0$ da esa manfiy korrelyatsiya haqida so'z yuritamiz. Misollar keltiramiz.

1. Odamning og'irligi va bo'yi musbat korrelyatsiyaga ega. Korrelyatsiya koeffitsiyenti tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'lanishni yo'nalishini hamda kuchini aniqlaydi. Agar $r_{xy} < 0$ bo'lsa - bog'lanish teskari, $r_{xy} > 0$ bo'lsa - bog'lanish to'g'ri.

2. Ma'lum asbobni ishga tushirishdan oldingi tayyorgarlikka sarflangan vaqt bilan shu asbobning buzilmasdan ishlash vaqti (albatta tayyorgarlik vaqti unumli sarflangan bo'lsa) musbat korrelyatsiyaga ega.

3. Ma'lum ob'ektga qarata bir yo'la otilganda ayrim snaryadlarning tushish nuqtalarining koordinatalari musbat korrelyatsiyaga ega bo'ladi.

4. Asbobni ishga tushirishdan oldingi tayyorgarlikka sarflangan vaqt bilan shu asboblardan ishdan chiqqanlari soni orasida manfiy korrelyatsion bog'lanish mavjud.

5. Nishonga ikkita o'q otiladi, 1-otilgan o'q tekkan nuqtaning koordinatalari aniqlanadi va mo'ljalga olish uskunasi 1-otishdagi xatoga proporsional tuzatish teskari ishora bilan olinadi. 1-otishdagi va 2-otishdagi tegish nuqtalarining koordinatalari manfiy korrelyatsion bog'lanishga ega bo'ladi.

Agar bizning ixtiyorimizda Ikki tasodifiy miqdorlarning (X,Y) sistemasi ustida sinovlar o'tkazilgan bo'lib, qabul qilingan qiymatlar koordinatalar sistemasida tasvirlangan bo'lsa, bu grafik asosida X va Y orasidagi bog'lanish haqida boshlang'ich tasavvurga ega bo'lamiz. Masalan, 1-shakldan ko'rinishicha X va Y tasodifiy miqdorlar orasida musbat korrelyatsion bog'lanish borligi ko'rinib turibdi. 2-shakldagi manfiy korrelyatsion bog'lanish esa deyarli funksional bog'lanish deb qaralishi mumkin. 3-shakildagi korrelyatsion bog'lanish manfiy va nisbatan zaif bog'lanish ekanligi ko'rinib turibdi. 4-shakildagi X va Y tasodifiy miqdorlar esa deyarli korrelyatsionlanmagan ekanligi aniq bo'layapdi.

Odatda, tasodifiy miqdor taqsimot qonuni noma'lum bo'ladi, shu sababli amaldan statistik bog'lanish o'rniga korrelyatsion bog'lanish qaraladi.

Bir miqdorning o'zgarishi ikkinchi miqdor shartli o'rta qiymatning o'zgarishiga olib kelsa, bunday bog'lanish ***korrelyatsion bog'lanish*** deyiladi.

Korrelyatsion jadval va shartli o'rta qiymat

Ikki o'lchovli tanlanmani qaraylik: $(x_1, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_n, y_m)$ yoki jadval ko'rinishda

Y	x_1	x_2	...	x_n
---	-------	-------	-----	-------

X				
y_1	n_{11}	n_{21}	...	n_{n1}
y_2	n_{12}	n_{22}	...	n_{n2}
...	...	...	...	...
y_m	n_{1m}	n_{2m}	...	n_{nm}

bu yerda n_{ij} – berilgan tanlanmadagi (x_i, y_j) elementlarning soni.

Korrelyatsion jadval yordamida shartli o'rta qiymat tushinchasi quyidagicha kiritiladi: Y miqdorning $X=x_1$ qiymat qabul qilingandagi *shartli o'rta qiymati* deb, $\bar{Y}(X = x_1) = n_{11} \cdot y_1 + n_{12} \cdot y_2 + \dots + n_{1m} \cdot y_m$ ga aytiladi. Bu ta'rifdan ko'rinib turibdiki, tanlanma berilgan bo'lsa, uning shartli o'rta qiymatlarini hisoblash qiyin bo'lmaydi, ammo Y miqdorning shartli o'rta qiymati X miqdorining o'zgarishi bilan o'zgarib boradi.

IV.4-§. Matematik statistikaning predmeti, vazifalari va asosiy masalalari

Matematik statistikaning **predmeti** ommaviy tasodifiy hodisa va holatlarni kuzatishdan olingan statistik tajriba natijalarini qayd qilish, tasniflash, tavsiflash va tahlil qilish usullarini ishlab chiqishdan iboratdir.

Matematik statistikaning **asosiy vazifasi** ehtimollar nazariyasi metodlari asosida tabiat va jamiyatdagi ommaviy tasodifiy hodisalarning umumiy qonuniyatlarini o'rganib, ilmiy va amaliy xulosalar chiqarishdan iborat. Uning qo'llanilish sohalari juda ko'p: meditsina, biologiya, qishloq xo'jaligi, fizika, iqtisodiyot, texnika, ishlab chiqarish, sifatni tekshirish nazariyasi va hokazolar.

Tajribaga asoslangan hamma fanlarda matematik statistika metodlari qo'llaniladi. Qo'llanish tartibiga qarab, matematik statistikaning vazifalarini shartli ravishda ikkiga bo'lamiz.

Matematik statistikaning 1-vazifasi- statistik ma'lumotlarni yig'ib, ularni guruhlariga ajratish va tartibga solish, 2-vazifasi izlanishning maqsadiga qarab, ma'lumotlarni tahlil qilish usullarini ishlab chiqishdan iboratdir. Bularga:

noma'lum ehtimollarni baholash, noma'lum taqsimot funksiyalarini baholash, taqsimot parametrlarini baholash, tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'lanishlarning yo'nalishini, hamda kuchini aniqlash, statistik gipotezalarni tekshirish va hokazolar.

Matematik statistikaning masalalari

Odatda tanlanmaning taqsimot qonuni noma'lum bo'ladi. Biz bu noma'lum taqsimot qonunini $F(x)$ deb belgilaylik. Tanlanmaning noma'lum taqsimot qonuni $F(x)$ ni topish matematik statistikaning **birinchi masalasidir**.

Tajriba shuni ko'rsatadiki, tanlanma soni qanchalik katta bo'lmasin, noma'lum taqsimot qonuni $F(x)$ ni aniq topish mumkin emas, shuning uchun noma'lum taqsimot qonuni tegishli bo'lgan sinf ma'lum deb qaralib, shu taqsimot qonunini noma'lum parametrini baholash masalasi qaraladi. Noma'lum taqsimot qonunining parametrini topish masalasi, matematik statistikaning **ikkinchi masalasidir**.

Ayrim masalalarda noma'lum parametrning aniq qiymatini topish zarur bo'lmasdan, shu parametr joylashgan birorta oraliqni ko'rsatish yetarli bo'ladi. Bunday oraliqlar *ishonchlilik oralig'i* deyiladi. Noma'lum parametrlar uchun ishonchlilik oralig'ini topish masalasi matematik statistikaning **uchinchi masalasidir**.

Noma'lum taqsimot qonuni haqidagi har qanday gipoteza statistik gipoteza deyiladi. Statistik gipotezalarni tekshirish uchun kriteriyalar qurish masalasi matematik statistikaning **to'rtinchi masalasidir**.

Odatda qaralayotgan bir necha tasodifiy miqdorlar o'rganilayotgan jarayonning turiga qarab, u yoki bu darajada bog'liq bo'lishi mumkin.

Masalan, x deb bir gektar yerga solinadigan mineral o'g'it miqdorini, y deb shu gektar yerdan olinadigan hosil miqdorini belgilaylik, u holda bu ikki tasodifiy miqdor bog'liq ekanligi o'z-o'zidan ravshan.

Lekin bu bog'liqlikni funksional bog'lanish bo'lmaganligi uchun o'rganish qiyin bo'ladi. Bunday masalalarni faqatgina matematik statistika metodlari yordamida o'rganish mumkin.

Odatda ikki turli masalalar qaraladi:

1. Qaralayotgan ikki tasodifiy miqdor bog'liq yoki bog'liqmasligi;
2. Qaralayotgan ikki tasodifiy miqdor bog'liq bo'lsa, ularning birini ikkinchisi orqali qanday topish mumkin?

Ikki va undan ortiq tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'liqlikni o'rganish matematik statistikaning **beshinch**i masalasidir.

IV.5-§.Tanlab kuzatish metodi. Takror va takrorsiz tanlanmalar

Agar ishlab chiqarilgan mahsulotlarni yalpi kuzatish natijasida sifati buzilsa yoki kuzatish katta xarajatlar, ko'p vaqt, ishchi kuchi talab qilsa, bunday hollarda yalpi kuzatish o'tkazib bo'lmaydi. Masalan: Zavod bir kunda 10000 dona lampochka ishlab chiqarsa, lampochkalarining hammasini tekshirish natijasida ularning sifati buziladi, juda ko'p elektroenergiya sarf bo'ladi, bundan tashqari ishchi kuchi, vaqt sarflanadi. Ana shunday hollarda tekshirilishi lozim bo'lgan asosiy to'plamning bir qismi olib tekshiriladi va natija asosiy to'plamga yoyiladi. Tekshirishning bunday usuliga *tanlab kuzatish* metodi deyiladi.

1-ta'rif. Asosiy to'plamdan tekshirish uchun olingan qism to'plamga *tanlanma to'plam* deyiladi. Tanlanma to'plamdagi elementlar soniga *tanlanmaning hajmi* deyiladi yoki *quvvati* deyiladi.

2-ta'rif. Tanlanma to'plam olingan asosiy to'plamga *bosh to'plam* deyiladi. Bosh to'plamdagi elementlar soniga uning *quvvati*, yoki *hajmi* deyiladi.

Masalan: 10000 ta ishlab chiqarilgan mahsulotdan 1000 tasi olib tekshirilgan bo'lsa, $N=10000$ bosh to'plamning quvvati, $n=1000$ tanlanma to'plamning quvvatini bildiradi. Tanlab kuzatish paytida bosh to'plamdan tekshirish uchun olingan element tekshirilgandan keyin bosh to'plamga qaytariladi yoki qaytarilmasligi ham mumkin.

Shularga qarab, tanlanma takror va takrorsiz tanlanmalarga bo'linadi.

3-ta'rif. Bosh to'plamdan olingan har bir element tekshirilgandan keyin yana bosh to'plamga qaytarilsa, bunday tanlanmaga *takror tanlanma* deyiladi.

4-ta’rif. Bosh to’plamdan olingan har bir element kuzatilgandan keyin bosh to’plamga qaytarilmasa, bunday tanlanmaga *takrorsiz tanlanma* deyiladi.

Bosh to’plamdan tanlanma to’plam ajratilganda, tanlanma to’plam kerakli sifat bo’yicha bosh to’plamga ekvivalent bo’lishi kerak, ya’ni bosh to’plamni o’ziga to’g’ri akslantirishi kerak, boshqacha aytganda tanlanma to’plam *reprezentativ* bo’lishi kerak.

Katta sonlar qonuniga asosan tanlanma to’plam bosh to’plamdan tasodifiy ravishda olinsa u *reprezentativ* bo’ladi. Agar bosh to’plamning quvvati kattalashib borsa, tanlanma to’plamning quvvatini ham mos holda ko’paytirib borish maqsadga muvofiq.

IV.6-§. Tanlanmaning statistik taqsimoti

Faraz qilaylik, bosh to’plamdan hajmi n ga teng tanlanma to’plam ajratilgan bo’lib, bunda x_1 belgi n_1 marta, $x_2 - n_2$ marta va hokazo $x_k - n_k$ marta takrorlangan bo’lsin. Bu yerda $\sum n_i = n$ – tanlanmaning hajmi, x_i – variantalar, n_i – chastotalar, $\frac{n_i}{n} = W_i$ – nisbiy chastotalar.

1-ta’rif. Variantalarni o’sib borish tartibida joylashishiga *variatsion qator* deyiladi.

2-ta’rif. Tanlanmaning *statistik taqsimoti* deb, variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar orasidagi moslikka aytiladi. Bu moslik quyidagi jadvallar bilan beriladi:

$$\begin{array}{cccc} x_i & x_1 & x_2 & \dots x_k \\ n_i & n_1 & n_2 & \dots n_k \end{array}$$

bu yerda $\sum n_i = n$. Bunga tanlanmaning chastotalarga nisbatan statistik taqsimoti deyiladi.

$$\begin{array}{cccc} x_i & x_1 & x_2 & \dots x_k \\ W_i & \frac{n_1}{n} & \frac{n_2}{n} & \dots \frac{n_k}{n} \end{array}$$

bu yerda $\sum W_i = 1$. Bunga esa tanlanmaning nisbiy chastotalarga nisbatan statistik taqsimoti deyiladi.

Amalda tajriba o'tkazilib, tanlanmaning chastotalariga nisbatan statistik taqsimoti topiladi, keyin nisbiy chastotalarga nisbatan statistik taqsimoti topiladi.

Misol. 10 marta tajriba o'tkazish natijasida tanlanmaning statistik taqsimoti

	x_i	5	8	10
ma'lum	n_i	3	5	2

Tanlanmani nisbiy chastotalarga nisbatan statistik taqsimoti topilsin.

