**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.27.06.2017/FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

АХМЕДОВ ДИЛШОД МАШРАБОВИЧ

СОБОЛЕВ ФАЗОСИДА СИНГУЛЯР ИНТЕГРАЛЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ИНТЕГРАЛЛАШ УЧУН ОПТИМАЛ ФОРМУЛАЛАР

**01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент – 2018

УДК: 519.644.3

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.27.06.2017/FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

АХМЕДОВ ДИЛШОД МАШРАБОВИЧ

СОБОЛЕВ ФАЗОЛАРИДА СИНГУЛЯР ИНТЕГРАЛЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ИНТЕГРАЛЛАШ УЧУН ОПТИМАЛ ФОРМУЛАЛАР

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2018

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.2.PhD/FM56 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертацияси Ўзбекистон Республикаси фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «Ziyonet» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Шадиметов Холматвай Махкамбаевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Алоев Рахматилло Джураевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Баротов Адизжон Садиевич физика-математика фанлари номзоди,
Етакчи ташкилот:	**Жаҳон иқтисодиёти ва дипломатияси университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.27.06.2017/FM. 01.02 рақамли Илмий кенгашнинг «___»___________ 2018 йил соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2018 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2018 йил «4» майдаги 2 рақамли реестр баённомаси).

А.Р. Марахимов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

З.Р. Рахмонов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

З.Ҳ. Юлдашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар натижасида вужудга келадиган муаммоларнинг ечимлари сингуляр интегралларга келтирилади. Шу билан бирга қатор математиклар ва механикларнинг ишлари сингуляр интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш методларини ишлаб чиқишга қаратилган. Ушбу методлар кубатур ва интерполяцион формулаларни қуришга асосланган. Сингуляр интеграл тенгламаларни сонли ечиш методларини қуришда олимлар қуйидаги муаммоларни ўрганишган. Сингуляр интеграл оддий маънода узоқлашувчи бўлиб Кошининг бош қиймати маъносида изоҳланади. Шунинг учун бундай тенламаларни ечишнинг самарали усуллари ишлаб чиқилди. Функцияларнинг турли синфларида сингуляр интеграл тенгламаларни тақрибий ҳисоблашни қуришнинг янги алгоритмларини ишлаб чиқиш ҳамда уларнинг хатоликларини баҳолаш ҳисоблаш математикасининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда дунёда ҳисоблаш математикасининг муҳим масалаларидан бири дифференциалланувчи функцияларнинг турли фазоларида Коши ва Гильберт ядроли сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулаларни қуришдан иборатдир. Шуни таъкидлаш керакки, бу масала характеристик сингуляр интеграл тенгламанинг тақрибий-аналитик ечимлари билан узвий боғлиқдир. Шу муносабат билан: сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун асимптотик оптимал, тартиби бўйича оптимал ва оптимал квадратур формулалар қуриш, ҳамда уларнинг хатоликларини ҳар хил гильберт ва банах фазоларида баҳолаш тадқиқотнинг мақсади ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал ва амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларга эътибор кучайтирилди, хусусан, ҳисоблаш математикасининг квадратур формулалар назарияси бўйича характеристик сингуляр интеграл тенгламаларни тақрибий-аналитик ечими учун квадратур формулаларни қуришга алоҳида эътибор қаратилди. Коши ва Гильберт типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун дискрет ўрамалар методи ва сплайн функциялар билан яқинлаштириб қурилган квадратур формулалар ҳамда Соболев фазоларида қурилган оптимал квадратур формулаларда сезиларли натижаларга эришилди. Алгебра ва математик анализ, динамик тизимлар назарияси, амалий математика ва математик моделлаштириш каби математика фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарорни ижросини таъминлашда сингуляр интеграллларни тақрибий ҳисоблаш ва турли дифференциал фазоларида

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори

уларнинг хатоликларини баҳолаш учун оптимал квадратур формулалар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Эластиклик назариясида, аэродинамикада, автоматик бошқарув назариясида, қобиқ назариясида, электродинамика ва квант механикасида Коши типидаги сингуляр интеграллар кенг кўламда қўлланилади. Интегралларни тақрибий ҳисоблаш методлари квадратур ва кубатур формулалардан иборатдир. Сонли интеграллаш формулаларини қуришнинг алгебраик, эҳтимолли, сонли-назария ва функционал ёндашувлари бор. Коши типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблашда кенг тарқалган усуллар бу интеграл остидаги функцияни оддийроқ функциялар билан амаштириш ва квадратур формулалардан фойдаланишдан иборатдир. Ушбу йўналишдаги илмий ишлар Д.Г.Саникидзе, М.А.Шешко, K.Atkinson, G.Criscuolo, G.Mastroianni, K. Diethelm, D.Elliott, D.F.Baget, W. Gautschi, N.A.Gori, E.Santi, D.B.Hunter, N.I. Ioakimiadis, G.Monegato, Ph.Rabinowitz, Ғ.Н.Салихов, Р.Джуракулов, М.И.Исраилов ва С.М.Исраиловларнинг илмий ишларида ёритилган.

С.М.Белоцерковский томонидан сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун эвристик тушунчаларга асосланган дискрет ўрамалар методини ишлаб чиқиш бошланди. Бу методнинг математик назарияси ва исботи, шунингдек ушбу методнинг кенг қўлланилиши С.М.Белоцерковский ва И.К.Лифановларнинг ишларида келтирилган. М.И.Исроилов, З.Эшкуватов ва бошқаларнинг ишлари такомиллашган дискрет ўрамалар методи ва унинг қўлланилишига бағишланган.

И.В.Бойков, В.В.Иванов, А.К.Руденко, Б.Г.Габдулхаевларнинг ишларида Коши типидаги интегралларни ҳисоблаш учун тартиб бўйича оптимал квадратур формулалар қурилган. М.И.Исраилов ва Х.М.Шадиметовларнинг ишларида Соболевнинг $L_2^{(1)}(-1,1)$ фазосида Коши типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар қурилган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институтининг Ф4-ФА-Ф013 «Ноассоциатив ва операторлар алгебралари, динамик системалар, ҳамда уларнинг статистик физика ва популяцион биологияга тадбиқлари» (2012-2016), ОТ-Ф4-86 «Гильберт фазоларида дифференциал ва интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш учун оптимал методлар ишлаб чиқиш» мавзуларидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Соболев фазоларида Коши ядроли сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар ва характеристик сингуляр интеграл тенгламанинг тақрибий-аналитик ечиш учун вазнли оптимал квадратур формулалар қуришдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

Соболев фазосида Коши типидаги сингуляр интегрални ҳисоблаш учун квадратур формуланинг хатолик функционали нормасини ҳисоблаш;

Коши типидаги сингуляр интегралларни ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулаларнинг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш;

Соболевнинг $L_2^{(m)}(-1,1)$ фазосида Коши ядроли сингуляр интегралларни тақрибий интеграллаш учун оптимал квадратур формулалар коэффициентларининг ошкор формулаларини топиш;

$L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида Коши ядроли сингуляр интегралларни ҳисоблаш учун ҳосилали оптимал квадратур формулалар қуриш;

$L_2^{(2)}(-1,1)$ фазосида вазнли оптимал квадратур формулалар ёрдамида характеристик сингуляр интеграл тенгламанинг тақрибий-аналитик ечимини олиш.

Тадқиқотнинг объекти – сингуляр интеграл тенгламалар, сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун квадратур формулалар, квадратур формуланинг хатолик функционали нормаларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети – характеристик сингуляр интеграл тенгламалар, Коши типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар, вазнли оптимал квадратур формулалар ва ҳосилали оптимал квадратур формулаларидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда квадратур формулалар назарияси, ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, дискрет аргументли функциялар назариялари усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги:

$L_2^{(m)}(-1,1)$ ва $L_2^{(2)}(-1,1)$ фазоларида Коши ядроли сингуляр интегралларни ва вазнли сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун квадратур формулани хатолик функционалининг нормасини квадрати ҳисобланган;

$L_2^{(m)}(-1,1)$ фазосида Коши типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формуланинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

Коши ядроли сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун квадратур формуланинг оптимал коэффициентлари аналитик формуласи олинган;

ҳосилали оптимал квадратур формуланинг алгоритми қурилган ва бу алгоритм Коши ядроли сингуляр интегрални ҳисоблаш учун қўлланилган;

характеристик сингуляр интеграл тенгламанинг тақрибий-аналитик ечимини топиш учун оптимал квадратур формулалар қурилган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси. Қурилган оптимал квадратур формулалар фойдаланиб сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун Maple дастурлаш тилида дастурлар тузилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Квадратур формулалар назарияси, ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, дискрет аргументли функциялар назарияси методларини қўлланилганлиги, ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти Соболев фазоларида Коши ядроли сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулаларни қуриш алгоритми билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти қурилган оптимал квадратур формулалар Коши типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблашга ҳамда характеристик сингуляр интеграл тенгламаларни тақрибий ечишга хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.

Коши ядроли интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун қурилган ҳосилали оптимал квадратур формулалари А-13-3 рақамли «Қайта тикланувчи энергия манбалари қурилмаларини янада такомиллаштириш ва улардаги жараёнларни моделлаштиришни тадқиқ қилиш» амалий гранти лойиҳасида қуёш иссиқхоналаридаги иссиқлик жараёнларини ифодаловчи математик моделлар ечимларини оптимал яқинлаштиришда фойдаланилган (Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2018 йил 16 апрелдаги 89-03-1447-сон маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши қурилмаларда содир бўлувчи иссиқлик жараёнларини аввалдан баҳолашга имкон берган;

Соболевнинг $L_2^{(2)}$ ва $L_2^{(3)}$ фазоларида Коши типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун қурилган оптимал квадратур формулалари Ф-4-14 рақамли «Суюқлик оқувчи ер ости эгри чизиқли қувурнинг ташқи кучлари таъсиридаги кучланиш деформациялар ҳолатини тадқиқ қилиш назариясини ривожланитириш ва ҳисоблаш усулларини ишлаб чиқиш» фундаментал лойиҳада ичида суюқлик оқувчи юпқа қатламли эгри чизиқли тороидал қобиқларнинг эркин ва мажбурий тебранишлари назарияси бўйича математик моделини ифодаловчи дифференциал тенгламаларни тақрибий ечимини топишда фойдаланилган (Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2018 йил 30 апрелдаги 89-03-1575-сон маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши тороидал қобиқларнинг эгри чизиқли участкаларида уларнинг кучланиш-деформация ҳолатларини аввалдан баҳолашга имкон берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари, 4 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 2 та халқаро ва 2 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши.

