

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI
NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI**

**«Himoyaga ruhsat etildi»
Fizika-matematika fakulteti dekani
_____ U.Boboxo‘jayev
«___» _____ 2017 y.**

**5130100-Matematika
ta‘lim yo‘nalishi bitiruvchisi
Uralova Saboxat Ismoiljon qizining**

**“Korrekt qo‘yilgan masalalar”
mavzusidagi**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**«Himoyaga tavsiya etildi»
Matematika kafedrasi mudiri
_____ f.-m.f.n. N.Xatamov.
«___» _____ 2017 y.**

**BMI rahbari: f.-m.f.n.
N.Xatamov.**

Namangan – 2017

KORREKT QO'YILGAN MASALALAR

REJA:

I. KIRISH

II. ASOSIY QISM

1-bob. Korrekt va korrekt bo'lmagan masalalar.

1.1-§. Korrekt qo'yilgan masala tushunchasi. Korrekt qo'yilmagan masalalarga misollar

2-bob. Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun korrekt masalalar.

2.1-§. Tor tebranish tenglamasi uchun qo'yilgan boshlang'ich shartli masala.

Dalamber usuli. Yechimining turg'unligi va fizik ma'nosi

2.2-§. Tor tebranish tenglamasi uchun 1-chegaraviy masalaning qo'yilishi

2.3-§. Gursa masalasi

3-bob. Elliptik tipdagi tenglamalar uchun korrekt masalalar.

3.1-§. Laplas tenglamasi uchun Dirixle va Neyman masalalari

3.2-§. Ikkinchi tartibli elliptik tipdagi chiziqli tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni qo'yilishi

3.3-§. Ekstremum prinsipi. Dirixle masalasi yechimining yagonaligi va mavjudligi

4-bob. Parabolik tipdagi tenglamalar uchun korrekt masalalar.

4.1-§. Parabolik tipdagi tenglamalar uchun asosiy masalalarning qo'yilishi

4.2-§. Issiqlik tarqalish tenglamasi yechimi uchun maksimal qiymat prinsipi.

Chegaraviy va Koshi masalasi yechimining yagonaligi

III. XULOSA

IV. INTERNET MA'LUMOTLAR

V. ADABIYOTLAR

KIRISH

Agar fanni ulkan bir daraxt deb tasavvur qilsak, tadqiqotlar uning ildizini tashkil etadi.

I.A.Karimov.

Konstitutsiyamizda belgilab berilgan asosiy maqsadlarimiz barchamizga yaxshi ma'lum. Ya'ni, bosh qomusimiz bozor iqtisodiyotiga asoslangan mustaqil demokratik davlat qurish, inson manfaatlari, huquq va erkinliklari, qonun ustuvorligi va mamlakatimiz barcha fuqarolari uchun qonun oldida tenglik tamoyili ta'minlanadigan fuqarolik jamiyatini shakllantirishning mustahkam poydevorini yaratib berdi.

Mamlakatimizda amalga oshirilayotgan olamshumul o'zgarishlar, shahar va qishloqlarimizning qiyofasi tobora chiroy ochib, aholimizning farovonligi yuksalib borayotgani haqida gapirganda, bunday yangilanishlarning g'oyat muhim manbalari – avvalo, odamlarimizning ongu tafakkuri, dunyoqarashi va kayfiyati tubdan o'zgarib, ularning yon-atrofimizda ro'y berayotgan voqea-hodisalarga daxldorlik hissi, ertangi kunga munosabati va ishonchi tobora mustahkamlanib, siyosiy saviyasi va huquqiy madaniyati o'sib borayotgani haqida alohida to'xtalishni o'rinli deb bilaman

Jahon tarixi barchamizga bir haqiqatni doimo eslatib turadi – hayotimiz taraqqiyoti hech qachon bir joyda to'xtab turmaydi, xuddi shu kabi jamiyatimizni isloh etish va demokratlashtirish, mamlakatni modernizatsiya qilish va yangilash bir muddatlik ish emas, balki muntazam davom etadigan uzluksiz jarayondir.

Ayniqsa, bugun biz XXI asrda – intellektual mehnat birlamchi ahamiyat kasb etayotgan globallashuv va internet asrida yashayotganimizni hisobga oladigan bo'lsak, jahon bozorida raqobat kurashining miqyosi va keskinligi tobora ortib borayotgani bu haqiqatni yana tasdiqlab bermoqda.

Shuning uchun ham qo'lga kiritilgan yutuqlar bilan chegaralanmasdan, xotirjamlik va havolanish kayfiyatiga berilmasligimiz, aksincha, yangi marralar sari intilishimiz, doimo izlanib yashashimiz, taraqqiyot va yangilanish yo'lidan izchillik bilan yanada ilgarilab borishimiz zarur.

Istiqlol mamlakatimiz yosh olimlariga jahon ilm-fani oldida turgan dolzarb masalalarni hal etishda faol ishtirok etish imkonini berdi. Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti huzurida Kembrij universiteti (Buyuk Britaniya) ishtirokida Yuqori texnologiyalar markazining tashkil etilgani ham bunga yorqin misoldir. Innovatsion loyihalar ishlab chiquvchilar orasida yosh mutaxassislarning ulushi tobora ortib borayotir. Yosh olimlar kengashi iste'dodli yoshlarni qo'llab-quvvatlash maqsadida ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish bo'yicha ilm-fan yo'lini tanlagan yoshlarni rag'batlantirishga qaratilgan maqsadli strategiyani ishlab chiqdi.

Respublikamiz mustaqillikka erishgandan keyin bizning o'zbek yigit-qizlari jahon arenalarida sport va ilm-fanning turli sohalarida yutuqlarga erishib yurtimiz sharafiga himoya qilishmoqda. Ularga o'z sohasini mukammal biladigan mutaxassislar bo'lib yetishishi uchun jahon standartlari darajasida bilim berish, fanlarni chuqur o'rgatish, fanning ishlab chiqarish bilan aloqasini mustahkamlash bugungi kunning muhim vazifalaridan biridir.

O'zbekiston mustaqilligining 21-yilligi arafasida Fanlar akademiyasining Astronomiya institutiga yaponiyalik olimlar tomonidan 22948-kichik sayyora-asteroid kashf etilgani, unga Xalqaro astronomiya ittifoqi "Maydanak" nomini bergani ham olimlarimiz ilmiy yutuqlari e'tirofidan dalolatdir. Garvard kichik sayyoralar markazi tomonidan chop etilgan xabarda Maydanak O'zbekistonda joylashgan jahon miqyosidagi astronomik observatoriya ekani ta'kidlangan. Umuman, chet ellik astronomlar turli vaqtlarda kashf etilgan besh kichik sayyoraga jahon ilm-fani rivojiga beqiyos hissa qo'shgan buyuk ajdodlarimiz sharafiga O'zbekiston, Avitsenna, Ulug'bek, Beruniy va Xorazmiy nomini bergan. Yana bir sayyora 2009-yilda o'zbekistonlik olimlar tomonidan Maydanak observatoriyasida kashf etildi. 1-prezidentimiz Islom Karimovning taklifiga binoan

unga azaldan jahon astronomiyasi markazi bo'lgan shahar Samarqand nomi berildi.

O'zbekiston mustaqillikka erishgach, 1- prezidentimiz I.A.Karimov tomonidan ta'lim tizimini tubdan takomillashtirish, yoshlarga jahon andozalari darajasida bilim berish, yuksak intellektual salohiyatli, boy dunyoqarashga ega barkamol avlodni tarbiyalash davlat siyosatining ustuvor yo'nalishiga aylandi. 1- prezidentimiz I.A.Karimov ta'limning jamiyat rivojidagi o'rniga "Shuni unutmaslik kerakki, kelajagimiz poydevori bilim dargohlarida yaratiladi, boshqacha aytganda xalqimizning ertangi kuni qanday bo'lishi farzandlarimizning bugun qanday ta'lim va tarbiya olishiga bog'liq" deya baho berganlar.

1-prezidentimiz I.A.Karimov tashabusslari bilan qabul qilingan qator tarixiy qaror va farmonlar uzluksiz ta'limning barcha bosqichlaridagi islohotlar uchun huquqiy-me'yoriy asos va amaliy dastur sifatida xizmat qilib kelmoqda. Jumladan 2012 yil 28 dekabrda qabul qilingan 365-sonli "Oliy malakali ilmiy va ilmiy-pedagog kadrlar tayyorlash va attestatsiyadan o'tkazish tizimini yanada takomillashtirish to'g'risida" gi qarorida O'zbekistonda bir pog'onali ilmiy kadrlar tayyorlash masalasida jahon tajribasidan kelib chiqqan holda, bakalavriat va magistraturaga bo'lgan talabni o'zgartirish va ishlab chiqarishni talab etmoqda.

Mustaqillik yillarida mamlakatda huquqiy demokratik davlat, kuchli fuqarolik jamiyati qurishga, erkin bozor munosabatlariga va xususiy mulk ustuvorligiga asoslangan iqtisodiyotni rivojlantirishga, xalq osoyishta va farovon hayot kechirishi uchun shart-sharoitlar yaratishga, xalqaro maydonda O'zbekistonning munosib o'rin egallashiga qaratilgan kompleks chora-tadbirlar amalga oshirildi. Bosib o'tilgan yo'l va orttirilgan tajribani xolisona baholashdan, mustaqillik yillarida erishilgan yutuqlarni tahlil qilishdan hamda zamon talablaridan kelib chiqqan holda, oldimizda demokratik islohotlarni yanada chuqurlashtirish va mamlakat taraqqiyotini jadallashtirishning muhim ustuvorliklarini hamda aniq marralarini belgilash vazifasi turgan edi. Mazkur

vazifani amalga oshirish yo'lida aholining keng qatlamlari, jamoatchilik va ishbilarmon doiralar vakillari, davlat organlarining rahbarlari va mutaxassislari bilan amaliy suhbat hamda muhokamalar olib borildi, shuningdek, amaldagi qonun hujjatlari, milliy va xalqaro tashkilotlarning axborot-tahliliy materiallari, ma'ruzalari, tavsiyalari va sharhlari o'rganildi, rivojlangan xorijiy mamlakatlar tajribasi tahlil qilindi. Kelib tushgan takliflarni jamlash, chuqur o'rganish hamda umumlashtirish asosida O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Sh.M.Mirziyoyevning «O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida» gi farmoni loyihasi ishlab chiqilib, u bilan: 2017-2021 yillarda O'zbekiston Respublikasini rivojlantirishning beshta ustuvor yo'nalishi bo'yicha Harakatlar strategiyasini «Xalq bilan muloqot va inson manfaatlari yili» da amalga oshirishga oid Davlat dasturi tasdiqlandi. Loyihalarni tayyorlash davomida aholining keng qatlamlari orasida qizg'in muhokamalar olib borildi.

Harakatlar strategiyasining maqsadi olib borilayotgan islohotlar samaradorligini tubdan oshirishdan, davlat va jamiyatning har tomonlamava jadal rivojlanishini ta'minlash uchun shart-sharoitlar yaratishdan, mamlakatni modernizatsiyalash va hayotning barcha sohalarini erkinlashtirishdan iboratdir. Xususan, mamlakatni rivojlantirishning quyidagi 5 ta ustuvor yo'nalishi belgilangan:

1. Davlat va jamiyat qurilishini takomillashtirish;
2. Qonun ustuvorligini ta'minlash va sud-huquq tizimini yanada isloh qilish;
3. Iqtisodiyotni yanada rivojlantirish va liberallashtirish;
4. Ijtimoiy sohani rivojlantirish;
5. Xavfsizlik, millatlararo totuvlik va diniy bag'rikenglikni ta'minlash, chuqur o'ylangan, o'zaro manfaatli va amaliy ruhdagi tashqi siyosat yuritish.

Mazkur yo'nalishlarning har biri mamlakatdagi islohotlarni va yangilanishlarni yanada chuqurlashtirishga oid aniq bo'limlardan iborat.

Harakatlar strategiyasining amalga oshirilishi O'zbekiston Respublikasining mamlakatni isloh qilish va modernizatsiyalash, rivojlangan bozor iqtisodiyotiga asoslangan huquqiy demokratik davlat, kuchli fuqarolik jamiyati barpoetish, qonun ustuvorligini, xavfsizlik va huquq-tartibotni, davlat chegaralarining

daxlsizligini, jamiyatda millatlararo totuvlik va diniy bag‘rikenglikni ta‘minlash yo‘lidagi shaxdam harakatlariga yangi kuch bag‘ishlaydi.

Bugungi kunda prezidentimiz Sh.M.Mirziyoyev tomonidan Oliy ta‘lim tizimini yanada rivojlantirish bo‘yicha qabul qilingan va qilinayotgan qarorlar oliy ta‘lim tizimida yangi o‘zrishaqlarishlarga qaratilmoqda.

Xususan prezidentimiz Sh.M.Mirziyoyevning 2017-yil 20-apreldagi 2909-sonli “Oliy ta‘lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida ”gi qarorida mamlakatimizda kadrlar tayyorlash tizimini yanada takomillashtirish, iqtisodiyot va ijtimoiy soha tarmoqlarini yuqori malakali mutaxassislar bilan ta‘minlash, bakalavr va magistrnlarni tayyorlashda ish beruvchilarning joriy va istiqboldagi extiyoqlarini inobatga olgan holda son va ta‘lim yo‘nalishlari uyg‘unligiga erishish, oliy ta‘lim muassasalari bitiruvchilari mehnatidan foydalanishni yaxshilash, shuningdek, iqtisodiyotda tarkibiy o‘zgarishlarni amalga oshirishning o‘rtacha muddatga mo‘ljallangan maqsadli dasturlarini joriy etish, tarmoqlarni modernizatsiya qilish, texnik va texnologik qayta jihozlash va diversifikatsiyalash, hududlarni kompleks ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirish maqsadlar ko‘zda tutigan.

Prezidentimiz SH.M.Mirziyoyevning “Oliy ta‘lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” 2017-yil 20-apreldagi PQ-2909-sonli qarorini ijro etish hamda mamlakatimizda kadrlar tayyorlash tizimini yanada takomillashtirish, iqtisodiyot va ijtimoiy soha tarmoqlarini yuqori malakali mutaxassislar bilan ta‘minlash, bakalavr va magistrnlarni tayyorlashda ish beruvchilarning joriy va istiqboldagi extiyoqlarini inobatga olgan holda son va ta‘lim yo‘nalishlari uyg‘unligiga erishish, oliy ta‘lim muassasalari bitiruvchilari mehnatidan foydalanishni yaxshilash, shuningdek, iqtisodiyotda tarkibiy o‘zgartirishlarni amalga oshirishning o‘rtacha muddatga mo‘ljallangan maqsadli dasturlarini joriy etish, tarmoqlarni modernizatsiya qilish, texnik va texnologik qayta jihozlash va diversifikatsiyalash, hududlarni kompleks ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirish maqsadida O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining “2017-2018 o‘quv yilida O‘zbekiston Respublikasining oliy ta‘lim muassasalariga o‘qishga qabul qilish to‘g‘risida” gi qarori qabul qilindi. Ushbu qarorga binoan

hamda mamlakatimizda yangi qurilayotgan korxonalarining hududiy joylashuvi, iqtisodiyotdagi tarkibiy o'zgartirishlar bo'yicha dasturiy chora-tadbirlarni amalga oshirish, ishlab chiqarishni modernizatsiyalash, texnik qayta jihozlash va diversifikatsiyalashning investitsiyaviy loyihalari, yo'l-transport hamda kommunikatsiya infratuzilmasi tahliliga muvofiq, 2017-2018 o'quv yili uchun oliy ta'lim muassasalariga o'qishga qabul bo'yicha umumiy kvota bakalavrlar uchun 66316 nafar, shu jumladan, davlat grantlari bo'yicha 18194 ta va to'lov-kontrakt asosida 48122 ta, magistrlar uchun 5000 nafar, shu jumladan, davlat grantlari bo'yicha 1556 ta va to'lov-kontrakt asosida 3444 ta etib belgilandi.

Bundan tashqari, ushbu qaror bilan 2017-2018 o'quv yilidan boshlab Qoraqalpog'iston Respublikasi Vazirlar Kengashi, viloyatlar va Toshkent shahri hokimliklari buyurtmalariga binoan yuqori malakali tibbiyot kadrlariga ehtiyoj katta bo'lgan hududlar uchun O'zbekiston Respublikasining tibbiyot oliy ta'lim muassasalariga davlat grantlari asosida bakalavriat yo'nalishi bo'yicha mutaxassislarni tayyorlashning maqsadli qabul kvotalari tasdiqlandi. Qaror bilan O'zbekiston Respublikasining ta'lim muassasalariga o'qishga qabul qilish bo'yicha Davlat komissiyasining yangi tarkibi tasdiqlandi va unga quyidagi huquqlar berildi: bakalavriat yo'nalishlari va magistratura mutaxassisliklari bo'yicha oliy ta'lim muassasalariga o'qishga kirish chog'ida abituriyentlar to'plagan ballarning reyting bahosini hisobga olgan holda oliy ta'lim muassasalarining bakalavriat va magistratura bo'limlari qabul parametrlariga o'zgartirishlar kiritish; yangi yo'nalishlar va mutaxassisliklarni kiritish uchun bakalavriat va magistraturaning qabul kvotalariga o'zgartirishlar kiritish; iqtisodiyot tarmoqlari, jumladan, respublikaning olis va borish qiyin bo'lgan hududlari uchun mutaxassislarga bo'lgan o'rinli ehtiyojlarni qondirish maqsadida oliy ta'lim muassasalarining bakalavriat va magistraturasiga tegishli tarmoqlar va hududlar bo'yicha maqsadli qabul ko'rsatkichlarini belgilash. Shuningdek, 2017-2018 o'quv yilidan boshlab oliy ta'lim muassasalariga to'lov-kontrakt pulining oshirilgan stavkasi bo'yicha qo'shimcha qabulni amalga oshirish joriy etilmoqda. Bunda: oliy ta'lim muassasalariga to'lov-kontrakt pulining oshirilgan stavkasi bo'yicha qo'shimcha

qabulni amalga oshirish uchun kvota miqdori ta'lim muassasasining mavjud imkoniyatlari va ta'lim yo'nalishlaridan kelib chiqib Davlat komissiyasi tomonidan belgilanishi; qo'shimcha qabul bo'yicha to'lov-kontrakt pulining oshirilgan stavkasi abituriyentlar to'plagan ballarga qarab Davlat komissiyasi tomonidan differensiyalashgan tartibda belgilanishi; to'lov-kontrakt pulining oshirilgan stavkasi bo'yicha qo'shimcha qabul o'tish ballini to'play olmagan abituriyentlarga to'plagan balliga muvofiq (68 balldan kam bo'lmagan) ketma-ketlik tartibi qat'iy saqlangan holda, ularning oshirilgan kontrakt pulini to'lay olish imkoniyatidan kelib chiqib amalga oshirilishi belgilab qo'yildi. Qarorning yana bir muhim jihatida shundaki, kadrlarni maqsadli tayyorlashning asosiy buyurtmachilari hisoblangan Qoraqalpog'iston Respublikasi Vazirlar Kengashi, viloyatlar va Toshkent shahri hokimliklari, vazirlik va idoralarga oliy ta'lim muassasalari bitiruvchilarining ular o'qib egallagan kasbiga va tuzgan shartnomalariga muvofiq ish bilan bandligini ta'minlash, jumladan, respublikaning olis va borish qiyin bo'lgan hududlariga ishga yo'llanma olgan oliy ta'lim muassasalari bitiruvchilari uchun munosib mehnat va ijtimoiy-maishiy shart-sharoitlar yaratish yuzasidan javobgarlik yuklangan.