Yechish. Tanlanmaning hajmini topamiz:

$$n = 3 + 5 + 2 = 10.$$

Nisbiy chastotalarni topamiz:

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{3}{10} = 0,3, \quad W_2 = \frac{5}{10} = 0,5, \quad W_3 = \frac{2}{10} = 0,2.$$

Nisbiy sanoqqa nisbatan statistik taqsimot quyidagicha bo'ladi:

x_i	5	8	10
W_i	0,3	0,5	0,2

Tekshirish: $0,3 + 0,5 + 0,2 = 1$.

IV.7-§. Empirik taqsimot funksiyasi va uning xossalari

Faraz qilaylik, n marta tajriba o'tkazish natijasida X ning belgilari bo'yicha statistik taqsimoti tuzilgan bo'lsin, hamda x – haqiqiy son bo'lsin.

X ning x haqiqiy sondan kichik qiymatlari sonini n_x bilan belgilaymiz.

Ta'rif. X belgining x haqiqiy sondan kichik ($X < x$) qiymatlar qabul qilish nisbiy sanog'iga *empirik taqsimot funksiyasi* deyiladi. Uni taqsimot funksiyasidan farq qilishi uchun $F^*(x)$ bilan belgilaymiz, ta'rifga ko'ra

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

bu yerda n_x – x dan kichik variantalar soni, n – tanlanmaning hajmi.

Empirik taqsimot funksiya $F^*(x)$ - X tasodifiy miqdorning tajriba natijasida olingan ma'lumotlarning ($X < x$ larning) nisbiy sanog'idan iborat, $F(x)$ taqsimot funksiya esa $X < x$ hodisasining ro'y berish ehtimoli, ya'ni nazariy taqsimot. Quyida empirik taqsimot funksiyasining xossalari keltiramiz.

1⁰. $F^*(x)$ kamaymaydigan funksiya.

$$2^0. \lim_{x \rightarrow -\infty} F^*(x) = 0$$

$$3^0. \lim_{x \rightarrow +\infty} F^*(x) = 1$$

4⁰. $F^*(x)$ funksiya sanoqli sondagi uzilish nuqtasiga ega.

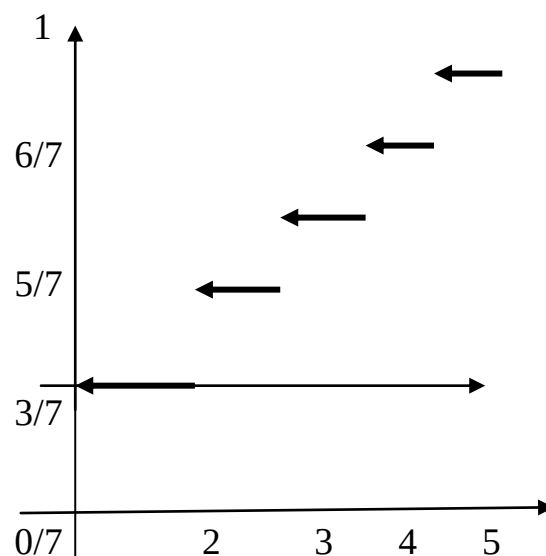
5⁰. $F^*(x)$ funksiya 2-tur uzilishga ega.

6⁰. $F^*(x)$ funksiya chapdan uzluksiz $\lim_{x \rightarrow a-0} F(x) = F(a)$.

maqsadda poligon va gistogrammalar o'rganiladi.

Misol. 2 2 2 3 3 4 5 tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini yozamiz.

$$F^*(X) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 2 \\ \frac{3}{7}, & \text{agar } 2 < x \leq 3 \\ \frac{5}{7}, & \text{agar } 3 < x \leq 4 \\ \frac{6}{7}, & \text{agar } 4 < x \leq 5 \\ 1, & \text{agar } x > 5 \end{cases}$$



IV.8-§. Poligon va gistogramma

Tanlanmaning statistik taqsimotini grafik usulda ham berish mumkin. Shu

Faraz qilaylik, n marta tajriba o'tkazish natijasida tanlanmaning statistik taqsimoti tuzilgan bo'lsin:

$$\begin{array}{ccccccc} x_i & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ n_i & n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{array}$$

bu yerda $\sum n_i = n$.

1-ta'rif. $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ nuqtalarni birlashtiruvchi siniq chiziqqa *chastotalar poligoni* deyiladi.

Uning grafigini chizish uchun x_i larni koordinatalar sistemasida Ox o'qqa, n_i - larni Oy o'qqa joylashtirib, (x_i, n_i) nuqtalar kesmalar bilan birlashtiriladi.

Faraz qilaylik, tanlanmaning nisbiy chastotalarga nisbatan statistik taqsimoti berilgan bo'lsin

$$\begin{array}{ccccccc} x_i & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ W_i & W_1 & W_2 & \dots & W_k \end{array}$$

bu yerda $\sum W_i = 1$.

Bu tanlanmaning nisbiy chastotalarga nisbatan statistik taqsimoti

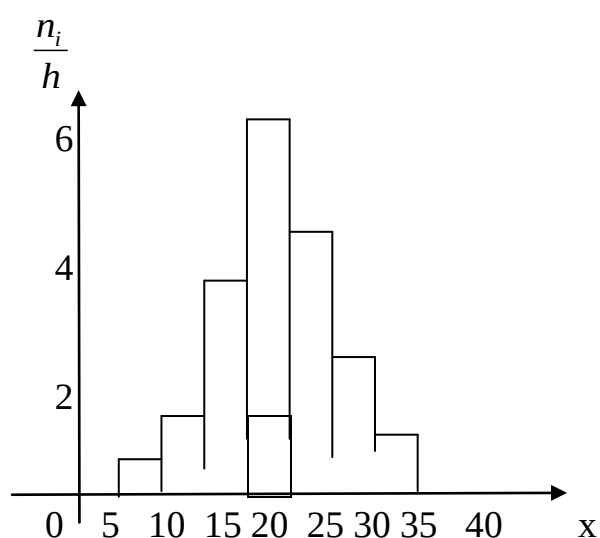
2-ta'rif. (x_i, W_i) , $(i = \overline{1, k})$ nuqtalarni birlashtiruvchi siniq chiziqlarga *nisbiy chastotalar poligoni* deyiladi.

3-ta'rif. Asoslari h bo'lib, balandligi $\frac{n_i}{h}$ - chastotalardan tuzilgan to'rtburchaklardan iborat figuraga *gistogramma* deyiladi. Tekislikda gistogramma abssissalar o'qiga h uzunlikdagi intervallar, ordinata o'qiga $\frac{n_i}{h}$ qo'yiladi.

Quyida berilgan jadval asosida gistogramma tuzilsin.

$h = 5$	n_i	n_i / h
5-10	5	1,0
10-15	7	1,4
15-20	15	3,0

20-25	35	7,0
25-30	20	4,0
30-35	12	2,1
35-40	6	1,2



5-shakl

IV.9-§. Oddiy, boshlang'ich va markaziy momentlar

Faraz qilaylik, tanlanma to'plam statistik taqsimoti bilan berilgan bo'lsin:

$$\begin{array}{ccccccc} x_i & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ n_i & n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{array}$$

bu yerda $x_1, x_2, \dots, x_k$ lar o'sib borish tartibida joylashgan bo'lsin, ya'ni variatsion qatorni tashkil etsin.

1-ta'rif. Agar variantaning hadlari h qadam bilan arifmetik progressiyani tashkil etsa, u *hadlari teng uzoqlikda yotuvchi varianta* deyiladi

2-ta’rif. Quyidagi tenglik bilan aniqlangan variantalarga *shartli variantalar* deyiladi:

$$u_i = \frac{x_i - C}{h}$$

bu yerda C – yolg’on nol (sanoq boshi), h -qadam, ya’ni ikkita yonma-yon turgan variantalar orasidagi farq.

Agar variantalar teng uzoqlikda bo’lsa, shartli variantalar butun sonlardan iborat bo’ladi. Haqiqatdan, $C = x_m$ desak, u holda

$$u_i = \frac{x_i - x_m}{h} = \frac{x_1 + (i-1)h - [x_1 + (m-1)h]}{h} = i - m.$$

i va m sonlari butun sonlar, ularning ayirmasi $i - m$ ham butun son, demak, u_i lar butun sonlar.

Misol. Quyidagi statistik taqsimotning shartli variantalari topilsin.

x_i	10,7	15,7	20,7	25,7	30,7	35,7
n_i	5	20	40	15	12	8

Yechish. Eng katta chastotaga ega bo’lgan variantani C sanoq boshi deb olamiz. $C = 20,7$. Qadamni topamiz:

$$h = 15,7 - 10,7 = 5.$$

Shartli variantalarni topamiz:

$$u_1 = \frac{x_1 - C}{h} = \frac{10,7 - 20,7}{5} = \frac{-10}{5} = -2.$$

Shunga o’xshash, quyidagilarni topamiz:

$$u_2 = \frac{x_2 - C}{h} = \frac{15,7 - 20,7}{5} = -\frac{5}{5} = -1,$$

$$u_3 = 0, \quad u_4 = 1, \quad u_5 = 2, \quad u_6 = 3.$$

Shartli variantalar kichik butun sonlardan iborat. Bu hisoblashlarni kamaytirish uchun qo’llaniladi.

Shartli variantalar empirik momentlarni hisoblashda qulaylik yaratadi.

3-ta’rif. $x_i - C$ ayirmaning k - darajasidan olingan o’rtacha arifmetik qiymatga k – tartibli oddiy empirik moment deyiladi:

$$M_k^1 = \frac{\sum n_i (x_i - C)^k}{n}$$

bu yerda x_i – variantalar, n_i – chastotalar. $n = \sum n_i$ - tanlanmaning hajmi, C – o’zgarmas son (soxta nol).

4-ta’rif. x_i larning k darajasidan olingan o’rta arifmetik qiymatga k – tartibli boshlang’ich empirik moment deyiladi.

$$M_k = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}$$

Xususiyl holda, $M_1 = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \bar{x}_T$.

Demak, birinchi tartibli boshlang’ich empirik moment tanlanma o’rtaga teng.

5-ta’rif. $C = \bar{x}_T$ bo’lgandagi oddiy empirik momentga k –tartibli markaziy empirik moment deyiladi:

$$m_k = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_T)^k}{n}$$

Xususiyl holda,

$$m_1 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_T)}{n} = 0, \quad m_2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n} = D_T,$$

yoki

$$m_2 = M_2^1 - (M_1^1)^2$$

$$m_3 = M_3^1 - 3M_2^1 M_1^1 + 2(M_1^1)^3$$

$$m_4 = M_4^1 - 4M_3^1 M_1^1 + 6M_2^1 (M_1^1)^2 - 3(M_1^1)^4.$$

IV.10-§. Shartli empirik momentlar

Har doim markaziy momentlarni hisoblashda, ularni boshlang’ich momentlar bilan ifodalab hisoblash ko’p qulayliklarga olib keladi.

Shuning uchun, shartli empirik momentlarni hisoblashda boshlang’ich momentlardan foydalanamiz.

1-ta’rif. Shartli variantalar uchun hisoblangan k -tartibli boshlang’ich empirik momentga, k -tartibli shartli empirik moment deyiladi:

$$M_k^* = \frac{\sum n_i u_i^k}{n} = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - C}{h} \right)^k}{n},$$

Xususiyl holda, $k=1$ bo’lsa,

$$M_1^* = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - C}{h} \right)}{n} = \frac{1}{h} \left[\frac{\sum n_i x_i}{n} - C \frac{\sum n_i}{n} \right] = \frac{1}{h} (\bar{x}_T - C).$$

Bundan

$$\bar{x}_T = M_1^* h + C$$

Oddiy momentlarni shartli momentlar orqali yozamiz:

$$M_k^* = \frac{1}{h^k} \cdot \frac{\sum n_i (x_i - C)^k}{n} = \frac{M_k^1}{h^k}.$$

Bundan

$$M_k^1 = M_k^* \cdot h^k.$$

Shartli variantalar orqali markaziy momentlar quyidagicha topiladi:

$$m_2 = M_2^* - (M_1^*)^2 h^2,$$

$$m_3 = M_3^* - 3M_2^* M_1^* + 2(M_1^*)^3 h^3,$$

$$m_4 = M_4^* - 4M_3^* M_1^* + 6M_2^* (M_1^*)^2 - 3(M_1^*)^4 h^4.$$

Demak, 1- va 2- shartli momentlar orqali dispersiya quyidagicha topiladi:

$$D_T = M_2^* - (M_1^*)^2 h^2.$$

IV.11-§. Ko’paytmalar usuli bilan tanlanma o’rta va tanlanma dispersiyani hisoblash

Teng uzoqlikda yotuvchi variatsion qatorlarning turli tartibli momentlarini hisoblashda shartli momentlardan foydalanish ancha qulayliklar yaratadi. Shartli

variantalar bilan boshlang'ich va markaziy momentlarni hisoblash qulay. Xususiyl holda, tanlanma o'rta va tanlanma dispersiyalarni, ham hisoblash **oson bo'ladi**.

Buning uchun quyidagi jadvalni tuzamiz. Jadvalning birinchi ustuniga variantalarni o'sib borish tartibida joylashtiramiz. 2-ustunga chastotalarni, uchinchi ustunga shartli variantalarni, 4-ustunga $n_i u_i$ ko'paytmalarni, 5-ustunga $n_i u_i^2$ ko'paytmalarni, oxirgi tekshirish ustuniga $n_i \left(\left\lfloor \frac{x_i - C}{h} \right\rfloor + 1 \right)^2$ ni joylashtiramiz.