Диссертация мавзуси бўйича жами 14 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 9 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 7 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши.

Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 93 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Коши типидаги сингуляр интеграл ва сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш методлари»** деб аталувчи биринчи боби кириш характерига эгадир.

Бу бобнинг биринчи параграфида Коши типидаги характеристик сингуляр интеграл тенгламаларга келувчи математик физика, аэродинамика, электродинамика, эластиклик назариясининг бир қанча муҳим масалалари муҳокама қилинади. Бундай тенгламаларнинг ечимлари Коши типидаги сингуляр интеграллар ёрдамида ифодаланиши таъкидланган. Кейин, банах фазоларида оптимал, асимптотик оптимал ва тартиби бўйича оптимал квадратур формулалар қуришнинг функционал маънода қўйилиши батафсил баён қилинган. 1.2-параграфда одатда қараладиган банах фазоларининг таърифлари келтирилган. 1.3-параграф эса сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш бўйича маълум натижаларни муҳокама қилишга бағишланган.

Биринчи бобнинг тўртинчи параграфида диссертациянинг асосий натижаларини исботлаш учун керак бўладиган формулалар ва таърифлар берилган. Хусусан, дискрет аргументли функцияси тушнчаси ва унинг устида бажариладиган амаллар келтирилган.

Дисстациянинг **«$L_2^{(m)}(-1,1)$ фазосида Коши типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар»** деб номланувчи иккинчи бобида $L_2^{(m)}(-1,1)$ Соболев фазосида

Коши типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун Сард маъносидаги оптимал квадратур формула қуриш масаласи ечилган.

Ушбу

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{x-t}dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(x_\beta) \qquad (1)$$

квадратур формулани

$$\ell(x)=\frac{\varepsilon_{[-1,1]}(x)}{x-t}-\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\delta(x-x_\beta), \qquad (2)$$

хатолик функционали билан бирга қараймиз. Бунда $-1<t<1$, $C[\beta]$ ва $x_\beta\,(\in[-1,1])$ лар (1) квадратур формуланинг коэффициентлари ва тугун нуқталари, $N-$ натурал сон, $\varepsilon_{[-1,1]}(x)$ – $[-1,1]$ кесманинг характеристик функцияси, $\delta-$ Диракнинг дельта-функцияси, φ $-L_2^{(m)}(-1,1)$ фазога тегишли функция. $L_2^{(m)}(-1,1)$ бу Соболевнинг m - тартибли умумлашган ҳосиласи квадрати билан интегралланувчи функциялар фазоси бўлиб ва у қуйидаги норма билан таъминланган

$$\left\|\varphi \mid L_2^{(m)}(-1,1)\right\|=\left\{\int_{-1}^{1}(\varphi^{(m)}(x))^2dx\right\}^{1/2}.$$

$L_2^{(m)}(-1,1)$ фазосида (2) функционал аниқланган бўлиши учун қуйидаги шартларни талаб қилиш зарур

$$(\ell, x^\alpha)=0, \quad \alpha=0,1,2,...,m-1. \qquad (3)$$

Бу ердан, (1) кўринишидаги квадратур формулалар мавжуд бўлиши учун $N\ge m-1$ шарт бажарилиши керак.

Бундай ҳолда (1) формуланинг хатолиги

$$(\ell,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\varphi(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{x-t}dx-\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(x_\beta) \qquad (4)$$

кўринишга эга бўлади.

Коши-Шварц тенгсизлигига асосан

$$\left|(\ell,\varphi)\right|\le\left\|\varphi \mid L_2^{(m)}\right\|\cdot\left\|\ell \mid L_2^{(m)*}\right\|$$

(1) формуланинг (4) хатолиги баҳоси $L_2^{(m)}(-1,1)$ да аниқланган $L_2^{(m)*}(-1,1)$ қўшма фазодаги ℓ хатолик функционали нормасини ҳисоблашга келади.

ℓ хатолик функционали нормасини тугун нуқталарни фиксирлаган ҳолда, коэффициентлар бўйича минималлаштириш Сард масаласи дейилади ва олинган формула Сард маъносидаги оптимал квадратур формула дейилади. Бу масала биринчи бўлиб Сард томонидан ўрганилган.

Бу бобнинг асосий мақсади $L_2^{(m)}(-1,1)$ фазосида Коши типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун (1) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формулаларни қуришдан иборат. Бу дегани

$$\left\|\overset{\circ}{\ell} \mid L_2^{(m)*}\right\|=\inf_{C[\beta]}\left\|\ell \mid L_2^{(m)*}\right\| \qquad (5)$$

тенгликни қаноатлантирувчи коэффициентларни топишдан иборат.

Шундай қилиб, (1) кўринишдаг$C[\beta]$и Сард маъносида оптимал квадратур формулалар қуришда қуйидаги масалаларни кетма-кет ечишимиз керак.

1 масала. $L_2^{(m)*}(-1,1)$ фазосида (1) квадратур формуланинг (2) хатолик функционалининг нормасини топиш.

2 масала. (5) тенгликни қаноатлантирувчи коэффициентларни топиш. $C[\beta]$

1 масалани ечишда, яъни $L_2^{(m)}(-1,1)$ фазосида (2) хатолик функционалининг нормасини топиш учун

$$(\ell,\psi_\ell)=\left\|\ell \mid L_2^{(m)*}\right\| \left\|\psi_\ell \mid L_2^{(m)*}\right\|$$

тенгликни қаноатлантирувчи ℓ хатолик функционалининг экстремал функциясидан фойдаланамиз.

$L_2^{(m)}$ фазосида ℓ функционалнинг $\psi_\ell(x)$ экстремал функцияси С.Л.Соболев томонидан топилган. У қуйидаги кўринишга эга

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m \ell(x)*G_m(x)+P_{m-1}(x), \qquad (6)$$

бу ерда

$$G_m(x)=\frac{|x|^{2m-1}}{2\cdot(2m-1)!},$$

$P_{m-1}(x)$ - $m-1$ даражали кўпҳад, ва * - свёртка амали.

Маълумки, $L_2^{(m)*}$ фазода ихтиёрий чизиқли ℓ функционал учун қуйидаги тенглик ўринли

$$\left\|\ell \mid L_2^{(m)*}\right\|^2=(\ell,\psi_\ell)=(\ell(x),(-1)^m \ell(x)*G_m(x))=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\left((-1)^m\int_{-\infty}^{\infty}\ell(y)G_m(x-y)dy\right)dx.$$

Бу тенликни (2) функционалга қўллаб, (6) ни ҳисобга олиб, қуидагини оламиз

$$\|\ell\|^2=(\ell,\psi_\ell)=(-1)^m\Big[\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_\beta C_\gamma\frac{|x_\beta-x_\gamma|^{2m-1}}{2\cdot(2m-1)!}-$$
$$-2\sum_{\beta=0}^{N}C[\beta]\int_{-1}^{1}\frac{|x-x_\beta|^{2m-1}}{2\cdot(2m-1)!\,(x-t)}dx+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{|x-y|^{2m-1}}{2(2m-1)!(x-t)(y-t)}dxdy\Big]. \qquad (7)$$

Шундай қилиб 1 масала ечилди.

Иккинчи бобнинг қолган параграфлари 2 масалани ечишга бағишланган.

(2) хатолик функционалининг (7) нормасининг квадрати x_β тугун нуқталар фиксирланган ҳолда $C[\beta]$, $\beta=0,1,...,N$ коэффициентлар бўйича кўп ўзгарувчили квадрат функциядир. (7) ифодани (3) шартлар асосида $C[\beta]$ коэффициентлар бўйича шартли минимумини топишда Логранжнинг номаълум кўпҳадлар методини қўллаймиз. Натижада $C[\beta]$, $\beta=0,1,...,N$ коэффициентларга нисбатан чизиқли тенгламалар системасини оламиз. Бундан ташқари, системанинг ечими мавжуд ва ягоналиги, ҳамда бу ечим (7) ифодага минимум бериши исботланган.

2.4 параграфда биз олдинги параграфда x_β тенг тақсимланган, яъни $x_\beta = h\beta - 1,\ \ h = \dfrac{2}{N},\ \ N \geq m-1$, ҳолда олинган системани ечиш алгоритмини берамиз. Бунда биз d^{2m}/dx^{2m} дифференциал операторнинг дискрет аналоги ва унинг хоссаларидан фойдаландик.

2.5 параграфда, юқорида берилган алгоритмдан фойдаланиб, (1) кўринишдаги оптимал квадратур формула коэффициентлари учун ошкор формулалар олинган ва қуйидаги исботланган.

Теорема 1. $L_2^{(m)}(-1,1)$ фазосида тугун нуқталари тенг узоқликда жойлашган (1) кўринишдаги оптимал квадратур формулалар коэффициентлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади

$$\overset{\circ}{C}[0] = hp\left[Cf_m(0) + f_m(h) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} p_\alpha^- \cdot (-1-h)^\alpha + \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{(1+h)^{2m-1-\alpha} g_\alpha}{2\alpha!(2m-1-\alpha)!} \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k hp}{q_k} \left[\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^\gamma f_m(h\gamma) + M_k + q_k^N N_k \right],$$

$$\overset{\circ}{C}[\beta] = hp\big[f_m(h\beta - h) + Cf_m(h\beta) + f_m(h\beta + h)\big] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k hp}{q_k} \left[\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^{|\beta-\gamma|} f_m(h\gamma) + q_k^\beta M_k + q_k^{N-\beta} N_k \right], \quad \beta = 1,2,\dots,N-1,$$

$$\overset{\circ}{C}[N] = hp\left[Cf_m(2) + f_m(2-h) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} p_\alpha^+ \cdot (1+h)^\alpha + \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{(1+h)^{2m-1-\alpha}(-1)^\alpha g_\alpha}{2\alpha!(2m-1-\alpha)!} \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k hp}{q_k} \left[\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^{N-\gamma} f_m(h\gamma) + q_k^N M_k + N_k \right], \ \ p_\alpha = \frac{1}{2}\left(p_\alpha^+ + p_\alpha^- \right), \ \ \alpha = 0,1,\dots,m-1,$$

бу ерда M_k, N_k, p, C, A_k - маълум катталиклар, q_k - $E_{2m-2}(q)$ Эйлер-Фробениус кўпҳадининг илдизлари, $|q_k| < 1$.

