ISSN 2010-9075

БЕРДАҚ атындағы ҚАРАҚАЛПАҚ
МӘМЛЕКЕТЛИК УНИВЕРСИТЕТИНИҢ

ХАБАРШЫСЫ

БЕРДАҚ номидаги ҚОРАҚАЛПОҚ
ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИНИНГ

АХБОРОТНОМАСИ

ВЕСТНИК

КАРАКАЛПАКСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. БЕРДАХА

1

НӨКИС 2016 НУКУС

УДК: 519.24.

СВОЙСТВА ПОЛУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СТЕПЕННЫХ ОЦЕНОК В ИНФОРМАТИВНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

Абдикаликов Ф.А.
Каракалпакский государственный университет

Рассмотрим статистическую модель случайного цензурирования с двух сторон. Пусть $\{(L_k, Z_k, Y_k), k=\overline{1,n}\}$ - независимые реализации вектора (L,Z,Y) в n экспериментах и $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le 1$ - фиксированные точки дизайна ковариаты X. Схема цензурирования такова, что в $n-м$ шаге эксперимента наблюдается выборка $S^{(n)} = \{(\xi_i, \chi_i^{(0)}, \chi_i^{(1)}, \chi_i^{(2)}, X_i), i=1,\ldots,n\}$, где $\xi_i = L_i \vee (Z_i \wedge Y_i)$, $\chi_i^{(0)} = I(Z_i \wedge Y_i < L_i)$, $\chi_i^{(1)} = I(L_i \le Z_i \le Y_i)$, $\chi_i^{(2)} = I(L_i \le Y_i < Z_i)$, $I(A)$ - индикатор события $A, a \wedge b = = \min(a,b), a \vee b = \max(a,b)$. Пусть $F_{x_i}, G_{x_i}, K_{x_i}$ и H_{x_i} - условные функции распределения (ф.р.) с.в. и ξ_i при заданной ковариате $X = x_i$ и все эти распределения непрерывны. Далее для упрощения записей x_i обозначим через x. В рассматриваемой модели интересующие нас с.в. Z_x наблюдаемы только при $\chi_x^{(1)} = 1$ и задача состоит в оценивании условной функции выживания $1-F_x$ по выборке $S^{(n)}$. Пусть H_x и N_x - условные ф.р. с.в. ξ_x и $\eta_x = Z_x \wedge Y_x$ при $X = x$. Тогда легко находим, что $H_x(t) = K_x(t) N_x(t)$ и $N_x(t) = 1-(1-F_x(t))(1-G_x(t))$, $t \ge 0$. В информативной модели предполагается следующие представления для всех $t \ge 0$:

$$\begin{cases} 1-G_x(t) = (1-F_x(t))^{\theta_x}, \\ K_x(t) = (N_x(t))^{\beta_x}, \end{cases} \tag{1}$$

где θ_x и β_x - положительные неизвестные параметры. Модель (1) была введена и исследована в работах [1,2]. Ее характеризационное свойство содержится в следующем утверждении.

Теорема 1 [1,145-162], [2,1991-2012]. *Равенства (1) имеют место тогда и только тогда, когда с.в.* ξ_x *и* $(\chi_x^{(0)}, \chi_x^{(1)}, \chi_x^{(2)})$ *- независимы.*

Из формул (1) легко находим следующее представление для условной ф.р. F_x:

$$1-F_x(t) = \left[1-(H_x(t))^{\lambda_x}\right]^{\gamma_x}, \quad t \ge 0, \tag{2}$$

где $\lambda_x = \dfrac{1}{1+\beta_x}$ и $\gamma_x = \dfrac{1}{1+\theta_x}$. Непосредственным вычислением находим, что

$$P(\chi_x^{(0)}=1) = 1-\lambda_x,\ P(\chi_x^{(1)}=1) = \gamma_x\lambda_x,\ P(\chi_x^{(2)}=1) = (1-\gamma_x)\lambda_x. \tag{3}$$

Для оценивания $1-F_x$ по формуле (2) сперва оценим $H_x(t)$ и параметры λ_x, γ_x.