Misol. Quyidagi statistik taqsimot berilgan. Ko'paytmalar metodi bilan tanlanma o'rta va tanlanma dispersiya topilsin.

x_i	105,7	110,7	115,7	120,7	125,7	130,7	135,7	140,7	145,7	150,7
n_i	3	5	8	13	25	20	12	10	3	1

Eng katta chastotaga ega bo'lgan variantani $C = 125,7$ deb olamiz.

x_i	n_i	$u_{i \rightarrow}$	$n_i u_{i \rightarrow}$	$n_i u_i^2 \rightarrow$	$n_i \left(\left\lfloor \frac{x_i - C}{h} \right\rfloor + 1 \right)^2 \rightarrow$
105,7	3	-4	-12	48	27
110,7	5	-3	-15	45	20
115,7	8	-2	-16	32	8
120,7	13	-1	-13	13	0
125,7	25	0	$A_1 = -56$	0	25
130,7	20	1	20	0	80
135,7	12	2	24	48	108
140,7	10	3	30	90	160
145,7	3	4	12	48	75
150,7	1	5	5	25	36

$$A_2 = 91$$

$$n = 100$$

$$\sum n_i u_i = 35 \quad \sum n_i u_i^2 = 369 \quad \sum n_i \left(\left\lfloor \frac{x_i - C}{h} \right\rfloor + 1 \right)^2 = 539$$

Tekshirish.

$$\sum n_i(u+1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n = 369 + 70 + 100 = 539.$$

Demak, hisoblashlar to'g'ri.

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{35}{100} = 0,35, \quad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{369}{100} = 3,69$$

$h = 110,7 - 105,7 = 5$ tanlanma o'rtani topamiz:

$$\bar{x}_T = M_1^* h + C = 0,35 \cdot 5 + 125,7 = 127,45$$

$$D_T = M_2^* - (M_1^*)^2 \cdot h^2 = 3,69 - (0,35)^2 \cdot 5^2 = [3,69 - 0,1225] \cdot 25 = 80,1875.$$

IV.12-§. Taqsimotning noma'lum parametrlarini baholash.

Faraz qilaylik, bosh to'planning biror belgisi bo'yicha o'rganish talab qilingan bo'lsin. Nazariy mushohadalar bilan bosh to'planning belgisi biror taqsimotga bo'ysinishi aniqlangan bo'lsin. U holda taqsimot parametrlarini baholash masalasi qo'yiladi. Agar bosh to'plam Puasson taqsimotiga bo'ysunsa, u holda λ parametrni baholashga, normal taqsimotga bo'ysunsa, a va σ parametrlarni baholashga to'g'ri keladi.

Ko'pincha kuzatuvchining ixtiyorida kuzatish natijasida olingan ma'lumotlar bo'ladi, xolos. Masalan: n marta tajriba natijasida $x_1, x_2, \dots, x_n$ **qiymatlar olingan bo'lsin.**

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ni erkli $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar deb qarab, nazariy taqsimot noma'lum parametrining statistik bahosini topish, bu demak, kuzatilayotgan tasodifiy miqdorlar orqali shunday funksiyani topishdirki, u baholanayotgan parametrning taqribiy qiymatini beradi. Masalan, normal taqsimotining matematik kutilishini baholash uchun ushbu

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

funksiya xizmat qiladi.

1-ta’rif. Nazariy taqsimotning noaniq parametrini baholash uchun tajriba natijasida olingan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan funksiyaga *statistik baho* deyiladi.

Faraz qilaylik, θ bosh to’planning nazariy taqsimotining biror parametri bo’lsin, ya’ni baholanayotgan parametr. Bu parametrni baholash uchun bosh to’plamda hajmi n ga teng bo’lgan tanlanma olamiz va undan θ_1^* baho tuzamiz, yana ikkinchi marta bosh to’plamdan hajmi n ga teng tanlanma olib, undan θ_2^* baho tuzamiz va hokazo k - baho θ_k^* bo’lsin. Shunday qilib $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_k^*$ - bular har xil bo’lib, biror θ^* tasodifiy miqdorning qiymatlari sifatida qaraymiz. Shunday qilib, θ baholanayotgan parametr va θ^* - statistik baho.

2-ta’rif. Agar statistik baho θ^* ning matematik kutilishi baholanayotgan parametrغا teng bo’lsa, unga *siljimagan baho* deyiladi, ya’ni

$$M[\theta^*] = \theta.$$

3-ta’rif. Agar statistik baho θ^* ning matematik kutilishi baholanayotgan parametrغا teng bo’lmasa, unga *siljigan baho* deyiladi, ya’ni

$$M[\theta^*] \neq \theta.$$

4-ta’rif. Agar statistik baho θ^* ning (tanlanmaning hajmi n berilganda) dispersiyasi minimal bo’lsa, unga *effektiv (yoki samarali) baho* deyiladi:

$$\min\{D(\theta^*) = M[\theta^* - M(\theta^*)]^2\}.$$

5-ta’rif. Agar sinovlar soni ortishi bilan istalgancha kichik musbat $\varepsilon > 0$ son

$$\text{uchun quyidagi } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\theta_n^* - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

munosabat bajarilsa, statistik baho θ^* *asosli* deyiladi

Statistik baholarning xossalarini boshqacha ko’rinishda ham ta’riflash mumkin. Bitta son bilan aniqlanadigan statistik baho *nuqtaviy baho* deyiladi.

Nuqtaviy bahoning xossalari

Bahoning asosli ekanligini tekshirish

Bahoning asosli ekanligi ta'rifdan foydalanib ko'rsatish qiyin. Shuning uchun bahoning asosli ekanligini quyidagi teoremdan foydalanib tekshiramiz.

Asosli baho	Effektiv baho	siljimaganbaho
Agar har qanday musbat ε son uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left \theta_n^* - \theta \right < \varepsilon = 1$ bo'lsa, θ_n^* baho noma'lum parametr θ uchun <i>siljimagan baho</i> deyiladi, agar $M(\theta_n^*) = \theta$ bo'lsa. Bir-biridan farqli bo'lgan siljimagan baholar cheksiz ko'p bo'ladi.	Agar $D(\theta_{n_1}^*) \leq D(\theta_{n_2}^*)$ bo'lsa, $\theta_{n_1}^*$ baho $\theta_{n_2}^*$ ga nisbatan <i>effektivroq</i> deyiladi. Minimal dispersiyaga ega bo'lgan baho <i>effektiv baho</i> deyiladi.	

Bahoning siljigan yoki siljimagan ekanligini tekshirish

Odatda siljimagan, asosli, effektiv baho yagona bo'ladi. Bahoning siljigan yoki siljimagan ekanligini tekshirish uchun bahoning matematik kutilishini hisoblash yetarli.

Bahoning asosli ekanligini tekshirish

Bahoning asosli ekanligi ta'rifdan foydalanib ko'rsatish qiyin. Shuning uchun bahoning asosli ekanligini quyidagi teoremdan foydalanib tekshiramiz.

Teorema. Agar 1. $n \rightarrow \infty$ da $M(\theta_n) \rightarrow \theta$, asimptotik siljimagan θ_{n_1} baho noma'lum parametr θ uchun asosli baho bo'ladi, 2. $D(\theta_{n_1}) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$

Bahoning effektiv ekanligini tekshirish

Bahoning effektiv ekanligini ta'rifdan foydalanib tekshirib bo'lmaydi. Shuning uchun effektiv bahoga olib keladigan haqiqatga eng yaqin baholash usulini ko'rib chiqamiz.

Haqiqatga eng yaqin baholash usuli

$x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlanmaning taqsimot qonunini $p(x, \theta)$ bo'lsin. θ noma'lum parametr.

Ushbu funksiyani qaraymiz: $L(x, \theta) = P(x_1, \theta) \cdot P(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot P(x_n, \theta)$ – tanlanmaning ro'y

berish ehtimoli. Bu funksiya *haqiqatga eng yaqin funksiya* deyiladi. Noma'lum parametr θ ni $L(x, \theta)$ funksiyaning maksimumga erishish shartidan topamiz. Musbat funksiya va uning logarifmi bir xil ekstremum nuqtalarga ega bo'lganligi uchun $L(x, \theta)$ o'rniga uning logarifmini qaraymiz.

$$\ell(x, \theta) = \ln L(x, \theta) = \sum_{k=1}^n \log P(x_k, \theta), \quad \frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^n \frac{P'(x_k, \theta)}{P(x_k, \theta)}$$

bu yerdan $\theta = \theta_0$ kritik nuqtani topamiz. Agar $\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} < 0$ bo'lsa, u holda $L(x, \theta)$ funksiya

θ_0 nuqtada maksimumga erishadi va θ_0 baho haqiqatga eng yaqin baholash usuli bo'yicha topilgan baho deyiladi. Bu baho *asimptotik siljimagan, asosli va effektiv* bo'ladi.

IV.13-§. Bosh va tanlanma o'rtalar

Faraz qilaylik, hajmi N ga teng bo'lgan bosh to'plamni o'rganish talab qilingan bo'lsin.

1-ta'rif. Bosh to'plam belgisining o'rta arifmetik qiymatiga *bosh o'rta* deyiladi.

Agar bosh to'plam elementlari belgisi $x_1, x_2, \dots, x_N$ – har xil bo'lsa, bosh o'rta quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Agar belgining $x_1, x_2, \dots, x_k$ qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, \dots, N_k$ chastotalarga ega, shu bilan birga $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$ bo'lsa, u holda

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k N_i x_i}{N}.$$

Faraz qilaylik, bosh to'plamni o'rganish uchun hajmi n ga teng bo'lgan tanlanma to'plam ajratilgan bo'lsin.

2-ta'rif. Tanlanma to'plam belgisining o'rta arifmetik qiymatiga *tanlanma o'rta* deyiladi va u quyidagi formula yordamida topiladi:

$$\bar{x}_T = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n},$$

Agar tanlanma belgisining elementlari har xil bo'lsa, u holda

$$\bar{x}_T = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Tanlanma o'rta $\bar{x}_T = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ bosh to'plamning o'rta qiymati matematik kutilishning siljimagan bahosi bo'ladi, ya'ni

$$M(\bar{x}_T) = M\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) = \frac{M(x_1) + M(x_2) + \dots + M(x_n)}{n} = \frac{n \cdot a}{n} = a.$$

IV.14-§. Bosh va tanlanma dispersiyalar

Faraz qilaylik, biror to'plam va uning statistik taqsimoti berilgan bo'lsin:

$$\begin{array}{ccccccc} x_i & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ n_i & n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{array}$$

bunda $\sum_{i=1}^k n_i = n$.

Bundan so'ng yozishni qulaylashtirish maqsadida yig'indi belgisi $\sum_{i=1}^k$ ni $\sum$ belgi bilan almashtiramiz. Statistik taqsimotning o'rta qiymatni topamiz:

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}.$$

Bundan

$$\bar{x} \cdot n = \sum n_i x_i. \quad (1)$$

$\bar{x}$ o'zgarmas kattalik bo'lgani uchun

$$\sum n_i \bar{x} = \bar{x} \cdot \sum n_i = n \bar{x}. \quad (2)$$

1-ta'rif. x_i variantalar va ularning o'rta qiymati o'rtasidagi ayirmaga *chetlanish* deyiladi va u yuqoridagilarga ko'ra, quyidagiga teng bo'ladi:

$$x_i - \bar{x}$$

Teorema. Chetlanishning o'rta qiymati nolga teng:

$$\frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})}{n} = 0$$

Isbot. Haqiqatdan ham, (1) va (2) ni hisobga olsak,

$$\frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})}{n} = \frac{\sum n_i x_i - \bar{x} \sum n_i}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

1-misol. Tasodifiy miqdor X taqsimoti bilan berilgan:

x_i	4	5	12
n_i	5	4	1

Chetlanishning o'rta qiymatini toping.

Yechish. O'rta qiymatni topamiz:

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 12 \cdot 1}{10} = \frac{20 + 20 + 12}{10} = \frac{52}{10} = 5,2.$$

$$\sum n_i(x_i - \bar{x}) = 5 \cdot (4 - 5,2) + 4 \cdot (5 - 5,2) + 1 \cdot (12 - 5,2) = -6 - 0,8 + 6,8 = -6,8 + 6,8 = 0$$

Demak,

$$\frac{\sum n_i(x_i - \bar{x})}{n} = 0.$$

Bizni qiziqtirayotgan narsa o'rtacha chetlanishdan iborat, lekin o'rtacha chetlanish nolga teng chiqayapti, aslida chetlanishlar noldan farqli. Shuni tushunish uchun dispersiya tushunchasini kiritamiz.