Bir soz bilan aytganda, ushbu qarorda belgilab berilgan maqsad va vazifalar yuqori malakali mutaxassislarni tayyorlashga xizmat qiladi.

Bugungi kunda olimlar o'rtasida fan tushunchasi o'rniga fanlar tizimi (sistema) so'zi keng iste'molga kirdi.

Fan so'zining etimologiyasi "haqiqat", "bilish" ma'nolarini anglatadi. Haqiqatni yuzaga chiqarishda fanlarning o'zaro hamkorligi katta ahamiyatga ega. Muammolarning serqirraligi, uning echimida bir necha fanlarning o'zaro hamkorligi, qolaversa asrlar o'tishi bilan ma'lum fanning bir necha fanlarga bo'linishi bunday yondashuvning asosiy sababi hisoblanadi. Tabiat to'g'risidagi ilmiy bilimlar yig'indisi tufayli tabiiy fanlar shakllangan. Unga fizika, kimyo, biologiya, geografiya, geologiya, anatomiya, kosmologiya fanlari, shuningdek, geokimyo, geofizika, meteorologiya, fiziologiya astrokimyo, biokimyo, antropologiya kabi o'ndan ortiq oraliq fanlar kiradi. Galaktika, Quyosh

sistemi, sayyoralar va Yer, inson, hayot, materiya mazkur fanlarning fundamental tushunchasi bo'lib, geografik qobiq, biosfera, ekotizim (ekosistema), sotsiosistema esa o'rganish ob'ekti va predmetidir. Albatta, matematika to'g'ridan-to'g'ri tabiiy fanlar tarkibiga kirmasa ham, tabiiy fan olimlarining tadqiqotlari uchun asosiy vosita-qurol bo'lib kelgan va kelmoqda. Tabiat inson tafakkuri bilan hisoblashadi-mi? Nima uchun tabiiy jarayonlarni tavsiflashda matematika fani zarur bo'ladi?

Bitiruv malakaviy ishining dolzarbligi: Malakaviy bitiruv ishi mavzusi matematik fizika tenglamalari fanida muhim o'rin tutgan bo'lib, Korrekt qo'yilgan masalalar tadbig'iga bag'ishlangan. Talabalar bunday masalarni yechish orqali matematik fizika masalalarining doirasi nihoyatda keng bo'lib, ular turli fizik, mexanik, texnik va boshqa jarayonlarni o'rganish bilan uzviy bog'iqligini tushunadilar. O'rganilayotgan fizik jarayonlar uchun qo'yilgan masalalarning korrekt yoki korrekt qo'yilmaganini tekshirish orqali talabalar fizik jarayonlar haqida ko'proq ma'lumotga ega bo'la oladilar. Ko'p talabalar bunday masalalarni yechishga qiynaladilar. Buning sababi bunday masalalar mantiqiy fikrlashni, mavzu yuzasidan bilimlarni talab qiladi. Mazkur malakaviy bitiruv ishi mavzuning xuddi shu jihatlarni yoritishga qaratilganligi, qolaversa bir qancha fizik hodisa va jarayonlarning aniq matematik modelini tuzishda hamda uni yechishda qo'l kelganligi bilan dolzarb hisoblanadi.

Bitiruv malakaviy ishning ob'ekti : Korrekt qo'yilgan masalalar.

Bitiruv malakaviy ishning asosiy maqsadi:

1. Matematik fizika tenglamalari va ularga qo'yiladigan korrekt va korrekt bo'lmagan masalalar haqida ma'lumot berish.
2. Korrekt qo'yilgan masalalarni o'rganish.

Bitiruv malakaviy ishning vazifalari:

1. Matematik fizika tenglamalari uchun korrekt qo'yilgan masalalar tadbig'i haqida umumiy ma'lumot berishdan iboratdir.
2. Fizik jarayonlarni korrekt qo'yilgan masalalar yordamida tadqiq etishdan iborat

Bitiruv malakaviy ishning predmeti: xususiy hosilali differensial tenglamalar.

Bitiruv malakaviy ishimizning amaliy ahamiyati: BMIning amaliy ahamiyati mavzu va mavzuga oid misol-masalalarni tahlil hamda tadqiqi hisoblanadi.

Olingan natija talaba yoshlar hamda o'qituvchilar uchun muhim qo'llanma sifatida va murakkablik darajasi ancha yuqori bo'lgan bir qancha masalalarni yechishda amaliy asos bo'lishi mumkin.

Bitiruv malakaviy ishning hajmi va tuzilishi: BMI kirish, asosiy qism, xulosa, internet ma'lumotlari va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

II. ASOSIY QISM

1-bob. KORREKT VA KORREKT BO‘LMAGAN MASALALAR.

1.1-§. Korrekt qo‘yilgan masala tushunchasi.

Korrekt qo‘yilmagan masalalarga misollar.

Korrekt (to‘g‘ri) qo‘yilgan masala tushunchasi. Matematik fizika masalalarining qo‘yilishida ayrim funksiyalar (boshlang‘ich, chegaraviy shartlar) ishtirok etadi: qo‘yilgan masalaning yechimi tabiiy, shu funksiyalarga bog‘liq bo‘ladi. Bu funksiyalar, odatda tajriba asosida aniqlanadi, shuning uchun ham ularni absolyut aniq topish mumkin emas.

Demak, boshlang‘ich va chegaraviy shartlarda hamma vaqt xatolikning bo‘lishi muqarrardir. Bu xatolik o‘z navbatida yechimga ham ta’sir qiladi. Boshlang‘ich va chegaraviy masalalarni tekshirishda, yechimning mavjudligi va yagonaligidan tashqari boshlang‘ich va chegaraviy shartlarda qo‘yilgan xatolikning yechimga qanday ta’sir qilishini aniqlash muhim ahamiyatga egadir.

Har qanday masalaning mohiyati berilgan $j \in E_j$ funksiyalarga asosan uning $u \in E_u$ yechimini topishdan iboratdir, bu yerda E_u va E_j - metrikalari r_u va r_j bo‘lgan qandaydir metrik fazolar. Bu fazolar masalaning qo‘yilishi bilan aniqlanadi. Masalaning yechimi tushunchasi aniqlangan bo‘lib, har bir $j \in E_j$ elementlarga yagona $u = R(j) \in E_u$ yechim mos kelsin.

Agar $\forall e > 0$ uchun shunday $d(e) > 0$ sonni ko‘rsatish mumkin bo‘lib, $r_j(j_1, j_2) \leq d(e)$ tengsizlikdan $r_u(u_1, u_2) \leq e$ tengsizlik kelib chiqsa, masala (E_u, E_j) fazolar juftida turg‘un masala deyiladi.

Bunda $u_i = R(j_i)$, $u_i \in E_u$, $j_i \in E_j$, $i = 1, 2, \dots$ masalaning yechimi berilgan shartlar (boshlang‘ich va chegaraviy shartlar, tenglamaning koeffitsientlari, ozod hadi va x.k.) ga uzluksiz bog‘liq bo‘ladi.

Agar tekshirilayotgan masala uchun ushbu

- 1) ixtiyoriy $j \in E_j$ uchun $u \in E_u$ yechim mavjud;
- 2) u yechim yagona;
- 3) masala (E_u, E_j) fazolar juftligida turg'un shartlar bajarilsa, masala (E_u, E_j) fazolar juftligida korrekt (to'g'ri) qo'yilgan yoki to'g'ridan to'g'ri korrekt masala deyiladi.

Aks holda masala korrekt qo'yilmagan masala deyiladi, ya'ni yuqoridagi talablardan kamida bittasi bajarilmaydi. Shu narsani alohida ta'kidlab o'tamizki, korrekt qo'yilmagan masala ta'rifi berilgan (E_u, E_j) juftlikka taalluqlidir, chunki boshqa metrikalarda shu masalaning o'zi korrekt qo'yilgan bo'lishi ham mumkin.

Korrekt qo'yilmagan masalalarga misollar. Yechim boshlang'ich shartlarga uzluksiz bog'liq bo'lmasligi ham mumkin. Bu dalilni ko'rsatuvchi misol birinchi marta Adamar tomonidan tuzilgan.

- 1) **Adamar misoli.** Ushbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Laplas tenglamasining $y > 0$ yarim tekislikda

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = e^{-\sqrt{k}} \cos kx$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimi topilsin. Tekshirib ko'rish qiyin emaski, bu masalaning birdan-bir yechimi

$$u(x, y) = \frac{1}{k} e^{-\sqrt{k}} \cos kx \text{ shky}, \quad k = 1, 2, \dots$$

ko'rinishda bo'ladi.

Ko'rinib turibdiki, agar $k \rightarrow +\infty$, $e^{-\sqrt{k}} \cos kx$ funksiya nolga tekis intiladi, ya'ni $e^{-\sqrt{k}} \cos kx = 0$, lekin $u(x, y)$ yechim noldan farqli ixtiyoriy y da

$$u(x, y) = \frac{1}{k} e^{-\sqrt{k}} \cos kx \cdot \text{shky} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty$$

bo'ladi.

Shunday qilib, Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi korrekt qo'yilmagan masala ekan.

2) Ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining $t < 0$, $0 \leq x \leq p$ sohada

$$u(x,0) = \frac{1}{k} e^{-\sqrt{k}} \sin kx, \quad u(0,t) = u(p,t) = 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Bu masalaning yechimi

$$u(x,t) = e^{-\sqrt{k}} e^{-k^2 t} \sin kx$$

funksiyadan iboratdir.

Tabiiy har bir k uchun o'zining boshlang'ich sharti va unga mos bo'lmagan yechimi bor. Shu sababli ham yozilgan yechimni yechimlar ketma-ketligi deb qarash kerak.

$e^{-\sqrt{k}} \sin kx$ funksiya $k \rightarrow \infty$ da nolga intiladi, lekin yechim esa huddi Adamar misolidek hech qanday limitga intilmaydi.

3) Tor tebranish tenglamasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

uchun Dirixle masalasini tekshiramiz.

$0 < x < p$, $0 < y < a$ to'rtburchakda,

$$u(0,y) = 0, u(p,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq a$$

$$u(x,0) = 0, u(x,a) = \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}, \quad 0 \leq x \leq p$$

shartlarni qanoatlantiruvchi tor tebranish tenglamasining yechimi topilsin. Bu yerda a - musbat irratsional son.

Bu masalaning yechimi

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\sin kx \sin ky}{\sin k a p}, \quad k = 1, 2, \dots$$

formula bilan aniqlanadi.

Ravshanki $k \rightarrow \infty$ da chegaraviy shartdagi $\frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$ funksiya nolga intiladi.

Sonlar nazaryasidan ma'lumki, shunday p_k va q_k butun sonlar ketma – ketligi mavjud bo'lib, har qanday a irratsional son uchun

$$\left| a - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2}$$

tengsizliklardan o'rinli bo'ladi.

Bunga asosan

$$\left| \sin q_k a p \right| = \left| \sin(q_k a - p_k) p \right| < \frac{p}{q_k}$$

tengsizlik hosil qilamiz.

Bu holda, tekshirilayotgan masalaning yechimi $u(x, y)$ funksiya uchun

$$|u(x, y)| = \left| \frac{1}{\sqrt{q_k}} \frac{\sin q_k x \sin q_k y}{\sin q_k a p} \right| > \frac{\sqrt{q_k}}{p} |\sin q_k x \sin q_k y|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Bundan tor tebranish tenglamasi uchun Dirixle masalasi korrekt qo'yilmagan masala emas ekanligi kelib chiqadi.

2-bob. GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN KORREKT MASALALAR.

2.1-§. Tor tebranish tenglamasi uchun qo'yilgan boshlang'ich shartli masala. Dalamber usuli.

Malumki, torning erkin teranishi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1.1)$$

tenglama bilan tasvirlanadi. (2.1.1) tenglamaning xarakteristikalari tenglamasi

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

dan iborat. Bundan darhol (2.1.1) tenglamaning xarakteristikalari

$$x - at = c_1, \quad x + at = c_2, \quad c_1, c_2 - \text{const},$$

to'g'ri chiziqlardan iborat ekanligi kelib chiqadi,

Umumiy nazariyaga asosan

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

deb belgilab olamiz.

Bu yangi o'zgaruvchilarga nisbatan (2.1.1) tenglama

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (2.1.2)$$

tenglamaga keladi. (2.1.2) tenglamani

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0$$

ko'rinishida yozib olamiz. Bundan

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\xi),$$

bu yerda $f(\xi)$ – ixtiyoriy funksiya.

Hosil bo'lgan tenglamani, ξ ni parametr deb qarab, η bo'yicha integralaymiz, u holda

$$u(x, h) = \int f(h)dh + f_1(x).$$

Ushbu

$$\int f(h)dh = f_2(h)$$

belgilashni kiritib,

$$u(x, h) = f_1(x) + f_2(h)$$

formulani hosil qilamiz. Bunda $f_1(x)$, $f_2(h)$ – ixtiyoriy funksiyalar

Eski x va t o'zgaruvchilarga qaytsak, avvalgi formula

$$u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at) \quad (2.1.3)$$

ko'rinishda yoziladi.

Agar f_1 , f_2 ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi funksiyalar bo'lsa, (2.1.3) formula bilan aniqlangan $u(x, t)$ funksiya (2.1.1) tenglamaning yechimi ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. (2.1.1) tenglamaning (2.1.3) yechimi *Dalamber yechimi* deyiladi.

Bu yechimdan foydalanib, chegaralanmagan tor uchun Koshi masalasini, ya'ni ushbu

$$u|_{t=0} = j(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = j_1(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1.4)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi (2.1.1) tenglamaning yechimini topish qiyin emas.

Bu masalaning yechimini mavjud deb faraz qilamiz. U holda, bu yechim (2.1.3) formula bilan aniqlanadi (chunki u umumiy yechim). (2.1.3) formuladagi f_1 va f_2 funksiyalarni shunday topamizki, natijada (2.1.4) boshlang'ich shartlar qanoatlantirilsin, ya'ni

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_1(x) + f_2(x) = j(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= -af_1'(x) + af_2'(x) = j_1(x). \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Ikkinchi tenglikni integrallab,

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{a} \int_0^x j_1(s) + C \quad (2.1.6)$$

ni hosil qilamiz, C – biror o'zgarmas.

(2.1.5) tenglikni birinchisidan va (2.1.6) dan

$$f_1(x) = \frac{1}{2}j(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x j_1(s) ds - \frac{C}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}j(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x j_1(s) ds + \frac{C}{2}.$$

f_1 va f_2 ning bu qiymatlarini (2.1.3) formulaga qo'yib, ushbu

$$u(x,t) = \frac{j_1(x-at) + j_2(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} j_1(s) ds \quad (2.1.7)$$

formulaga ega bo'lamiz. (2.1.7) ni *Dalamber formulasi* deyiladi. Koshi masalasining yechimi mavjud deb, (2.1.7) formulani keltirib chiqardik.

Agar berilgan funksiyalardan $j(x)$ ikki marta, $j_1(x)$ esa bir marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, (2.1.7) formula bilan aniqlangan $u(x,t)$ funksiyaning (2.1.1) tenglamani va (2.1.4) boshlang'ich shartlarni qanoatlantirilishini tekshirib ko'rish qiyin emas. Bu masalasining yagonaligi (2.1.7) formulani keltirib chiqarish usulidan darhol kelib chiqadi.

Yechimning yagonaligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ funksiyalar (2.1.1)-(2.1.4) masalaning yechimlari bo'lsin. U holda biz bu funksiyalarni ustma-ust tushishini ko'rsatamiz, ya'ni

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t), \quad (2.1.8)$$

$v(x,t) \equiv 0$, $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ bo'lishini ko'rsatamiz.

(2.1.8) funksiya quydagi yordamchi masalani yechimi bo'ladi:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v|_{t=0} = 0, \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.1.9)$$

tenglamaning yechimi

$$v(x,t) = f_1^1(x-at) + f_2^1(x+at) \quad (2.1.10)$$

ko`rinishda bo'ladi. $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ funksiyalar (2.1.4) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi. Shuning uchun (2.1.8) funksiyalarni (2.1.4) boshlang'ich shartlarga qo'ysak,

$$v|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=0 \quad (2.1.11)$$

boshlang'ich shartga ega bo'lamiz.

(2.1.9)- (2.1.11) masalani yechimi mavjud deb faraz qilamiz. U holda bu yechim (2.1.11) formula bilan aniqlanadi. (2.1.10) formuladagi f_1^1 va f_2^1 funksiyalarni shunday topamizki, natijada (2.1.9) boshlang'ich shartlar qanoatlantirilsin, ya'ni

$$\begin{aligned} v(x,0) &= f_1^1(x) + f_2^1(x) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} &= -af_1^1(x) + af_2^1(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Ikkinchi tenglikni integrallab,

$$-f_1^1(x) + f_2^1(x) = C \quad (2.1.13)$$

ni hosil qilamiz C – biror o'zgarmas.

(2.1.12) tenglikni birinchisidan va (2.1.13) dan

$$\begin{aligned} f_1^1(x) &= -\frac{C}{2}, \\ f_2^1(x) &= \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

f_1^1 va f_2^1 ning bu qiymatlarini (2.1.3) formulaga qo'yib, ushbu $v(x,t)=0$ ga ega bo'lamiz.

Demak, $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$. Xulosa qiladigan bo'lsak $u(x,t)$ yechimimiz yagona ekan.

Yechimning turg'unligi va fizik manosi. Biz yuqorida (2.1.7) formula bilan aniqlagan $u(x,t)$ yechimimiz boshlang'ich shartlarga uzluksiz bog'liq bo'ladi. Haqiqatan ham, $j(x)$ va $j_1(x)$ ni $j^1(x)$ va $j_1^1(x)$ ga almashtirish natijasida

$$|j(x) - j^1(x)| < d, \quad |j_1(x) - j_1^1(x)| < d$$

bo'lsin. $j^1(x)$ va $j_1^1(x)$ boshlang'ich shartlarga mos yechimni $u_1(x,t)$ orqali belgilab olib, $u(x,t) - u_1(x,t)$ ayirmani baholaymiz:

$$\begin{aligned} |u(x,t) - u_1(x,t)| &< \frac{1}{2} |j(x-at) - j^1(x-at)| \\ &+ \frac{1}{2} |j(x+at) - j^1(x+at)| + \\ &\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |j_1(s) - j_1^1(s)| ds < d + dt \end{aligned}$$

t biror chekli oraliqda o'zgarganda (ya'ni $t \in [0; t_0]$ da) d ni $d < \frac{e}{1+t}$ shartni qanoatlantiradigan qilib tanlab olsak,

$$|u(x,t) - u_1(x,t)| < e, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Demak, (2.1.1), (2.1.4) masala korrekt qo'yilgan masala ekan.

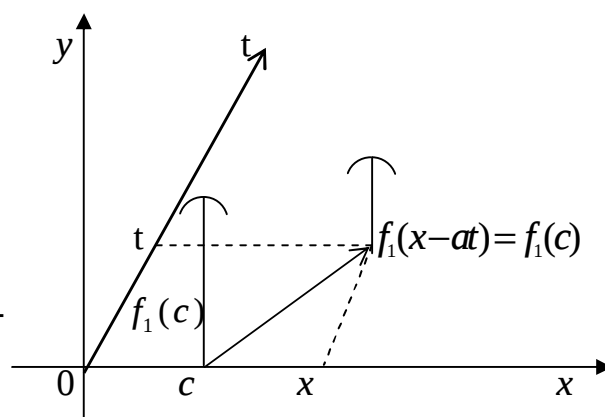
Yechimning fizik manosi. Endi (2.1.7) yechimning fizik manosi aniqlaymiz. Shu maqsadda avval (2.1.3) formulaga murojat qilamiz. Avvalo $f_2 = 0$ bo'lgan xususiy holni ko'ramiz, ya'ni torning siljishi

$$u(x,t) = f_1(x-at)$$

formula bilan aniqlanadi.