Теоерма 1 дан $m=1$ ва $m=2$ бўлгандани хусусий ҳолларда қўллаш учун қулай бўладиган қуйидаги натижаларни оламиз.

Натижа 1. $L_2^{(1)}(-1,1)$ фазосида тугун нуқталари тенг узоқликда жойлашган (1) кўринишдаги оптимал квадратур формулалар коэффициентлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади

$$\overset{\circ}{C}[0] = \frac{1}{h}\left[f_1(h) - f_1(0) + \frac{h}{2} g_0 \right],$$

$$\overset{\circ}{C}[\beta] = \frac{1}{h}\left[(f_1(h\beta - h) - 2f_1(h\beta) + f_1(h\beta + h)) \right], \ \beta = 1,2,\dots,N-1,$$

$$\overset{\circ}{C}[N] = \frac{1}{h}\left[f_1(2-h) - f_1(2) + \frac{h}{2} g_0 \right],$$

бу ерда $p_0,\ \ f_1(h\beta)$ ва g_0 - маълум катталиклар.

Натижа 2. $L_2^{(2)}(-1,1)$ фазосида тугун нуқтали тенг узоқликда жойлашган (1) кўринишдаги оптимал квадратур формулалар коэффициентлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади

$$\overset{\circ}{C}[0]=\frac{6}{h^3}\left[f_2(h)-7f_2(0)-p_1^-h+\frac{g_0}{12}(3h+3h^2+h^3)+\frac{g_1}{4}(2h+h^2)\right]$$
$$+\frac{36(1-q_1)}{h^3(1+q_1)}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}q_1^{\gamma}f_2(h\gamma)+M_1+q_1^NN_1\right],$$

$$\overset{\circ}{C}[\beta]=\frac{6}{h^3}[f_2(h(\beta-1))-8f_2(h\beta)+f_2(h(\beta+1))]$$
$$+\frac{36(1-q_1)}{h^3(1+q_1)}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}q_1^{|\beta-\gamma|}f_2(h\gamma)+q_1^{\beta}M_1+q_1^{N-\beta}N_1\right],\ \beta=1,2,...,N-1,$$

$$\overset{\circ}{C}[N]=\frac{6}{h^3}\left[f_2(2-h)-7f_2(2)+p_1^+h+\frac{g_0}{12}(3h+3h^2+h^3)-\frac{g_1}{4}(2h+h^2)\right]$$
$$+\frac{36(1-q_1)}{h^3(1+q_1)}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}q_1^{N-\gamma}f_2(h\gamma)+q_1^NM_1+N_1\right],\quad p_\alpha=\frac{1}{2}(p_\alpha^++p_\alpha^-),\quad \alpha=0,1,$$

бу ерда M_1, N_1, $f_2(h\beta)$, q_1, g_0, g_1, - маълум катталиклар.

Иккинчи бобнинг олтинчи параграфида бу бобда қурилган оптимал квадратур формулаларнинг устунлигини кўрсатувчи сонли натижалар берилган.

Диссертациянинг **«Коши типидаги сингуляр интеграллар учун ҳосилали оптимал квадратур формулалар»** деб аталувчи учинчи бобида $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида Коши типидаги сингуляр интегралларни тақрибий интеграллаш учун ҳосилали оптимал квадратур формулалар қуришнинг янги методи таклиф қилинган.

Ушбу

$$\int_0^1\frac{\varphi(x)}{x-t}dx\cong\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{N}C_\alpha[\beta]\varphi^{(\alpha)}(x_\beta)\tag{8}$$

квадратур формулани

$$\ell(x)=\frac{\varepsilon_{[0,1]}(x)}{x-t}-\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{N}(-1)^\alpha C_\alpha[\beta]\delta^{(\alpha)}(x-x_\beta),\tag{9}$$

хатолик функционали билан қараймиз, бу ерда $0<t<1$, $C_\alpha[\beta]$ - ва x_β $(\in[0,1])$ -мос равишда (8) формуланинг коэффициентлари ва тугун нуқталари, N - натурал сон, $n=\overline{0,m-1}$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - $[0,1]$ кесманинг характеристик функцияси, δ - Диракнинг дельта-функцияси, φ - $L_2^{(m)}(0,1)$ фазога тегишли функция.

(8) кўринишдаги Сард маъносидаги оптимал квадратур формулаларни қуришимиз учун дастлаб биз $L_2^{(m)*}(0,1)$ фазосида (8) квадратур формуланинг

$$(\ell,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\varphi(x)dx\int_0^1\frac{\varphi(x)}{x-t}dx-\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{N}C_\alpha[\beta]\varphi^{(\alpha)}(x_\beta)\tag{10}$$

хатолигининг юқоридан баҳосини берувчи (9) хатолик функционалининг нормаси $\left\| \ell \,|\, L_2^{(m)*} \right\|$ ни топишмиз керак. Кейин (9) хатолик функционали нормаси $\left\| \ell \,|\, L_2^{(m)*} \right\|$ ни $C_\alpha[\beta]$ коэффициентлар бўйича минималлаштиришимиз керак.

Бу бобда ҳам иккинчи бобдагидек, (6) экстремал функциядан фойдаланиб (энди (9) функционал учун) (9) хатолик функционалининг нормасини квадрати ҳисобланган ва қуйидаги ифода олинган

$$\|\ell\|^2 = (-1)^m \Big[\sum_{k=0}^{n}\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\gamma=0}^{N}\sum_{\beta=0}^{N} (-1)^k C_k[\gamma] C_\alpha[\beta] \frac{(h\beta - h\gamma)^{2m-1-\alpha-k}\,\mathrm{sgn}(h\beta - h\gamma)}{2(2m-1-\alpha-k)!} -$$

$$\left. -2\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{N}(-1)^\alpha C_\alpha[\beta]\int_0^1 \frac{(x-h\beta)^{2m-1-\alpha}\,\mathrm{sgn}(x-h\beta)}{2(2m-1-\alpha)!(x-t)}dx + \int_0^1\int_0^1 \frac{(x-y)^{2m-1}\,\mathrm{sgn}(x-y)}{2(2m-1)!(x-t)(y-t)}dxdy \right], \quad (11)$$

Шуни таъкидлаш керакки, (9) функционал $L_2^{(m)}(0,1)$ фазода аниқланганлиги сабабли, у (3) шартларни қаноатлантиради. Бу дегани, биз қурган квадратур формулалар даражаси $\leq m-1$ бўлган кўпҳадлар учун аниқдир. Аммо (11) ифодани $C_\alpha[\beta]$, $\alpha = \overline{0,n}$, $\beta = \overline{0,N}$ коэффициентлар бўйича минималлаштириш жуда қийин масаладир. Бу ерда биз $\|\ell\|^2$ ифодани $C_\alpha[\beta]$ лар бўйича кетма-кет минималлаштиришни таклиф қиламиз, яъни (11) ифодани $m=1$ бўлган ҳолда норманинг квадрати $\|\ell\|^2$ ни $C_0[\beta]$ коэффициентлар бўйича минималлаштиримиз. Кейинги, биз $m=2$ ҳолида (11) ифодага топилган $C_0[\beta]$ нинг қийматларидан фойдаланиб норманинг квадрати $\|\ell\|^2$ ни коэффициентлар бўйича минималлаштирамиз. Ундан сўнг $m=3$ ҳолида (11) ифодага топилган $C_0[\beta]$ ва $C_1[\beta]$ ларнинг қийматларидан фойдаланиб, норманинг квадрати $\|\ell\|^2$ ни $C_2[\beta]$ коэффициентлар бўйича минималлаштирамиз ва ҳоказо.

Шуни таъкидлаш керакки, ҳар сафар опти$C_1[\beta]$мал коэффициентларни топишда d^2/dx^2 операторнинг дискрет аналогидан фойдаланамиз, бу оптимал коэффициентлар учун аниқ формулаларни олиш имконини беради.

Юқоридагиларни амалга ошириб учинчи бобнинг қуйидаги асосий натижаларини олдик.

Теорема 2. $L_2^{(1)}(0,1)$ фазосида $t \neq h\beta$, $\beta = 0,1,...,N$, $0 < t < 1$ бўлганда

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x-t}dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta]\varphi(h\beta) \quad (12)$$

кўринишдаги оптимал квадратур формулалар коэффициентлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади

$$\overset{\circ}{C}_0[0] = \frac{1}{h}\left[(h-t)\ln\frac{|h-t|}{t} - h\right],$$

$$\overset{\circ}{C}_0[\beta] = \frac{1}{h}\left[(h(\beta+1)-t)\ln\frac{|h(\beta+1)-t|}{|h\beta-t|} + (h(\beta-1)-t)\ln\frac{|h(\beta-1)-t|}{|h\beta-t|}\right], \ \beta = 1,2,...,N-1,$$

$$\overset{\circ}{C}_0[N]=\frac{1}{h}\left[(t-h(N-1))\ln\frac{1-t}{|h(N-1)-t|}+h\right].$$

Теорема 3. $L_2^{(2)}(0,1)$ фазосида $t\neq h\beta$, $\beta=0,1,...,N$, $0<t<1$ бўлганда

$$\int_0^1\frac{\varphi(x)}{x-t}dx\cong\sum_{\beta=0}^{N}\Big(C_0[\beta]\varphi(h\beta)+C_1[\beta]\varphi'(h\beta)\Big) \tag{13}$$

кўринишдаги оптимал квадратур формулалар коэффициентлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади

$$\overset{\circ}{C}_1[0]=\frac{1}{2h}\left[t(h-t)\ln\frac{|h-t|}{t}+\frac{h}{2}(h-2t)\right],\ \beta=1,2,...,N-1,$$

$$\overset{\circ}{C}_1[\beta]=\frac{1}{2h}\left[h(h(\beta+1)-t)\ln\frac{|h(\beta+1)-t|}{|h\beta-t|}-h(h(\beta-1)-t)\ln\frac{|h(\beta-1)-t|}{|h\beta-t|}-\right.$$
$$\left.-(h(\beta+1)-t)^2\ln\frac{|h(\beta+1)-t|}{|h\beta-t|}-(h(\beta-1)-t)^2\ln\frac{|h(\beta-1)-t|}{|h\beta-t|}+h^2\right],$$

$$\overset{\circ}{C}_1[N]=\frac{1}{2h}\left[(t-1)(t-1+h)\ln\frac{1-t}{|1-h-t|}+\frac{1}{2}(h^2-2h(1-t))\right],$$

$\overset{\circ}{C}_0[\beta]$ коэффициентлар, $\beta=0,1,...,N$ теорема 4 да аниқланган.