2-ta'rif. Bosh to'plam elementlari belgisining chetlanishlari kvadratidan olingan o'rta arifmetik qiymatga *bosh dispersiya* deyiladi va quyidagi formula

bilan ifodalaniladi:

$$\overline{D}_B = \frac{\sum_{i=1}^k N_i(x_i - \bar{x}_B)^2}{N}$$

bu yerda

$$\sum_{i=1}^k N_i = N.$$

Agar $x_1, x_2, \dots, x_N$ variantalar har xil bo'lsa, u holda

$$\overline{D}_B = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_B)^2}{N}.$$

3-ta'rif. Tanlanma to'plam elementlari belgisining chetlanishlari kvadratidan olingan o'rta arifmetik qiymatga *tanlanma dispersiya* deyiladi va u quyidagicha belgilanadi:

$$\overline{D}_T = \frac{\sum_{i=1}^k N_i(x_i - \bar{x}_T)^2}{n} \quad (3)$$

Agar $x_1, x_2, \dots, x_k$ lar har xil bo'lsa, u holda

$$\overline{D}_T = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_T)^2}{n}.$$

(3) formulaning ko'rinishini o'zgartiramiz:

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum n_i [x_i^2 - 2x_i \cdot \bar{x} + (\bar{x})^2]}{n} \\ &= \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - 2\bar{x} \frac{\sum n_i x_i}{n} + [\bar{x}]^2 \frac{\sum n_i}{n} = \overline{x^2} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2. \end{aligned}$$

Demak,

$$D = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2, \quad (4)$$

bu yerda
$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}, \quad \overline{x^2} = \frac{\sum n_i x_i^2}{n}.$$

(4) formulaga *dispersiyani hisoblash formulasi* deyiladi.

2-misol. Quyidagi taqsimotga ega bo'lgan miqdorning dispersiyasi topilsin:

x_i	5	8	10	15
n_i	4	5	7	4

Yechish. O'rtacha qiymatni topamiz:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 10 \cdot 7 + 15 \cdot 4}{20} = \frac{190}{20} = 9,5.$$

Belgining qiymatlari kvadratlarining taqsimotini va o'rtacha qiymatini topamiz:

$\overline{x^2}$	25	64	100	225
n_i	4	5	7	4

$$\overline{x^2} = \frac{100 + 320 + 700 + 900}{20} = \frac{2020}{20} = 101.$$

U holda izlanayotgan dispersiya quyidagiga teng bo'ladi:

$$D = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2 = 101 - (9,5)^2 = 101 - 90,25 = 10,75.$$

IV.15-§. Bosh dispersiyani baholashda tuzatilgan tanlanma dispersiya

Faraz qilaylik, bosh to'plamning o'rganish uchun qaytarilgan usul bilan hajmi n bo'lgan tanlanma to'plam ajratilgan bo'lsin:

x_i	x_1	x_2		x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

shu bilan birga $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$

Shu ma'lumotlar asosida bosh to'plamning noma'lum dispersiyasi D_B ni baholash talab qilinadi. Agar baho sifatida tanlanma dispersiyani olsak, sistematik xato yuzaga keladi:

$$M[D_T] = \frac{n-1}{n} D_B.$$

Bunday hollarda *tuzatilgan dispersiyalardan* foydalaniladi. Buning uchun D_B ni

$\frac{n}{n-1}$ ga ko'paytirib yangi dispersiya tuziladi:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n-1}$$

Shunday qilib, tuzatilgan S^2 dispersiya siljimagan baho bo'ladi:

$$M[S^2] = M\left[\frac{n}{n-1} D_B\right] = \frac{n}{n-1} M[D_B] = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_B = D_B$$

Shunday qilib, tuzatilgan dispersiya

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n-1}.$$

Tuzatilgan kvadratik chetlanish

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n-1}}$$

Tuzatilgan dispersiya tanlanmaning hajmi kichik bo'lgan hollarda ishlatiladi. Agar tanlanmaning hajmi katta bo'lsa, dispersiya bilan tuzatilgan dispersiya orasidagi farq kamayadi.

IV.16-§.Bahoning aniqligi. Ishonchli intervallar

1-ta'rif. Bitta son bilan aniqlangan bahoga nuqtaviy baho deyiladi.

Biz yuqorida ko'rgan baholar nuqtaviy baholar. Nuqtaviy baho tanlanma to'planning hajmi kichik bo'lganda xatolarga olib keladi. Shuning uchun bunday hollarda intervalli baholar ishlatiladi.

2-ta'rif. Ikkita nuqta, ya'ni intervalning uchlari bilan aniqlangan baholarga intervalli baholar deyiladi.

Intervalli baholar baholarning aniqligini va ishonchligini ta'minlaydi.

Faraz qilaylik, θ^* statistik baho bosh to'plamning noma'lum parametri θ ni baholash uchun xizmat qilsin. $|\theta - \theta^*| < \delta$ tengsizlikni qaraymiz, δ qancha kichik bo'lsa, θ^* statistik baho, θ parametr uchun shuncha aniq baho bo'ladi. Quyidagi tengsizlikni baholaymiz:

$$|\theta - \theta^*| < \delta.$$

Umuman olganda tengsizlikning aniq bajarilishini aytish qiyin. Lekin uning bajarilish ehtimoli mavjud. Shu ehtimolni γ bilan belgilaymiz.

3-ta'rif. θ parametrni baholash uchun θ^* bahoning ishonchliligi deb, $|\theta - \theta^*| < \delta$ tengsizlikning bajarilish ehtimoli γ ga aytiladi.

Odatda bahoning ishonchliligi katta ehtimol bilan kutiladi va quyidagi qiymatlarni qabul qiladi: 0,95; 0,99 va 0,999.

$|\theta - \theta^*| < \delta$ tengsizlikning bajarilish ehtimoli, γ ga teng **bo'sin, ya'ni**

$$P \{ |\theta - \theta^*| < \delta \} = \gamma.$$

$|\theta - \theta^*| < \delta$ tengsizlikni unga teng kuchli

$$-\delta < \theta - \theta^* < \delta \quad \text{yoki} \quad \theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta$$

qo'sh tengsizlik bilan almashtirib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P \{ \theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta \} = \gamma.$$

Demak, $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$ oraliq θ noma'lum parametrni o'z ichiga oladi.

4-ta'rif. Noma'lum parametr θ ni, γ ishonchlilik bilan qoplaydigan $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$ oraliqqa ishonchli interval deyiladi.

IV.17-§. Normal taqsimotda σ aniq bo'ganda matematik kutilishni baholashda ishonchli intervallar.

Faraz qilaylik, bosh to'plamning belgisi X normal taqsimotga ega bo'lsin hamda o'rta kvadratik chetlanishni σ ma'lum bo'sin.

Maqsadimiz σ aniq bo'ganda bosh to'planning matematik kutilishini baholash. Buning uchun bosh to'plamdan hajmi n ga teng tanlanma to'plam ajratilgan bo'lib, $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlanma qiymatlarini bir xil taqsimlangan erkli $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar deb qaraymiz va o'rta qiymatini topamiz:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n},$$

$\bar{X}$ ning matematik kutilishi $M(\bar{X}) = a$, $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Endi $P(|\bar{X} - a| < \delta) = \gamma$ munosabatning bajarilishini tekshiramiz.

Chetlanishning ehtimolini keltiramiz:

$$P(|\sum \bar{X} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

va buni $\bar{X}$ tasodifiy miqdorga qo'llab, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t) \quad (1)$$

bu yerda $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$, bu tenglikdan δ ni topib, $\delta = \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$ ni (1) qo'ysak:

$$P(|\bar{X} - a| < \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t) \quad (2)$$

(2) tenglikda qavs ichidagi tengsizlikni qo'sh tengsizlik bilan almashtirsak:

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Bu yerda $\Phi(t)$ – Laplas funksiyasi, uning qiymatlari ilovadan topiladi.

Agar

$$t = 1 \text{ bol'sa, } \gamma = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826$$

$$t = 2 \text{ bol'sa, } \gamma = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$$

$$t = 3 \text{ bol'sa, } \gamma = 2\Phi(3) = 0,9973$$

(2) tenglikning ma'nosi γ ishonchlilik bilan $(\bar{x} - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}})$ interval noma'lum a parametrni qoplaydi. Bu yerda $\delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bahoning aniqligi, $n = \frac{\sigma^2 t^2}{\delta^2}$ esa oldindan aniqlanishi mumkin bo'lgan tajribalar soni.

Misol. X tasodifiy miqdor o'rta kvadratik chetlanishi $\sigma=4$ ma'lum bo'lgan normal taqsimotga ega. Tanlanma hajmi $n=36$ va bahoning ishonchliligi $\gamma=0,9$ berilgan. Noma'lum a matematik kutilishini $\bar{x}=4,35$ tanlanma o'rtacha qiymatlar bo'yicha baholash uchun ishonchli intervalni toping.

Yechish. $\gamma=2\Phi(t)=0,9$ munosabatdan t ni topib, $\Phi(t)=0,45$ ni hosil qilamiz.

Jadvaldan $t=1,64$ ni topamiz. Bahoning aniqligini topamiz:

$$\delta = \frac{\sigma \cdot t}{\sqrt{n}} = \frac{1,64 \cdot 4}{\sqrt{36}} = \frac{1,64 \cdot 4}{6} = \frac{3,28}{3} \approx 1,09.$$

Ushbu

$$\bar{x} - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$$

formulaga qo'ysak:

$$43,5 - 1,09 < a < 43,5 + 1,09$$

$$42,41 < a < 44,59.$$

IV.18-§. Normal taqsimotda σ no'malum bo'ganda matematik kutilishni baholashda ishonchli intervallar

Endi bosh to'plamning belgisi X tasodifiy miqdor normal taqsimotga ega bo'lsin, hamda o'zgacha kvadratik chetlanish noma'lum bo'lsin. Shu shartda n katta bo'lganda δ noma'lum parametrni uning bahosi s bilan almashtirish mumkin va ishonchli intervalning yaqinlashishi sifatida

$$(\bar{x} - \frac{t_{n-1,2} \cdot s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{t_{n-1,2} \cdot s}{\sqrt{n}})$$

intervalni olish mumkin. Bu yerda $t_{n-1,2}$ Student taqsimotining jadvalidan olinadi. Umuman olganda $n > 30$ bo'lgan hollarda bu bahoni qo'llash mumkin. Buni misollarda ko'ramiz.

Misol. Biror fizik kattalikni 16 bogliqmas o'lchamlar yordamida shu o'lchamlarning o'rta arifmetik qiymati $\bar{x} = 42,8$ va o'rta kvadratik chetlanishning tuzatilgan qiymati $s = 8$ topilgan. O'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini $\alpha = 0,999$ ishonchlilik bilan baholang.

Yechish: O'lchanayotgan kattalik a uchun intervalli baho

$$\bar{x} - t_{n-1,2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_{n-1,2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

yordamida topiladi. $n = 16$, $\alpha = 0,999$, $\bar{x} = 42,8$ va $s = 8$ lar berilgan. Javoblardan $t_{15;0,999} = 4,14$ ni topamiz va

$$42,8 - 4,14 \cdot \frac{8}{\sqrt{16}} < a < 42,8 + 4,14 \cdot \frac{8}{\sqrt{16}},$$

ga ega bo'lamiz. Haqiqiy qiymatdan chetlanish 8,28 ni tashkil etadi.

IV.19-§. Normal taqsimotda dispersiya uchun ishonchli intervallar

Faraz qilaylik, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ X belgili bosh to'plamdan olingan tanlanma bo'lib, noma'lum σ^2 dispersiyali normal taqsimotga ega bo'lsin

Ushbu
$$X^2 = \frac{n \cdot s^2}{\sigma^2}$$

Tasodifiy miqdor $(n-1)$ ozodlik darajali X^2 taqsimotga ega ekanini va bu taqsimot X tasodifiy miqdorning matematik kutilishiga bog'liq bo'lmasligini ko'rsatish mumkin.

Endi X^2 taqsimotning jadvallari bo'yacha berilgan α va ozodlik darajalari soni $k = n-1$ bo'yecha shunday x' va x'' larni topamizki:

$$P\left(\frac{ks^2}{\sigma^2} < x'\right) = P\left(\frac{ks^2}{\sigma^2} > x''\right) = \frac{\alpha}{2}$$

bo'lsin. U holda

$$P\left(x' < \frac{ks^2}{\sigma^2} < x''\right) = 1 - \alpha.$$

Bundan esa quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$P\left(x' < \frac{ks^2}{\sigma^2} < x''\right) = P\left(\frac{ks^2}{x''} < \sigma^2 < \frac{ks^2}{x'}\right) = P\left(s\sqrt{\frac{n-1}{x''}} < \sigma < s\sqrt{\frac{n-1}{x'}}\right) = 1 - \alpha,$$

ya'ni σ parametr $\left(s\sqrt{\frac{n-1}{x''}}, s\sqrt{\frac{n-1}{x'}}\right)$ ishonchli intervalga ega bo'ladi, bunda x' va x'' lar (x) tengliklardan topiladi.

Misol. Bosh to'plamdan hajmi $n=9$ bo'lgan tenglama olingan. Taqsimot normal bo'lsa, "tuzatilgan" o'rta kvadratik chetlanish $s=1$ bo'lganda, o'rta kvadratik chetlanish δ 0,95 ishonchlilik bilan baholansin.

Yechish: Jadvaldan $x'' = x_{0,025} = 27,5$, $x' = x_{0,975} = 6,26$ dan foydalanamiz.

$$P\left(1 \cdot \sqrt{\frac{15}{27,5}} < \sigma < 1 \cdot \sqrt{\frac{15}{6,26}}\right) = 1 - 0,05 = 0,95$$

$$P(0,738 < \sigma < 1,548) = 0,95,$$

ya'ni noma'lum dispersiya uchun 0,95 ishonchlilik bilan olinadigan ishonchlilik bilan olinadigan ishonchli interval (0,738; 1,548) bo'ladi.