Faraz qilaylik, torning $x=c$ nuqtasidan chiqib, x o'qining musbat yo'nalishi bo'yicha a tezlik bilan yura boshlasin, ya'ni uning absissasi t vaqtda $x=c+at$ yoki $x-at=c$ formula bilan aniqlanadi. Bunday kuzatuvchi uchun $u = f_1(x-at)$ formula bilan aniqlanadigan torning siljishi $f_1(c)$ ga teng bo'lib, hamma vaqt o'zgarmas bo'lib qoladi, ya'ni x o'qining musbat tomoniga qarab a tezlik bilan harakat qilgan kishi torning nuqtasini har doim $f_1(c)$ balandlikda ko'rishi kerak. Demak, tor ham o'ng tomonga qarab a tezlik bilan harakatqilar ekan.

(2.1.1-chizma).



(2.1.1)-chizma

$u = f_1(x-at)$ funksiya bilan tasvirlanadigan hodisa to'g'ri to'lqinning tarqalishi deyiladi.

Huddi shunga o'xshash, $u = f_2(x+at)$ yechim teskari to'lqinni ifodalaydi, bu to'lqin x o'qining manfiy yo'nalish u bo'yicha a tezlikda tarqaladi. Boshlang'ich impuls, ya'ni tor nuqtalarining boshlang'ich tezligi nolga teng bo'lsin, $j_1(x)=0$. Bu holda yechim

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[j(x-at) + j(x+at)] \quad (2.1.14)$$

formula bilan ifodalanadi. Bu formuladan yechim to'g'ri $j(x-at)$ va teskari $j(x+at)$ to'lqinlarning o'rta arifmetik qiymatidan iborat ekanligi kelib chiqadi. Buning grafigini chizish uchun odatda bunday qilinadi: $t=0$ vaqtda $u=j(x)$ funksiya grafigining ikkita bir xil nusxasini yasab, ustma-ust qo'yiladi. So'ngra ikki tomonga a tezlikda suriladi. Torning t vaqtdagi grafigi yuqoridagi grafiklarning o'rta arimetigi sifatida hosil bo'ladi, ya'ni torning bu grafigi t vaqtda surilgan grafiklar orasida ordinata kesmalarini ikkiga bo'ladi.

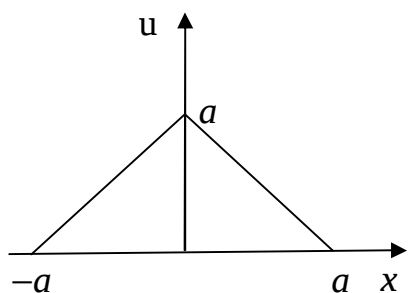
Misol uchun boshlang'ich vaqtda tor uchburchak shaklda bo'lsin (2.1.2-chizma).

$$j(x) = \begin{cases} 0, & (-a, a) \text{ dan tashqari bo'lganda} \\ x+a, & -a \leq x \leq 0 \\ -x+a, & 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

(2.1.3)-chizmalarda torning

$$t = \frac{a}{4a}, \frac{a}{2a}, \frac{a}{a}, \frac{2a}{a}$$

vaqtlardagi grafigi tasvirlangan.



(2.1.2)-chizma

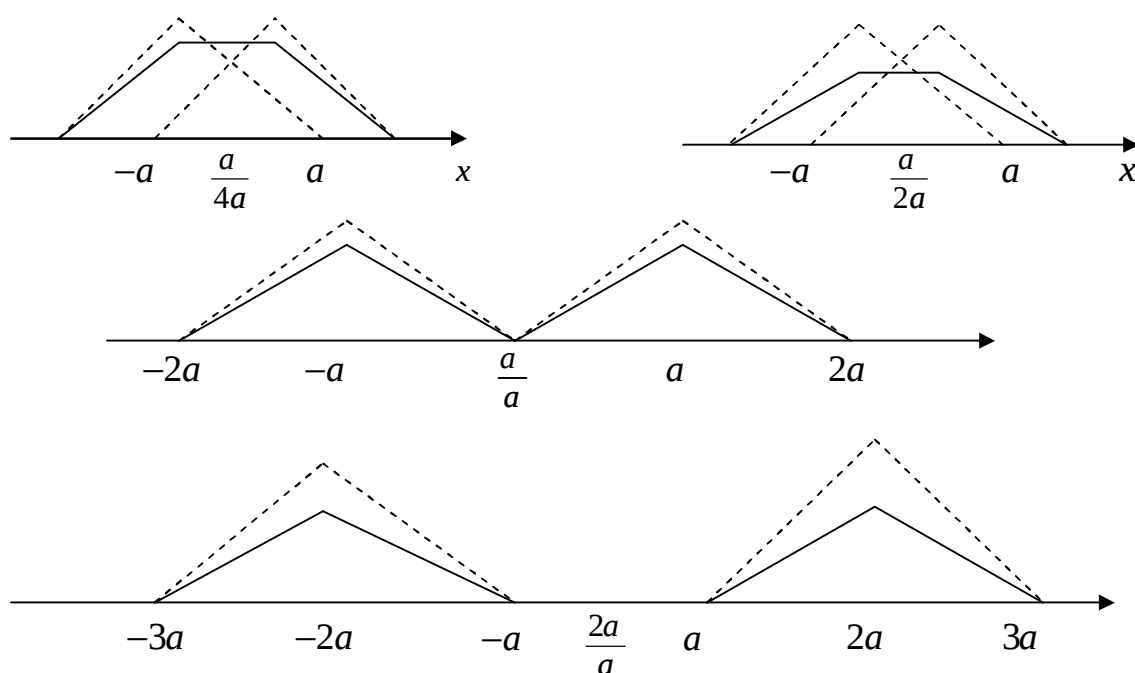
Bu chizmalardan ko'rinyaptiki, $t < \frac{a}{a}$ bo'lganda

ikki to'lqinning ustma-ust tushadigan qismi bor;

$t = \frac{a}{a}$ vaqtdan boshlab, bu to'lqinlar ustma-ust

tushmaydi va turli tomonga qarab uzoqlashadi.

Faraz qilaylik, $j(x)$ funksiya boshlang'ich vaqtda biror $(-a, a)$ kesmada noldan farqli bo'lib, bundan tashqarida nolga teng bo'lsin. Yuqorida aytilganlarga asosan tayin x absissali tor nuqtasining tebranish harakteri to'g'risida gapirish mumkin. Agar $x > a$ bo'lsa, boshlang'ich vaqtda torning nuqtasi absissa o'qida yotgan bo'lib, u boshlang'ich siljishida ishtirok etmaydi. O'ng tomonga qarab harakat qilayotgan to'lqin $t_1 = \frac{x-a}{a}$ vaqtda bu nuqtaga yetib keladi va bu nuqtdan boshlab torning nuqtasi tebrana boshlaydi. To'lqin tekshirayotgan nuqtadan o'tib ketishi bilanoq, ya'ni $t_2 = \frac{x+a}{a}$ vaqtdan boshlab, bu nuqta yana tinch holatda bo'ladi. t_1 vaqtda x nuqtaga to'lqinning *oldingi fronti*, t_2 vaqtda esa *orqa front* yetib boradi. Shunday qilib, torning tekshirilayotgan nuqtasi $\frac{x-a}{a} < t < \frac{x+a}{a}$ yoki $-a < x - at < a$ oraliqda tebranish jarayonida ishtirok etadi. Agar $0 < x < a$ bo'lsa, nuqta orqali to'g'ri va teskari to'lqinlar o'tadi. Ikki to'lqinning oldingi fronti nuqtaning oldida joylashgan bo'ladi; teskari to'lqinning orqa fronti nuqta orqali $t_1 = \frac{a-x}{a}$ vaqtda, to'g'ri to'lqinning orqa fronti esa $t_2 = \frac{a+x}{a}$ vaqtda o'tadi. $t > t_2$ bo'lganda torning nuqtasi tinch holatda bo'ladi, ya'ni x o'qda yotadi.



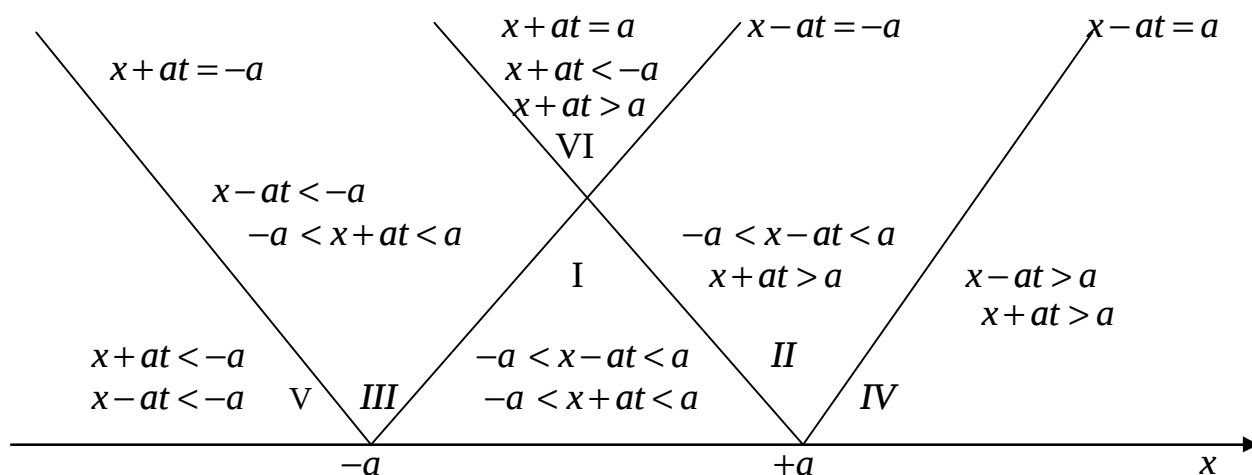
(2.1.3)-chizma

Huddi shunga o'xshash $-a < x + at < a$ bo'lganda nuqtalar tebranish jarayonida ishtirok etadi; agar $-a < x < 0$ bo'lsa, nuqta orqali teskari to'lqinning orqa fronti o'tib bo'lgandan, ya'ni $t = \frac{a - x}{a}$ da, tebranishlar tugaydi.

Agar tekislikda x va t o'zgaruvchilarning Dekart koordinat sistemasini chizib olsak, yuqorida bayon qilingan jarayonni yaqqol tasvirlash mumkin. Tekislikdagi har bir (x, t) nuqta t vaqtdagi absissasi x bo'lgan torning nuqtasiga mos keladi. Xususiyl holda, absissa ($t=0$) o'qining nuqtalari boshlang'ich vaqtdagi torning nuqtalariga mos keladi.

Biz yuqorida ko'rdikki, agar $-a < x - at < a$ bo'lsa, x nuqtadan t vaqtda to'g'ri to'lqin, agarda $-a < x + at < a$ bo'lsa, teskari to'lqin, o'tadi.

Tekislikda $x - at = \pm a$, $x + at = \pm a$ to'g'ri chiziqlarni, ya'ni (1) tenglamaning xarakteristikalarini chizib olamiz. Bu holda $t \geq 0$ yarim tekislik olti qismga ajraladi (2.1.4- chizma).



(2.1.4)-chizma

Bu chizmada bitta x o'qi ko'rsatilgan. Tebranish faqat I, II, va III zonalaridagina sodir bo'ladi, II zonada to'g'ri to'lqin, III da teskari to'lqin, I da esa u ham bu ham harakat qiladi. IV va V zonalarga mos nuqtalarda hozircha tebranish yo'q, chunki bularga to'g'ri (IV zona), teskari (V zona) to'lqinlarning oldingi frontlari

yetib kelmagan, VI zonaga mos nuqtlarda esa tebranish yo‘q, chunki bular orqali ikkala to‘lqinning ham orqa frontlari o‘tib ketgan.

Demak, to‘lqinlar xarakteristikalar bo‘yicha tarqaladi deb aytish mumkin.

2.2-§. TOR TEBRANISH TENGLAMASI UCHUN 1-CHEGARAVIY MASALANING QO‘YILISHI.

Bizlar giperbolik tipdagi tenglamani ko‘rib chiqamiz.

Faraz qilaylik, $u(x,t) \in C^2$ $((x,t): 0 < x < l, t > 0)$ bo‘lsin, shunda

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad ((x,t): 0 < x < l, t > 0) \quad (2.2.1)$$

tenglama ideal torning tebranish tenglamasi deyiladi.

(2.2.1) tenglamani qaraymiz. Biz quyidagi boshlang‘ich shartlarni berishimiz mumkin:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), & 0 < x < l; \\ u_t(x,0) = j(x), & 0 < x < l, \end{cases}$$

torning muvozanat holatidan chetlanishini izohlaydi;

va chegaraviy shartlarni:

$$\begin{cases} u(l,t) = m(t), & t > 0; \text{ (maxkamlangan holda } m \equiv 0) \\ u_x(l,t) = n(t), & t > 0; \\ u(l,t) + a u_x(l,t) = q(t), & t > 0. \end{cases}$$

Odatda biz ulardan ba'zilarini olamiz.

Giperbolik yoki tebranish tenglamalari uchun 1-chegaraviy masala quyidagicha tuziladi.

1-chegaraviy masala:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T; \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u_t(x,0) = j(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u(0,t) = m_1(t), & 0 \leq t \leq T; \\ u(l,t) = m_2(t), & 0 \leq t \leq T; \end{cases}$$

Birinchi chegaraviy masala yechiminig mavjudgini isbotlash uchun o‘zgaruvchilarni ajratish usuli. $[0,l]$ kesmada ortonormallashtirilgan funksiyalar sistemalarini qaraymiz.

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{p_n}{l} x\right) \right\}, n=1,2,3,\dots \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{l}} \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{p_n}{l} x\right) \right\}, n=1,2,3,\dots$$

Fur'ye koeffitsiyentlarini

$$f_n = \int_0^l f(s) \sin\left(\frac{p_n}{l}s\right) ds; \quad f_n'' = \int_0^l f'''(s) \cos\left(\frac{p_n}{l}s\right) ds;$$

kabi aniqlaymiz.

U holda matematik analiz kursidan ma'lumki, agar $f(x) \in C[a, b]$ bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n''^2$$

qatorlar yaqinlashadi. Buni eslab qolamiz va bir jinsli chegaraviy shartlar bilan berilgan bir jinsli tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalaga o'tamiz:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0; & (2.2.1) \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq l; & (2.2.2) \\ u_t(x, 0) = y(x), & 0 \leq x \leq l; & (2.2.3) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0. & (2.2.4) \end{cases}$$

Uning yechimini quyidagi usul bilan topamiz: biror $u(x, t)$ funksiyaga keltiruvchi almashtirishlarni bajaramiz, so'ngra, ma'lum bir shartlarni qanoatlantiruvchi $f(x)$ va $y(x)$ funksiyalar uchun bu funksiya mavjud bo'lishini va berilgan masala yechimi ekanligini isbotlaymiz.

Yechimni

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu nolga aynan teng bo'lmagan funksiya bo'lsin. $u(x, t)$ ni tebranish tenglamasiga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$T''(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -l,$$

bu yerda l qandaydir o'zgarmas son.

Bu ayniyatlardan ikkita tenglama kelib chiqadi:

$$\begin{cases} X''(x) + l X(x) = 0, & 0 < x < l; \\ T''(t) + l a^2 T(t) = 0. & t > 0 \end{cases}$$

$X(0) = X(l) = 0$ da $u(x, t)$ funksiya (2.2.2) shartni qanoatlantiradi.

Shturm – Liuvill masalasi. Quyidagi masalani qaraymiz.

$$\begin{cases} X''(x) + l X(x) = 0, & 0 \leq x \leq l; \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

Shturm – Liuvill masalasining trivial bo'lmagan yechimlarni topamiz.

$$l_n = \left(\frac{p n}{l}\right)^2; \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{p n}{l} x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Topilgan l_n larni $T(t)$ uchun tenglamaga qo'yamiz:

$$T_n''(t) + \left(\frac{p n}{l} a\right)^2 T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{p n}{l} a t\right) + b_n \sin\left(\frac{p n}{l} a t\right),$$

bu yerda a_n va b_n lar qandaydir o'zgarmaslar.

Shunday qilib (2.2.1), (2.2.2) shartlar qanoatlantiradigan $X_n(x), T_n(x)$ funksiyalarni topdik.

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$$

deb olamiz. Ravshanki, bu funksiya uchun ham (2.2.1), (2.2.2) shartlar bajariladi.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

deb olamiz.

(2.2.3), (2.2.4) shartlardan a_n va b_n konstantalarni

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{p n}{l} x\right) \left[a_n \cos\left(\frac{p n}{l} a t\right) + b_n \sin\left(\frac{p n}{l} a t\right) \right]$$

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{p n}{l} x\right) \Rightarrow a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(s) \sin\left(\frac{p n}{l} s\right) ds$$

$$y(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \frac{p n a}{l}\right) \sin\left(\frac{p n}{l} x\right) \Rightarrow \frac{p n a}{l} b_n = \frac{2}{l} \int_0^l y(s) \sin\left(\frac{p n}{l} s\right) ds \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{2}{p n a} \int_0^l y(s) \sin\left(\frac{p n}{l} s\right) ds$$

Natijada, konstantalarni topdik, endi to'la formulani yozamiz;

$$\begin{aligned} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} & \left[\frac{2}{l} \left(\int_0^l f(s) \sin\left(\frac{p n}{l} s\right) ds \right) \cos\left(\frac{p n}{l} a t\right) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{p n a} \left(\int_0^l y(s) \sin\left(\frac{p n}{l} s\right) ds \right) \sin\left(\frac{p n}{l} a t\right) \right] \sin\left(\frac{p n}{l} x\right) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Endi bu formula korrekt bo'ladigan shartlarni ifodalaymiz.

Mavjudlik teoremasi

Teorema 2.2.1 (mavjudlik).

$$f(x) \in C^3[0; l], \quad f(0) = f(l) = f''(0) = f''(l) = 0;$$

$$y(x) \in C^2[0; l], \quad y(0) = y(l) = 0.$$

bo'lsin. U holda (2.2.5) formula bilan aniqlanadigan $u(x, t)$ funksiya quyidagi xossalarga ega:

$$u(x, t) \in C^2\{[0; l] \times [0; T]\} (\forall t > 0)$$

va (2.2.1)-(2.2.4) shartlarni qanoatlantiradi.

Isbot. $u(x, t) \in C^2\{[0; l] \times [0; T]\}$ ekanligini isbotlaymiz;

$$\begin{aligned} f_n &= \int_0^l f(s) \sin\left(\frac{pn}{l}s\right) ds = \{\text{bo'laklab integrallaymiz}\} = \\ &= -f(s) \frac{l}{pn} \cos\left(\frac{pn}{l}s\right) \Big|_0^l + \frac{l}{pn} \int_0^l f'(s) \cos\left(\frac{pn}{l}s\right) ds = \\ &= \{\text{bo'laklab integrallaymiz}\} = \\ &= \left(\frac{l}{pn}\right)^2 f'(s) \sin\left(\frac{pn}{l}s\right) \Big|_0^l - \left(\frac{l}{pn}\right)^2 \int_0^l f''(s) \sin\left(\frac{pn}{l}s\right) ds = \\ &= \left(\frac{l}{pn}\right)^3 f''(s) \cos\left(\frac{pn}{l}s\right) \Big|_0^l - \left(\frac{l}{pn}\right)^3 \int_0^l f'''(s) \cos\left(\frac{pn}{l}s\right) ds \\ f_n^{\#} &= \int_0^l f'''(s) \cos\left(\frac{pn}{l}s\right) ds. \quad n^3 |f_n| = \left(\frac{l}{p}\right)^3 |f_n^{\#}|. \end{aligned}$$

deb olamiz. Yuqorida aytib o'tilgan xossaga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{\#2}$ qator yaqinlashadi.