Теорема 4. $L_2^{(3)}(0,1)$ фазода $t\neq h\beta$, $\beta=0,1,2,...,N$ $0<t<1$ бўлганда

$$\int_0^1\frac{\varphi(x)}{x-t}dx\cong\sum_{\beta=0}^{N}\Big(C_0[\beta]\varphi(h\beta)+C_1[\beta]\varphi'(h\beta)+C_2[\beta]\varphi''(h\beta)\Big) \tag{14}$$

кўринишдаги оптимал квадратур формулалар коэффициентлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади

$$\overset{\circ}{C}_2[0]=\frac{1}{12h}\Big[-\frac{h^3}{6}+2ht(h-t)-t(h-t)(2t-h)\ln\frac{|h-t|}{t}\Big],\quad \beta=1,2,...,N-1,$$

$$\overset{\circ}{C}_2[\beta]=\frac{1}{6h}\Big[2h^2(t-h\beta)+\Big(2(t-h\beta)^3+h^2(t-h\beta)\Big)\ln|t-h\beta|-$$
$$-\Big((t-h(\beta+1))^3+\frac{h^2}{2}(t-h(\beta+1))+\frac{3h}{2}(t-h(\beta+1))^2\Big)\ln|h(\beta+1)-t|-$$
$$-\Big((t-h(\beta-1))^3+\frac{h^2}{2}(t-h(\beta-1))-\frac{3h}{2}(t-h(\beta-1))^2\Big)\ln|h(\beta-1)-t|\Big],$$

$$\overset{\circ}{C}_2[N]=\frac{1}{12h}\Big[\frac{h^3}{6}-2h^2+2h+2h^2t+2ht^2-4ht+(t-1)(t-1+h)(2(t-1)+h)\ln\frac{1-t}{|1-h-t|}\Big],$$

бу ерда $\overset{\circ}{C}_0[\beta]$ ва $\overset{\circ}{C}_1[\beta]$, $\beta=0,1,...,N$ коэффициентлар мос равишда теорема 4 ва 5 ларда аниқланган.

Бундан ташқари, учинси бобнинг охирида ушбу бўлимнинг назарий натижаларини тасдиқловчи сонли натижалар келтирилган.

Диссертациянинг **«Вазнли сингуляр интеграллар учун оптимал квадратур формулалар»** деб номланувчи тўртинчи боби Коши типидаги вазнли сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар қуришга бағишланган.

Маълумки, математик физиканинг, аэродинамиканинг, электродинамиканинг, эластиклик назариясининг ва табиий фанларнинг бошқа соҳаларини турли масалалари ўрганилганида сингуляр интеграл тенгламаларга келтирилади. Шу билан бирга текисликдаги масалалар қуйидаги характеристик сингуляр интеграл тенгламани ечишга олиб келинади

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)dx}{x-t}=f(t),\ \ t\in(-1,1)$$

уларнинг ечимлари $\int_{-1}^{1}\omega_i(x)\frac{\varphi(x)}{x-t}dx$ вазнли сингуляр интеграллар билан ифодаланади, бу ерда $i=1,2,3,4$ ва $\omega_1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $\omega_2(x)=(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $\omega_3(x)=\omega_2^{-1}(x)$, $\omega_4(x)=\omega_1^{-1}(x)$.

Шунга асосан ушбу

$$\int_{-1}^{1}\omega_i(x)\frac{\varphi(x)}{x-t}dx\cong\sum_{\beta=0}^{N}C^{(i)}[\beta]\varphi([\beta]-1). \qquad (15)$$

квадратур формулани қараймиз, бу ерда $\varphi(x)$ - интегралланувчи функция, $C^{(i)}[\beta]$ - коэффициентлар ва $[\beta]-1=h\beta-1$ - (15) квадратур формуланинг тугун нуқталари, $h=1/N$, N - натурал сон. Фараз қилайлик, φ функциялар Соболевнинг $L_2^{(m)}(-1,1)$ фазосига тегишли.

Шу билан бирга $L_2^{(2)}(-1,1)$ фазосида Сард маъносидаги (15) кўринишдаги оптимал квадратур формула қуриш масаласи қаралган. Олдинги бўлимлардагига ўхшаш (15) кўринишдаги оптимал квадратур формуланинг $C^{(i)}[\beta]$ коэффициентлари учун чизиқли тенгламалар системаси келтириб чиқарилган. d^4/dx^4 дифференциал операторнинг дискрет аналогидан фойдаланиб 4 бўлимнинг қуйидаги асосий натижасига эга бўламиз.

Теорема 5. $L_2^{(2)}(-1,1)$ фазосида (15) кўринишдаги квадратур формулалар орасида ягона оптимал квадратур формула мавжуд ва унинг коэффициентлари қуйидагича аниқланади

$$\overset{\circ}{C}{}^{(i)}[0]\ =\ \frac{6}{h^3}\Bigg[\frac{g_0^{(i)}}{12}h^3+a_1^{(i)-}h(q+1)+f^{(i)}(-1,t)(3q+2)-f^{(i)}(h-1,t)\times$$

$$\times(12q+5)+q^N\Bigg(-3f^{(i)}(1,t)(q+1)-a_1^{(i)+}h(q+2)-\frac{g_0^{(i)}}{4}h^2+$$

$$+\frac{g_1^{(i)}}{4}(h^2+4h(q+2))\Bigg)+6(q+2)\sum_{\gamma=2}^{N}q^{\gamma}f^{(i)}(h\gamma-1,t)\Bigg],$$

$$\overset{\circ}{C}^{(i)}[\beta] = \frac{6}{h^3}\Bigg[6(q+2)\sum_{\gamma=0}^{\beta-2} q^{\beta-\gamma} f^{(i)}(h\gamma-1,t)+(6q+4)f^{(i)}(h\beta-1,t)-$$

$$-(12q+5)\left(f^{(i)}(h(\beta-1)-1,t)+f^{(i)}(h(\beta+1)-1,t)\right)+$$

$$6(q+2)\sum_{\gamma=\beta+2}^{N} q^{\gamma-\beta} f^{(i)}(h\gamma-1,t)+q^{\beta}\left(-\frac{g_1^{(i)}+g_0^{(i)}}{4}h^2+a_1^{(i)-}\times\right.$$

$$\left.\times h(q+2)-3(q+1)f^{(i)}(-1,t)\right)-q^{N-\beta}\left(3(q+1)f^{(i)}(1,t)+a_1^{(i)+}\times\right.$$

$$\left.\left.\times h(q+2)+\frac{g_0^{(i)}}{4}h^2-\frac{g_1^{(i)}}{4}(4h(q+2)+h^2)\right)\right],\ \beta=\overline{1,N-1},$$

$$\overset{\circ}{C}^{(i)}[N] = \frac{6}{h^3}\Bigg[6(q+2)\sum_{\gamma=0}^{N-2} q^{N-\gamma} f^{(i)}(h\gamma-1,t)-f^{(i)}(1-h,t)(12q+5)+$$

$$+f^{(i)}(1,t)(3q+2)+\frac{g_0^{(i)}}{12}h^3+h(q+1)(g_1^{(i)}-a_1^{(i)+})+$$

$$\left.+q^N\left(-\frac{g_1^{(i)}+g_0^{(i)}}{4}h^2+a_1^{(i)-}h(q+2)-3(q+1)f^{(i)}(-1,t)\right)\right].$$

бу ерда q, $g_0^{(i)}$, $f^{(i)}(x,t)$ - маълум катталиклар, $i=1,2,3,4$.

ХУЛОСА

Диссертация иши Соболевнинг дифференциалланувчи функциялари фазоларида Коши типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун Сард маъносидаги оптимал квадратур формулалар қуришга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат.

1. Соболевнинг $L_2^{(m)}(-1,1)$ фазосида Коши типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун Сард маъносидаги оптимал квадратур формулалар қурилган.
2. Соболевнинг $L_2^{(m)}(-1,1)$ фазосида Коши ядроли сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формуланинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.
3. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазода Коши типидаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун ҳосилали оптимал квадратур формула қуришнинг янги алгоритми таклиф қилинган.
4. $m=1,2$ ва 3 бўлган ҳолларида Коши ядроли сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун ҳосилали оптимал квадратур формулалар коэффициентларининг ошкор формулалари олинган.
5. $L_2^{(2)}(-1,1)$ фазосида Коши типидаги вазнли сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблайдиган оптимал квадратур формулалар қурилган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017/FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

АХМЕДОВ ДИЛШОД МАШРАБОВИЧ

ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент-2018

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.2.PhD/FM56.

Диссертация выполнена в Институте математики им. В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный консультант:	**Шадиметов Холматвай Махкамбаевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Алоев Рахматилло Джураевич** доктор физико-математических наук
	Баротов Адизжон Садиевич кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Университет мировой экономики и дипломатии**

Защита диссертации состоится «____» _____________2018 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017/FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С докторской диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2018 года.
(протокол рассылки № 2 от «4» мая 2018 года).