IV.20-§. Umumiy holda dispersiya uchun ishonchli intervallar

X tasodifiy miqdor ustida n ta bog'liqmas sinovlar o'tkazilgan bo'lib, dispersiyaning siljimagan bahosi $\tilde{D}$ - siljimagan bo'lgani uchun

$$M \tilde{D} = D.$$

Bundan tashqari

$$D^2 \approx \frac{1}{n} \mu_4 - \frac{n-3}{n(n-1)} D^2$$

ni hisoblab topish mumkin.

Agarda X – normal taqsimlangan bo'lsa,

$$\mu_4 = 3D^2, \quad D(\tilde{D}) = \frac{3}{n} D^2 - \frac{n-3}{n(n-1)} D^2, \quad D(\tilde{D}) = \frac{2}{n-1} D^2.$$

Dispersiyaning siljimgan bahosi $\tilde{D}$ bilan almashtirsak,

$$D(\tilde{D}) = \frac{2}{n-1} \tilde{D}^2,$$

bundan

$$\sigma_{\tilde{D}} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \tilde{D}$$

ni topamiz. Shunday qilib $\delta_{\tilde{D}}$ yordamida dispersiya uchun ishonchli interval

$$(\tilde{D} - t_{\beta} \cdot \sigma_{\tilde{D}}; \tilde{D} + t_{\beta} \cdot \sigma_{\tilde{D}})$$

bo'ladi. t_{β} ning qiymatlar jadvalini keltiramiz (normal taqsimot funksiyasi qiymatlar jadvali yordamida).

β	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,90
t	1,282	1,310	1,340	1,371	1,404	1,439	1,475	1,513	1,554	1,587	1,643

β	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0,9973	0,999
t	1,694	1,750	1,810	1,880	1,960	2,053	2,169	2,325	2,576	3,000	3,290

Misol. X tasodifiy miqdor ustida $n=20$ ta sinov o'tkazilgan. Natijalar quyidagi jadvalda keltirilmoqda

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	10,5	10,8	11,2	10,9	10,4	10,6	10,9	11,0	10,3	10,8

I	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	10,6	11,3	10,5	10,7	10,8	10,9	10,8	10,7	10,9	11,0

Tasodifiy miqdor X ning dispersiyasi uchun $\beta=0,8$ ishonchlilik bilan taqribiy ishonchli interval topilsin (taqsimot qonuni normal taqsimotga yaqin deb qaralsin).

Yechish: $\tilde{m} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = 10,78$. Hisoblash boshi sifatida $x=10$ ni olib,

dispersiyaning siljimagan bahosini topamiz:

$$\tilde{D} = \left(\frac{13,38}{20} - 0,78^2 \right) \cdot \frac{20}{19} = 0,064; \quad \sigma_{\tilde{D}} = \sqrt{\frac{2}{19}} \cdot 0,064 = 0,0208, \quad \beta = 0,8$$

uchun $t_{\beta} = 1,282$ bo'lgani uchun:

$$(0,064 - 1,282 \cdot 0,0208; 0,064 + 1,282 \cdot 0,0208), \text{ yoki } (0,037; 0,091)$$

$$0,037 < \tilde{D} < 0,091 \text{ bo'ladi.}$$

IV.21-§. Nisbiy chastotaga ko'ra hodisaning ehtimolini intervalli baholash

Agarda n etarlicha katta bo'lib, np va nq lar to'rtidan katta bo'lsa, X tasodifiy miqdor n ta sinov o'tkazilganda normal taqsimotga yaqin taqsimlangan bo'ladi. $p^* = w(A)$, har bir sinovlar seriyasidagi A hodisaning nisbiy chastotasi bo'lib

$$|p^* - p| < t_{\beta} \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

tengsizlik β ishonchlilik ehtimoli bilan bajarilsin. Bu tengsizlikdan

$$(p^* - p)^2 < \frac{t_{\beta}^2}{n} p(1 - p)$$

Bu tengsizlikdan p_1 va p_2 chegaralarni topamiz:

$$P_{1,2} = \frac{1}{1 + \frac{t_{\beta}^2}{n}} \left(p^* + \frac{t_{\beta}^2}{2n} \pm t_{\beta} \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} + \frac{t_{\beta}^2}{4n^2}} \right),$$

ya'ni

$$\frac{1}{1 + \frac{t_{\beta}^2}{n}} \left(p^* + \frac{t_{\beta}^2}{2n} - t_{\beta} \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} + \frac{t_{\beta}^2}{4n^2}} \right) < p < \frac{1}{1 + \frac{t_{\beta}^2}{n}} \left(p^* + \frac{t_{\beta}^2}{2n} + t_{\beta} \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} + \frac{t_{\beta}^2}{4n^2}} \right).$$

n yetarlicha katta (≥ 100) va np , $n(1-p)$ lar ≥ 10 bo'lgan holda

$$p_1 = p^* - t_\beta \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}, \quad p_2 = p^* + t_\beta \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}$$

deb olinishi mumkin.

Misol. 200 ta sinovda A hodisa 68 marta ro'y bergan bo'lsa, ehtimol uchun 0,85 ishonchlilik bilan ishonchlilik intervali tuzilsin. Aniq va taqribiy formulalar bilan hisoblab, natijalar solishtirilsin.

Yechish. **IV.20-§** dagi jadvaldan $\beta=0,85$ uchun $t_\beta=1,439$ qiymatni aniqlaymiz. U holda taqribiy formula uchun $p^*=0,34$,

$$\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} = \sqrt{\frac{0,34 \cdot 0,66}{200}} \approx 0,0335,$$

$$t_p \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \approx 1,139 \cdot 0,0335 \approx 0,048.$$

$$p_1 = p^* - t_\beta \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \approx 0,34 - 0,048 \approx 0,292, \text{ va}$$

$$p_2 = p^* + t_\beta \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \approx 0,34 + 0,048 \approx 0,388. \text{ demak,}$$

$$0,292 < p < 0,388.$$

Endi aniqroq formula bilan hisoblaymiz, u holda $p_1=0,294$ va $p_2=0,389$ bo'ladi. Shunday qilib taqribiyroq hisoblash bilan aniqroq hisoblash orasidagi farq juda kam ekan.

IV.22-§. Statistika gipotezalar va muvofiqlik kriteriylari

1-ta'rif. *Statistika gipoteza* deb, noma'lum taqsimotning ko'rinishi haqidagi yoki ma'lum taqsimotning noma'lum parametrlari haqidagi gipotezaga aytiladi.

2-ta'rif. *Nolinchi (asosiy) gipoteza* deb ilgari surilgan H_0 gipotezaga aytiladi.

3-ta'rif. *Konkurent (zid, yoki alternativ) gipoteza* deb nolinchi H_0 gipotezaga zid bo'lgan H_1 gipotezaga aytiladi.

4-ta’rif. *Statistik yoki muvofiqlik kriteriyi* deb nolinchi (asosiy) gipotezani qabul qilish yoki qabul qilmaslik haqidagi qoidaga aytiladi.

Harqanday $p(x, \theta)$ statistika uchun uning qiymatlar sohasi ikkiga ajratiladi: agar statistikaning kuzatilgan qiymati 1-sohada tushsa H_0 qabul qilinadi, 2-siga tushsa H_0 gipoteza qabul qilinmaydi. 1- soha gipotezaning qabul qilinish sohasi, 2-si esa *kritik soha* deyiladi. Bu sohalarni ajratib turgan nuqtalar kritik nuqtalar deb ataladi. Berilgan statistikaning kritik sohaga tushish ehtimoli α uning *aniqlilik darajasi* deyiladi.

Kriteriyning quvvati deb alternative (zid) gipoteza o’rinli bo’lish shartida kriteriy qiymatining kritik sohada tushish ehtimoliga aytiladi.

1. Pirsonning muvofiqlik kriteriyi

Pirson kriteriyini qurish uchun X tasodifiy miqdor qiymatlarining qiymatlarining o’zgarish sohasini $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ intervallarga bo’lamiz.

$P_i = P(X \in \Delta_i)$ nazariy ehtimol bo’lsin.

n_0 – hajmi n bo’lgan $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tanlanmada X ning Δ_i intervalga tushgan qiymatlarining soni bo’lsin. U holda

$$P_1 + P_2 + \dots + P_k = 1.$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

Demak, n_i/n -nazariy ehtimoli P_i bo’lgan hodisaning n ta sinovdagi nisbiy chastotasi bo’ladi. Natijada matematik kutilishi np_i , dispersiyasi $np_i(1 - p_i)$ bo’lgan binomial qonun bo’yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorda ega bo’lamiz. Agar $n > 30$ bo’lsa, taqsimotni taqriban normal taqsimot deb hisoblash mumkin.

Tasodifiy miqdor taqsimotida nisbiy chastotalarni

$P_1^*, P_2^*, P_3^*, \dots, P_k^*$ bilan belgilaymiz .

Nisbiy chastota va nazariy ehtimollar orasidagi chetlanish

$$X^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(P_i^* - P_i)^2}{P_i}$$

yordamida topiladi. Ba'zan hisoblash qulay bo'lishi uchun

$$X^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(p_i - np_i)^2}{np_i}$$

formula bilan tekshiriladi X^2 taqsimot ozodlik "(erkinlik) darajasi "soni deb ataluvchi r parametr ga ham bog'liq bo'ladi. Odatda r soni razrdlar soni k minus P_i^* chastotaga qo'yilgan bog'liqmas shartlar sonida teng. X^2 taqsimot uchun maxsus jadval tuzilgan. Quyidagi sxema bo'yicha tekshiriladi:

1. X^2 chetlanish qiymati topiladi/
2. r – ozodlik darajasi soni topiladi:
 $r-k-s$, k – razrdlar soni, s -aloqalar soni
3. r va X^2 yordamida jadvaldan tasodifiy miqdorning X^2 qiymatdan oshish ehtimoli p tohiladi.

2.Kolmogorov kriteriyi

Bu kriteriyda nazariy va statistik taqsimotlar orasidagi chetlanish sifatida

$$D = \max |F^* - F|$$

qiymat olingan. Kolmagorov tomonidan $F(x)$ taqsimot funksiyasi qanday bo'lishidan qat'iy nazar, erkli sinovlar soni n cheksiz oshganda

$$D\sqrt{n} \geq \lambda$$

tengsizlikning ehtimoli

$$P = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2k^2 \lambda^2}$$

limitda intilishi isbotlangan. P ehtimollar uchun maxsus jadvallar tuzilgan.

Kolmogorov kriteriyi quyidagi sxemaga asoslangan: F^* statistik taqsimot funksiyasi va mumkin bo'lishi ko'zda tutilgan F nazariy taqsimot qonunlari qurilib, ular farqlari modulining maksimumi tuziladi, so'ngra $\lambda = D\sqrt{n}$ yordamida P ehtimol maxsus jadvaldan topiladi.

3. Statistik gipotezalarni tekshirish uchun misollar

1-misol

Berilishi: Samolyotdan yerdagi nishonga otish jarayonidagi mo'ljalda olishning yonlama xatosi $n=500$ marta o'lchangan. O'lchov natijalari (radianning mingdan biri hisobida) statistik qator shaklida yozilgan:

I_i	$[-4; -3]$	$[-3; -2]$	$[-2; -1]$	$[-1; 0]$	$[0; 1]$	$[1; 2]$	$[2; 3]$	$[3; 4]$
m_i	6	25	72	133	120	88	46	10
P_i^*	0,012	0,050	0,144	0,266	0,240	0,176	0,092	0,020

Bu yerda I_i – nuqtaga olish xatosining intervallari; m_i – shu intervaldagi kuzatishlar soni; $P_i^* = \frac{m_i}{n}$ – mos nisbiy chastotalar.

Shu berilganlar yordamida nazariy va statistik taqsimotlarning muvofiqligi tekshirilsin (taqsimot normal degan gipotezani nolinchi deb olamiz).

Yechilishi: Tanlanma normal taqsimot qonuniga bo'ysunadi deb faraz qilamiz va tanlanma o'rta, hamda tanlanma o'rta kvadratik chetlanishlarni topamiz:

$$m_x^* = 0,168, \quad \sigma^* = 1,448.$$

Tasodifiy miqdorning I_i razryadga tushish ehtimolini

$$P_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - m_x^*}{\sigma^*}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - m_x^*}{\sigma^*}\right)$$

formula bilan topamiz, bu yerda x_i va $x_{i+1} - i$ razryad chegaralari. So'ngra jadvalga (m_i razryadga mos) np_i larni kiritamiz.