Пусть $x_0 = 0$, $\pi(t)$ - известная плотность (ядро) и $\{h_n, n \ge 1\}$ - последовательность «ширины окна»: $h_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим весы Гессера-Мюллера: $\omega_{ni}(x;h_n) = \left(\int\limits_0^{x_n} \frac{1}{h_n}\pi\left(\frac{x-y}{h_n}\right)dy\right)^{-1} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_n}\pi\left(\frac{x-y}{h_n}\right)dy, i=1,\ldots,n.$ Для оценивания ф.р. $H_x(t)$ и вероятностей $\{p_x^{(m)} = P(\chi_x^{(m)}=1), m=0,1,2\}$ используем статистики типа Стоуна [3,595-645]:

$$\begin{gathered} H_{xh}(t) = \sum_{i=1}^n I(\xi_i \le t)\,\omega_{ni}(x;h_n), \\ p_{xh}^{(m)} = \sum_{i=1}^n \chi_i^{(m)}\omega_{ni}(x;h_n), m=0,1,2. \end{gathered} \tag{4}$$

Подставив оценки (4) вместо вероятностей в уравнениях (3), находим оценки параметров λ_x и γ_x в виде

$$\lambda_{xh} = 1-p_{xh}^{(0)},\ \gamma_{xh} = p_{xh}^{(1)}\left(1-p_{xh}^{(0)}\right)^{-1}. \tag{5}$$

Теперь подставив оценки (4) и (5) в (2), получаем оценку для $1-F_x$ в виде

$$1-F_{xh}(t)=\left\{1-\left[H_{xh}(t)\right]^{\lambda_{xh}}\right\}^{\gamma_{xh}},\ t\geq 0. \tag{6}$$

Переходим к асимптотическим свойствам оценки (6) при $n\to\infty$ $\left(\text{т.е. } h_n\to 0\right)$.

Далее нами будут использованы обозначения

(I) $\quad \underline{\Delta}_n=\min\limits_{1\leq i\leq n}\left(x_i-x_{i-1}\right),\quad \overline{\Delta}_n=\max\limits_{1\leq i\leq n}\left(x_i-x_{i-1}\right).$

(II) $\quad \|\pi\|_2^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\pi^2(y)\,dy,\ m_1(\pi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}y\pi(y)\,dy, m_2(\pi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}y^2\pi(y)\,dy.$

Легко видеть, что ввиду условий (1) $T_{F_x}=T_{G_x}=T_{N_x}=T_{K_x}=T_{H_x}=\inf\left\{t\geq 0: H_x(t)=1\right\}$ и $\tau_{F_x}=\tau_{G_x}=\tau_{N_x}=\tau_{K_x}=\tau_{H_x}=\sup\left\{t\geq 0: H_x(t)=0\right\}$.

Рассмотрим условия: (У1) При $n\to\infty$, $\quad x_n\to 1,\quad \overline{\Delta}_n=O\left(\frac{1}{n}\right),\quad \overline{\Delta}_n-\underline{\Delta}_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$;

(У2) $\pi(y)$ - плотность с компактным носителем $[-M,M]$, где число $M>0$, а также $m_1(\pi)=0$ и π удовлетворяет условию Липщица: $\left|\pi(y)-\pi(y')\right|\leq C_\pi\left|y-y'\right|$;

(У3) Производные $\dot{F}_x(t)=\frac{\partial}{\partial x}F_x(t),\ \ddot{F}_x(t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_x(t)$ - существуют и непрерывны для $(x;t)\in[0,1]\times[\tau,T]$, где $\tau>\tau_{F_x}$, $T<T_{F_x}$ и $\tau<T$.

(У4) Производные $\dot{\theta}_x=\frac{d}{dx}\theta_x,\quad \dot{\beta}_x=\frac{d}{dx}\beta_x,\quad \ddot{\theta}_x=\frac{d^2}{dx^2}\theta_x,\quad \ddot{\beta}_x=\frac{d^2}{dx^2}\beta_x$ - существуют и непрерывны для $0\leq x\leq 1$.

Заметим, что существование и непрерывность всех этих производных следует из условий (У1) и (У4).