А.Р. Марахимов
Председатель Научного совета по присуждению научных степеней, д.т.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

З.Х. Юлдашев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Решения проблем, возникающих в результате многих научно-прикладных исследований, проводимых на мировом уровне, приводят к сингулярным интегральным уравнениям. При этом усилия ряда математиков и механиков были направлены на разработку приближенных методов решения сингулярных интегральных уравнений. Эти методы основываются на построении кубатурных и интерполяционных формул. При построении численных методов решения сингулярных интегральных уравнений ученые исследовали следующую проблему. Сингулярный интеграл, в обычном смысле расходящийся, трактуется в смысле главного значения по Коши. Поэтому разрабатывались эффективные методы приближенного решения таких уравнений. Разработка новых алгоритмов построения оптимальных формул для приближенного решения сингулярных интегральных уравнений, а также оценка их погрешностей в различных классах функций являются одной из важных задач вычислительной математики.

В настоящее время в мире одной из важнейших задач вычислительной математики является построение оптимальных квадратурных формул в различных пространств дифференцируемых функций для приближенного вычисления сингулярных интегралов с ядрами Коши и Гильберта. Следует отметить, что эта задача имеет тесную связь с приближенно-аналитическим решением характеристического сингулярного интегрального уравнения. В этой связи: построение асимптотически оптимальных, оптимальных по порядку и оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления сингулярных интегралов, а также оценки их погрешностей в различных гильбертовых и банаховых пространствах считаются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране большое внимание уделяется направлениям, имеющим фундаментальное и прикладное значение, в частности, в теории квадратурных формул вычислительной математики особое внимание было уделено построению квадратурных формул для приближенно-аналитического решения характеристических сингулярных интегральных уравнений. Значительные результаты были достигнуты по построению квадратурных формул, основанных на методах дискретных вихрей и сплайн-функций, а также по построению оптимальных квадратурных формул в пространствах Соболева для приближенного вычисления сингулярных интегралов типа Коши и Гильберта. Проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук на уровне международных стандартов по алгебре и математическому анализу, теории динамических систем, прикладной математики и математическому моделированию[2] является одной из основных задач. Развитие теории

[2] Постановление Кабинета Минстров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления сингулярных интегралов и оценка их погрешностей в различных пространствах дифференцируемых функций играют важную роль в исполнении постановления.

Настоящая диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-916 «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий в производство» от 15 июля 2008 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 8 февраля 2017 года, а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Широкое применение в теории упругости, аэродинамике, теории автоматического управления, теории оболочек, электродинамике и квантовой механике находят сингулярные интегралы типа Коши. Приближенными методами вычисления интегралов являются квадратурные и кубатурные формулы. Имеются алгебраический, вероятностный, теоретико-числовой и функциональный подходы построения формул численного интегрирования.Из наиболее широко используемых методов вычисления сингулярных интегралов типа Коши являются замена подынтегральной функции более простыми функциями и использование квадратурных формул. В качестве результатов по этому направлению можно упомянуть статьи Г.Н.Салихова, Р.Джуракулова, М.И.Исраилова, С.М.Исраилова, Д.Г.Саникидзе, М.А.Шешко, K.Atkinson, G.Criscuolo, G.Mastroianni, K.Diethelm, D.Elliott, D.F.Baget, W.Gautschi, N.A.Gori, E.Santi, D.B.Hunter, N.I. Ioakimiadis, G.Monegato, Ph.Rabinowitz и других.

Разработка метода дискретных вихрей, предложенного С.М.Белоцерковским на основе эвристических соображений для приближенного вычисления сингулярных интегралов, математическая теория и обоснование, а также широкое применение этого метода представлены в работах С.М.Белоцерковского и И.К.Лифанова. Модифицированному методу дискретных вихрей и его применению посвящены работы М.И.Исроилова, З.К.Эшкуватова и др.

В работах И.В.Бойкова, В.В.Иванова, А.К.Руденко, Б.Г.Габдулхаева построены оптимальные по порядку квадратурные формулы для вычисления интегралов типа Коши. В работах М.И.Исраилова и Х.М.Шадиметова построены оптмальные квадратурные формулы для приближенного вычисления сингулярных интегралов типа Коши в пространстве Соболева $L_2^{(1)}(-1,1)$.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Ф4-ФА-Ф013 «Неассоциативные и операторные алгебры, динамические системы и их приложения в статистической физике и популяционной биологии» (2012-2016), ОТ-Ф4-86 «Разработка оптимальных методов для приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений в гильбертовых пространствах» Института математики АН РУз.

Целью исследования является построение оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления сингулярного интеграла с ядром Коши и весовых оптимальных квадратурных формул для приближенно-аналитического решения характеритического сингулярного интегрального уравнения в пространствах Соболева.

Задачи исследования:

вычисление нормы функционала погрешности квадратурных формул для приближенного вычисления сингулярного интеграла типа Коши в пространстве Соболева;

доказательства существования и единственности оптимальных квадратурных формул для вычисления сингулярных интегралов типа Коши;

нахождение явных формул коэффициентов оптимальных квадратурных формул для приближенного интегрирования сингулярных интегралов с ядром Коши в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(-1,1)$;

построение оптимальных квадратурных формул с производными для вычисления сингулярных интегралов с ядром Коши в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$;

получение приближенно-аналитических решений характеристического сингулярного интегрального уравнения с помощью весовых оптимальных квадратурных формул в пространстве $L_2^{(2)}(-1,1)$;

Объект исследования - сингулярные интегральные уравнения, квадратурные формулы для приближенного вычисления сингулярных интегралов, нормы функционалов погрешностей квадратурных формул.

Предмет исследования - характеристические сингулярные интегральные уравнения, оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления сингулярных интегралов типа Коши, весовые оптимальние квадратурные формулы и оптимальные квадратурные формулы с производными.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории квадратурных формул, вычислительной математики, функционального анализа, теории функций дискретного аргумента.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

вычислены квадраты норм функционалов погрешностей квадратурных формул для приближенного вычисления сингулярных интегралов с ядром Коши и весовых сингулярных интегралов в пространствах $L_2^{(m)}(-1,1)$ и $L_2^{(2)}(-1,1)$, соответственно;

доказаны существование и единственность оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления сингулярных интегралов типа Коши в пространстве $L_2^{(m)}(-1,1)$;

получены аналитические формулы оптимальных коэффициентов квадратурных формул для приближенного интегрирования сингулярного интеграла с ядром Коши;

разработан алгоритм построения оптимальных квадратурных формул с производными и этот алгоритм реализован для вычисления сингулярного интеграла с ядром Коши;

построены оптимальные квадратурные формулы для нахождения приближенно-аналитических решений характеристических сингулярных интегральных уравнений.

Практические результаты исследования. Созданы программы на языке программирования Maple для приближенного вычисления сингулярных интегралов на основе построенных оптимальных квадратурных формул.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием теории квадратурных формул, методов вычислительной математики, функционального анализа, теории функций дискретного аргумента, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что в пространствах Соболева создан алгоритм построения оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления сингулярных интегралов с ядром Коши.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что построенные оптимальные квадратурные формулы служат для численного вычисления сингулярных интегралов типа Коши, а также для приближенного решения характеричтических сингулярных интегральных уравнений.

Внедрение результатов исследования.

Оптимальные квадратурные формулы с производными для приближенного вычисления сингулярных интегралов с ядром Коши использованы в исследованиях гранта под номером А-13-3 “Модернизация приборов возобнавляемых источников и исследования моделирования процессов в них” для оптимального приближения решений математических моделей описывающие тепловые процессы в солнечных теплицах (Министерство высшего и среднего специального образования, справка №89-03-1447 от 16 апреля 2018 года). Применение этих научных результатов позволили определить оптимальные значения геометрических размеров этих теплиц;

Оптимальные квадратурные формулы построенные для приближенного вычисления сингулярных интегралов типа Коши в пространствах Соболева $L_2^{(2)}$ и $L_2^{(3)}$ использованы в исследованиях фундаментального гранта под номером Ф-4-14 “Развитие теории исследования состояний деформации напряжения под воздействием внешных сил подземной криволинейной трубы и разработка вычислительных методов” для нахождения приближенных решений дифференциаль-ных уравнений описывающие математические модели теории свободных и вынужденных колебаний тонко слойных криволинейных тороидальных оболочек, которые жидкость течет внутри (Министерство высшего и среднего специального образования, справка №89-03-1575 от 30 апреля 2018 года). Применение этих научных результатов позволили предварительно оценить напряженно-деформационные положения криволинейных участках торои-далных оболочек.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 4 научно-практических конференциях, в том числе на 2 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 14 научных работ, из них 9 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе из них 2 опубликованы в зарубежных журналах и 7 в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 93 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **«Сингулярный интеграл типа Коши и методы приближенного вычисления сингулярных интегралов»**, носит вводный характер.

В первом параграфе этой главы обсуждаются некоторые важные проблемы математической физики, аэродинамики, электродинамики, теории упругости, которые приводятся к характристическим сингулярным интегралам типа Коши. Подчеркивается, что решения таких уравнений выражаются с помощью сингулярных интегралов типа Коши. Далее, подробно описывается функциональная постановка задач построения оптимальных, асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку квадратурных формул в банаховых пространствах. Далее, в параграфе 1.2 даются определения некоторых часто рассматриваемых банаховых пространств. А параграф 1.3 посвящен обсуждению известных результатов по приближенному вычислению сингулярных интегралов.

В четвертом параграфе первой главы даются определения и формулы, которые требуются при доказательстве основных результатов диссертации. В частности, даётся понятие функций дискретного аргумента и действия над ними.

Во второй главе диссертации, названной **«Оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления сингулярных интегралов типа Коши в пространстве** $L_2^{(m)}(-1,1)$**»**, решена задача построения оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда для приближенного вычисления сингулярных интегралов типа Коши в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(-1,1)$.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{x-t}dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(x_\beta) \qquad (1)$$

и соответственно ее функционал погрешности

$$\ell(x) = \frac{\varepsilon_{[-1,1]}(x)}{x-t} - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\delta(x-x_\beta), \qquad (2)$$

где $-1<t<1$, $C[\beta]$ - коэффициенты, x_β $(\in[-1,1])$ – узлы квадратурной формулы (1), N – натуральное число, $\varepsilon_{[-1,1]}(x)$ – характеристическая функция отрезка $[-1,1]$, δ – дельта-функция Дирака, φ – функция из пространства $L_2^{(m)}(-1,1)$. Здесь $L_2^{(m)}(-1,1)$ – это пространство Соболева функций, m-ое обобщенное производное интегрируемое с квадратом и снабженное нормой

$$\left\|\varphi \mid L_2^{(m)}(-1,1)\right\| = \left\{\int_{-1}^{1}(\varphi^{(m)}(x))^2 dx\right\}^{1/2}.$$

Для того, чтобы функционал (2) был определен на пространстве $L_2^{(m)}(-1,1)$, необходимо наложение следующих условий

$$(\ell, x^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0,1,2,...,m-1. \qquad (3)$$

Отсюда ясно, что для существования квадратурных формул вида (1) должно выполняться условие $N \ge m-1$.