I_i	-4;-3	-3;-2	-2;-1	-1;0	0;1	1;2	2;3	3,4
m_i	6	25	72	133	120	88	46	10
np_i	6,2	26,2	71,2	122,2	131,8	90,5	38,2	10,5

Pirsonning muvofiqlik kriteriyaga murojaat qilamiz.

$$\chi_{kuz}^2 = \sum_{i=1}^8 \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 3,94.$$

Ozodlik darajasi $r = k - s = 8 - 3 = 5$, chunki qo'yilgan aloqalar soni $s=3$. χ^2 taqsimot jadvalidan

$$\chi^2 = 3,00 \text{ da } p = 0,70$$

$$\chi^2 = 4,35 \text{ da } p = 0,50$$

ni topib, $\chi^2_{kuz} = 3,94$ da ehtimolning taqribiy qiymati $P = 0,56$ ni topamiz. Shu sababli, ya'ni $p = 0,56$ unchalik kichik bo'lmagani uchun taqsimot normal degan gihotezani qabul qilish mumkin

2-misol

Yuqoridagi masalani Kolmogorov kriteriyi yordamida tekshiramiz. Buning uchun empirik taqsimot fuksiyasi $F^*(x)$ va nazariy taqsimot funksiyasi sifatida

$a = m_* = 0,168$ va $\sigma = \sigma^* = 1,448$ parametrlri normal taqsimot funksiyasi $F(x) = \phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ ni qaraymiz, buyerda

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Yuqoridagi tanlanmaning 9 ta nuqtasida $F^*(x_i)$, $F(x_i)$ va $|F^*(x_i) - F(x_i)|$ qiymatlar uchun jadval tuzamiz:

X_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$F^*(x_i)$	0	0,012	0,062	0,20 6	0,472	0,712	0,888	0,980	1,000
$F(x_i)$	0,002 2	0,014 5	0,066 8	0,20 90	0,453 8	0,716 7	0,897 1	0,974 8	0,995 9
$ F^*(x_i) - F(x_i) $	0,002 2	0,002 5	0,004 8	0,00 30	0,018 2	0,004 7	0,009 1	0,005 2	0,004 1

Jadvaldan ko'rinishicha

$$D = \max |F^*(x_i) - F(x_i)| = 0,0182$$

Bundan $\lambda = D\sqrt{n} = 0,0182 \cdot \sqrt{9} = 0,0546$, va jadvaldan $P(\chi^2_{0,05} \approx 1$, ya'ni misoldagi tanlanma normal taqsimlangan deb olish mumkin (nolinchi gipotezani qabul qilamiz).

3-misol

Berilishi: Ob'ektning uzoqligini o'lchashdagi xatolarning taqsimot qonunini aniqlash masalasida radioo'lchov asbobi yordamida $n=400$ ta o'lchov o'tkazilgan. Tajriba natijalari statistik qator shaklida berilgan.

I_i metr	20;30	30;40	40;50	50;60	60;70	70;80	80;90	90;100
m_i	21	72	66	38	51	56	64	32
p_i^*	0,052	0,180	0,165	0,095	0,128	0,140	0,160	0,080

H_0 gipoteza: empirik va nazariy taqsimot funksiyalarining tekis taqsimot qonuniga bo'ysunishini tekshiring.

Yechilishi: Tekis taqsimot zichligi funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq \alpha \text{ bo'lsa,} \\ \frac{1}{\beta - \alpha}, & \text{agar } \alpha < x < \beta \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \geq \beta \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bu taqsimotda matematik kutulish $m_x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, dispersiya $D_x = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{12}$

formulalar bilan topiladi.

Hisoblashlarni soddalashtirish uchun har bir razryadning o'rtasini belgilaymiz va $u_i = \tilde{x}_i - 60$ almashtirishni qollaymiz. U holda statistik qator quyidagicha bo'ladi, (buerda $\tilde{x}_i - I_i$ ning o'rtasidagi qiymat):

U_i	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35
P_i^*	0,052	0,180	0,165	0,095	0,128	0,140	0,160	0,080

Bu statistik qator uchun tanlanma o'rta

$$m_u^* = \sum_{i=1}^K u_i \cdot P_i = \sum_{i=1}^8 u_i P_i^* = 0,26,$$

tanlanma dispersiya

$$D_u^* = \sum_{i=1}^8 u_i^2 p - (m_u^*)^2 = 447,8 - 0,26^2 = 447,7$$

bo'ladi: Agar oldingi $\tilde{x}_i = u_i + 60$ ga qaytsak,

$m_x^* = m_u^* + 60 = 60,26$; $D_x^* = D_u^* = 447,7$ bo'ladi. Tekis taqsimot parametrlari formulalaridan va bulardan $\alpha \approx 23,6$; $\beta = 96,9$ larni topamiz.

U holda taqsimot zichligi funksiyasi

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} = \frac{1}{73,3} \approx 0,0136 \text{ bo'ladi:}$$

Endi har bir (20;30), (30;40) va hokazo kabi intervallar uchun (23,6; 96,9) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning P_i ehtimollarini topamiz, hamda np_i larning qiymatlarini yangi jadvalga kiritamiz:

I_i	20; 30	30; 40	40; 50	50; 60	60; 70	70; 80	80; 90	90; 100
m_i^*	21	72	66	38	51	56	64	32
np_i^*	34,9	54,6	54,6	54,6	54,6	54,6	54,6	38,0

$$\chi_{kuz}^2 = \sum_{i=1}^8 \frac{(m_i^* - np_i^*)^2}{np_i^*} \approx 20,9$$

bo'lib, ozodlik darajalari soni $r = 8 - 3 = 5$ bo'ladi.

χ^2 taqsimot jadvalidan, $\chi^2 = 20,9$; $r = 5$ bo'lganda, taqsimot ehtinoli $p = 0,001$ ni topamiz. Bundan ko'rinadiki, bu ehtimol ancha kichik va tajriba natijalari tasodifiy miqdor tekis taqsimotga bo'ysunadi degan H_0 gipotezani rad etadi.

IV.23-§. Funksional, statistik va korrelyatsion bog'lanishlar

Juda ko'p hollarda X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'lanishlarni o'rganishga tug'ri keladi. Tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'lanish funksional yoki statistik bo'lishi, yoki umuman bog'lanish bo'lmasligi mumkin.

1-ta'rif. Agar tasodifiy miqdorlardan birining har bir qiymatiga ma'lum qoida asosida ikkinchisining biror qiymati mos kelsa, bunday bog'lanishga *funksional bog'lanish* deyiladi va

$$Y = \varphi(x)$$

ko'rinishda yoziladi.

2-ta'rif. Agar tasodifiy miqdorlardan birining o'zgarishi bilan ikkinchisining taqsimoti o'zgarsa, bunday bog'lanishga *statistik bog'lanish* deyiladi.

3-ta'rif. Agar statistik bog'lanishda tasodifiy miqdorlardan birining o'zgarishi bilan ikkinchisining o'rta qiymati o'zgarsa, bunday bog'lanishga *korrelyatsion bog'lanish* deyiladi.

Korrelyatsion bog'lanishlar to'liq bo'lmagan bog'lanishlardir.

Masalan: bir xil yuzaga ega bo'lgan bir nechta maydonga don ekinlari eksak, har xil hosil olamiz. Agarda solinadigan o'g'itning miqdorini orttirib borsak, hosildorlik ortadi, ba'zi birlarida hosil kamayishi ham mumkin, lekin o'rtacha hosildorlik ortadi. Solingan o'g'it bilan hosildorlik orasidagi bog'lanish korrelyatsion bog'lanish bo'ladi. Chunki hosildorlikka o'g'itdan tashqari yana ko'p omillar ta'sir etadi.

Korrelyatsion bog'lanishlar to'g'ri chiziqli, egri chiziqli hamda bir faktorli, ko'p faktorli bo'ladi.

IV.24-§. Tanlanmaning regressiya tenglamasi

Bizga ma'lumki, shartli matematik kutilishni baholash uchun shartli o'rta qiymat baho vazifasini o'taydi.

1-ta'rif. Tashkil etuvchi X biror x soni qabul qilganda ($X = x$), Y ning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarining o'rta arifmetik qiymatiga *shartli o'rta* deyiladi.

Misol. $X = x_1 = 3$ bo'lganda Y quyidagi qiymatlarni qabul qilsin:
 $y_1 = 5, y_2 = 7, y_3 = 12$, u holda

$$\bar{y}_{x_1} = \frac{5+7+12}{3} = 8.$$

Xuddi shunday, X ning $Y=y$ ga mos qiymatlarining o'rta arifmetik qiymatiga X ning shartli o'rta qiymati deyiladi va $\bar{x}_y$ kabi belgilanadi. Ehtimollar nazariyasidan bizga ma'lumki,

$$M\{X|y\} = f(y),$$

Y ning X ga regressiya tenglamasi bo'ladi.

$$M\{Y|x\} = \varphi(x),$$

X ning Y ga regressiya tenglamasi.

Shunday qilib, $M\{X|y\}$ matematik kutilish x ning funksiyasi bo'ladi. Xuddi shunday $\bar{y}_x$ ham x ning funksiyasi va buni $f^*(x)$ bilan belgilasak

$$\bar{y}_x = f^*(x)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu Y ning X ga *tanlanma regressiya tenglamasi* deyiladi. $f^*(x)$ ga – Y ning X ga *tanlanma regressiyasi* deyiladi.

Xuddi shunday $\bar{x}_y = \varphi^*(y)$

X ning Y ga tanlanma regressiya tenglamasi deyiladi. $\varphi^*(y)$ ga esa – X ning Y ga tanlanma regressiyasi deyiladi.

$f^*(x)$ va $\varphi^*(y)$ funksiyalari parametrlarini topish bilan shug'ullanamiz.

IV.25-§. Tanlanmaning to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasini o'rtacha kvadratik baholash

1. Gruppalanmagan ma'lumotlar asosida tanlanmaning to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasini o'rtacha kvadratik baholash

Faraz qilaylik, (X, Y) tasodifiy miqdorlar sistemasi tajriba natijasida $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ qiymatlarni qabul qilsin.

Tajribadan olingan ma'lumotlar asosida to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasining parametrlarini aniqlaymiz, aniqrog'i,

$$Y = \rho_{yx}X + b \quad (1)$$

Y ning X ga regressiya tenglamasini izlaymiz.

Bu yerda ρ_{yx} – Y ning X ga tanlanma to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti Y bosh to'plamni korrelyatsiya koeffitsiyenti uchun baho bo'ladi.

$y = kx + b$ tajribadan olingan ma'lumotlar asosida tuzilgan funksiya bo'lsin.

Tajribalarni shunday o'tkazamizki, bu $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ nuqtalar (1) to'g'ri chiziqqa yaqin bo'lsin. Demak,

$$Y_i - y_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

chetlanishni baholaymiz.

Chetlanishlar kvadratining minimumi o'rtacha kvadratik baho bo'ladi. Shuning uchun quyidagi funksiyani tuzamiz:

$$F(\rho; b) = \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2.$$

$$Y_i = \rho x_i + b$$

ekanligini hisobga olsak,

$$F(\rho; b) = \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i)^2.$$

Minimum qiymatni topish uchun xususiyl hosilalarni nolga tenglashtiramiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \rho} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i) x_i = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Bundan elementar almashtirishlar bajarib, ρ va b ga nisbatan ikkita chiziqli tenglama hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \sum x^2 \rho + \sum x \bar{b} = \sum xy, \\ \sum x \rho + nb = \sum y. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, izlanayotgan parametrlarni topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum x^2 & \sum x \\ \sum x & n \end{vmatrix} = n \sum x^2 - (\sum x)^2, \quad \Delta_\rho = \begin{vmatrix} \sum xy & \sum x \\ \sum y & n \end{vmatrix} = n \sum xy - \sum x \sum y$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} \sum x^2 & \sum xy \\ \sum x & \sum y \end{vmatrix} = \sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy,$$

$$\rho = \frac{\Delta_\rho}{\Delta} = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}, \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

Xuddi shunday

$$\bar{x}_y = \rho_{xy} y + C$$

(bu yerda ρ_{yx} – X ning Y ga tanlanma regressiya koeffitsiyenti) X ning Y ga regressiya tenglamasini topish mumkin.

Misol. 5 yil kuzatish natijasida olingan ma'lumotlar asosida Y ning X ga regressiya tenglamasi topilsin.

x_i	1	2	3	4	5
Y_i	2,5	3,5	4	5	6,5

Yechish. Jadval tuzamiz.

x_i	Y_i	x_i^2	$x_i y_i$	Y_i	$Y_i - y_i$
1	2,5	1	2,5	2,42	-0,08
2	3,5	4	7,0	3,39	-0,11
3	4	9	12,0	4,36	+0,36
4	5	16	20,0	5,33	+0,33
5	6,5	25	32,5	6,30	-0,20
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 21,5$	$\sum x_i^2 = 55$	$\sum x_i y_i = 74$		

$$\rho_{yx} = \frac{5 \cdot 74 - 15 \cdot 21,5}{5 \cdot 55 - 15^2} = \frac{370 - 321,5}{275 - 225} = \frac{48,5}{50} = 0,97;$$

$$b = \frac{55 \cdot 21,5 - 15 \cdot 74}{50} = \frac{1182,5 - 1110}{50} = \frac{72,5}{50} = 1,45.$$

$$Y_1 = 0,97 \cdot 1 + 1,45 = 2,42, \quad Y_2 = 0,97 \cdot 2 + 1,45 = 3,39,$$

$$Y_3 = 0,97 \cdot 3 + 1,45 = 4,36, \quad Y_4 = 0,97 \cdot 4 + 1,45 = 5,33,$$

$$Y_5 = 0,97 \cdot 5 + 1,45 = 6,30.$$

2. Gruppallangan ma'lumotlar asosida tanlanmaning to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasini baholash

Faraz qilaylik, tajribalar soni katta bo'lsin. Bunday holda X ning bir xil qiymatlari n_x marta, Y niki n_y marta va (x, y) ning juft qiymatlari n_{xy} marta takrorlanadi. Shu ma'lumotlarni jadvalga qo'yib, korrelyatsion jadval tuziladi.

