МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАМАНГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Научная статья на тему:

«ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДАМИ НЬЮТОНА-КОТЕСА В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТАХ MATCAD И MAPLE»

доцента кафедры прикладной математики Имомова Адаша

НАМАНГАН-2017 г.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДАМИ НЬЮТОНА-КОТЕСА В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТАХ MATCAD И MAPLE

А.ИМОМОВ (НамГУ)

22 декабря 2017 году президент республики Узбекистан Ш. Мирзиёев новый 2018 год назвал «годом поддержки активного предпринимательства, инновационных идей и технологий». Это касается всех сторон народного хозяйства, экономики, управления, техники, в частности, науки и образования. В науке и образовании, это означает компьютеризацию всех этапов научно-исследовательской работы и образования, в частности, проверки и сопоставления теоретических результатов численных расчётов. В настоящее время появились специальные программы- математические системы: Mathcad (M1), Maple (M2), Matlab (M3), Mathematika (M4) и др. [1-4]. Использование математических систем учебу превращает в творческий интересный процесс, содержание занятия осваивается быстрее, глубже, оставляя больше времени для укрепления занятий. Появляются возможности решения задач в математических системах без составления программ, представления и анимации, визуализации решений в виде таблиц и графиков, составления простых естественных, близких к языку математики алгоритмов и программ.

В статье возможности Mathcad и Maple демонстрируются на примере вычисления квадратурных формул.

В Mathcad и Maple задачи решаются четырьмя способами с помощью:

1) внутренних функций математических систем (M1-M4).

2) программ, составленных во внутреннем языке систем (M1-M4).

3) естественного математического алгоритма решения (M1).

4) интерактивных возможностей математических систем (M2).

1. Основные формулы. Вычисляем интеграл $J := \int_a^b f(x)dx$ четырьмя методами: Ньютона-Котеса, прямоугольников, трапеций и Симпсона [1-7].

1. Формула Ньютона – Котеса (N-Newton-Ньютон):

$$J_h^N(f)=J(L_n(x))=\int_a^b\sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x)=\sum_{i=0}^n f(x_i)p_i, l_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^n(x-x_j)/(x_i-x_j),\ p_i=\int_a^b l_i(x)dx\,,$$

$$R_h^N(f)=J(f)-J_h^N(f)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_a^b(x-x_0)...(x-x_n)dx$$

2.Формула средних прямоугольников (R-rectangle-прямоугольник):

$$J_h^R(f)=h\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i+h/2), R_h^R(f)=J(f)-J_h^R(f)=\frac{h^2(b-a)}{24}f''(c)\,.$$

3.Формула трапеций (T-trapezoidal-трапеция):

$$J_h^T(f)=\frac{h}{2}[f(x_0)+2(f(x_1)+...+f(x_{n-1}))+f(x_n)], R_h^T(f)=-\frac{h^2(b-a)}{12}f''(c)$$

4.Формула Симпсона:(S-Simpson-Симпсон):

$$J_h^S(f)=\frac{h}{3}[f(x_0)+4\sum_{i=0}^{m-1}f(x_{2i+1})+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_{2i})]+f(x_{2m})], R_h^S(f)=-\frac{f^{(4)}(\xi)(b-a)}{180}h^4$$

2. Вычисления интегралов в математических пакетах.

2.1. Алгоритмы вычисления в математической системе mathcad.

2.1.1. Формулы Ньютона-Котеса (N). Формулы Ньютона-Котеса вводятся в практику впервые, ранне использование их в ручных вычислений для произвольных числа узлов n не было возможным, из-за необходимости интегрирования фундаментальных многочленов $l_i(x), i=0..n$. Они использовались в теоретических занятиях, из-за понятности, очевидности. В Mathcad интегралы от фундаментальных многочленов вычисляются самим Mathcadom. В Maple такая возможность имеется в командах интегрирования и интерактивных окнах. Приведём алгоритмы вычисления методов в Mathcad.

$f(x):=\sin(x)\ a:=0\ b:=\pi\ n:=20$ //*функция, отрезок, количество точек*

$J:=\int_a^b f(x)dx\ \ J=2$ //*вычисляемый интеграл и точное значение*

$h:=(b-a)\ \ i:=0..n\ \ vx_i:=a+i*h$ //*шаг, узлы интегрирования*

$l(i,x):=\prod_{j=0}^n if(i=j,1,\frac{x-vx_j}{vx_i-vx_j})\ \ p_i:=\int_a^b l(i,x)dx$ // *вычисление* $l_i(x), i=0..n$

$JN(n):=\sum_{i=0}^n f(vx_i)p_i\ \ JN(n)=2$ // *вычисление по формуле N и результат*

Найденное значение совпадает с точным значением интеграла.