Bundan $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |f_n|$ qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqishini ko'rsatamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |f_n| = \left(\frac{l}{p}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |f_n^{\#}| \leq \left\{ ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \right\} \leq \left(\frac{l}{p}\right)^3 \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{\#2} \right]$$

Shunday qilib, bizda ikkala qator ham yaqinlashuvchi qatorlar, shuning uchun $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |f_n|$ qator majorant alomatiga ko'ra yaqinlashadi. Shunga o'xshash

$$\begin{aligned}
y_n &= \int_0^l y(s) \sin\left(\frac{pn}{l}s\right) ds = \{\text{bo'laklab integrallaymiz}\} = \\
&= -y(s) \frac{l}{pn} \cos\left(\frac{pn}{l}s\right) \Big|_0^l + \frac{l}{pn} \int_0^l y'(s) \cos\left(\frac{pn}{l}s\right) ds = \\
&= \{\text{bo'laklab integrallaymiz}\} = \\
&\left(\frac{l}{pn}\right)^2 y'(s) \sin\left(\frac{pn}{l}s\right) \Big|_0^l - \left(\frac{l}{pn}\right)^2 \int_0^l y''(s) \sin\left(\frac{pn}{l}s\right) ds
\end{aligned}$$

Shunga o'xshash, $\sum_{n=1}^{\infty} n|y_n|$ qatorning yaqinlashishini ko'rsatish mumkin. Shunga

o'xshash x bo'yicha birinchi va ikkinchi hosilalar mavjudligi va uzluksizligi uchun (2.2.5) formuladagi mos hosilalardan iborat qatorning tekis yaqinlashishini ko'rsatish yetarli. x bo'yicha differensiallab, quyidagilarni olamiz.

$$u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{pn}{l} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \cos\left(\frac{pn}{l}at\right) f(s) \sin\left(\frac{pn}{l}s\right) ds + \frac{2}{pna} \int_0^l \cos\left(\frac{pn}{l}at\right) y(s) \sin\left(\frac{pn}{l}s\right) ds \right] \cos\left(\frac{pn}{l}x\right).$$

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{pn}{l}\right)^2 \left[\frac{2}{l} \int_0^l \cos\left(\frac{pn}{l}at\right) f(s) \sin\left(\frac{pn}{l}s\right) ds + \frac{2}{pna} \int_0^l \cos\left(\frac{pn}{l}at\right) y(s) \sin\left(\frac{pn}{l}s\right) ds \right] \sin\left(\frac{pn}{l}x\right).$$

U holda (Veyershtass alomatiga ko'ra)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{pn}{l} \left(\frac{2}{l} |f_n| - \frac{2}{pna} |y_n| \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{pn}{l}\right)^2 \left(\frac{2}{l} |f_n| - \frac{2}{pna} |y_n| \right)$$

qatorlar yaqinlashishini ko'rsatish yetarli.

U $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |f_n|$ va $\sum_{n=1}^{\infty} n |y_n|$ qatorlar uchun hozir isbot qilingan xossalardan

kelib chiqadi. Shuning uchun o'sha mulohazalarni t bo'yicha hosilalar uchun o'tkazib, natijada $u(x,t) \in C^2\{[0;l] \times [0;T]\}$ ni hosil qilamiz. Bu holda oson tekshirish mumkinki (2.2.5) formula bilan belgilanadigan $u(x,t)$ funksiya tebranish tenglamasini qanoatlantiradi (ya'ni (2.2.1) shartni). Bunday $u(x,t)$ funksiya (2.2.2)-(2.2.4) shartlarni qanoatlantirishi uni ko'rishdan quriladi – chegaraviy va boshlang'ich shartlar hisobga olingan. Teorema isbotlandi.

Shunday qilib, yechim qurildi. Ba'zi shartlarda bu yechim yagona ekanligini isbotlaymiz.

1–chi chegaraviy masalaning yagonaligi

Quyidagi umumiy 1 – chegaraviy masalani qaraymiz:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, \quad 0 < t < T; \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u_t(x, 0) = j(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u(0, t) = m_1(t), & 0 \leq t \leq T; \\ u(l, t) = m_2(t), & 0 \leq t \leq T; \end{cases}$$

Bu chegaraviy masalaning yechimi yagonaligini isbotlaymiz.

Teorema 2.2.2 (yagonalik). Faraz qilaylik, $u_1(x, t), u_2(x, t) \in C^2\{[0; l] \times [0; T]\}$ va $u_1(x, t), u_2(x, t)$ funksiyalar bir hil [2.2.1-2.2.4] chegaraviy masalaning echimi bo'lsin, u holda $[0; l] \times [0; T]$ sohada $u_1(x, t) - u_2(x, t) \equiv 0$.

Isbot. Ko'rinib turibdiki, funksiya $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ bizning chegaraviy masalamizning f, m_1, m_2, f, j funksiyalar aynan 0 ga teng bo'lgandagi yechim bo'ladi. Shunday qilib,

$$v(x, t) \in C^2\{[0; l] \times [0; T]\}$$

va

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, & 0 < x < l, \quad 0 < t < T; \\ v(0, t) \equiv v(l, t) \equiv v(x, 0) \equiv v_t(x, 0) \equiv 0. \end{cases}$$

$v(x, t) \equiv 0$ isbotlash talab etiladi.

$$E(t) = \int_0^l \left[(v_t(x, t))^2 + a^2 (v_x(x, t))^2 \right] dx$$

funksiyani aniqlaymiz va uni energiya integrali deb ataymiz. Ko'rinib turibdiki, bizning v funksiya shartlarida $E(t)$ differensialanuvchi funksiyadir. Demak uning hosilasi quyidagicha hisoblanadi:

$$E'(t) = \int_0^l \left[2v_t(x, t)v_{tt}(x, t) + 2a^2 v_x(x, t)v_{xt}(x, t) \right] dx$$

Bu integralda ikkinchi qo'shiluvchini x bo'yicha bo'laklab integrallab quyidagi ifodaga kelimiz: $E'(t) \equiv 0$ yoki

$$E(t) = \int_0^l \left[(v_t(x,t))^2 + a^2 (v_x(x,t))^2 \right] dx \equiv \text{const}$$

Umuman olaganda biz yopiq [2.2.1-2.2.4] tenglamar bilan ifodalanuvchi sistemada energiya saqlanish qonunininig yana bir ko'rinishiga ega bo'ldik. Boshlang'ich shartlardan quyidagiga ega bo'lamiz. $v_t(x,0) = v_x(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq l$. Demak, $E(0) = 0 \Rightarrow E(t) = 0$. Integral ostidagi funksiyalarning manfiy bo'lmaganligi $v_t(x,t) \equiv v_x(x,t) \equiv 0$ ga teng ekanligi aniqlanadi. Bundan $v \equiv \text{const}$ boshlang'ich shartlardan esa $v \equiv 0$ ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

2.3-§. GURSA MASALASI.

Boshlang'ich shartlar xarakteristikalarda berilgan quyidagi oddiy masalalarni qaraymiz

$$\begin{cases} u_{xy} = f(x, y), \\ u(x, 0) = j_1(x), \\ u(0, y) = j_2(y). \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Qo'shimcha shartlar $x=0$ va $y=0$ xarakteristik to'g'ri chiziqlarda berilgan. Faraz qilaylik, $j_1(x)$ va $j_2(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi va $j_1(0)=j_2(0)$ qo'shimlik shartini bajarsin. (2.3.1) dagi tenglamani ketma-ket x va y bo'yicha integrallab

$$u_y(x, y) = u_y(0, y) + \int_0^x f(x, y) dx,$$

$$u(x, y) = u(x, 0) + u(0, y) - u(0, 0) + \int_0^y dh \int_0^x f(x, h) dx$$

yoki

$$u(x, y) = j_1(x) + j_2(y) - j_1(0) + \int_0^y dh \int_0^x f(x, h) dx \quad (2.3.2)$$

Shunday qilib, (2.3.1) dagi oddiy tenglamaning yechimi (2.3.2) analitik ko'rinishda ifodalanadi. (2.3.2) formuladan qo'yilgan masalaning yechimini mavjud va yagonaligi darhol kelib chiqadi.

Endi quyidagi chiziqli giperbolik tipdagi tenglamani yechimini o'rganaylik

$$u_{xy} = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u + f(x, y) \quad (2.3.3)$$

Bu tenglama uchun qo'shimcha shartlar $x=0$ va $y=0$ xarakteristik to'g'ri chiziqlarda berilgan bo'lsin:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= j_1(x), \\ u(0, y) &= j_2(y). \end{aligned} \quad (2.3.3')$$

Bu yerda, $j_1(x)$ va $j_2(y)$ funksiyalar differensiallanuvchi va $j_1(0)=j_2(0)$ qo'shimlik shartini bajarsin. $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$ koeffitsientlar x va y ning uzluksiz funksiyalari bo'lsin.

(2.3.3) formuladan $u(x, y)$ funksiya quyidagi integro-differensial tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi

$$u(x, y) = \int_0^y \int_0^x [a(x, h)u_x + b(x, h)u_h + c(x, h)u] dx dh + j_1(x) + j_2(y) - j_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(x, h) dx dh. \quad (2.3.4)$$

Bu tenglamani yechish uchun ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalanamiz.

Nolinchi yaqinlash sifatida

$$u_0(x, y) = 0$$

funksiyani olamiz. U holda (2.3.4) dan ketma-ket yaqinlashish uchun quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, y) &= j_1(x) + j_2(y) - j_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(x, h) dx dh \\ &\dots\dots\dots \\ u_n(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x [a(x, h) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b(x, h) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial h} + c(x, h) u_{n-1}] dx dh \end{aligned} \right\} \quad (2.3.5)$$

Bu yerdan

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \int_0^y [a(x, h) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b(x, h) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial h} + c(x, h) u_{n-1}] dh, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \int_0^x [a(x, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c(x, y) u_{n-1}] dx. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Ushbu $\{u_n(x, y)\}$, $\{\frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x}\}$, $\{\frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y}\}$ ketma-ketliklarni tekis

yaqinlashuvchi ekanligini isbotlaymiz. Bu uchun quyidagi ayirmani qaraymiz

$$\begin{aligned} z_n(x, y) &= u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y) = \\ &= \int_0^y \int_0^x [a(x, h) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x, h) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial h} + c(x, h) z_{n-1}] dx dh, \\ \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x} = \\ &= \int_0^y [a(x, h) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x, h) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial h} + c(x, h) z_{n-1}(x, h)] dh, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y} = \\ &= \int_0^x [a(x, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c(x, y) z_{n-1}(x, y)] dx.\end{aligned}$$

M - $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ koeffitsientlarning absolyut quymatlarining yuqori chegarasi, x va y lar biror ($0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$) kvadratda o`zgarsa, u holda  $N$   $z_0 = u_1(x, y)$  va uning hosilalarining absolyut qiymatlarining yuqori chegarasi bo`lsin:

$$|z_0| < N, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial x} \right| < N, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial y} \right| < N.$$

z_n , $\frac{\partial z_n}{\partial x}$, $\frac{\partial z_n}{\partial y}$ funksiyalar uchun mojarant baholashlarni olaylik. Ravshanki,

$$\begin{aligned}|z_1| &< 3NMxy < 3NM \frac{(x+y)^2}{2!}, \\ \left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| &< 3NMy < 3NM(x+y), \\ \left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| &< 3NMx < 3NM(x+y).\end{aligned}$$

Faraz qilaylik, quyidagi rekurrent baholashlar o`rinli bo`lsin:

$$\begin{aligned}|z_n| &< 3NM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}, \\ \left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| &< 3NM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!}, \\ \left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| &< 3NM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!}.\end{aligned}$$

Bu yerda $K > 0$ – biror o`zgarmas son, uni qiymatini quyida aniqlashtiramiz. Bu baholashlardan va  $(n+1)$  – yaqinlashish formulasidan foydalanib hamda bir qator soddalashtirishlardan so`ng tengsizliklarni kuchaytirib quyidagi baholashlarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}
|z_{n+1}| &< 3NM^{n+1}K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} \left(\frac{x+y}{n+3} + 2\right) < \\
&< 3NM^{n+1}K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3N}{K^2M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}, \\
\left| \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x} \right| &< 3NM^{n+1}K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{x+y}{n+2} + 2\right) < \\
&< 3NM^{n+1}K^n \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3N}{K} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}, \\
\left| \frac{\partial z_{n+1}}{\partial y} \right| &< 3NM^{n+1}K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{x+y}{n+2} + 2\right) < \\
&< 3NM^{n+1}K^n \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3N}{K} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Bunda, $K = L + 2$.

Bu tengsizliklarning o'ng tomonlarida ko'paytuvchi aniqligida e^{2KLM} ning yoyilmasining hadlari turibdi. Bu tengsizliklar quyidagi funksiyalar ketma-ketligini tekis yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatadi.

$$\begin{aligned}
u_n &= u_0 + z_1 + \dots + z_{n-1}, \\
\frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \\
\frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Demak, ushbu funksiyalar ketma-ketligini quyidagicha belgilasak, u holda

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y), \\
v(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y), \\
w(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y)
\end{aligned}$$

tengliklarni hosil qilamiz. (2.3.5) va (2.3.6) formulalarda integral ostiga limitga o'tib quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x [a(x, h)v + b(x, h)w + c(x, h)u] dx dh, \\ v(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + \int_0^y [a(x, h)v + b(x, h)w + c(x, h)u] dh, \\ u(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^x [a(x, y)v + b(x, y)w + c(x, y)u] dx. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.7)$$

Bu yerdan

$$v = u_x,$$

$$w = u_y$$

tenglik kelib chiqadi. Bundan esa $u(x, y)$ quyidagi integro-differensial tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= j_1(x) + j_2(y) - j_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(x, h) dx dh + \\ &+ \int_0^y \int_0^x [a(x, h)u_x + b(x, h)u_h + c(x, h)u] dx dh \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Ushbu $u(x, y)$ funksiya (2.3.3) differensial tenglamani ham qanoatlantirishini (2.3.4) ni x va y bo'yicha differensiallab ko'rsatish mumkin. Bu funksiya ko'rish qiyin emaski qo'shimcha shartlarni ham qanoatlantiradi.

Endi (2.3.3)-(2.3.3') masalani yechimi yagona ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, masala ikkita $u_1(x, y)$ va $u_2(x, y)$ yechimlarga ega bo'lsin, u holda ularni ayirmasi

$$U(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

funksiya quyidagi bir jinsli integro-differensial tenglamani qanoatlantiradi:

$$U(x, y) = \int_0^y \int_0^x (aU_x + bU_y + cU) dx dh.$$

Quyidagilarni absolyut qiymatlarini yuqori chegaralarini H_1 orqali belgilaylik, u holda barcha $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$ uchun

$$|U(x, y)| < H_1, \quad |U_x(x, y)| < H_1, \quad |U_y(x, y)| < H_1$$

bo`ladi. $z_n(x, y)$ uchun olingan baholarni takrorlab, n ning ixtiyoriy qiymatlari uchun quyidagi tengsizlikka kelimiz

$$|U| < 3H_1 M^{n+2} K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H_1}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Bundan

$$U(x, y) \equiv 0 \quad \text{yoki} \quad u_1(x, y) \equiv u_2(x, y)$$

kelib chiqadi, bu esa xarakteristikalarda berilgan shartlarda masalaning yechimi yagona ekanligini isbotlaydi.

3-bob. ELLIPTIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN KORREKT MASALALAR.

3.1-§. Laplas tenglamasi uchun Dirixle va Neyman masalalari.

Asosiy tushunchalar. Laplas tenglamasining fundamental yechimi. Elliptik tipdagi tenglamalardan eng soddasi va muhimi Laplas

$$\Delta u = 0, \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (3.1.1)$$

tenglamasidir.

E^n fazoda biror yopiq S sirt bilan chegaralangan chekli yoki cheksiz D sohani qaraymiz.

Agar $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ funksiya chekli D sohada ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, Laplas tenglamasini qanoatlantirsa, $u(x)$ ni D sohada *garmonik funksiya* deyiladi.

Agar $u(x)$ funksiya fazo chekli nuqtasining yetarli kichik atrofida, ya'ni markazi shu nuqtada bolgan yetarli kichik radiusli sharda garmonik bo'lsa, uni shu nuqtada *garmonik* deb ataladi.

Agar $u(x)$ funksiya cheksiz D sohaning boshidan chekli masofada yotgan ixtiyoriy x nuqtasida garmonik bo'lib, yetarli katta $|x|$ lar uchun ($|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$)

$$|u(x)| \leq \frac{c}{|x|^{n-2}}, \quad c = \text{const}$$

tengsizlik bajarilsa, $u(x)$ funksiya cheksiz D sohada garmonik deyiladi.

E^n fazodagi ikki $x = (x_1^2, \dots, x_n^2)$, $x = (x_1^2, \dots, x_n^2)$ nuqta orasidagi masofani r orqali belgilab olamiz, ya'ni

$$r = |x - x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i)^2}$$

Bevosita tekshirish bilan ishonch hosil qilish mumkinki, ushbu

$$E(x, x) = \begin{cases} r^{2-n}, & n > 2 \\ \ln \frac{1}{r}, & n = 2 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

funksiya $x \neq x$ bo'lganda x bo'yicha ham, x bo'yicha ham Laplas tenglamasini qanoatlaniradi.

Haqiqatan,

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = (2-n)r^{1-n} \frac{\partial r}{\partial x_i} = (2-n)r^{1-n} \frac{x_i - x_i}{r} = (2-n)r^{1-n}(x_i - x_i) ,$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2} = (2-n)r^{-n} - (2-n)nr^{-n-2}(x_i - x_i)^2 .$$

Oxirgi ifodadan (3.1.1) tenglamaning chap tomoniga olib borib qo'yamiz. U holda

$$\Delta E = n(2-n)r^{-n} - n(2-n)r^{-n-2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_i)^2 = 0 .$$

Huddi shunga o'xshash $n=2$ hol tekshirib ko'riladi. $E(x, x)$ funksiya x va x ga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun bu funksiya $x \neq x$ da x bo'yicha ham Laplas tenglamasini qanoatlantiradi deb aytishiniz mumkin.

(3.1.2) formula bilan aniqlangan $E(x, x)$ funksiyani Laplas tenglamasining *elementar* yoki *fundamental* yechimi deyiladi.

Cheksizlikda

$$E(x, x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right)$$

baho o'rinli bo'ladi.

Xaqiqatan ham, $E(x, x)$ funksiyaning yetarli katta $|x|$ lardagi qiymati qiziqtirayotgani uchun $|x| > 2|x|$ deb olishimiz mumkin.

U holda $r = |x - x| \geq |x| - |x|$ tengsizlikka asosan, $|x| < \frac{|x|}{2}$ bo'lgani uchun $|r| > \frac{|x|}{2}$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu darhol

$$E(x, x) < \frac{2^{n-2}}{|x|^{n-2}}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Qiymatlari ikki nuqta o'rtasidagi masofa r ga bog'liq bo'lgan Laplas tenglamasini qanoatlantiruvchi $u(r)$ funksiyalar orasida $C_1 E(x, x) + C_2$ ko'rinishdagi funksiyalardan boshqa funksiya mavjud emas, bunda C_1, C_2 — o'zgarmas sonlar.