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	10	15	20	25	n_y
2	3	2	-	-	5
4	1	8	6	-	15
6	-	7	23	5	35
8	-	-	8	7	15
n_x	4	17	37	12	$n_x = n_y = 70$

Ana shunday tuzilgan jadvalga *korrelyatsion jadval* deyiladi.

Bu yerda

$$\sum n_x = \sum n_y = \sum n_{xy} = n, \quad \sum n_x = 4 + 17 + 37 + 12 = 70,$$

$$\sum n_y = 5 + 15 + 35 + 15 = 70.$$

Shunday jadval asosida regressiya tenglamasi tuziladi. Oldingi bandda gruppalanmagan ma'lumotlar uchun

$$\begin{cases} \sum x^2 \rho_{yx} + \sum x \bar{b} = \sum xy \\ \sum x \rho_{yx} + nb = \sum y \end{cases} \quad (1)$$

ni keltirib chiqargan edik. Endi shu sistemani gruppalangan ma'lumotlar sistemalari uchun yozamiz. Ushbu ayniyatlardan foydalanamiz:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}, \text{ bundan } \sum x = n\bar{x};$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n}, \text{ bundan } \sum y = n\bar{y};$$

$$\bar{x}^2 = \frac{\sum x^2}{n}, \text{ bundan } \sum x^2 = n\bar{x}^2,$$

hamda $\sum xy = \sum n_{xy} x \cdot y$ larni hisobga olsak

$$\begin{cases} \sum x^2 \rho_{yx} + \sum x \bar{b} = \sum n_{xy} xy, \\ \sum \rho_{yx} + b = \bar{y}. \end{cases} \quad (2)$$

bu sistemani yechib, izlanayotgan

$$\bar{y}_x = \rho_{yx} x + b$$

tenglamaning parametrlarini baholaymiz.

(2) dan b ni topib, uning

$$b = \bar{y} - \rho_x \cdot \bar{x},$$

yuqoridagi tenglamaga qo'yamiz:

$$\bar{y}_x = \rho_{yx} x + \bar{y} - \rho_{yx} \cdot \bar{x},$$

bundan

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx} (x - \bar{x}) \quad (3)$$

ga ega bo'lamiz.

$\overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \tilde{\sigma}_x^2$ ekanini hisobga olib, (2) sistemadan ρ_{yx} ni topamiz:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} \cdot xy - n\bar{x}\bar{y}}{n[\overline{x^2} - (\bar{x})^2]} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x^2}.$$

Tenglikning ikki tomonini $\frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y}$ ga ko'paytirsak:

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y} = \frac{\sum n_{xy} \cdot xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}$$

kelib chiqadi.

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y} = \tau_T$$

belgilash kiritamiz.

Bundan

$$\rho_{yx} = \tau_T \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x},$$

buni (3) ga qo'ysak:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \tau_T \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x} (x - \bar{x})$$

bo'ladi. Bu Y ning X ga to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasi. Bu yerda tanlanmaning korrelyatsiya koeffitsiyenti

$$\tau_T = \frac{\sum n_{xy} \cdot xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y},$$

yoki

$$\tau_T = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y},$$

bu yerda

$$\overline{xy} = \frac{\sum n_{xy} xy}{n},$$

x, y – variantalar, n_{xy} – (x, y) juft qiymatlar variantalari, $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y$ – tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanishlar, $\bar{x}, \bar{y}$ – tanlanma o'rtalar.

Agar $\tau_T = 0$ bo'lsa, X va Y lar orasida bog'lanish bo'lmaydi, $\tau = \pm 1$ bo'lsa, bog'lanish funksional, $-1 < \tau_T < 1$ bo'lsa, bog'lanish korrelyatsion bo'ladi.

Misol. Quyidagi korrelyatsion jadval asosida Y ning X ga to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasi tuzilsin.

$$\bar{Y}_x - \bar{Y} = \tau_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$$

x							
y	5	10	16	20	25	30	
15	1	4					5
25		7	3				10
35			2	50	2		54
45			1	10	6		17
55				4	7	3	14
-	1	11	6	64	15	3	100

Shu jadval asosida qo'yidagi jadvallarni tuzamiz.

X	X ²	n _x	n _x X	n _x X ²
9	25	1	5	25
10	100	11	110	1100
15	225	6	90	1350
20	400	64	1280	25600
25	625	15	375	9375
30	900	3	90	2700
		100	1950	40150

Y	Y ²	n _y	n _y Y	n _y Y ²
15	225	5	75	1125
25	625	10	250	6250
35	1225	54	1890	66150
45	2025	17	765	34425
55	3025	14	770	42350
		100	3750	150300

Quyidagilarni hisoblaymiz:

$$\bar{x} = \frac{\sum n_x x}{n} = \frac{1950}{100} = 19,5; \quad \bar{y} = \frac{\sum n_y y}{n} = \frac{3750}{100} = 37,5;$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum n_x x^2}{n} = \frac{40150}{100} = 401,5; \quad \overline{y^2} = \frac{\sum n_y y^2}{n} = \frac{150300}{100} = 1503;$$

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{401,5 - (19,5)^2} = \sqrt{21,25} = 4,61$$

$$\tilde{\sigma}_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{1503 - (37,5)^2} = \sqrt{96,75} = 9,84$$

Bular asosida quyidagi yig'indini hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} \sum n_{xy} x \cdot y &= 15(5 \cdot 1 + 10 \cdot 4) + 25(10 \cdot 7 + 15 \cdot 9) + \\ &+ 35(15 \cdot 2 + 20 \cdot 50 + 25 \cdot 2) + 45(15 \cdot 1 + 20 \cdot 10 + 25 \cdot 6) + \\ &+ 55(20 \cdot 4 + 25 \cdot 7 + 30 \cdot 3) = \\ &= 675 + 2875 + 37800 + 15425 + 18975 = 76750 \end{aligned}$$

$\overline{\overline{xy}}$ ni hisoblaymiz.

$$\overline{\overline{xy}} = \frac{\sum n_{xy} \cdot xy}{n} = \frac{76750}{100} = 767,5$$

$$\tau = \frac{\overline{\overline{xy}} - \bar{x} \bar{y}}{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y} = \frac{767,5 - 19,5 \cdot 37,5}{4,61 \cdot 9,84} = \frac{36,25}{45,3624} = 0,799$$

Shunday qilib, Y ning X ga regressiya tenglamasi

$$\bar{y}_x - 37,5 = 0,799 \cdot \frac{9,84}{4,61} (x - 19,5)$$

$$\bar{y}_x - 37,5 = 1,705 \cdot (x - 19,5)$$

$$\bar{y}_x = 1,705x - 33,256 + 37,5$$

$$\bar{y}_x = 1,705x - 4,244 .$$

Takrorlash uchun savollar

1. Matematik statistikaning predmeti nima?
2. Matematik statistikaning vazifalarini ayting.
3. Matematik statistikaning asosiy masalalarini sanab o`ting.
4. Tanlanmaning statistik taqsimotini ta`riflang.
5. Empirik taqsimot funksiyasi qanday aniqlanadi?
6. Poligonni ta`riflang.
7. Gistogramma qanday yasaladi?
8. Tanlanma deb nimaga aytiladi?
9. Tanlanma qanday usullar bilan beriladi?
10. Tanlanma o`rta nima?
11. Arifmetik o`rta qiymat nima?
12. Ko`paytmalar usuli nima?
13. Statistik baho nima?
14. Siljigan baho nima?
15. Effektiv (samarali) bahoni ta`riflang.
16. Asosli baho nima?
17. Tanlanma o`rta nimani baholaydi?

18. Dispersiyani hisoblash formulasi qanday bo'ladi?
19. Ishonchlilik intervaliga ta'rif bering?
20. Nazriy taqsimlar nima?
21. Nazariy taqsimot qanday tanlanadi?
22. Matematik kutilish uchun ishonchli intervalni ko'rsating?
23. Dispersiya uchun ishonchli intervalni ko'rsating?
24. Statistik gipotezani tariflang.
25. Nolinchi (asosiy) gipoteza nima?
26. Konkurent (alternativ) gipoteza nima?
27. Statistik (yoki muvofiqlik) kriteriyi nimani aniqlaydi?
28. Aniqlilik darajasi deb nimaga aytiladi?
29. 1-va 2-tur xatolar nima?
30. Kriteriyning quvvati nima?
31. Qanday tasodifiy miqdorlar bog'liq deyiladi?
32. Qanday tasodifiy miqdorlar bog'liqmas deyiladi?
33. Ikki tasodifiy miqdorning bog'liqmasligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
34. Ikki tasodifiy miqdorning korrelyatsiya momenti nima?
35. Korrelyatsiya koeffitsiyenti nima?
36. Korrelyatsion bog'lanishning ma'nosi nima?
37. Tanlamaning regressiya tenglamasi nimani anglatadi ?
38. Shartli o'rta bilan shartli matematik kutilish orasidagi bog'lanish qanday bo'ladi?
39. Ikki tasodifiy miqdor orasidagi funksional bog'lanish deb nimaga aytiladi?
40. Statistik bog'lanishning ta'rifini ayting.
41. Ikki tasodifiy miqdor orasidagi korrelyatsion bog'lanish deb nimaga aytiladi?
42. Korrelyatsion jadval qanday aniqlanadi?
43. Shartli o'rta qiymat qanday topiladi?
44. Eng kichik kvadratlar usuli nimadan iborat?

45. Chiziqli regressiya tenglamasi qanday yoziladi?

Mavzu bo'yicha test savollari

1. Bog'liq tasodifiy miqdorlar zichlik funksiyasi uchun quydagilardan qaysi biri o'rinli emas?
a) $f(x,y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$ b) $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ d) $f(y|x) = f_2(y)$ e) $f(x|y) = f_1(x)$
2. (X,Y) sistemada X ning matematik kutilishi qaysi boshlang'ich momentga teng?
a) $\alpha_{0,1}$ b) $\alpha_{1,0}$ d) $\alpha_{1,1}$ e) $\alpha_{2,0}$
3. (X,Y) sistemada Y ning dispersiyasi qaysi markaziy momentga teng?
a) $\mu_{1,1}$ b) $\mu_{2,0}$ d) $\mu_{0,2}$ e) $\mu_{1,0}$
4. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya momenti quydagilardan qaysi biri?
a) $\mu_{2,0}$ b) $\mu_{0,2}$ d) $\mu_{1,1}$ e) $\mu_{1,0}$
5. Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'lsa, quyidagilardan qaysi biri o'rinli bo'ladi?
a) $\mu_{2,0}=0$ b) $\mu_{1,1}=0$ d) $\mu_{0,2}=0$ e) $\mu_{2,2}=0$
6. Agar X va Y uchun $K_{xy}=0$ bo'lsa, ular qanday ataladi?
a) korreksiyalangan b) korreksiyalanmagan d) bog'liqmas e) bog'liq
7. Agar Y tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorning chiziqli $Y=-3X+5$ funksiyasi bo'lsa, quyidagilardan qaysi biri o'rinli bo'ladi?
a) $r_{xy}=0$ b) $r_{xy}=0,5$ d) $r_{xy}=1$ e) $r_{xy}=-1$
8. Empirik taqsimot funksiyasining xossasini ko'rsating.
a) $F^*(x)$ o'smaydigan funksiya b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F^*(x) = 1$ d) $F^*(x)$ funksiya uzluksiz
e) $\lim_{x \rightarrow a+0} F^*(x) = F^*(a)$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F^*(x) > 0$
9. Chastotalar poligoni nimadan iborat?
a) oddiy egri chiziq b) uzluksiz egri chiziq d) siniq chiziq
e) diagramma f) to'g'ri chiziq

10. Variantalar va ularga mos chastotalar orasidagi moslikka tanlanmaning ... deyiladi (nuqtalar o`rniga tegishli so`zlarni qo`ying).

- a) statistik taqsimoti b) variatsion qator d)) statistik qator
e) empirik taqsimot f) gistogrammasi

11. Bog'liq tasodifiy miqdorlar zichlik funksiyasi uchun quyidagilardan qaysi biri o`rinli emas?

- b) $f(x,y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$ b) $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ d) $f(y|x) = f_2(y)$ e) $f(x|y) = f_1(x)$

12. (X,Y) sistemada X ning matematik kutilishi qaysi boshlang'ich momentga teng?

- b) $\alpha_{0,1}$ b) $\alpha_{1,0}$ d) $\alpha_{1,1}$ e) $\alpha_{2,0}$

13. (X,Y) sistemada Y ning dispersiyasi qaysi markaziy momentga teng?

- b) $\mu_{1,1}$ b) $\mu_{2,0}$ d) $\mu_{0,2}$ e) $\mu_{1,0}$

14. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya momenti quyidagilardan qaysi biri?

- b) $\mu_{2,0}$ b) $\mu_{0,2}$ d) $\mu_{1,1}$ e) $\mu_{1,0}$

15. Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'lsa quyidagilardan qaysi biri o`rinli bo'ladi?