2.1.2. Формула средных прямоугольников.

$f(x) := \sin(x)\ a := 0\ b := \pi\ n := 20$ *//функция, отрезок, количество точек*

$J := \int_a^b f(x)dx\ \ J = 2$ *//вычисляемый интеграл и точное значение*

$h := (b-a)\ \ i := 0..n\ \ vx_i := a + i * h$ *//шаг, узлы интегрирования*

$JR(n) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + h/2)\ \ JR(n) = 1.99$ *// вычисление по формуле прямоугольников*

2.1.3.Формула трапеций.

$f(x) := \sin(x)\ a := 0\ b := \pi\ n := 20$ *//функция, отрезок, количество точек*

$J := \int_a^b f(x)dx\ \ J = 2$ *//вычисляемый интеграл и точное значение*

$h := (b-a)\ \ i := 0..n\ \ vx_i := a + i * h$ *//шаг, узлы интегрирования*

$JT(n) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})],\ J(n) = 1.996$ *// вычисление по формуле трапеций*

2.1.4.Формула Симпсона.

$f(x) := \sin(x)\ a := 0\ b := \pi\ n := 20$ *//функция, отрезок, количество точек*

$J := \int_a^b f(x)dx\ \ J = 2$ *//вычисляемый интеграл и точное значение*

$h := (b-a)\ \ i := 0..n\ \ vx_i := a + i * h\ \ m := n/2$ *//шаг, узлы интегрирования*

$JS(m) = \frac{h}{3}\{f(a) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})] + f(b)\}$ *//формула Симпсона*

$JS(m) = 2.0000067844$ *//Значение интеграла*

2.2. Алгоритмы вычисления в Maple. В Maple интегралы можно вычислят непосредственно по команде $\mathrm{int}(f(x), x = a..b)$. Но, существует и наглядные, обучающие интерактивные возможности. Для этого нужно дать команду: Tools> Tutors> Calculus> Single-Variable> Approximate Integration. В инерактивном окне можно вводить интегрируемую функцию, отрезок, количество разделений, 6 способов выбора узлов для итегральной суммы Римана; 5 способов приближённого интегрирования и графическое представления методов; точное и приближённое значения интеграла.