Faraz qilaylik, shunday funksiya mavjud bo'lsin, ya'ni $u(x) = l(r)$. Bu funksiya x_i o'zgaruvchi bo'yicha hosilalarni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - x_i}{r} \frac{\partial l}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{(x_i - x_i)^2}{r^2} \frac{d^2 l}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dl}{dr} \left[1 - \frac{(x_i - x_i)^2}{r^2} \right].$$

Bu hosilalarni (3.1.1) tenglamaga qo'ysak, Laplas tenglamasi o'rniga

$$l'' + \frac{n-1}{r} l' = 0$$

oddiy differensial tenglama hosil bo'ladi.

Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$C_1 E(x, x) + C_2$$

dan iboratdir.

Dirixle va Neyman masalalarining qo'yilishi hamda ular yechimlarining yagonaligi. $D - E^n$ fazoda chekli soha bo'lib, uning chegarasi S bo'laklari silliq sirtidan iborat bo'lsin. $E^n - \bar{D}$ ni D_1 orqali belgilab olamiz, ya'ni $D_1 = E^n - \bar{D}$.

Dirixlening ichki masalasi. D sohada garmonik $\bar{D} = D \cup S$ da uzluksiz va

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = j(x_0), \quad x_0 \in S, \quad x \in D \quad (3.1.3)$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi $u(x)$ funksiya topilsin.

Dirixlening tashqi masalasi. D_1 sohada garmonik shunday $u(x)$ topilsinki, u S da berilgan uzluksiz qiymatlarni qabul qilib, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = j(x_0), \quad x_0 \in S, \quad x \in D_1 \quad (3.1.4)$$

$|x| \rightarrow \infty$ da $n > 2$ bo'lgan holda $|x|^{2-n}$ dan sekin bo'lmay nolga intilsin, $n = 2$ da esa chekli limitga intilsin.

Neymanning ichki masalasi. D sohada garmonik $D = D \cup S$ da o'zining birinchi tartibli hosilalari bilan birga uzluksiz bo'lgan $u(x)$ funksiya topilsinki, uning normal bo'yicha olingan hosilasi S da avvaldan berilgan qiymatlarga teng bo'lsin, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial u}{\partial h} = y(x_0), \quad x \in D, \quad x_0 \in S, \quad (3.1.5)$$

bu yerda $n - S$ ga o'tkazilgan normal.

Neymanning tashqi masalasi. D_1 sohada garmonik shunday $u(x)$ topilsinki, uning normal bo'yicha olingan hosilasi S da avvaldan berilgan qiymatlarni qabul qilsin, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial u}{\partial h} = y(x_0), \quad x \in D_1, \quad x_0 \in S \quad (3.1.6)$$

hamda funksiyaning o'zi cheksiz uzoqlashgan nuqtada $n > 2$ bo'lgan holda nolga, $n = 2$ da esa chekli limitga intilsin.

Dirixlening ichki va tashqi masalalari bittadan ortiq yechimga ega bo'lmaydi.

Haqiqatan ham, bu masalalar bir xil chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ikkita u_1 va u_2 yechimga ega bo'lsin. U holda, $u = u_1 - u_2$ funksiya (3.1.1) tenglamani va $u|_S = 0$ shartni qanoatlantiradi. Avval ichki masalani ko'ramiz. Ekstremum prinsipining ikkinchi natijasiga ko'ra barcha D sohada $u \equiv 0$ bo'ladi, demak $u_1 = u_2$.

Endi tashqi masalani tekshiramiz.

Avval $n > 2$ bo'lsin. Shartga asosan $u(x)$ funksiya D_1 sohada garmonik, shu bilan birga $u|_S = 0$ va x nuqta koordinata boshidan yetarli uzoqlashganda

$|u(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-2}}$, $C = \text{const}$ tengsizlik bilan o'rinli bo'ladi.

Markazi koordinata boshida va radiusi R ga teng bo'lgan hamda S sirtini to'la o'z ichiga oluvchi S_R sferani olamiz. $u(x)$ funksiyani S sirt va S_R sfera bilan chegaralangan D_R sohada qaraymiz. Agar radius yetarli katta bo'lsa, S_R sferada $|u(x)| \leq \frac{C}{R^{n-2}}$ tengsizlik bajariladi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz va R ni shunday katta qilib tanlaymizki, $CR^{2-n} < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsin. D_R sohada $u(x)$ funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga yoki S da, yoki S_R da erishadi, demak, bu qiymatlar modul bo'yicha ε dan katta emas. $x - D_1$ sohaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Yetarli katta R da bu nuqta D_R ga tushadi, shuning uchun ham $|u| < \varepsilon$. Ammo ε — ixtiyoriy musbat son bo'lganligi sababli $u(x) = 0$, demak $u_1(x) = u_2(x)$.

Agar $n = 2$ bo'lsa, conform almashtirish (masalan kasr chiziqli) natijasida cheksiz sohani chekli sohaga o'tkazish mumkin. Bunda Laplas tenglamasi yana Laplas tenglamasiga, cheksiz sohada garmonik bo'lgan $u(x)$ funksiya esa chekli sohada garmonik bo'lgan funksiyaga o'tadi va bu funksiya sohaning chegarasida nolga teng bo'ladi. Shunday qilib, cheksiz soha uchun Dirixle masalasining yechimining yagonaligi isbot qilingan chekli sohadagi Dirixle masalasiga keladi.

Laplas tenglamasi uchun Neymanning ichki masalasi o'zgarmas son aniqligida topiladi, ya'ni masalaning ikkita yechimi bir-biridan o'zgarmas son bilan farq qiladi.

Faraz qilaylik, bu masala bir xil (3.1.5) shartlarni qanoatlantiruvchi ikkita $u_1(x)$ va $u_2(x)$ yechimga ega bo'lsin. U holda, bu yechimlarning ayirmasi bo'lgan quyidagi $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ funksiya (1) tenglamani va $\left. \frac{\partial u}{\partial h} \right|_S = 0$ shartni qanoatlanti-radi. Oxirgi shartni qanoatlantiruvchi garmonik funksiya garmonik funksiyalarning quyidagi

Agar D sohada garmonik, $D \cup S$ da birinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz bo'lgan $u(x)$ funksiyaning $\frac{\partial u}{\partial h}$ normal hosilasi D ning chegarasi S da nolga teng bo'lsa, barcha $x \in D$ nuqtalar uchun $u = \text{const}$ bo'ladi.

xossasiga asosan barcha D sohada o'zgarmas songa teng bo'ladi, ya'ni $u(x) = \text{const}$ yoki $u_1(x) = u_2(x) = \text{const}$ Neymanning ichki masalasi hamma vaqt ham yechimga ega bo'lavermaydi. Yana garmonik funksiylarning quyidagi yana bir quyidagi

D sohada garmonik, $D \cup S$ da o'zining birinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz bo'lgan $u(x)$ funksiyaning $\frac{\partial u}{\partial h}$ normal hosilasidan S bo'yicha olingan integral nolga teng—xossasiga asosan

$$\int_S y \, dS = 0 \quad (3.1.6)$$

Bo'lishi kerak. Bu shart Neyman ichki masalasining yechimga ega bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shartdir.

Agar fazoning o'lchovi $n > 2$ bo'lsa, u holda Neymanning tashqi masalasi bittadan ortiq yechimga ega bo'lmaydi.

Bu fikrning to'g'riligiga ishonch hosil qilish uchun yuqorida kiritilgan chegaralari S va S_R iborat bo'lgan D_R sohaga quyidagi

$$\sum_{i=1}^n \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = \int_S u(y) \frac{\partial u}{\partial h} ds$$

formulani qo'llaymiz:

$$\sum_{i=1}^n \int_{D_R} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = \int_S u \frac{\partial u}{\partial h} dS + \int_{S_R} u \frac{\partial u}{\partial h} dS_R. \quad (3.1.7)$$

S_R sfera bo'yicha olingan integralni baholaymiz. R yetarli katta bo'lganda quyidagi lemma:

Lemma. Agar $u(x)$ funksiya cheksiz uzoqlashgan nuqtada garmonik bo'lsa, ushbu tengsizliklarni qanoatlantiradi.

$$|u(x)| < \frac{A}{|x|^{n-2}}, \quad |D^i u| < \frac{A}{|x|^{n-2+i}}, \quad n \geq 3$$

bunda $D^i u$ — $u(x)$ funksiyaning i –tartibli ixtiyoriy hosilasi

$$|u(x)| < A, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|, \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| < \frac{A}{|x|^2}, \quad n \geq 2$$

$$|u(x)| \leq \frac{C}{R^{n-2}}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial h} \right| \leq \frac{C_1}{R^{n-1}}, \quad C, C_1 - \text{const}$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. ga asosan

$$|u(x)| \leq \frac{C}{R^{n-2}}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial h} \right| \leq \frac{C_1}{R^{n-1}}, \quad C, C_1 - \text{const}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

$$\left| \int_{S_R} u \frac{\partial u}{\partial h} dS_R \right| \leq \frac{CC_1 |S_R|}{R^{2n-3}} = \frac{CC_1 |S_1|}{R^{n-2}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

$\left. \frac{\partial u}{\partial h} \right|_S = 0$ bo‘lgani uchun (3.1.7) formuladagi S bo‘yicha olingan integral nolga

teng. Shunday qilib, $R \rightarrow \infty$ da

$$\sum_{i=1}^n \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \rightarrow 0$$

Demak, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $u = \text{const}$. Ammo $|x| \rightarrow \infty$ da $u \rightarrow 0$ uchun,

$u = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar $n = 2$ bo‘lsa, Neymanning tashqi masalasi o‘zgarmas son aniqligida topiladi.

Bu holda ham huddi yuqoridagidek, $u = \text{const}$ tenglikka ega bo‘lamiz. Cheksiz uzoqlashgan nuqtada $n = 2$ da garmonik funksiya chegaralangan bo‘lgani uchun, yuqoridagi fikrimizning to‘g‘riligiga darhol ishonch hosil qilamiz.

3.2-§. IKKINCHI TARTIBLI ELLIPTIK TIPDAGI CHIZIQLI TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALALARNI QO‘YILISHI.

Ikkinchi tartibli elliptik tipdagi chiziqli tenglamani biz soddalik uchun chegarasi S egri chiziqdan iborat deb hisoblaymiz. Agar erkli o‘zgaruvchilarni x va y orqali belgilasak, tenglama ushbu

$$Lu \equiv \Delta u + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y) \quad (3.2.1)$$

ko‘rinishda yoziladi, bu yerda $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Chegaraviy masalalarning qo‘yilishi. $p_1(x, y)$, $p_2(x, y)$, $q(x, y)$ va $r(x, y)$ S da berilgan haqiqiy funksiyalar bo‘lsin. (3.2.1) tenglama uchun qo‘yiladigan bir qator chegaraviy masalalarni Puankarening ushbu *chiziqli masalasi* o‘z ichiga oladi: D sohada (3.2.1) tenglamaning

$$p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + q(x, y)u = r(x, y), \quad (x, y) \in S \quad (3.2.2)$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ regulyar yechimi topilsin, bu yerda $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ va $u(x, y)$ deganda bu funksiyalarning D uchidan turib S dagi limit tushuniladi.

$p_1(x, y) = p_2(x, y) = 0$, $q(x, y) \neq 0$ bo‘lgan holda (3.2.2) chegaraviy shart

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in S \quad (3.2.3)$$

ko‘rinishda yoziladi, bunda $g(x, y) = g(x, y)/q(x, y)$.

(3.2.1), (3.2.3) masala *birinchi chegaraviy masala* yoki *Dirixle masalsi* deyiladi.

Puankare masalasining $q(x, y) = 0$ bo‘lgan holi, ya’ni

$$p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = r(x, y), \quad (x, y) \in S \quad (3.2.4)$$

qiya hosilali masala deyiladi.

(3.2.4) shartda, barcha S egri chiziqda

$$p_1(x, y) = \cos(n, x), \quad p_2(x, y) = \cos(n, y),$$

bu yerda n S ga o'tkazilgan bo'lsa, qiya hosilali masala *ikkinchi chegaraviy masala* yoki *Neyman masalasi* deyiladi.

3.3-§. EKSTREMUM PRINSIPI. DIRIXLE MASALASI YECHIMINING YAGONALIGI VA MAVJUDLIGI.

Bizga ma'lumki, Dirixle masalasi $\Delta u = 0$ Laplas tenglamasi uchun, ya'ni garmonik funksiyalar uchun bittadan ortiq yechimga ega bo'lamaydi. Yuqoridagi (3.2.1) tenglama uchun shunday yagonalik teoremasi o'rinli bo'ladimi yoki yo'qmi degan savol tug'iladi. Bu savol har doim ham ijobiy javobga ega bo'lavermaydi.

Shu maqsadda ushbu

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (3.3.1)$$

tenglamani tekshiramiz, bunda k^2 — o'zgarmas son.

(3.3.1) tenglamaning yechimini o'zgaruvchilarni ajratish usuli bilan ya'ni

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

ko'rinishda qidiramiz. Bunga asosan (5) tenglamadan

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} + k^2 = \text{const}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu yerda biror musbat a^2 sonidan iborat bo'lib, $a^2 < k^2$ bo'lsin deb, hisoblaymiz. Avvalgi tengliklardan

$$X'' + a^2 X = 0, \quad Y'' + a^2 Y = 0$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Bu tenglamalarni integrallab, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$u(x, y) = \sin a x \sin \sqrt{k^2 - a^2} y \quad (3.3.2)$$

yechimga ham ega bo'ladi. Bu yechim

$$0 \leq x \leq \frac{p}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{p}{\sqrt{k^2 - a^2}}$$

to'rtburchakning barcha chegarasida nolga teng.

Demak, (3.3.1) tenglamaning (3.3.2) yechimi yuqoridagi to'rtburchakning chegara-sida nolga teng bo'lsa ham, to'rtburchakning ichida noldan farqlidir.

Ekstremum prinsipi. Agar barcha D sohada $c(x, y) \leq 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda D sohada

$$Lu = 0 \quad (3.3.3)$$

tenglamaning $u(x, y)$ regulyar yechimi hech bir $(x, y) \in D$ nuqtada o'zining musbat maksimumiga va manfiy minimumiga erishmaydi.

Avvalo $c < 0$ bo'lsin. $u(x, y)$ yechim $(x, y) \in D$ nuqtada musbat maksimumga erishsin deb faraz qilamiz. U holda, bu nuqtada

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq 0.$$

Bundan

$$\Delta u \leq 0, \quad a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad cu < 0.$$

Demak, tekshirilayotgan nuqtada $Lu < 0$. Bu esa (3.3.3) tenglamaga qarama-qarshidir.

Huddi shunday, $(x, y) \in D$ nuqtada $u(x, y)$ yechimning manfiy minimumiga erishmasligi ko'rsatiladi. Endi $c \leq 0$ bo'lgan holni ko'ramiz. Bu holda $u(x, y)$ funksiya o'rniga

$$u(x, y) = (A - e^{ax})v(x, y) \quad (3.3.4)$$

almashtirish yordamida yangi $v(x, y)$ funksiya kiritamiz. Bunda A, a —keyinchalik mos ravishda tanlab olinadigan musbat sonlardir. (3.3.3) tenglamaga $u(x, y)$ o'rniga (3.3.4) ifodani olib borib qo'yganimizdan so'ng, $v(x, y)$ ga nisbatan (3.3.3) ga o'xshash

$$\Delta v + a^*(x, y) \frac{\partial v}{\partial x} + b^*(x, y) \frac{\partial v}{\partial y} + c^*(x, y)v = 0$$

tenglama hosil bo'ladi, bu yerda

$$a^*(x, y) = \frac{aA - e^{ax}(a + 2a)}{A - e^{ax}}, \quad b^*(x, y) = b(x, y),$$

$$c^*(x, y) = -\frac{e^{ax}(a^2 + aa + c) - cA}{A - e^{ax}}.$$

a ni yetarlicha katta qilib tanlab olamizki, D sohada $a^2 + aa + c > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsin va A uchun e^{ax} funksiyaning D sohadagi yuqori chegarasidan katta bo'lgan qiymatni olsak, $A - e^{ax} > 0$ tengsizlik bajariladi. U holda $-cA \geq 0$ bo'lgani sababli, $c^* < 0$ tengsizlik bajariladi.

Shu bilan ekstremum prinsipi isbot bo'ldi.

Bu prinsipdan (3.2.1), (3.2.3) Dirixle masalasi yechimning yagonaligi darhol kelib chiqadi.

Haqiqatan ham, bu masalaning ikkita u_1 va u_2 yechimi bor bo'lsin. U holda $v = u_1 - u_2$ ayirma (3.3.3) ning yechimi bo'lib, D sohaning chegarasi S da nolga teng bo'ladi.

Agar v funksiya D ning ichida nolga teng bo'lmasa, u D ning ichida musbat yoki manfiy qiymatlarni qabul qiladi.

Demak, v funksiya $\bar{D}$ da uzluksiz bo'lganligi uchun biror $(x, y) \in D$ nuqtada musbat maksimum yoki manfiy minimumga erishadi. Bu esa $c \leq 0$ bo'lganda ekstremum prinsipiga qarama-qarshidir. Bu shart bajarilganda $\forall (x, y) \in D$ nuqtada $v(x, y) = 0$, ya'ni muhim ahamiyatga ega.

Ikkinchi tartibli chiziqli elliptik tenglama yechimining mavjudligi.

(3.2.1) tenglamaning a, b, c koefitsiyentlari va f ozod hadi analitik funksiyalar bo'lgan holda bu tenglamaning kichik D sohalar uchun yechimga ega bo'lishi Koshi—Kovalevskaya teoremasidan kelib chiqadi. Ammo ular analitik funksiyalar bo'lmasa, (3.2.1) tenglama yechimining mavjudligini ko'rsatish uchun boshqa usullar-ni qo'llashga to'g'ri keladi. a, b, c va f funksiyalarni $C^1(D+S)$ sinfga tegishli bo'lsin deb hisoblaymiz. Biz *parametriks* deb ataluvchi

$$y(x, y; x, h) = -\ln r, \quad r^2 = (x-x)^2 + (y-h)^2$$

funksiyani tekshiramiz. Ma'lumki, har bir juft $(x, y), (x, h)$ nuqtalarga nisbatan $(x, y) \neq (x, h)$ da bu funksiya Laplas tenglamasining yechimidan iborat bo'ladi, shu bilan birga

$$v(x, y) = \int_D y(x, y; x, h) r(x, h) dx dh$$

hajm potentsiali $r(x, h)$ zichlik $C^1(D \cup S)$ sinfga tegishli bo'lganda,

$$\Delta v = -2pr(x, y) \tag{3.3.5}$$

Puasson tenglamasining yechimidan iborat bo'ladi.

Endi $r(x, y) \in C^1(\bar{D})$ funksiyani shunday tanlab olishga harakat qilamizki,

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y) \quad (3.3.6)$$

funksiya (3.2.1) tenglamaning yechimi bo'lsin, bu yerda $w(x, y) \in C^3(D \cup S)$ sinfga tegishli ixtiyoriy funksiyadir.