Теорема 2[1], [2]. *Пусть выполнены условия (У1)-(У4).*

(A) *Если* $nh_n^5=o(1)$ *и* $\left(nh_n\right)^{-1/2}\log n=o(1)$, *тогда при* $n\to\infty$ *и* $t\in[\tau,T]$

$$\left(nh_n\right)^{1/2}\left(F_{xh}(t)-F_x(t)\right)\overset{D}{\Rightarrow}\left(0,\sigma_x^2(t)\right).$$

(B) *Если* $h_n=Cn^{-1/5}$ *при некотором* $C>0$, *тогда при* $n\to\infty$ *и* $t\in[\tau,T]$

$$\left(nh_n\right)^{1/2}\left(F_{xh}(t)-F_x(t)\right)\overset{D}{\Rightarrow}N\left(a_x(t),\sigma_x^2(t)\right),$$

где

$$a_x(t)=\frac{1}{2}\left(1-F_x(t)\right)\left\{p_x^{(1)}\left[\left(H_x(t)\right)^{p_x^{(0)}}-H_x(t)\right]^{-1}\ddot{H}_x(t)-\left[\frac{p_x^{(1)}}{\left(1-p_x^{(0)}\right)^2}\log\left[1-\left(H_x(t)\right)^{1-p_x^{(0)}}\right]+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{p_x^{(1)}}{\left(1-p_x^{(0)}\right)}H_x(t)\log H_x(t)\left[\left(H_x(t)\right)^{p_x^{(0)}}-H_x(t)\right]^{-1}\right]\ddot{p}_x^{(0)}-$$

$$\left.-\frac{1}{1-p_x^{(0)}}\log\left[1-\left(H_x(t)\right)^{1-p_x^{(0)}}\right]\ddot{p}_x^{(1)}\right\}m_2(\pi)C^{5/2}=a_x^0(t)C^{5/2},$$

$$\sigma_x^2(t)=\|\pi\|_2^2\left(1-F_x(t)\right)^2\left\{A_x^2(t)H_x(t)\left(1-H_x(t)\right)+B_x^2(t)p_x^{(0)}\left(1-p_x^{(0)}\right)+\right.$$

$$\left.+C_x^2(t)p_x^{(1)}\left(1-p_x^{(1)}\right)-2B_x(t)C_x(t)p_x^{(0)}p_x^{(1)}\right\},$$

$$A_x(t)=p_x^{(1)}\left[\left(H_x(t)\right)^{p_x^{(0)}}-H_x(t)\right]^{-1},\ B_x(t)=-\left[\frac{p_x^{(1)}}{\left(1-p_x^{(0)}\right)}C_x(t)+\frac{A_x(t)}{\left(1-p_x^{(0)}\right)}H_x(t)\log H_x(t)\right],$$

$C_x(t)=-\frac{1}{\left(1-p_x^{(0)}\right)}\log\left[1-\left(H_x(t)\right)^{1-p_x^{(0)}}\right]$. В условиях теоремы 2 также возможно установить слабую сходимость случайного процесса $\left\{W_{nx}(t)=\left(nh_n\right)^{1/2}\left(F_{xh}(t)-F_x(t)\right),\ \tau\leq t\leq T\right\}$, в пространстве $\mathbb{D}[\tau,T]$ к гауссовскому процессу. Рассмотрим $\mathbb{W}_x(t)$ гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией при $s,t\in[\tau,T]$:

$$Q_{st}=\|\pi\|_2^2\left(1-F_x(s)\right)\left(1-F_x(t)\right)\left\{A_x(s)A_x(t)\left[H_x(s\wedge t)-H_x(s)H_x(t)\right]+\right.$$

$$\left.+B_x(s)B_x(t)p_x^{(0)}\left(1-p_x^{(0)}\right)+C_x(s)C_x(t)p_x^{(1)}\left(1-p_x^{(1)}\right)-2B_x(s\wedge t)C_x(s\wedge t)\right\},$$

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Е С Т Е С Т В Е Н Н Ы Е   И   Т Е Х Н И Ч Е С К И Е   Н А У К И

МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА .

ХИМИЯ. ТЕХНОЛОГИЯ. БИОЛОГИЯ.

О Б Щ Е С Т В Е Н Н Ы Е   И   Г У М А Н И Т А Р Н Ы Е   Н А У К И

ЭКОНОМИКА

ОБРАЗОВАНИЕ. МЕТОДОЛОГИЯ. ПСИХОЛОГИЯ