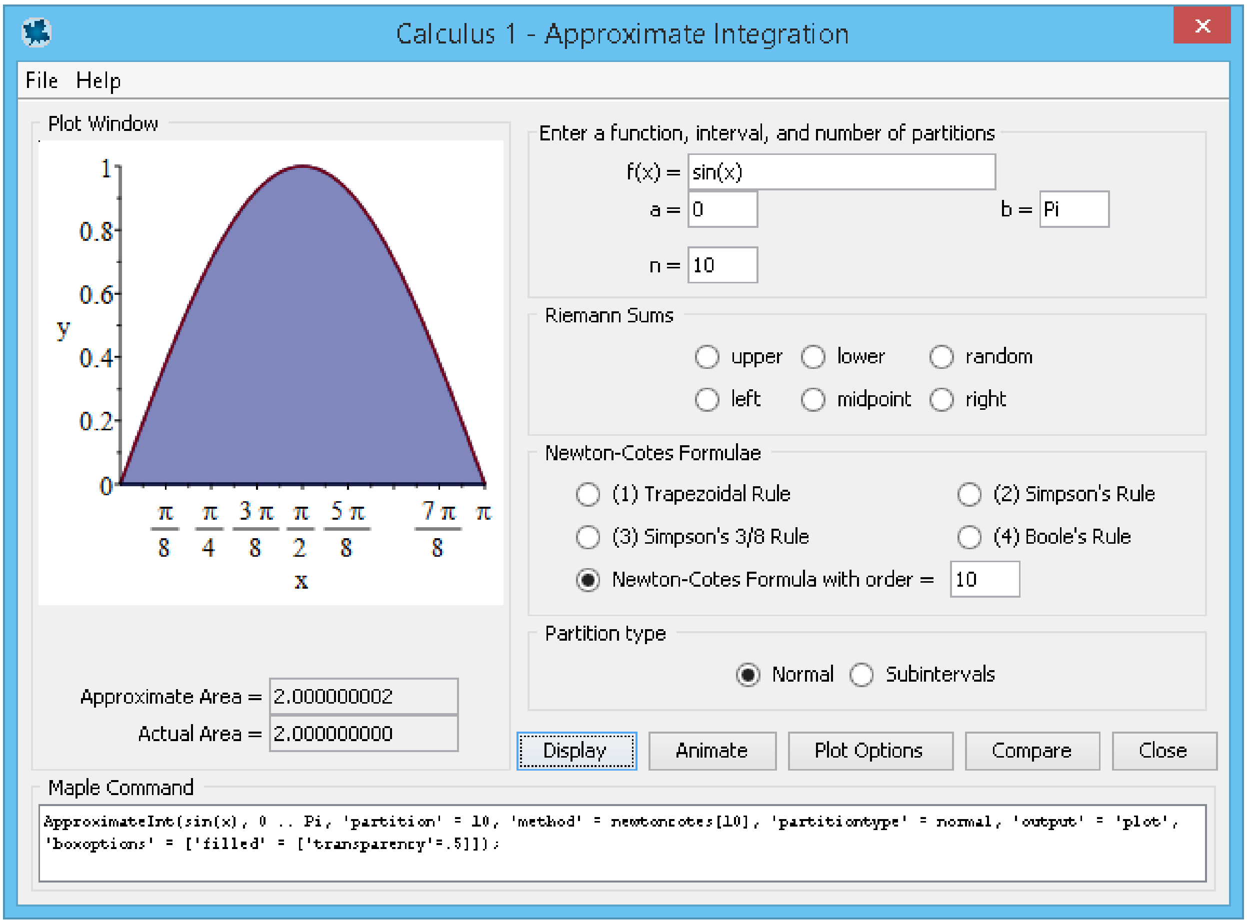

Рисунок 1.Вычисление по формуле Ньютона-Котеса ($n = 10$).

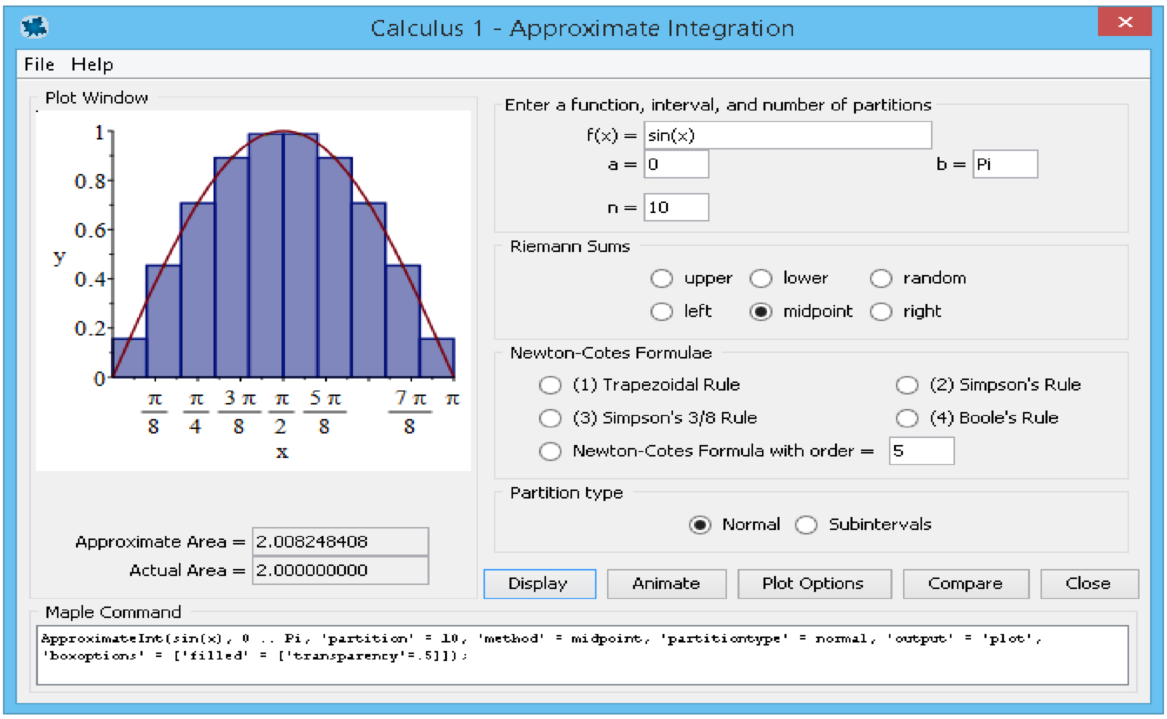

Рисунок 2. Вычисление по формуле средних прямоугольников.