(3.3.6) ifodani (3.2.1) tenglamaga olib borib qo'yamiz. (3.3.5) tenglikka asosan,

$$\Delta u = \Delta w - 2pr$$

Bunga binoan, Lu operator quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$Lu = Lw - 2pr + \int_D (ay_x + by_y + cy) r(x, h) dx dh.$$

Agar biz qisqalik uchun ushbu

$$K(x, y; x, h) = \frac{1}{2p} (ay_x + by_y + cy) = -\frac{1}{2p} \left[a(x, y) \frac{x-x}{r^2} + b(x, y) \frac{y-h}{r^2} + c(x, y) \ln r \right] \quad (3.3.7)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2p} (Lw - f) \quad (3.3.8)$$

belgilashlarni kiritsak, $r(x, y)$ funksiyani aniqlash uchun

$$r(x, y) - \int_D K(x, y; x, h) r(x, h) dx dh = g(x, y) \quad (3.3.9)$$

integral tenglamani hosill qilamiz. Bu integral tenglamaning (3.3.7) yadrosi

$x=x, y=h$ bo'lganda $\frac{1}{r}$ ko'rinishdagi maxsuslikka ega, demak, uning kvadrati

D sohada integrallanuvchi bo'lmaydi. Ammo, integratsiyalangan yadro

$$K_2(x, y; x, h) = \int_D K(x, y; s, t) K(s, t; x, h) ds dt \quad (3.3.10)$$

bu sohada kvadrati bilan integrallanuvchi bo'ladi. Shuning uchun (3.3.10) integral tenglama o'rniga avval integratsiyalangan

$$r(x, y) - \int_D K_2(x, y; x, h) r(x, h) dx dh = h(x, y) \quad (3.3.11)$$

integral tenglamani tekshiramiz, bu yerda

$$h = g + \int_D K(x, y; x, h) r(x, h) dx dh. \quad (3.3.12)$$

w va f funksiyalarga qo'yilgan shartlarga asosan (3.3.12) tenglikdan $h(x, y)$ funksiyani $C^1(\bar{D})$ sinfga tegishli bo'lishi kelib chiqadi. Agar D kichik soha bo'lsa, ya'ni

$$\int_D dx dh \int_D K_2^2(x, y; x, h) dx dy < 1 \quad (3.3.13)$$

shart bajarilsa, (3.3.11) integral tenglamaga mos bo'lgan bir jinsli tenglama faqat trivial, ya'ni nolga teng bo'lgan yechimga ega bo'ladi.

Demak, (3.3.11) tenglama hamma vaqt $C^1(\bar{D})$ sinfga tegishli bo'lgan yagona yechimga ega bo'ladi. (3.3.9) tenglamaning har bir yechimi (3.3.11) tenglamaning ham yechimi bo'ladi. Lekin (3.3.13) shart bajarilganda, biz ko'rdikki, (15) tenglama yagona $r(x, y)$ yechimga ega. $r(x, y)$ yordamida yangi

$$r_1(x, y) = g(x, y) + \int_D K(x, y; x, h) r(x, h) dx dh \quad (3.3.14)$$

funksiyani hosil qilamiz. Agar biz barcha D sohada $r_1(x, y) = r(x, y)$ ekanligini ko'rsatsak, shu bilan birga $r(x, y)$ (3.3.9) tenglamaning yechimi bo'lishi isbotlangan bo'ladi. Shu maqsadda (3.3.11) tenglamani (3.3.10) ga asosan

$$\begin{aligned} r(s, t) &= h(s, t) + \\ &+ \int_D r(x, h) \int_D [K(s, t; s_1, t_1) K(s_1, t_1; x, h) ds_1 dt_1] dx dh = \\ &= h(s, t) + \int_D K(s, t; s_1, t_1) \left[\int_D K(s_1, t_1; x, h) r(x, h) dx dh \right] ds_1 dt_1 \end{aligned}$$

yoki (3.3.14) ga binoan,

$$r(s, t) = h(s, t) + \int_D K(s, t; s_1, t_1) [r_1(s_1, t_1) - g_1(s_1, t_1)] ds_1 dt_1$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Bu ifodani $K(x, y; s, t)$ ga ko'paytirib, so'ngra integrallab, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \int_D K(x, y; s, t) r(s, t) ds dt &= \int_D K(x, y; s, t) h(s, t) ds dt + \\ &+ \int_D K(x, y; s, t) \left\{ \int_D K(s, t; s_1, t_1) [r_1(s_1, t_1) - g_1(s_1, t_1)] ds_1 dt_1 \right\} ds dt = \\ &= \int_D K(x, y; s, t) h(s, t) ds dt + \int_D K_2(s, t; s_1, t_1) [r_1(s_1, t_1) - g_1(s_1, t_1)] ds_1 dt_1 \end{aligned}$$

(3.3.12) va (3.3.14) tengliklarga asosan

$$\begin{aligned} r_1(x, y) - g(x, y) &= \int_D K(x, y; s, t) g(s, t) ds dt + \\ &+ \int_D K(x, y; s, t) \left[\int_D K(s, t; x, h) g(x, h) \right] ds dt = \\ &= \int_D K_2(x, y; s_1, t_1) r_1(s_1, t_1) ds_1 dt_1 - \int_D K_2(x, y; s_1, t_1) g_1(s_1, t_1) ds_1 dt_1 \end{aligned}$$

yoki

$$r_1(x, y) - \int_D K(x, y; x, h) r_1(x, h) dx dh = h(x, y)$$

tenglamaga ega bo'lamiz, ya'ni $r_1(x, y)$ tenglamaning yechimidan iborat. Shunday qilib, bu tenglama yagona yechimga ega bo'lgani uchun $r_1(x, y) = r(x, y)$ ekanligi kelib chiqadi. Ammo $r_1 = r$ uchun (3.3.14) tenglik (3.3.9) integral tenglama bilan ustma – ust tushadi. (3.3.9) tenglamaning $r(x, y)$ yechimini (3.3.6) formulaga qo'yib, D sohada (3.2.1) tenglamaning ixtiyoriy $w(x, y) \in C^3(\bar{D})$ funksiyaga bog'liq bo'lgan yechimlari oilasiga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, (3.3.13) shartni qanoatlantiruvchi D sohada $C^1(\bar{D})$ sinfiga tegishli bo'lgan (3.2.1) tenglamaning hamma vaqt yechimga ega bo'lishi isbotlandi.

4-bob. PARABOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN KORREKT MASALALAR.

4.1-§. Parabolik tipdagi tenglamalar uchun asosiy masalalarning qo'yilishi.

Fizikaning issiqlik harakati va gazlarning diffuziyasi bilan bog'liq masalalarini o'rganish odatda ikkinchi tartibli xususiy hosilali parabolik tenglamalar orqali o'rganiladi. Bunday tenglamalarni kanonik shaklga keltirish bilan ularning eng sodda misoli sifatida

$$u_{tt} = u_{xx}$$

issiqlikning Ox o'qi bo'ylab erkin tarqalish tenglamasi hisoblanadi. Bu shakldagi tenglamalar chekli uzulikdagi sterjen, yaxlit uzun metal o'tkazgich bo'ylab tarqalayotgan issiqlik miqdorini uning x nuqtasiga mos kesimning t vaqtdagi $u(x,t)$ temperaturasi orqali o'rganishda hosil bo'ladi.

Chekli sterjenda issiqlikning tarqalishi. Biz tashqi muhitdan issiqlikdan himoyalangan l uzunlikdagi yetarlicha ingichka sterjenni qaraymiz. Aniqlik uchun sterjenni Ox o'qi bo'ylab bir uchini $x=0$ nuqtaga, uning ikkinchi uchini esa $x=l$ nuqtaga joylashtiramiz. Sterjen x nuqtasiga mos kesimning t vaqtdagi temperaturasi $u(x,t)$ bilan belgilaymiz.

Dastlab eng sodda masalalarni qaraymiz. Faraz qilaylik, sterjen uchlarida doimiy T_1 va T_2 temperaturalar ushlab turilgan bo'lsa, u holda bir jinsli sterjenda biz issiqlikning uning nuqtalari bo'ylab chiziqli uzatilishiga ega bo'lamiz:

$$u(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x \quad (4.1.1)$$

Ma'lumki, bunda issiqlik yuqori temperaturali uchdan past temperaturali uchga tomon oqadi. Bunda biz agar issiqlik oqimi Ox o'qining musbat yo'nalishida bo'lsa, uni musbat, aks holda manfiy deb qaraymiz.

Bu holda sterjenning S kesim yuzidan birlik vaqt mobaynida oqib o'tgan issiqlik miqdori

$$Q = -k \frac{T_2 - T_1}{l} S = -kS \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.1.2)$$

formula bilan hisoblanadi. Bunda k sterjenning issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti bo'lib, u sterjen materialiga bog'liq.

Endi sterjenda issiqlik tarqalishining umumiy holini qaraymiz, ya'ni bu holda $u(x,t)$ funksiya qanday parametrlar orqali aniqlanishi va qanday qonuniyatga bo'ysinishi haqida to'xtalamiz.

1) Sterjenning x nuqtasiga mos ko'ndalang kesim yuzidan (t_1, t_2) vaqt mobaynida oqib o'tgan issiqlik miqdori

$$Q_1 = -S \int_{t_1}^{t_2} k(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dt \quad (4.1.3)$$

formula bilan ifodalanadi. $k(x)$ sterjen x nuqtasiga mos kesimning issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti

2) Elementar fizikadan ma'lumki, bir jinsli issiqlik o'tkazuvchi jism temperaturasini Δu ga oshirish uchun unga

$$Q_2 = cm\Delta u = c r v \Delta u$$

miqdordagi issiqlik miqdorini berish kerak. Bunda c — jismning solishtirma issiqlik sig'imi, m — jism massasi, ρ — jism zichligi, v — jism hajmi bo'lib, jism bir jinsli bo'lganligi uchun bu parametrlar doimiy, ya'ni jism nuqtalariga va vaqtga bog'liq emas.

Agarda sterjen bir jinsli bo'lmasa, bu qiymatlar sterjen nuqtalariga bog'liq bo'lib, unga berilgan issiqlik miqdori quyidagicha ko'rinish oladi:

$$Q_2 = S \int_{x_1}^{x_2} c(x) r(x) \Delta u(x,t) dx \quad (4.1.4)$$

3) Sterjen ichki nuqtalarida issiqlik hosil bo'lishi mumkin. Bu issiqlik miqdori t vaqtda x nuqtadagi issiqlik manbalarining $F(x,t)$ zichligi bilan tavsiflanadi. Ushbu issiqlik manbalarining sterjen (x_1, x_2) qismiga (t_1, t_2) vaqt mobaynida bergan jami issiqlik miqdori

$$Q_2 = S \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x,t) dx dt \quad (4.1.5)$$

formula bilan beriladi.

Ushbu topilgan uchta issiqlik miqdorlari orqali sterjen (x_1, x_2) qismi uchun (t_1, t_2) vaqt oralig'ida issiqlik balansi tenglamasi tuzib, sterjenda issiqlikning tarqalish tenglamasini hosil qilishimiz mumkin bo'ladi. Buning uchun energiyaning saqlanish qonuni va (4.1.3), (4.1.4) va (4.1.5) formulalardan foydalansak, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\int_{t_1}^{t_2} k(x_2) \frac{\partial u(x_2, t)}{\partial x} - k(x_1) \frac{\partial u(x_1, t)}{\partial x} dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt = \quad (4.1.6)$$

(4.1.6) sterjenda issiqlik tarqalishining integral ko'rinishdagi tenglamasidir. Undagi integrallarga o'rta qiymat haqidagi teoremani qo'llab, issiqlik tarqalishining differensial formadagi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + F(x, t) = c(x) r(x) \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.1.7)$$

Agar sterjen bir jinsli bo'lsa (4.1.7) tenglamada k , c va ρ lar doimiy bo'lib, (4.1.7) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$u_t = a^2 u_{xx}(x, t) + F(x, t), \quad (4.1.8)$$

bunda

$$a^2 = \frac{k}{cr}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{cr}.$$

Agarda sterjenda tashqi issiqlik manbalari bo'lmasa, $F(x, t) = 0$ bo'lib, issiqlik tarqalish tenglamasi quyidagi sodda ko'rinishga keladi:

$$u_t = a^2 u_{xx}(x, t). \quad (4.1.9)$$

Chegaraviy masalalarning qo'yilishi. Yuqorida ta'kidlanganidek, issiqlik tarqalish va diffuziya tenglamalarini ifodalovchi matematik modellar ikkinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalardan iborat bo'lib, bu tenglamalar cheksiz ko'p yechimga ega. Bu tenglamalar qaralayotgan jarayonni bir qiymatli aniqlashi uchun unga shu jarayonni tavsiflovchi qo'shimcha shartlar ilova qilinishi lozim.

Issiqlik tarqalish tenglamalarida t bo'yicha birinchi tartibli xususiy hosila ishtirok etayotganligi uchun *boshlang'ich shart sifatida* jarayonning boshida

sterjen nuqtalarida o'rnatilgan temperaturani ifodalovchi shart, ya'ni $u(x, t)$ funksiyaning tajriba boshlangan t_0 ondagi qiymati berilishidan iborat bo'ladi:

$$u(x, t_0) = j(x). \quad (4.1.10)$$

Bunda $j(x)$, $0 \leq x \leq l$ - berilgan uzluksiz funktsiya, l - sterjen uzunligi. Odatda tajriba boshlangan t_0 vaqtni sanoq boshi deb olinadi, ya'ni $t_0 = 0$.

Faraz qilaylik, sterjen Ox o'qi boylab gorizontal joylashgan bo'lib, uning bir uchi $x=0$ nuqtada, ikkinchi uchi esa $x=l$ nuqtada bo'lsin. Uning uchlaridagi temperatura rejimiga asoslanib *chegaraviy shartlar* turli ko'rinishlarda qo'yilishi mumkin. Xuddi to'lqin tenglamasiga qo'yilgani kabi issiqlik tarqalish va diffuziya tenglamalariga ham asosan uch tipdagi chegaraviy shartlar qo'yiladi:

1) Sterjenning $x=0$ uchida vaqt davomida $u(0, t) = m_1(t)$ harorat, $x=l$ uchida esa $u(l, t) = m_2(t)$ harorat belgilangan bo'lsin. Bunda $m_1(t)$ va $m_2(t)$ lar biror $[0, T]$ vaqt oralig'ida aniqlangan berilgan funksiyalar, T jarayon kuzatiladigan vaqt uzunligi. Sterjen uchlarida berilgan

$$\begin{cases} u(0, t) = m_1(t) \\ u(l, t) = m_2(t) \end{cases}$$

ko'rinishdagi chegaraviy shartga birinchi tipdagi chegaraviy shart deb yuritamiz.

2) Sterjen uchlari kesim yuzidan oqib o'tuvchi issiqlik oqimi belgilangan bo'lsin.

Masalan uning $x=0$ cheti kesimidan vaqt davomida o'tuvchi $Q_1(0, t)$ belgilangan rejimga bo'singan bo'lsa

$$Q_1(0, t) = -k \frac{\partial u(0, t)}{\partial x}$$

tenglik bajariladi. Bundan sterjenning $x=0$ uchida $u_x(0, t) = n_1(t) = -\frac{Q_1(0, t)}{k}$ shart bajarilishi lozimligiga kelamiz.

Xuddi shu kabi sterjen $x=l$ cheti kesimidan vaqt davomida o'tuvchi $Q_2(l, t)$ belgilangan rejimga bo'singan bo'lsa

$$Q_2(l,t) = -k \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}$$

tenglik bajariladi. Bundan sterjenning $x=l$ uchida $u_x(l,t) = n_2(t) = -\frac{Q_2(l,t)}{k}$ shart bajarilishi lozimligiga kelimiz. Shunday qilib sterjen uchlarida issiqlik oqimi o'zgarishi belgilangan rejimga bo'sinishi talab qilinganda, issiqlik tarqalish tenglamasiga qo'shimcha

$$\begin{cases} u_x(0,t) = v_1(t) \\ u_x(l,t) = v_2(t) \end{cases}$$

chegaraviy shartlarning bajarilishi lozim ekanligiga kelimiz. Bu ko'rinishdagi chegaraviy shartlarga 2-tipdagi chegaraviy shartlar deb yuritamiz.

3) Faraz qilaylik, sterjen temperaturasi vaqt davomida aniq va $q(t)$ qonuniyat boyicha o'zgaruvchi tashqi muhit bilan issiqlik almashinuvi belgilangan rejimga bo'sinsin. Bu holda sterjen $x=0$ va $x=l$ uchlari uchun qo'yiladigan qo'shimcha shartlar

$$\begin{cases} u_x(0,t) = h_1 \{u(0,t) - q(t)\} \\ u_x(l,t) = h_2 \{u(l,t) - q(t)\} \end{cases}$$

ko'rinishda ifodalanib, ularga odatda 3-tipdagi chegaraviy shartlar deb yuritiladi.

Bulardan tashqari sterjenning ikkala uchida ikki tipdagi chegaraviy shart qo'yilishi ham mumkin. Bu tipdagi chegaraviy shartlarga aralash tipdagi chegaraviy shartlar deb yuritamiz.

4.1.1-Ta'rif. (4.1.7) *issiqlik tarqalish masalasining (4.1.10) boshlang'ich shart va 1-tipdagi (mos ravishda 2-tipli, 3-tipli yoki aralash tipli) chegaraviy sharni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga 1-tur (mos ravishda 2-tur, 3-tur yoki aralash) chegaraviy masala deyiladi.*

Chegaraviy masalaning regulyar yechimi deganda issiqlik tenglamasining boshlang'ich va belgilangan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi hamda ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi yechimiga aytiladi.

Ba'zan ta'riflangan chegaraviy masalalardan tashqari uzunligi chegaralanmagan yoki juda ham uzun sterjenda issiqlikning tarqalish masalasini

ham o'rganishga to'g'ri keladi. Bu holda sterjen bir uchi $-\infty$ likda va ikkinchi uchini esa $+\infty$ deb qarab, (4.1.7) tenglamaning faqat (4.1.10) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga duch kelamiz. Bu masala odatda Koshi masalasi deyiladi.

4.1.2-Ta'rif. (4.1.7) *issiqlik tarqalish masalasining $-\infty < x < +\infty, t \geq 0$ sohada aniqlangan va $u(x,0)=j(x), -\infty < x < +\infty$ sartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga issiqlik tarqalish tenglamasi uchun qo'yilgan Koshi masalasi deyiladi. Bunda $j(x), -\infty < x < +\infty$ berilgan funksiya.*

Xuddi shu kabi bir uchi chegaralanmagan sterjen uchun boshlang'ich shart va bitta chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish haqidagi chegaraviy masalalar ham uchraydi.

4.2-§. ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI YECHIMI UCHUN MAKSIMAL QIYMAT PRINSIPI. CHEGARAVIY VA KOSHI MASALASI YECHIMINING YAGONALIGI.

Ushbu o'zgarmas koeffitsiyentli

$$w_t = a^2 w_{xx} + b w_x + g w \quad (4.2.1)$$

issiqlik tarqalish masalasini qaraymiz. Ushbu tenglamada

$$w(x, t) = e^{mx+lt} u(x, t)$$

almashtirish bajarib

$$u_t = l e^{mx+lt} u + e^{mx+lt} u_t, w_x = m e^{mx+lt} u + e^{mx+lt} u_x, w_{xx} = m^2 e^{mx+lt} u + 2m e^{mx+lt} u_x + e^{mx+lt} u_{xx}$$

bo'lib, ularni yuqoridagi tenglamaga qo'ysak, unga teng kuchli bo'lgan

$$u_t = a^2 u_{xx} + (2ma^2 + b) u_x + (m^2 a^2 + bm - l + g) u$$

tenglamaga kelimiz. Agar bu tenglamada

$$m = -\frac{b}{2a^2}, \quad l = g - \frac{b^2}{4a^2}$$

deb olsak so'ngi tenglama

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (4.2.2)$$

sodda ko'rinishga keladi. Demak (4.2.1) va (4.2.2) differensial tenglamalar bir vaqtda yechimga ega yoki ega bo'lmaydi. Shuning uchun (4.2.2) ko'rinishdagi tenglama yechimini tadqiq qilish yetarlidir. Quyidagi teoremda (4.2.2) issiqlik tarqalish tenglama yechimining ekstremal qiymatlari haqida so'z yuritiladi.