- a) $\mu_{2,0}=0$ b) $\mu_{1,1}=0$ d) $\mu_{0,2}=0$ e) $\mu_{2,2}=0$

16. Agar X va Y uchun $K_{xy}=0$ bo'lsa, ular qanday ataladi?

- b) korreksiyalangan b) korreksiyalanmagan d) bog'liqmas e) bog'liq

17. Agar Y tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorning chiziqli $Y=-3X+5$ funksiyasi bo'lsa quyidagilardan qaysi biri o`rinli bo'ladi?

18. a) $r_{xy}=0$ b) $r_{xy}=0,5$ d) $r_{xy}=1$ e) $r_{xy}=-1$

19. Tanlanma xarakteristikalarini ifodalaydigan miqdorni aniqlang.

- a) tanlanma o`rta    b) dispersiya    c) matematik kutilish    d) o`rta kvadratik chetlanish

20. Tanlanmaning

o'rta qiymatini
hisoblang.

x_i	-2	0	3	4
n_i	5	4	7	4

a) 13,5

b) 7

c) 1,35

d) 1,75

21.

x_i	-2	0	3	4
n_i	5	4	7	4

Tanlanmaning 2- tartibli boshlang'ich empirik momentini hisoblang.

a) 8

b) 7,35

c) 4,5

d) 6,35

22. Tanlanmaning o'rta arifmetik qiymati topilsin:

x_i	2	3	4	5
n_i	6	8	5	6

a) 3,246

b) 3,045

c) 3,44

d) 4,008

23. 2,3,4,2,3,5,4,3,2 tanlanmaning o'rta qiymati hisoblansin.

a) 28/9

b) 26/9

c) 25/9

d) 29/9

24. Tanlanmaning o'rta qiymati topilsin :

x_i	-1	0	2	4
n_i	4	3	7	6

a) 1,2

b) 0,8

c) 1,7

d) 1,2

25. Tanlanmaning o'rta arifmetik qiymati topilsin:

x_i	1	2	3	5
n_i	5	4	7	4

a) 2,6

b) 2,7

c) 2,8

d) 2,9

26. Tanlanmaning o'rta arifmetik qiymati topilsin:

x_i	-2	-1	0	5
n_i	5	4	7	4

- a) 0,30 b) 0,25 c) 0,27 d) 0,25

27. Yuqorida (IV.17- IV.19-§§ larda) ko'rilgan ishonchlilik intervallari qaysi taqsimot qonunlari uchun topilgan?

- a) tekis b) normal d) ko'rsatkichli e) Puasson

28. Intervalli baho ($d-b$, $d+b$) shaklida bo'lsa, bahoning aniqligi qanday bo'ladi?

- a) d b) $2b$ d) b e) aniqlab bo'lmaydi

29. $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar bir xil taqsimlangan bo'lsa, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ tasodifiy miqdor

taqsimoti normal taqsimotga yaqin deb hisoblash mumkin bo'lishi uchun yaqin deb hisoblash mumkin bo'lishi uchun n qanday bo'lishi kerak?

- a) 5-7 b) 7-12 d) 10-20 e) 50-100

30. X tasodifiy miqdor ustida $n=20$ ta sinov o'tkazilgan. Natijada $\bar{x}=10,78$ ekanligi topilgan $1-\alpha=0.8$ ishonchlilik ehtimoliga ega bo'lgan ishonchlilik intervali topilsin ($\sigma^2 = 0,064$).

- a) (10,68;10,88) b) (10,71;10,85) d) (10,74;10,91) e) (10,5;11,2)

31. Ilgari suriladigan gipotezalar qanday nomlanadi?

- a) nolinch va asosiy b) nolinch va konkurent
d) konkurent va alternativ e) konkurent va zid.

32. Quyidagi olimlardan qaysilarining muvofiqlik kriteriylari mavjud?

- a) Pirson, Bernulli b) Bernulli, Laplas d) Laplas, Kolmogorov
e) Kolmogorov, Pirson

33. Tanlanma binomial taqsimot qonuniga bo'ysunsa, tanlanma hajmi $n > 30$ bo'lganida taqsimot qonunini taqriban qanday taqsimlangan deb olish mumkin?

- a) tekis b) normal d) Puasson e) diskret

34. Statistikaning aniqlilik darajasi uning kritik sohaga tushish....
 a) darajasi b) quvvati d) ehtimoli e) qonuni
35. Qaysi kritik soha mavjud emas?
 a) o'ng tomonlama b) chap tomonlama d) ikki tomonlama e) ko'p tomonlama
36. Pirsonning muvofiqlik kriteriyida tanlanma ma'lumotlariga ko'ra χ^2 ko'rsatilgan qiymat qanday bo'lganda nolinchi H_0 gipoteza qabul qilinadi?
 a) $\chi^2_{tuz} < X_\alpha$ b) $\chi^2_{tuz} = X_\alpha$ d) $\chi^2_{tuz} > X_\alpha$ e) hech qaysisida
37. Muvofiqlik kriteriyi bo'yicha topilgan ehtimol qanday bo'lganda nolinchi gipoteza qabul qilinishi to'g'ri bo'ladi?
 a) $P > 0,5$ b) $P = 0,5$ d) $\rho < 0,5$ e) aniq chegarasi yoq.
38. Korrelyatsiya koeffitsiyenti 0 ga teng bo'lgan ikki tasodifiy miqdor:
 a) bog'liqmas b) bog'liq d) chiziqli bog'liq
 e) chiziqli bog'liqmas
39. Korrelyatsiya koeffitsiyenti 1 ga teng bo'lgan ikki tasodifiy miqdorlar qanday bog'lanishda bo'ladi?
 a) bog'liqmas b) to'g'ri proporsional d) nochiziqli bog'lanish
 e) teskari bog'lanish
40. Korrelyatsiya koeffitsiyenti qanday qiymatlar qabul qiladi?
 a) $(-\infty; +\infty)$ b) $(0; 1)$ d) $(-1; 1)$ e) $[-1; 1]$

ASOSIY VA QO'SHIMCHA ADABIYOTLAR RO'YXATI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI PREZIDENTI ASARLARI

1. Ислом Каримов “Мамлакатимиз тараққиётининг қонуний асосларини мустаҳкамлаш фаолиятимиз мезони бўлиши даркор”. Ўзбекистон

Республикаси Олий Мажлиси Сенатининг бешинчи ялпи мажлисидаги маъруза. Халқ сўзи. 2006 йил. 25 февраль.

2. Каримов И.А. Бизнинг бош мақсадимиз – жамиятни демократлаштириш ва янгилаш, мамлакатни модернизация ва ислох этишдир. –Т.: Ўзбекистон, 2005.

3. Каримов И.А. “Инсон, унинг ҳуқуқи ва эркинликлари ҳамда манфаатлари – энг олий қадрият”. Ўзбекистон Республикаси Президентининг Ўзбекистон Республикаси Конституциясининг 13 йиллигига бағишланган тантанали маросимда сўзлаган маърузаси. Халқ сўзи , 2005, 8 декабрь.

4. Ислон Каримов. Ўз келажакимизни ўз қўлимиз билан қурмоқдамиз. Т., “Ўзбекистон” 1999 й.

5. Ислон Каримов. Ўзбекистон ХХІ асрга интилоқда. Т., “Ўзбекистон” 1999 й.

Asosiy adabiyotlar

1. В.А. Колемаев. и др. “Теория вероятностей и математическая статистика” .М: Высшая школа, 1990г.

2. S.H. Sirojiddinov , M. Mamatov. “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika”. Toshkent., “O’qituvchi”. 1982-y.

3.Гмурман В.Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, Тошкент, Ўқитувчи, 2001.

4.Гмурман В.Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма. Тошкент, Ўқитувчи, 2001.

5.Гмурман В.Е.Теория вероятностей и математическая статистика.М., «Высшая школа»,1972

6.Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика.М, «Наука»,1979 г.

7.Коваленко И.Н.,Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика.М., «Высшая школа»,1973 г.

9.Гмурман В.Е.Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.М., «Высшая школа»,1979 г.

- 10.Вентцель Е.С.Теория вероятностей.М., «Наука», 1969 г..
- 11.Кремер Н.Ш.Теория вероятностей и математическая статистика.М.,ЮНИТИ,2001 г.
- 12.Кремер Н.Ш. и др.Математика для экономистов:от Арифметики до Эконометрике.Учебное пособие.М.,ИД,Юрайт,2010 г.

Qo'shimcha adabiyotlar

- 1.Б.В. Гнеденко, А.Я. Хинчин. “Эҳтимоллар назариясидан асосий тушунчалар”. Тошкент., 1976й.
2. Е.И. Гурский . “Теория вероятностей с элементами математической статистики”, Москва.,Высшая школа. 1971г.
3. А.И. Карасев, З.М. Аксютин, Т.И. Савельева. “Курс высшей математики для экономических вузов”, М: Высшая школа. 1975г.
- 4.Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика.М. «Статистика»,1979 г.

Internet saytlari

1. www.bilimdon.uz. – O'zbyokiston Respublikasi oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining veb sayti.
2. www.ziyonet.uz –internet ta'lim veb sayti.
3. www.de.uz. – Masofaviy ta'lim tizimi veb sayti.
4. <http://www.rsl.ru/> -Rossiyskaya gosudarstvennaya biblioteka (Rossiya davlat kutubxonasi).
5. www.gaap.ru; www.cip.com; www.aicpa.org; www.buhgalt.nrj; www.nevod.rij; www.bilim.uz; www.gov.uz.

78	Рахимов Л.А.	114
80	«Чизма геометрия ва муҳандислик графикаси» кафедраси тарихи ва ҳозирги фаолияти. Қулназаров Б.Б., Хусанова С., Қурбонova Ф.	116
79	Қишлоқ аҳоли ҳудудларини лойиҳада монументал ва декоратив санъат. Худоевova М.Б., Маматқудов У.У., Умрзокова Ш.	117
81	80 Основные климатические параметры и их учет при проектировании зданий. Балтаев Ж.И., Хасанов Ж.	119
84	81 Fizika darslarida intellektual o'yinlardan foydalanishning afzalligi Zairova L.X., Mardonova Yu.O., Zairova M.X., Qayimov D.Ya., Navoiy davlat konchilik instituti, Navoiy davlat pedagogika instituti, Buxoro muhandislik-texnologiya instituti	120
86	82 Dars jarayonida interaktiv metodlardan foydalanish. Abdunazarova D.Yu., Zairova L.X., Zairova M.X.	121
87	83 Радиально-критические графы с данным цикломатическим числом. Ю. Нишанов Р. Абдуллаев	123
89	84 Аэросуратда нукта ҳолатини рельеф таъсирида бузилишини аниқлаш ва баҳолаш. Аэросуратларда ўлчаш ва масштабни аниқлаш. Аэросуратнинг оғишнинг масштабини ўзгаришига таъсир. Омонов И.Х., Турканиева Г., Т.Т. Ноброзимов.	124
90	85 Статистик тақсимланишнинг қўшимча хarakteristikalar, асимметрия, эксцесс кўрсаткичларини ҳисоблашда ахборот технологиялари татбиқи. Нормулимов Ш., Э.Ислом, А.Каримов, М.Шодмонқудов	126
92	86 Развитие видов предпринимательской деятельности в Узбекистане. Зойир Муратович Пулатов, Узгубек Қўдодиевич Жўраев	129
93	87 Кичик жамоат марказларини ташкил этишнинг тарихи тажрибалари. Рахимов К.И. Асатуллаева У.Э.	130
94	88 Шамендин Илутмиш архитектурасининг назарий таҳлили. Рахимов Л.А.	132
99	89 Современные методы очистки сточных вод завода бытовых холодильников от соединений хрома. Бекназарова Гулрух Эмирадовна, Саидов Салим Саидович	133
100	90 Самарканд шаҳрида тарихий меъморий обидаларга сервис хизматини такомиллаштириш йўлида бир лойиҳа ечим. Каримова Н.А., Каримова Г.А., Алиқудова У.А.	134
01	91 Me'moriy manzaralar ishlash. Tursunov Shavkat Sharifjonovich, Umataliyev Muxtorjon Abduraximovich	135
03	92 Замонавий шаҳарсозликда архитектура ва монументал ҳайкалтарошлиқнинг ўзаро уйғунлиги. Турсунов Шавкат Шарифжонович, Уматалиев Мухторжон Абдурахимович	137
05	93 Юкори малакали мутахассисларни тайёрлашда замонавий ўқитиш усулларининг роли. Усмонов Б., Маматова Марғуба.	138
06	94 Ёулажак мутахассиснинг шаклланишида мустикал ишларнинг роли. Б.Усмонов, Холикова Бибинисо, Умқир Мухаммадиев	139
08	95 Temir-beton kashfiyoti va ishlab chiqarish rivojlanishi tarixi. Abdinaitova M., Qosimova F.	139
08	97 Ёшларнинг мафкуравий иммунитетини шакллантиришда ва мустахкамлашда Целом Каримов маънавий меросининг аҳамияти. Хайдарова Хилола Хислатовна	142
10	98 Изучение возникновения крупнейших библиотек мира. Ильина В., Н.Дж.Ходиева	143
1	99 Компьютер тarmoqlari xavfsizligini ta'minlash muammolari va tarmoq hujumlarga qarshi samarali himoya Shaimov K.M., Axmedov N.T.	145
2	100 "Mashg'ulotlarda internetdan foydalanish va pedagoglar veb-sahifasini tayyorlashga qo'yiladigan talablar" Qarshieva M.M., Hakimov Yu.M.	147