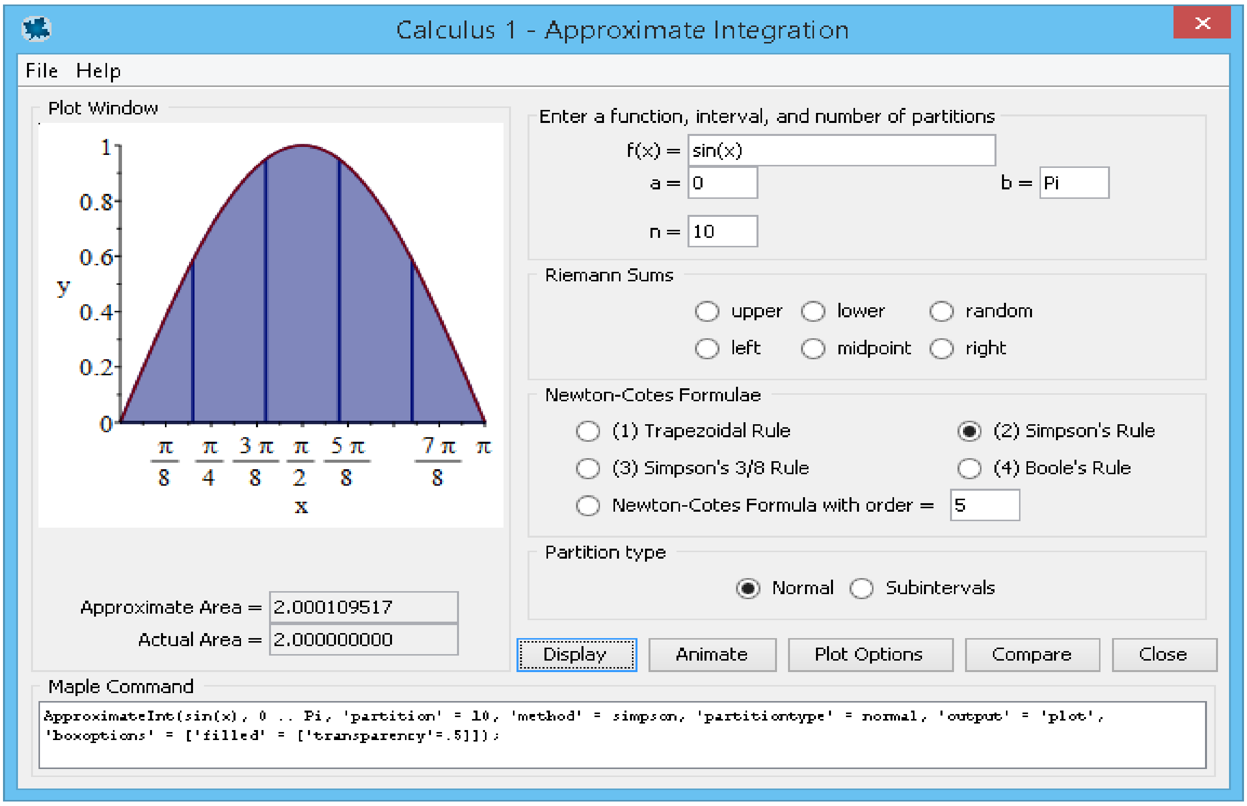

Рисунок 3. Вычисление по формуле Симпсона.

Опускаем интерактивное окно вычисления формулой трапеций. Приведём сравнительную таблицу для всех методов.

№	Формулы J_h	Английское название формулы	Значение J_h
1	J_h^N	Newton-Cotes Formula (n=10)	2.000000002
2	$J_h^П$	Riemann Sums	2.008248408
3	J_h^T	Trapezoidal Rule	1.983523538
4	J_h^S	Simpson's Rule	2.000109517

Использованная литература

1. Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие – Белгород: Изд. Белаудит, 2001.–116с.
2. Голоскоков Д.П. Уравнение математической физики. Учебник для вузов с применением системы Maple. –СПб.: Питер, 2004.
3. Имомов А. Решение математических задач в Maple. Наманган, НамГУ, 2017.-100 с.
4. Burden R.L. Numerical Analysis. Books Cole. Boston, USA.-2010.-895 pp.