В данном случае погрешность формулы (1) имеет вид

$$\left(\ell,\varphi\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\varphi(x)dx = \int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{x-t}dx - \sum_{\beta=0}^{N}C[\beta]\varphi(x_\beta). \qquad (4)$$

На основе неравенства Коши-Шварца

$$\left|\left(\ell,\varphi\right)\right| \le \left\|\varphi \mid L_2^{(m)}\right\| \cdot \left\|\ell \mid L_2^{(m)*}\right\|$$

оценка погрешности (4) формулы (1) на функциях пространства $L_2^{(m)}(-1,1)$ приводится к вычислению нормы функционала погрешности ℓ в сопряженном пространстве $L_2^{(m)*}(-1,1)$.

Минимизация нормы функционала погрешности ℓ по коэффициентам при фиксированных узлах называется задачей Сарда и полеченная формула называется оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда. Впервые эта задача исследована А.Сардом.

Основной целью настоящей главы является построение оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда вида (1) в пространстве $L_2^{(m)}(-1,1)$ для приближенного интегрирования сингулярного интеграла типа Коши. Эта значит, что требуется найти коэффициенты $C[\beta]$, которые удовлетворяют равенству

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \mid L_2^{(m)*} \right\| = \inf_{C[\beta]} \left\| \ell \mid L_2^{(m)*} \right\|. \tag{5}$$

Таким образом, чтобы построить оптимальные квадратурные формулы вида (1) в смысле Сарда мы должны последовательно решить следующие задачи.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности (2) квадратурной формулы (1) в пространстве $L_2^{(m)*}(-1,1)$.

Задача 2. Найти коэффициенты $C[\beta]$ удовлетворяющие равенству (5).

Чтобы решить задачу 1, т.е. для нахождения нормы функционала погрешности (2) в пространстве $L_2^{(m)}(-1,1)$ используется экстремальная функция функционала погрешности ℓ, которая удовлетворяет равенству

$$(\ell,\psi_\ell) = \left\| \ell \mid L_2^{(m)*} \right\| \left\| \psi_\ell \mid L_2^{(m)*} \right\|.$$

В пространстве $L_2^{(m)}$ экстремальная функция $\psi_\ell(x)$ функционала ℓ найдена С.Л.Соболевым. Она имеет вид

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x), \tag{6}$$

где

$$G_m(x) = \frac{|x|^{2m-1}}{2\cdot(2m-1)!},$$

$P_{m-1}(x)$ - многочлен степени $m-1$, и * - операция свертки.

Известно, что для любого линейного функционала ℓ в $L_2^{(m)*}$ имеет место следующее равенство

$$\left\| \ell \mid L_2^{(m)*} \right\|^2 = (\ell,\psi_\ell) = (\ell(x), (-1)^m \ell(x) * G_m(x)) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \left((-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \ell(y) G_m(x-y)\,dy \right) dx.$$

Применяя это равенство к функционалу погрешности (2), и имея в виду (6), получим следующее

$$\|\ell\|^2 = (\ell,\psi_\ell) = (-1)^m \Big[\sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} C_\beta C_\gamma \frac{|x_\beta - x_\gamma|^{2m-1}}{2\cdot(2m-1)!} -$$
$$-2\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta] \int_{-1}^{1} \frac{|x-x_\beta|^{2m-1}}{2\cdot(2m-1)!\,(x-t)} dx + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{|x-y|^{2m-1}}{2(2m-1)!(x-t)(y-t)} dxdy \Big]. \tag{7}$$

Таким образом, задача 1 решена.

Далее, следующие параграфы второй главы диссертации посвящены решению задачи 2.

Квадрат нормы (7) функционала погрешности (2) является многопеременной квадратной функцией коэффициентов $C[\beta]$, $\beta = 0,1,...,N$ формулы (1) при фиксированных узлах x_β. Чтобы найти условный минимум по коэффициентам $C[\beta]$ выражения (7) при условиях (3), применяем метод неопределенных множителей Лагранжа. В результате получена система линейных уравнений относительно коэффициентов $C[\beta]$, $\beta = 0,1,...,N$. Далее, доказаны существование и единственность решения этой системы, а также показано, что решение этой системы дает минимум выражению (7).

В параграф 2.4 нами дается алгоритм решения системы, полученный в предыдущем параграфе, когда узлы x_β- равноотстоящие, т.е., при $x_\beta = h\beta - 1$, $h = \frac{2}{N}$, $N \geq m-1$. При этом мы использовали дискретный аналог дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m} и его свойства.

А в параграфе 2.5, используя выше приведенный алгоритм, нами получены явные формулы для коэффициентов оптимальных квадратурных формул вида (1) и доказана следующая

Теорема 1. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул (1), с равноотстоящими узлами в пространстве $L_2^{(m)}(-1,1)$, имеют следующий вид

$$\overset{\circ}{C}[0] = hp\left[Cf_m(0) + f_m(h) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} p_\alpha^- \cdot (-1-h)^\alpha + \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{(1+h)^{2m-1-\alpha} g_\alpha}{2\alpha!(2m-1-\alpha)!}\right] +$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k hp}{q_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^\gamma f_m(h\gamma) + M_k + q_k^N N_k\right],$$

$$\overset{\circ}{C}[\beta] = hp\big[f_m(h\beta - h) + Cf_m(h\beta) + f_m(h\beta + h)\big] +$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k hp}{q_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^{|\beta-\gamma|} f_m(h\gamma) + q_k^\beta M_k + q_k^{N-\beta} N_k\right], \quad \beta = 1,2,...,N-1,$$

$$\overset{\circ}{C}[N] = hp\left[Cf_m(2) + f_m(2-h) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} p_\alpha^+ \cdot (1+h)^\alpha + \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{(1+h)^{2m-1-\alpha}(-1)^\alpha g_\alpha}{2\alpha!(2m-1-\alpha)!}\right] +$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k hp}{q_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^{N-\gamma} f_m(h\gamma) + q_k^N M_k + N_k\right],$$

где M_k, N_k, p, C, A_k - известные величины, q_k - корни многочлена Эйлера-Фробениуса $E_{2m-2}(q)$, $|q_k| < 1$.

В частности, из теоермы 1 при $m = 1$ и $m = 2$ получены следующие результаты, которые очень удобны для применения.

Следствие 1. Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы (1) с равноотстоящими узлами в пространстве $L_2^{(1)}(-1,1)$ имеют следующий вид

$$\overset{\circ}{C}[0]=\frac{1}{h}\left[f_1(h)-f_1(0)+\frac{h}{2}g_0\right],$$

$$\overset{\circ}{C}[\beta]=\frac{1}{h}\left[(f_1(h\beta-h)-2f_1(h\beta)+f_1(h\beta+h))\right],\ \beta=1,2,...,N-1,$$

$$\overset{\circ}{C}[N]=\frac{1}{h}\left[f_1(2-h)-f_1(2)+\frac{h}{2}g_0\right],$$

где p_0, $f_1(h\beta)$ и g_0 -известные величины.

Следствие 2. Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы (1) с равноотстоящими узлами в пространстве $L_2^{(2)}(-1,1)$ имеют вид

$$\overset{\circ}{C}[0]=\frac{6}{h^3}\left[f_2(h)-7f_2(0)-p_1^-h+\frac{g_0}{12}(3h+3h^2+h^3)+\frac{g_1}{4}(2h+h^2)\right]$$
$$+\frac{36(1-q_1)}{h^3(1+q_1)}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}q_1^{\gamma}f_2(h\gamma)+M_1+q_1^NN_1\right],$$

$$\overset{\circ}{C}[\beta]=\frac{6}{h^3}\left[f_2(h(\beta-1))-8f_2(h\beta)+f_2(h(\beta+1))\right]$$
$$+\frac{36(1-q_1)}{h^3(1+q_1)}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}q_1^{|\beta-\gamma|}f_2(h\gamma)+q_1^{\beta}M_1+q_1^{N-\beta}N_1\right],\ \beta=1,2,...,N-1,$$

$$\overset{\circ}{C}[N]=\frac{6}{h^3}\left[f_2(2-h)-7f_2(2)+p_1^+h+\frac{g_0}{12}(3h+3h^2+h^3)-\frac{g_1}{4}(2h+h^2)\right]$$
$$+\frac{36(1-q_1)}{h^3(1+q_1)}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}q_1^{N-\gamma}f_2(h\gamma)+q_1^NM_1+N_1\right],$$

где M_1, N_1, $f_2(h\beta)$, q_1, g_0, g_1, - известные величины.

В шестом параграфе второй главы приведены численные результаты, показывающие преимущество оптимальных квадратурных формул, построенных в этой главе.

В третьей главе диссертации, названной **«Оптимальные квадратурные формулы с производными для сингулярных интегралов типа Коши»**, предложен новый метод построения оптимальных квадратурных формул с производными для приближенного интегрирования сингулярных интегралов типа Коши в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1\frac{\varphi(x)}{x-t}dx\cong\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{N}C_\alpha[\beta]\varphi^{(\alpha)}(x_\beta)\tag{8}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x)=\frac{\varepsilon_{[0,1]}(x)}{x-t}-\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{N}(-1)^\alpha C_\alpha[\beta]\delta^{(\alpha)}(x-x_\beta),\tag{9}$$

где $0<t<1$, $C_\alpha[\beta]$ - коэффициенты, x_β $(\in[0,1])$ - узлы, N - натуральное число, $n=\overline{0,m-1}$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - характеристическая функция интервала [0,1], δ - дельта-функция Дирака, φ - функция из пространства $L_2^{(m)}(0,1)$.