4.2.1-Teorema (Maksimal qiymat prinsipi). Agar $u(x, t)$ funksiya yopiq $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1$ sohada aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, $0 < t \leq T, 0 < x < 1$ sohada (4.2.2) tenglamani qanoatlantirsa, u holda $u(x, t)$ funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga yo boshlang'ich $t = 0$ vaqtda yoki sohaning chegaraviy nuqtalari $x = 0$ yoki $x = 1$ nuqtalarda erishadi.

Isboti. Biz $\max$ ga chegarada erishishini ko'rsatishimiz kerak. Teskarisi: faraz qilamiz teorema shartiga ko'ra $M(x, t)$ nuqtada $\max u(x, t) = M$ bo'ladi

ammo, shunday $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1$ sohada (x_0, t_0) nuqata topilsinki, shu nuqtada funksi-yaning qiymati $u(x_0, t_0) = M + e, e > 0$ bo'lsin. Endi yangi $v(x, t)$ funksiyani quyi-dagicha aniqlaymiz:

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{e}{2T}(t - t_0)$$

Bundan quyidagi tenglikni hosil qilish oson: $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + e$. Bundan tashqari, $t \in [0, T]$ bo'lganda $\left| \frac{e}{2T}(t - t_0) \right| \leq \frac{e}{2}$ bo'lganligi sababli $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1$ sohada $\max v(x, t) = \max \left[u(x, t) - \frac{e}{2T}(t - t_0) \right] \leq M + \frac{e}{2}$ tengsizlik o'rinlidir.

Demak, $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1$ sohada shunday (x_1, t_1) nuqta mavjudki, bu nuqtada $v(x, t)$ funksiyamiz $\max$ ga erishadi.

Ikki marta differensiallanuvchi funksiyaning maksimumining zaruriy shartiga ko'ra,

$$\begin{cases} v_t(x_1, t_1) \geq 0 \\ v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0 \end{cases}$$

Endi (4.2.1) tenglikni t bo'yicha 1 marta differensiallashdan quyidagini hosil qilamiz:

$$u_t(x, t) = v_t(x, t) + \frac{e}{2T}$$

Endi (4.2.1) tenglikni x bo'yicha 2 marta differensiallashdan quyidagini hosil qilamiz: $u_{xx}(x, t) = v_{xx}(x, t)$.

Yuqorida yozilgan tengsizliklar sistemasidan quyidagi tengsizliklarni hosil qilamiz:

$$u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + \frac{e}{2T} \geq a^2 v_{xx}(x_1, t_1) = a^2 u_{xx}(x_1, t_1)$$

bu esa issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasiga zid. Biz qarama-qarshilikka keldik. Demak, bizlar noto'g'ri faraz qilgan edik. Shuning uchun $\max u(x, t) = M$ bo'ladi. 1-qism isbotlandi.

Teoremaning 2-qismini isbotlash uchun $u(x,t)$ funksiyadan $w(x,t) = -u(x,t)$ funksiyaga o'tish kerak. Hosil bo'lgan funksiya maksimumga erishgan nuqtalarda $u(x,t)$ funksiya minimal qiymatlarga erishadi. Teorema isbotlandi.

Endi biz maksimal qiymat prinsipidan kelib chiqadigan natijalarga to'xtalamiz. Ushbu natijalardan eng muhimi chegaraviy masala yechimining yagonaligini isbotlashga tatbiqu hisoblanadi. Quyida biz yagonalik teoremasini keltiramiz.

4.2.2-Teorema. (1-chegaraviy masala yechimining yagonaligi)

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < l, t > 0 \quad (4.2.3)$$

issiqlik tarqalish tenglamasi

$$u(x,0) = j(x) \quad (4.2.4)$$

boshlang'ich shart va

$$u(0,t) = m_1(t), u(l,t) = m_2(t) \quad (4.2.5)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi va $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$ sohada aniqlangan, ikkinchi tartibgacha uzluksiz differensizllanuvchi yechimi yagonadir.

Isboti. Maksimumlik prinsipidan kelib chiqadigan quyidagi natijaga ko'ra $u_1(x,t), u_2(x,t)$ funksiyalar $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l$ sohada aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, bu funksiyalarning ikkalasi ham 1-chegaraviy masalani yechimi bo'lsa shunda quyidagi tenglik o'rinli: $u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

Bu natijaning isbotiga ko'ra quyidagicha: Yangi $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ funksiya kiritamiz. Shunda $v(x,t)$ funksiyamiz $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l$ sohada aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi.

Bu funksiyamiz quyidagi masalaning yechimi bo'ladi

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, x \in (0,l), t \in (0,T] \\ v(0,t) = 0, t \in (0,T] \\ v(l,t) = 0, t \in (0,T] \\ v(x,0) = 0, x \in (0,l). \end{cases}$$

$v(x,t)$ funksiya uchun max prinsipining barcha shartlari bajarilishi aniq. Demak, max prinsipini qo'llaganimizda $\max v(x,t) = 0 \Rightarrow u_1(x,t) = u_2(x,t)$ teorema isbotlandi.

Endi maksimal qiymat prinsipidan to'g'ridan to'g'ri kelib chiqadigan natijalarni keltiramiz:

4.2.1-Natija. Agar (4.2.2) tenglamaning ikkita $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ yechimlari uchun

$$u_2(x,0) \geq u_1(x,0),$$

$$u_2(0,t) \geq u_1(0,t), \quad u_2(1,t) \geq u_1(1,t)$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda barcha $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T$ lar uchun

$$u_2(x,t) \geq u_1(x,t)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

4.2.2-Natija. Agar (4.2.2) tenglamaning uchta $u_1(x,t), u_2(x,t)$ va $u_3(x,t)$ yechimlari uchun

$$u_1(x,0) \leq u_2(x,0) \leq u_3(x,0),$$

$$u_1(0,t) \leq u_2(0,t) \leq u_3(0,t), \quad u_1(1,t) \leq u_2(1,t) \leq u_3(1,t)$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda barcha $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T$ lar uchun

$$u_1(x,t) \leq u_2(x,t) \leq u_3(x,t)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

4.2.3-Natija. Agar ixtiyoriy $e > 0$ soni va (4.2.2) tenglamaning ikkita $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ yechimlari uchun

$$|u_2(x,0) - u_1(x,0)| \leq e,$$

$$|u_2(0,t) - u_1(0,t)| \leq e, \quad |u_2(1,t) - u_1(1,t)| \leq e$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda barcha $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T$ lar uchun

$$|u_2(x,t) - u_1(x,t)| \leq e$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

4.2.3-Natija issiqlik tarqalish tenglamasiga qo'yilgan 1-tur chegaraviy masala yechimi unga qo'yilgan chegaraviy va boshlang'ich shartlarga uzluksiz bog'liqligini, ya'ni chegaraviy masala yechimining turg'unligini ifodalaydi.

Fizikada issiqlikning to'g'ri chiziq bo'ylab cheksizlikka yoki yetarlicha katta oraliqqa tarqalish masalasi muhim ahamiyatga ega hisoblanadi. Issiqlikning to'g'ri chiziq bo'ylab cheksizlikka tarqalish tenglamasiga qoyiladigan masala yechimi yagona bo'lishi uchun unga boshlang'ich shartdan tashqari yana qo'shimcha shartlar talab qilinadi. Bu masalada sterjen uchlari cheksizlikda deb faraz qilinganligi uchun chegaraviy shartlar qatnashmaydi. Odatda bu masala Koshi masalasi deb yuritiladi. Ushbu masalada yechimning qaralayotgan sohada chegaralanganligi muhim ahamiyatga ega.

4.2.3-Ta'rif. Agar shunday $M > 0$ son topilib, ixtiyoriy $-\infty < x < +\infty$ va $t \geq 0$ uchun

$$|u(x, t)| < M$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $u(x, t)$ funksiyaga shu sohada chegaralangan deyiladi.

4.2.4-Ta'rif. $-\infty < x < +\infty, t > 0$ sohada

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (4.2.6)$$

issiqlik tarqalish tenglamasining

$$u(x, 0) = j(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (4.2.7)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz va chegaralangan yechimini topish masalasiga issiqlik tarqalish tenglamasiga qo'yilgan Koshi masalasi deyiladi.

Endi ushbu masala yechimining yagonalik teoremasini keltiramiz.

4.2.3-Teorema. $-\infty < x < +\infty, t > 0$ sohada (4.2.6) tenglamaning (4.2.7) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz va chegaralangan yechimi yagonadir.

Bu mavzuning asosiy mohiyati xuddi chegaraviy masalaning limitik holi sifatida uchlari cheksizlikda bo'lgan chegaralanmagan sterjenda issiqlikning tarqalish masalasi, ya'ni Koshi masalasi qo'yilishi va uni yechish usuli bilan tanishishdan iborat. Avvalgi mavzularda biz issiqlik tarqalish tenglamasiga qo'yilgan uch turdagi chegaraviy masalalar hamda Koshi masalasining qo'yilishi, ular yechimining yagonaligi masalasini hal etilishi bilan tanishgan edik.

Ayyitilgandek biz uchlari cheksizlikda bo'lgan chegaralanmagan sterjenda issiqlikning tarqalish masalasining uzluksiz chegaralangan yechimini topish masalasi bilan tanishamiz. Ushbu fizik masala matematik model sifatida quyidagicha yoziladi:

4.2.5-Ta'rif.

$$u_t = a^2 u_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \quad (4.2.8)$$

issiqlik tarqalish tenglamasining

$$u(x,0) = j(x), -\infty < x < +\infty \quad (4.2.9)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi uzluksiz va chegaralangan yechimini topish masalasiga chegaralanmagan sterjenda issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Koshi masalasi deyiladi.

Bu masala issiqlik tarqalayotgan sterjenning uzunligi ahamiyatga ega bo'lmagan va asosiy e'tibor sterjen ichki nuqtalaridagi temperaturaning yetarlicha kichik vaqt intervalidagi holatiga qaratilgan fizik masalalarda hosil bo'ladi. Endi bu masalaning yechimini topish bilan shug'ullanamiz.

(4.2.8)-(4.2.9) Koshi masalasining nolmas chegaralangan yechimini o'zgaruvchilarni ajratish usulida izlaymiz, ya'ni yechimni

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (4.2.10)$$

ko'rinishda izlaymiz. (4.2.10) ifodani (4.2.8) ga qo'yib xuddi Fur'ye usulidagi kabi quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -l^2.$$

Bu tenglama esa o'z navbatida ikkita

$$T' + a^2 l^2 T = 0, \quad (4.2.11)$$

$$X'' + l^2 X = 0 \quad (4.2.12)$$

oddiy differensial tenglamalarga ajraladi. Bu oddiy differensial tenglamalarni yechish bilan biz tanishmiz:

$$T_l(t) = C_1(l)e^{-(la)^2 t}, \quad X_l(x) = C_2(l)e^{ilx},$$

bunda $C_1(l)$ va $C_2(l)$ ixtiyoriy chekli doimiylar. Bularga va (4.2.10) ga asosan (4.2.8) tenglamaning chegaralangan yechimi uchun

$$u_l(x, t) = C(l)e^{-(la)^2 t + ilx}$$

ifodani hosil qilamiz. (4.2.8) chiziqli tenglama bo'lganligi uchun bu yechimlarning l bo'yicha yig'indisi ham yana yechim bo'ladi:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(l)e^{-(la)^2 t + ilx} dl. \quad (4.2.13)$$

Yechimning bu ko'rinishidagi noma'lum $C(l)$ koefitsiyentlarni (4.2.9) boshlang'ich shartdan foydalanib topamiz

$$u(x, 0) = j(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(l)e^{ilx} dl. \quad (4.2.14)$$

(4.2.14) da teskari Fur'ye almashtirishlarini qo'llash bilan noma'lum koefitsiyentlarni topamiz:

$$C(l) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} j(s)e^{-ils} ds. \quad (4.2.15)$$

$C(l)$ koefitsiyentlarning (4.2.15) ifodasini (4.2.13) ga qo'yish bilan qo'yilgan (4.2.8)-(4.2.9) Koshi masalasi yechimini hosil qilamiz

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} j(s)e^{-ils} ds \right) e^{-(la)^2 t + ilx} dl = \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(la)^2 t + il(x-s)} dl \right) j(s) ds. \end{aligned}$$

Oxirgi tenglikdagi ichki integralni hisoblaymiz:

$$= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(la)^2 t + il(x-s)} dl = \frac{1}{2\sqrt{pa^2 t}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}. \quad (4.2.16)$$

Natijada qaralayotgan Koshi masalasi yechimi uchun quyidagi integral tasvirni olamiz

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{pa^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} j(s) ds. \quad (4.2.17)$$

Ba'zan (4.2.8)-(4.2.9) Koshi masalasining topilgan (4.2.17) ko'rinishdagi yechimini

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) j(s) ds \quad (4.2.18)$$

yoziyadi. Bunda

$$G(x, s, t) = \frac{1}{2\sqrt{pa^2 t}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}$$

funksiya odatda issiqlik tarqalish tenglamasining fundamental yechimi deb aytiladi. Bu funksiya quyidagicha fizik ma'no kasb etadi: Agar boshlang'ich $t = t_0$ vaqtda sterjen s nuqtasida $Q = cr$ issiqlik miqdori ajralgan bo'lsa, u holda

$$G(x, s, t - t_0) = \frac{1}{cr 2\sqrt{pa^2 (t - t_0)}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 (t - t_0)}}$$

funksiya sterjen x nuqtasining t ondagi temperaturasini ifodalaydi. Bundan tashqari $G(x, s, t - t_0)$ funksiya o'zining (x, t) o'zgaruvchilar bo'yicha $u_t = a^2 u_{xx}$ issiqlik tarqalish tenglamasining yechimi bo'ladi. Haqiqatan ham integralni hadlab differensiallash haqidagi teoremani qo'llab quyidagi xususiy hosilalarni topamiz:

$$G_x(x, s, t - t_0) = -\frac{1}{2\sqrt{p}} \frac{x - s}{2[a^2(t - t_0)]^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_{xx}(x, s, t - t_0) = \frac{1}{2\sqrt{p}} \left\{ -\frac{1}{2[a^2(t - t_0)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x - s)^2}{4[a^2(t - t_0)]^{\frac{5}{2}}} \right\} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_t(x, s, t - t_0) = \frac{a^2}{2\sqrt{p}} \left\{ -\frac{1}{2[a^2(t - t_0)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x - s)^2}{4[a^2(t - t_0)]^{\frac{5}{2}}} \right\} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-t_0)}}.$$

Bularni o'rniga qo'yib haqiqatan ham $G_t = a^2 G_{xx}$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Koshi masalasidagi boshlang'ich shartdagi berilgan j funksiya uzluksiz va chegaralangan funksiyaadir. Koshi masalasining integral tasviri, ya'ni (4.2.17) formula odatda chegaralanmagan sohada Koshi masalasi yechimi uchun Puasson formulasi hamda undagi integralga esa Puasson integrali deb yuritiladi.

III. Xulosa

Mening Bitiruv malakaviy ishim mavzusi “Korrekt qo‘yilgan masalalar” deb nomlanadi. Bitiruv malakaviy ish Kirish, Asosiy qism, internet ma'lumotlari va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

Tabiatda, fan va texnikada uchraydigan ko'pgina matematik fizika masalalarning yechimini mavjudligi va yagonaligi, turg'unligini o'rganishga to'g'ri keladi. Shu sababli ham bunday masalalarni yechishda ularning korrekt yoki korrekt qo'yilmaganligini o'rganish katta ahamiyat kasb etadi. Matematik fizika fanida deyarli barcha turdagi masalalarni yechishda berilgan masala yechimining mavjudligi, yagonaligi, turg'unligi masalasi asosiy masalalardan biridir. Shu sababli ham masala yechimini mavjudligini, yagonaligini, turg'unligini isbotlash usullarini bilish va uni masalalar yechishda qo'llay bilish fan nuqtai nazaridan juda muhim.

Bitiruv malakaviy ish matematik fizika masalalarining korrekt qo'yilganligiga bag'ishlangan.

Ushbu bitiruv malakaviy ishinining Kirish qismida Birinchi Prezident I.A.Karimovning ilmiy tadqiqot ishlariga bag'ishlangan fikr-mulohazalari, Ta'lim to'grisidagi qonun va Prezidentimiz Sh.M.Mirziyoyevning 2017-yil 20-apreldagi “Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora tadbirlari to'g'risida” gi PQ-2909 sonli qarorida ilgari surilgan fikrlar yuritilgan. Shu bilan birga bitiruv malakaviy ishning tarkibiy qismlari bayon qilingan.

Asosiy qism 4 ta bob va 8 ta paragrafdan iborat bo'lib, ular quyidagilar:

I bob 1 ta paragrafdan iborat bo'lib, bu paragrafdan mavzuning asosiy qismi korrekt qo'yilgan masala tushunchasi, qanday shartlarda masalalar korrekt bo'lishi haqida, yechimning boshlang'ich va chegaraviy shartlar bilan uzluksiz bog'liqligi haqida bayon qilingan. Shuningdek korrekt bo'lmagan masalalarga misollar keltirilgan.

II bob 3 ta paragrafdan iborat bo'lib, Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun korrekt masalalar tadbiriga bag'ishlangan. 2.1 paragrafdan Tor tebranish tenglamasini Dalamber usulida yechish va shu tenglama uchun qo'yilgan

boshlang'ich shartli masalanining yechimini korrekt ekanligi o'rganilgan. Shuningdek yechimning fizik ma'nosi bayon qilingan.

2.2 paragrafda Tor tebranish tenglamasi uchun 1-chegaraviy masalaning qo'yilishi o'rganilgan. 2.3 paragrafda Gursa masalasi haqida bayon qilingan va uning yechimi o'rganilgan.

III bob 3 ta paragrafdan iborat bo'lib, Elliptik tipdagi tenglamalar uchun korrekt masalalar tadbig'iga bag'ishlangan. 3.1 paragrafda Laplas tenglamasi haqida, garmonik funksiyalar ta'rifi bayon qilingan va yana shuningdek Laplas tenglamasi uchun Dirixle va Neyman masalalarining qo'yilishi keltirilgan. 3.2 paragrafda Ikkinchi tartibli elliptik tipdagi chiziqli tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni qo'yilishi haqida bayon qilingan. 3.3 paragrafda Ekstremum prinsipi va shu prindip asosida Dirixle masalasi yechimining yagonaligi va mavjudligi ko'rsatilgan.

IV bob 2 ta paragrafdan iborat bo'lib, Parabolik tipdagi tenglamalar uchun korrekt masalalar tadbig'iga bag'ishlangan. 4.1 paragrafda Parabolik tipdagi tenglamalar uchun asosiy masalalarning qo'yilishi bayon qilingan. 4.2 paragrafda Issiqlik tarqalish tenglamasi yechimi uchun maksimal qiymat prinsipi va shu prinsip asosida Chegaraviy va Koshi masalasi yechimining korrektiligi o'rganib chiqilgan.

Xulosa qilib yana shuni aytish mumkinki korrekt qo'yilgan masalalarni o'rganish orqali fizik jarayonlarni matematika nuqtai nazaridan o'rganish osonroq ekanligi ko'rinadi. Shu bilan birga bu mavzu bo'yicha o'rganish mumkin bo'lgan ilmiy ishlar juda ko'p. Shuning uchun ham bu mavzu dolzarb deb hisoblayman.

IV. Internet ma'lumotlari

Tebranish tenglamasi uchun masalaning qo'yilishi

Giperbolik tipdagi tenglamani ko'rib chiqamiz [1].

Faraz qilaylik $u(x,t) \in C^2((x,t): 0 < x < l, t > 0)$ bo'lsin, shunda

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad ((x,t): 0 < x < l, t > 0) \quad (1.1.1)$$

Tenglama ideal torning tebranish tenglamasi deyiladi.