Чтобы построить оптимальные квадратурные формулы вида (8) в смысле Сарда, мы должны сначала найти норму $\left\| \ell \mid L_2^{(m)*} \right\|$ функционала погрешности (9) квадратурной формулы (8) в пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$, который даёт верхнюю оценку погрешности

$$\left(\ell,\varphi\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\varphi(x)dx\int_0^1\frac{\varphi(x)}{x-t}dx-\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{N}C_\alpha[\beta]\varphi^{(\alpha)}(x_\beta) \tag{10}$$

формулы (8). Потом минимизировать норму $\left\| \ell \mid L_2^{(m)*} \right\|$ функционала погрешности (9) по коэффициентам $C_\alpha[\beta]$.

В этой главе так же, как и во второй главе, используя экстремальную функцию (6) (теперь для функционала (9)), вычислен квадрат нормы функционала погрешности (9) нами получено следующее выражение

$$\left\|\ell\right\|^2=(-1)^m\Big[\sum_{k=0}^{n}\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\gamma=0}^{N}\sum_{\beta=0}^{N}(-1)^kC_k[\gamma]C_\alpha[\beta]\frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-1-\alpha-k}\operatorname{sgn}(h\beta-h\gamma)}{2(2m-1-\alpha-k)!}- \tag{11}$$

$$-2\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{N}(-1)^\alpha C_\alpha[\beta]\int_0^1\frac{(x-h\beta)^{2m-1-\alpha}\operatorname{sgn}(x-h\beta)}{2(2m-1-\alpha)!(x-t)}dx+\int_0^1\int_0^1\frac{(x-y)^{2m-1}\operatorname{sgn}(x-y)}{2(2m-1)!(x-t)(y-t)}dxdy\Big].$$

Необходимо отметить, что так как функционал (9) определен на пространстве, то он удовлетворяет услоям (3). Это значит, что построенные нами квадратурные формулы точны для многочленов степени $\le m-1$. Но минимизация выражения (11) по коэффициентам $C_\alpha[\beta],\ \ \alpha=\overline{0,n},\ \beta=\overline{0,N}$ - очень трудная задача. Поэтому здесь мы предлагаем последовательную минимизацию выражения для $\left\|\ell\right\|^2$ по $C_\alpha[\beta]$, т.е. сначала рассмотрим случай $m=1$ и выражение (11) квадрата нормы $\left\|\ell\right\|^2$ минимизируем по коэффициентам $C_0[\beta]$. Далее, мы рассмотрим случай $m=2$ и, используя полученные значения для $C_0[\beta]$, выражение (11) квадрата нормы $\left\|\ell\right\|^2$ минимизируем по коэффициентам $C_1[\beta]$. После этого в случае $m=3$, используя полученные значения коэффициентов $C_0[\beta]$ и $C_1[\beta]$, выражение (11) для $\left\|\ell\right\|^2$ минимизируем по коэффициентам $C_2[\beta]$ и так далее.

Следует отметить, что каждый раз при нахождении оптимальных коэффициентов здесь используется только дискретный аналог оператора d^2/dx^2, позволяющий получить явные формулы для оптимальных коэффициентов.

Реализовав выше посказанный процесс, мы получили следующие основные результаты третьей главы.

Теорема 2. В пространстве $L_2^{(1)}(0,1)$ при $t\neq h\beta$, $\beta=0,1,...,N$, $0<t<1$ коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида

$$\int_0^1\frac{\varphi(x)}{x-t}dx\cong\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]\varphi(h\beta) \tag{12}$$

определяются следующими формулами

$$\overset{\circ}{C}_0[0]=\frac{1}{h}\left[(h-t)\ln\frac{|h-t|}{t}-h\right],$$

$$\overset{\circ}{C}_0[\beta]=\frac{1}{h}\left[(h(\beta+1)-t)\ln\frac{|h(\beta+1)-t|}{|h\beta-t|}+(h(\beta-1)-t)\ln\frac{|h(\beta-1)-t|}{|h\beta-t|}\right],$$

$$\beta=1,2,...,N-1,$$

$$\overset{\circ}{C}_0[N]=\frac{1}{h}\left[(t-h(N-1))\ln\frac{1-t}{|h(N-1)-t|}+h\right].$$

Теорема 3. В пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ при $t\neq h\beta$, $\beta=0,1,...,N$, $0<t<1$ коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида

$$\int_0^1\frac{\varphi(x)}{x-t}dx\cong\sum_{\beta=0}^{N}\left(C_0[\beta]\varphi(h\beta)+C_1[\beta]\varphi'(h\beta)\right) \tag{13}$$

определяются следующими формулами

$$\overset{\circ}{C}_1[0]=\frac{1}{2h}\left[t(h-t)\ln\frac{|h-t|}{t}+\frac{h}{2}(h-2t)\right],$$

$$\overset{\circ}{C}_1[\beta]=\frac{1}{2h}\left[h(h(\beta+1)-t)\ln\frac{|h(\beta+1)-t|}{|h\beta-t|}-h(h(\beta-1)-t)\ln\frac{|h(\beta-1)-t|}{|h\beta-t|}-\right.$$

$$\left.-(h(\beta+1)-t)^2\ln\frac{|h(\beta+1)-t|}{|h\beta-t|}-(h(\beta-1)-t)^2\ln\frac{|h(\beta-1)-t|}{|h\beta-t|}+h^2\right],$$

$$\beta=1,2,...,N-1,$$

$$\overset{\circ}{C}_1[N]=\frac{1}{2h}\left[(t-1)(t-1+h)\ln\frac{1-t}{|1-h-t|}+\frac{1}{2}(h^2-2h(1-t))\right].$$

При этом коэффициенты $\overset{\circ}{C}_0[\beta]$, $\beta=0,1,...,N$ определены в теореме 4.

Теорема 4. В пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$ при $t\neq h\beta$, $\beta=0,1,2,...,N$, $0<t<1$, коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида

$$\int_0^1\frac{\varphi(x)}{x-t}dx\cong\sum_{\beta=0}^{N}\left(C_0[\beta]\varphi(h\beta)+C_1[\beta]\varphi'(h\beta)+C_2[\beta]\varphi''(h\beta)\right) \tag{14}$$

имеют вид

$$\overset{\circ}{C}_2[0]=\frac{1}{12h}\left[-\frac{h^3}{6}+2ht(h-t)-t(h-t)(2t-h)\ln\frac{|h-t|}{t}\right],$$

$$\overset{\circ}{C}_2[\beta]=\frac{1}{6h}\left[2h^2(t-h\beta)+\left(2(t-h\beta)^3+h^2(t-h\beta)\right)\ln|t-h\beta|-\right.$$

$$-\left((t-h(\beta+1))^3+\frac{h^2}{2}(t-h(\beta+1))+\frac{3h}{2}(t-h(\beta+1))^2\right)\ln|h(\beta+1)-t|-$$

$$\left.-\left((t-h(\beta-1))^3+\frac{h^2}{2}(t-h(\beta-1))-\frac{3h}{2}(t-h(\beta-1))^2\right)\ln|h(\beta-1)-t|\right],$$

$$\beta=1,2,...,N-1,$$

$$\overset{\circ}{C}_2[N]=\frac{1}{12h}\Big[\frac{h^3}{6}-2h^2+2h+2h^2t+2ht^2-4ht+(t-1)(t-1+h)(2(t-1)+h)\ln\frac{1-t}{|1-h-t|}\Big],$$

где оптимальные коэффициенты $\overset{\circ}{C}_0[\beta]$ и $\overset{\circ}{C}_1[\beta]$, $\beta=0,1,...,N$ определены соответственно в теоремах 4 и 5.

Далее, в конце третьей главы приведены численные результаты, подтверждающие теоретические результаты данной главы.

Четвертая глава диссертации, названная **«Оптимальные квадратурные формулы для весовых сингулярных интегралов»**, посвящена построению оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления весовых сингулярных интегралов типа Коши.

Известно, что изучение различных задач математической физики, а также конкретных задач из аэродинамики, электродинамики, теории упругости и других областей естественным образом сводится к сингулярным интегральным уравнениям. При этом плоские задачи сводятся к решению характеристического сингулярного интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)dx}{x-t}=f(t),\ \ t\in(-1,1),$$

которые выражаются с помощью весовых сингулярных интегралов

$\int_{-1}^{1}\omega_i(x)\frac{\varphi(x)}{x-t}dx$, где $i=1,2,3,4$ и $\omega_1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $\omega_2(x)=(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $\omega_3(x)=\omega_2^{-1}(x),\ \omega_4(x)=\omega_1^{-1}(x)$.

В связи с этим рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1}\omega_i(x)\frac{\varphi(x)}{x-t}dx\cong\sum_{\beta=0}^{N}C^{(i)}[\beta]\varphi([\beta]-1). \tag{15}$$

Здесь $\varphi(x)$ - подынтегральная функция, $C^{(i)}[\beta]$ - коэффициенты и $[\beta]-1=h\beta-1$ - узлы квадратурной формулы (15), $h=1/N$, N - натуральное число. Предположим, что функции φ - из пространства Соболева $L_2^{(m)}(-1,1)$.

Далее, здесь нами исследована задача построения оптимальных квадратурных формул вида (15) в смысле Сарда в пространстве $L_2^{(2)}(-1,1)$. Как и в предыдущих главах, для коэффициенов $C^{(i)}[\beta]$ оптимальных квадратурных формул вида (15) получены системы линейных уравнений. Эти системы решены, используя дискретный аналог дифференциального оператора d^4/dx^4, и получен следующий основной результат четвертой главы.

Теорема 5. Среди всех квадратурных формул вида (15) в пространстве $L_2^{(2)}(-1,1)$ существуют единственная оптимальная квадратурная формула и ее коэффициенты определяются равенствами

$$\overset{\circ}{C}{}^{(i)}[0] = \frac{6}{h^3}\left[\frac{g_0^{(i)}}{12}h^3 + a_1^{(i)-}h(q+1) + f^{(i)}(-1,t)(3q+2) - f^{(i)}(h-1,t)\times\right.$$

$$\times(12q+5) + q^N\left(-3f^{(i)}(1,t)(q+1) - a_1^{(i)+}h(q+2) - \frac{g_0^{(i)}}{4}h^2 +\right.$$

$$\left.\left.+\frac{g_1^{(i)}}{4}(h^2+4h(q+2))\right) + 6(q+2)\sum_{\gamma=2}^{N}q^{\gamma} f^{(i)}(h\gamma-1,t)\right],$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(i)}[\beta] = \frac{6}{h^3}\left[6(q+2)\sum_{\gamma=0}^{\beta-2}q^{\beta-\gamma} f^{(i)}(h\gamma-1,t) + (6q+4)f^{(i)}(h\beta-1,t) -\right.$$

$$-(12q+5)\left(f^{(i)}(h(\beta-1)-1,t) + f^{(i)}(h(\beta+1)-1,t)\right) +$$

$$6(q+2)\sum_{\gamma=\beta+2}^{N}q^{\gamma-\beta} f^{(i)}(h\gamma-1,t) + q^{\beta}\left(-\frac{g_1^{(i)}+g_0^{(i)}}{4}h^2 + a_1^{(i)-}\times\right.$$

$$\left.\times h(q+2) - 3(q+1)f^{(i)}(-1,t)\right) - q^{N-\beta}\left(3(q+1)f^{(i)}(1,t) + a_1^{(i)+}\times\right.$$

$$\left.\left.\times h(q+2) + \frac{g_0^{(i)}}{4}h^2 - \frac{g_1^{(i)}}{4}(4h(q+2)+h^2)\right)\right],\ \beta = \overline{1, N-1},$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(i)}[N] = \frac{6}{h^3}\left[6(q+2)\sum_{\gamma=0}^{N-2}q^{N-\gamma} f^{(i)}(h\gamma-1,t) - f^{(i)}(1-h,t)(12q+5) +\right.$$

$$+f^{(i)}(1,t)(3q+2) + \frac{g_0^{(i)}}{12}h^3 + h(q+1)(g_1^{(i)} - a_1^{(i)+}) +$$

$$\left.+q^N\left(-\frac{g_1^{(i)}+g_0^{(i)}}{4}h^2 + a_1^{(i)-}h(q+2) - 3(q+1)f^{(i)}(-1,t)\right)\right].$$

где q, $g_0^{(i)}, f^{(i)}(x,t)$ - известные величины, $i = 1,2,3,4$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена построению оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда для приближенного вычисления сингулярных интегралов типа Коши в пространствах Соболева дифференцируемых функций.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

1. Построены оптимальные квадратурные формулы в смысле Сарда для прибдлиженного вычисления сингулярных интегралов типа Коши в пространстве Соболева $L_2^{(\mathrm{m})}(-1,1)$.
2. Доказаны существование и единственность оптимальной квадратурной формулы для приближенного вычисления сингулярных интегралов с ядром Коши в пространстве Соболева $L_2^{(\mathrm{m})}(-1,1)$.
3. Предложен новый алгоритм построения оптимальных квадратурных формул с производными для приближенного интегрирования сингулярных интегралов типа Коши в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.
4. Получены явные формулы коэффициентов оптимальных квадратурных формул с производними для приближенного вычисления сингулярного интеграла с ядром Коши в случаях $m=1,2$ и 3.
5. Построены оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления весовых сингулярных интегралов типа Коши в пространстве $L_2^{(2)}(-1,1)$.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.02 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

INSTITUTE OF MATHEMATICS

AKHMEDOV DILSHOD MASHRABOVICH

OPTIMAL FORMULAS OF NUMERICAL INTEGRATION FOR SINGULAR INTEGRALS IN SOBOLEV SPACES

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2018

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.2.PhD/FM56.

Dissertation has been prepared at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website http://ik-fizmat.nuu.uz/ and the «ZiyoNet» Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific superviser:	**Shadimetov Kholmat Makhkambaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Aloev Rakhmatillo Djuraevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Barotov Adizjon Sadievich Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**University of World Economy and Diplomacy**

Defense will take place «____» _____________2018 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.27.06.2017.FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2018 year
(Mailing report № 2 on «4» may 2018 year)

A.R.Marakhimov
Chairman of Scientific Council on award
of scientific degrees, D.T.S., Professor

Z.R.Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.M.S.

Z.H.Yuldashev
Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific
degrees, D.F.M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The urgency and relevance of the dissertation topic.

At the present time, in the world, construction of optimal quadrature formulas in different spaces of differentiable functions for numerical calculation of singular integrals with Cauchy and Hilbert kernels is one of the important problems of computational mathematics. It should be noted that this problem is closely connected with approximate analytic solutions of the characteristic singular integral equation. In connection with this construction of asymptotic optimal, optimal in order and optimal quadrature formulas for numerical calculation of singular integrals and estimations their errors in different Hilbert and Banach spaces are targeted scientific researches. Investigations conducted by the above mentioned scientific research directions confirm actuality of the theme of the thesis.

The aim of the research work is to construct optimal quadrature formulas for approximate calculation of the singular integral with Cauchy kernel and weight optimal quadrature formulas for approximate analytic solution of the characteristic singular integral equation in the Sobolev space.

The tasks of the research work:

to calculate the norm of the error functional of quadrature formulas for approximate calculation of the Cauchy type singular integral in the Sobolev space;

to prove existence and uniqueness of optimal quadrature formulas for calculation of the Cauchy type singular integral;

to find explicit formulas for coefficients of optimal quadrature formulas for numerical integration singular integrals with Cauchy kernel in the Sobolev space $L_2^{(m)}(-1,1)$;

to construct optimal quadrature formulas with derivativesfor calculation of singular integrals with Cauchy kernel in the space $L_2^{(m)}(0,1)$;

to get and approximate analytic solution of the characteristic singular integral equation with the help of weight optimal quadrature formulas in the space $L_2^{(2)}$;

The object of the research work is singular integral equations, quadrature formulas for numerical calculation of singular integrals, norms of error functionals of quadrature formulas.

The scientific novelty of the research work is as follows:

square of the norms of the error functionals of quadrature formulas for numerical calculation of singular integrals with Cauchy kernel and of weight singular integrals in the spaces $L_2^{(m)}(-1,1)$ and $L_2^{(2)}(-1,1)$ are calculated;

existence and uniqueness of the optimal quadrature formulas for numerical calculation of the Cauchy type singular integrals are proved in the space $L_2^{(m)}$;

the analytic formulas optimal coefficients of quadrature formulas for approximate integration of the singular integral with Cauchy kernel are obtained;

the optimal quadrature formulas for finding approximate analytic solutions of the characteristic singular integral equations are constructed.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Ахмедов Д.М. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул для сингулярных интегралов типа Коши// Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2010. -№ 4. -С.21-30. (01.00.00,№6).
2. Ахмедов Д.М. Вычисление коэффициентов оптимальных квадратурных формул для сингулярного интеграла типа Коши в пространстве Соболева $L_2^{(2)}(0,1)$.// Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2011. -№2. -С.48-56. (01.00.00,№6).
3. Шадиметов Х.М., Ахмедов Д.М. Построение оптимальных квадратурных формул для вычисления сингулярных интегралов с конкретными весовыми функциями в пространстве Соболева $L_2^{(2)}(-1,1)$.// Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2011. -№4. -С.203-210. (01.00.00,№6).
4. Ахмедов Д.М. Оптимальные квадратурные формулы типа Эрмита для сингулярных интегралов пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$.//Узбекский математический журнал, Ташкент, 2012, № 2, - С.18-27. (01.00.00,№6).
5. Ахмедов Д.М. Оптимальные квадратурные формулы типа Эрмита для вычисления сингулярных интегралов с конкретными весовыми функциями.// Узбекский математический журнал, Ташкент, 2012, № 3, - С. 31-42. (01.00.00,№6).
6. Ахмедов Д.М. Оптимальные квадратурные формулы типа Эрмита для вычисления сингулярных интегралов в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$. //Узбекский математический журнал, Ташкент, 2013, № 3, - С. 13-21. (01.00.00,№6).
7. Ахмедов Д.М. О численном интегрирование сингулярных интегралов типа Коши. Узбекский математический журнал, Ташкент, 2014, № 2, - С 13-21. (01.00.00,№6).
8. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Akhmedov D.M. Optimal quadrature formulas for the Cauchy type Singular Integral in the Sobolev space. Applied Mathematics and Computation, 2015, vol. 263, -Pp. 302-314 (Scopus. IF=1.738, №3).
9. Akhmedov D.M., Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Optimal quadrature formulas with derivatives for Cauchy type singular integrals. Applied Mathematics and Computation, 2018, vol. 317, -Pp. 150-159 (Scopus. IF=1.738, №3).

II бўлим (Часть II; Part II)

10. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Akhmedov D.M. Optimal quadrature formulas for the Cauchy type singular integral in the Sobolev space $L_2^{(2)}(-1,1)$. American Journal of Numerical Analysis, Science and Education Publishing, Vol.1, no1, (2013). DOI:10.12691/ajna-1-1-4.
11. Ахмедов Д.М. Коэффициенты одной оптимальной квадратурной формулы. Международная конференция Кубатурные формулы, методы Монте-Карло и их приложения, (4-7 июля, 2011) – Красноярск, 2011, -С 16-18.
12. Ахмедов Д.М. Оптимальные квадратурные формулы типа Эрмита для сингулярных интегралов в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$.// Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Операторные алгебры и смежные проблемы». 12–14 сентябрь, -Ташкент –2012. –С. 95-96.
13. Ахмедов Д.М. Об одной оптимальной квадратурной формуле с производными для сингулярных интегралов типа Коши в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$. //Республиканская научная конференция с участием ученых из стран СНГ «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». 21–23 ноябрь, -Ташкент –2013. – С. 305-306.
14. Ахмедов Д.М. Оптимальные квадратурные формулы для сингулярного интеграла типа Коши в $L_2^{(m)}(-1,1)$.//Международная конференция Прикладной и геометрический анализ. - Самарканд. 22-25 сентябрь 2014.

Автореферат Ўзбекистон Миллий университетининг “ЎзМУ хабарлари” журнали таҳририятида 2018 йил 14 майда таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди: 14.05.2018. Ҳажми 2.75 босма табоқ.
Бичими 60х45 1/16 , «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Адади: 80. Буюртма: № 70

М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети
босмахонасида чоп этилди.