Ikki fazoviy o'zgaruvchilarning funksiyasi $u(x,y,t)$ holida:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad (x,y) \in D, t > 0 \quad (1.1.2)$$

bu elastik membraning tebranish tenglamasi.

(1.1.2) tenglamani qaraymiz. Biz quyidagi boshlang'ich shartlarni berishimiz mumkin:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), & 0 < x < l; \\ u_t(x,0) = j(x), & 0 < x < l, \end{cases} \quad (1.1.3)$$

torning muvozanat holatidan chetlanishini izohlaydi; va chegaraviy shartlarni:

$$\begin{cases} u(l,t) = m(t), & t > 0; \text{ (max kamlanlangan holda } m \equiv 0) \\ u_x(l,t) = n(t), & t > 0; \\ u(l,t) + a u_x(l,t) = q(t), & t > 0 \end{cases} \quad (1.1.4)$$

odatda bizlar ulardan ba'zilarini olamiz.

Giperbolik yoki tebranish tenglamalar uchun chegaraviy masalalar tuzamiz [1-4].

Birinchi chegaraviy masala.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T; \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u_t(x,0) = j(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u(0,t) = m_1(t), & 0 \leq t \leq T; \\ u(l,t) = m_2(t), & 0 \leq t \leq T; \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Xuddi shuni o'zi yarim to'g'ri chiziq uchun :

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, 0) = f(x), & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = j(x), & x \geq 0; \\ u(0, t) = m(t), & 0 \leq t \leq T; \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Shuningdek oddiy Koshi masalasini qarash mumkin:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < +\infty; \\ u_t(x, 0) = j(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Bizlar tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasini qaraymiz.

$$\begin{cases} (1) & u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T; \\ (2) & u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < +\infty; \\ (3) & u_t(x, 0) = j(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Faraz qilaylik, $u \in C^2(R \times R^+)$ funksiya bo'lib, u (1.1.7) Koshi masalasining yechimi bo'lsin. Yangi x , h o'zgaruvchilarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\begin{cases} x = x + at; \\ h = x - at; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x+h}{2}; \\ t = \frac{x-h}{2a}. \end{cases}$$

Yangi funksiyaning aniqlaymiz:

$$v(x, h) = u\left(\frac{x+h}{2}, \frac{x-h}{2a}\right).$$

Bu funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz.

$$\begin{aligned} v_x &= u_x \left(\frac{x+h}{2}, \frac{x-h}{2a} \right) \frac{1}{2} + u_t \left(\frac{x+h}{2}, \frac{x-h}{2a} \right) \frac{1}{2a}; \\ v_{xh} &= u_{xx} \left(\frac{x+h}{2}, \frac{x-h}{2a} \right) \frac{1}{4} + u_{xt} \left(\frac{x+h}{2}, \frac{x-h}{2a} \right) \left(-\frac{1}{4a} \right) \\ &+ u_{tx} \left(\frac{x+h}{2}, \frac{x-h}{2a} \right) \frac{1}{4a} + u_{tt} \left(\frac{x+h}{2}, \frac{x-h}{2a} \right) \left(-\frac{1}{4a} \right) = \\ &= u_{xx} \left(\frac{x+h}{2}, \frac{x-h}{2a} \right) \frac{1}{4} - \frac{1}{4a} u_{tx} \left(\frac{x+h}{2}, \frac{x-h}{2a} \right) = \\ &\{tebranish \quad tenglamasi\} = 0; \end{aligned}$$

Критерии n -гармоничности и плюригармоничности гармонических функций

Р.М.Мадрахимов, М.Д.Вайсова

Ushbu maqolada $\mathbb{C}^n$ fazoda aniqlangan garmonik funksiyalar uchun n -garmonik va plyuragarmonik kriteriyalari o'rganilgan.

In this paper are studied some criterics of n -harmonicity and pluriharmonicity of functions in $\mathbb{C}^n$.

Теория n -гармонических функций является промежуточным связывающим аппаратом гармонических и плюригармонических функций. Свойства таких функций и область их возможных применений подробно изложены в монографии Рудина [4].

Известная теорема Рудина [1], [2] утверждает, что если функция $u(z)$, определенная в единичном шаре $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ одновременно гармонична и M -гармонична, то она является плюригармоничной. Напомним, что M -гармоническая функция в единичном шаре B определяется следующим образом:

$$u \in C^2(B), \quad \tilde{\Delta}u = 0,$$

где $\tilde{\Delta}u = (1 - |z|^2) \left(\Delta u - \sum_{i,j=1}^n z_i \bar{z}_j \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)$ инвариантный лапласиан в B (см. [1], стр. 54-66).

Определение 1. Если $u \in C^2(B)$ и $\tilde{\Delta}u(z) \geq 0$, $z \in B$, то $u(z)$ называется M -субгармонической функцией.

Определение 2. Функция $u(z) : U \rightarrow \mathbb{R}$ называется n -субгармонической в поликруге $U = U_1(a_1, r_1) \times \dots \times U_n(a_n, r_n)$, где $U_j(a_j, r_j) = \{|z_j - a_j| < r_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, если она:

- а) полунепрерывна сверху U ;
- б) субгармоническая по каждому переменному, при фиксированных остальных, т.е. в обобщенном смысле оператор Лапласа $\Delta_{z_j \geq 0}$ в круге $U_j(a_j, r_j)$ при фиксированных остальных переменных: для любой финитной в U_j функции $\varphi(z_j) \geq 0$, $j = 1, \dots, n$ из класса C^∞

$$(u, \Delta\varphi) = \int_{U_j} u, \Delta\varphi(z_j) dV \geq 0.$$

Отметим, что n -субгармонические функции составляет под класс класса субгармонических функций.

Определение 3. Функция $u : U \rightarrow R$ называется n -гармонической в поликруге $U \subset \mathbf{C}^n$, если она является гармонической по каждому переменному.

Имеет место следующее:

Теорема 1. Пусть B — единичный шар из $\mathbf{C}^n$ и функция $u(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $u(z)$ гармонична в шаре B , т.е. $u(z) \in h(B)$;

2) функция $u(z)$ M -субгармонична в шаре B .

Тогда $u(z) \in Ph(B)$.

Доказательство. Так как $u(z)$ гармоническая в шаре B , то ее можно разложить в ряд однородных гармонических полиномов:

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z), \quad (1)$$

где $P_k(z)$ — однородный многочлен от $z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ степени k .

Каждый многочлен в (1) можно написать в виде (см. [1], стр. 265-269)

$$P_k = \sum_{p+q=k} f_{p,q}, \quad (2)$$

где $f_{p,q}$ гармонические многочлены, в которых общий порядок по $z_1, \dots, z_n$ равен p и общий порядок по $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ равен q . Каждый член полинома $f_{p,q}$ имеет вид $M(z) = C_{z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} \bar{z}_1^{\beta_1} \dots \bar{z}_n^{\beta_n}}$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = p$, $\beta_1 + \dots + \beta_n = q$ и для любого $(p, q) \neq (s, r)$ многочлены $f_{p,q}$ и $f_{s,r}$ ортогональны в $L^2(\partial B)$.

Из условия теоремы $\tilde{\Delta}u = (1 - |z|^2) \left(\Delta u - \sum_{i,j=1}^n z_i \bar{z}_j \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right) \geq 0$,

Поэтому $\sum_{i,j=1}^n z_i \bar{z}_j \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \leq 0$. Отсюда получаем, что

$$\sum_{p+q=k} z_i \bar{z}_j \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{p+q=k} pq f_{p,q} \leq 0.$$

Следовательно, при $pq \neq 0$ все многочлены $f_{p,q}(z)$ обращаются в нуль, так как в этом случае $\sum_{p+q=k} pq f_{p,q}(0) = 0$, и из принципа максимума получим, что $\sum_{p+q=k} pq f_{p,q}(z) = 0$, и из условия ортогональности

Доказательство. Известно, что в поликруге U^n инвариантный лапласиан представляется в следующем виде:

$$\tilde{\Delta} f(a) = \sum_{i=1}^n (1 - a_i \bar{a}_i)^2 (\Delta_i f)(a),$$

где $\Delta_i f(a) = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} \right|_{z=a}$. Из условия теоремы в U^n

$$\tilde{\Delta} u(a) = 4 \sum_{i=1}^n (1 - |a_i|^2)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} \right|_{z=a} \geq 0, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим разложение функции $u(z)$ в ряд по однородным гармоническим многочленам:

$$u(z) = \sum_{p+q=0}^{\infty} f_{pq}. \quad (5)$$

Каждый член полинома $f_{p,q}$ имеет вид

$$M(z) = C_{z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} z_1^{\beta_1} \dots z_n^{\beta_n}}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = p, \quad \beta_1 + \dots + \beta_n = q.$$

И для любого $(p, q) \neq (s, r)$ многочлены $f_{p,q}$ и $f_{s,r}$ ортогональны в $L^2(\partial B)$.

Отсюда получаем, что $\tilde{\Delta} u(a) = 4 \sum_{i=1}^n (1 - 2|a_i|^2 + |a_i|^4) \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} \right|_{z=a} \geq 0$.

Функции $u(z)$ представим в виде суммы двух функций: $u(z) = \vartheta(z) + h(z)$, где $\vartheta(z)$ — n -гармоническая функция, $h(z)$ — гармоническая функция в U^n . Легко видеть что

$$\tilde{\Delta} u(z) = 4 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} |z_i|^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} |z_i|^4 \right) \geq 0.$$

Используя разложение (5), получим

$$\tilde{\Delta} u(z) = 4 \left(\Delta h(z) - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i h(z) + \sum_{i=1}^n |z_i|^2 h(z) \right)$$

УДК 519.21

**Решение задачи Коши для параболического
уравнения с помощью системы стохастических
дифференциальных уравнений****Г.М.Раимова**

Koshi masalasining yechimi va stoxastik differensial tenglamalar orasidagi bog'lanishlar avvaldan ma'lum. Maqolada stoxastik differensial tenglamalar sistemasining yechimini approksimatsiya qiluvchi maxsus markov zanjiri qurilgan. Markov zanjiri traektoriyalarida hisoblangan funksionalning matematik kutilmasi Koshi masalasining yaheimiga baho bo'lishi isbotlangan va approksimatsiya xatoligi baholangan.

This article concerns application of Monte Carlo methods for a class of linear partial differential equations (PDEs). The methods are based on the simulation of solutions of Ito stochastic differential equations (SDEs) and application of Monte Carlo algorithms to the PDEs. Numerical methods for SDEs, which can be used as the basis of Monte Carlo simulations, are discussed, and theoretical and numerical results of the new approaches are presented. For the direct simulation of probabilistic representations of the solution to problem of the price movement of two or more risky assets, a complicated random process should be constructed.

1. Постановка задачи

Пусть $Q = [t_0, T) \times R_+^n$. Рассмотрим задачу Коши для следующего параболического уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t, x) u + g(t, x) = 0, \\ (t, x) \in Q, \\ u(T, x) = \varphi(x), \quad x \in R_+^n. \end{cases} \quad (1)$$

Предполагается, что коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ удовлетворяют условию строгой эллиптичности. Кроме того, будем считать что выполняются условия, обеспечивающие существование решения задачи [1]. Решение задачи (1) допускает вероятностное представление [2]:

$$u(t, x) = E[\varphi(T, X_{t,x}(T)) Y_{t,x,1}(T) + Z_{t,x,1,0}(T)], \quad (2)$$

Обозначим функцию выплат в момент $t = T$ истечения срока действия опциона через $f(X_1, \dots, X_n)$. Тогда рациональная стоимость МАО Европейского типа удовлетворяет решению задачи Копи для уравнения (7) в области $\{0 \leq X_i < \infty \ (i = 1, \dots, n); \ 0 \leq t \leq T\}$ с начальным условием: $V(X_1, \dots, X_n, T) = f(X_1, \dots, X_n)$.

Существует решение задачи Копи для уравнения (7) и оно представляется в виде континуального интеграла:

$$V(X_1, \dots, X_n, t) = \left[\frac{1}{2\pi(T-t)} \right]^{\frac{n}{2}} \frac{e^{-r(T-t)}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} \times \\ \times \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\xi_1 \dots \xi_n} \exp \left[\frac{\vec{\alpha}^T A^{-1} \vec{\alpha}}{2(T-t)} \right] d\xi_1 \dots d\xi_n,$$

где $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, $\alpha_i = Ln \frac{X_i}{\xi_i} + (r - q_i - \frac{a_{ii}}{2})(T - t) \quad (i = 1, \dots, n)$.

Хотя аналитическое представление решения задачи имеется, нахождение значения многомерного сингулярного интеграла для конкретных функций выплат задача трудоская.

3. Вычислительный эксперимент

Модельная задача. В качестве модельной задачи для вычислительного эксперимента рассмотрена задача с двумя рисковыми активами, т.е. в области $Q = \{(X_1, X_2, t) : 0 \leq X_1 < \infty, 0 \leq X_2 < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ решается задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[a_{11} X_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X_1^2} + 2a_{12} X_1 X_2 \frac{\partial^2 V}{\partial X_1 \partial X_2} + a_{22} X_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X_2^2} \right] + \\ + (r - q_1) X_1 \frac{\partial V}{\partial X_1} + (r - q_2) X_2 \frac{\partial V}{\partial X_2} - rV = 0, \\ V(X_1, X_2, T) = \max(X_1, X_2). \end{cases}$$

Решение этой задачи известно [3]: (Формула Блэка-Шоуэлса)

$$V(X_1, X_2, t) = X_1 e^{-q_1(T-t)} N(d_{1,2}) + X_2 e^{-q_2(T-t)} N(d_{2,1}),$$

где

$$d_{1,2} = \frac{\ln \frac{X_1}{X_2} + [q_2 - q_1 + \frac{1}{2}(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})](T-t)}{\sqrt{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})(T-t)}}$$

$$d_{2,1} = \frac{\ln \frac{X_2}{X_1} + [q_1 - q_2 + \frac{1}{2}(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})](T-t)}{\sqrt{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})(T-t)}}$$

и $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$.

Результаты вычислительного эксперимента приведены в следующей таблице
(N=100 - дискретизация по времени, Nt=10000 - количество траекторий)

X_1	X_2	T_0	MS	ES	Err
1.2	1.3	0.3	1,2753002281619	1,27376538700289	0,00153484115
3,5	3,8	0,2	3,7183324249200	3,71258785684251	0,00574456807
1.5	1.9	0.3	1,8633266278889	1,86051182716809	0,00281480072
1.9	2.1	0.2	2,0544942350862	2,05081874926517	0,00367548582
2.4	2.2	0.3	2,3155692328529	2,32131312146742	0,00574388861
1.5	1.5	0.5	1,4875540449074	1,49622247895718	0,00866843404
1.9	1.7	0.4	1,8436516107660	1,84437154362003	0,00071993285
2,6	2,3	0,2	2,4969402317956	2,49926998781135	0,00232975601
4,1	4,7	0,5	4,6323218485465	4,63003701095832	0,00228483758
3,3	3,5	0,1	3,4168297979861	3,41481174801351	0,00201804997

(X_1, X_2)- реальная цена активов на момент времени T_0 ; ES - точное решение (рациональная стоимость опциона); MS - выборочная оценка; Err - разность между точным решением и оценкой.

Литература

1. Friedman, A., (1975) Stochastic Differential equations and Applications- Volume 1, Academic Press.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. "Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения" Киев, "Наукова думка", 1982
3. Jiang L., (2005) 'Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing' (World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd, Singapore)
4. Milstein G.N., and Schoenmakers J.G.M., (2002) 'Monte Carlo Construction of Hedging Strategies Against Multi-Asset European Claims', Stochastic and Stochastic Reports. Vol.73, №(1-2), pp.125-157.

Институт математики и информационных технологий АН РУз

V. Adabiyotlar:

1. I.A.Karimov. Yuksak ma'naviyat – yengilmas kuch. Toshkent - «Ma'naviyat», 2008y.
2. O'zbekiston Respublikasining “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi”. Barkamol avlod – O'zbekiston taraqqiyotining poydevori – Toshkent, Sharq 1997y.
3. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Shavkat Mirziyoyev “O'zbekiston Respublikasidagi oliy ta'lim muassasalariga 2017-2018 yilgi o'quv mavsumiga qabul qilish to'g'risida”gi qarori . 2017y
4. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Sh.M.Mirziyoyev «O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida» gi farmoni. 2017y
5. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Shavkat Mirziyoyev “Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari” to'g'risidagi qarori 2017y
6. Салоҳиддинов М.С. “ Математик физика тенгламалари ”. Тошкент. “ Ўзбекистон ”. 2002й.
7. Жўраев Т.Ж. , Абдиназаров С. “ Математик физика тенгламалари ”. Тошкент. “ Университет ”. 2003й .
8. Салоҳиддинов М.С. “ Математик физика тенгламалари фанидан масалалар тўплами ”. Тошкент. “ Mumtoz so'z ”. 2010й.
9. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике.-М.: МГУ. 1993.
- 10.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.Наука. 1977 г.
- 11.Бизадзе А.В. Уравнения математической физики.М.Наука. 1976г.
- 12.Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. УМН. 1962 г.
- 13.Золина Л.А. “ О краевой задаче для модельного уравнения гипербола-параболического типа ” //вычислительной математики и математической физики. ЖЛМ ЖВМ и МФ, 1966 г.

14. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо–гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986.
15. Жўраев Т. Ж, Рахмонов У., Об одной краевой задаче для уравнения смешанного-составного типов. 1981 й.
16. Жўраев Т. Ж, Эгамбердиев У., О некоторых краевых задачах для смешанного параболо-гиперболического уравнения. 1984 й
17. Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1981 г.
18. O‘rinov A.Q., Z.A.Ahmedov, Sh.T.Karimov “Matematika fizika tenglamalari fanidan amaliy mashg‘ulotlar uchun qo‘llanma” FarDU 2009 y
19. Soatov Yo. U. Oliy matematika. T. «O‘qituvchi», 1994 y. I qism.

Internet saytlari.

www.ziyonet.uz

www.math.ru

www.google.ru

www.liberary.ru

www.Aim.uz

www.arxiv.uz

www.books.ru

Mundarija

Kirish	3-11
1-bob. Korrekt va korrekt bo'lmagan masalalar.	
1.1-§. Korrekt qo'yilgan masala tushunchasi. Korrekt qo'yilmagan masalalarga Misollar	12-15
2-bob. Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun korrekt masalalar.	
2.1-§. Tor tebranish tenglamasi uchun qo'yilgan boshlang'ich shartli masala. Dalanber usuli. Yechimining turg'unligi va fizik ma'nosi	16-24
2.2-§. Tor tebranish tenglamasi uchun 1-chegaraviy masalaning qo'yilishi	25-31
2.3-§. Gursa masalasi	32-37
3-bob. Elliptik tipdagi tenglamalar uchun korrekt masalalar.	
3.1-§. Laplas tenglamasi uchun Dirixle va Neyman masalalari.....	38-44
3.2-§. Ikkinchi tartibli elliptik tipdagi chiziqli tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni qo'yilishi	45-46
3.3-§. Ekstremum prinsipi. Dirixle masalasi yechimining yagonaligi va mavjudligi	47-52
4-bob. Parabolik tipdagi tenglamalar uchun korrekt masalalar.	
4.1-§. Parabolik tipdagi tenglamalar uchun asosiy masalalarning qo'yilishi.....	53-58
4.2-§. Issiqlik tarqalish tenglamasi yechimi uchun maksimal qiymat prinsipi. Chegaraviy va Koshi masalasi yechimining yagonaligi.....	59-67
XULOSA	68-69
INTERNET MA'LUMOTLAR	70-77
ADABIYOTLAR	78-79