O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
V.I.ROMANOVKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi"deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

3. 2017

УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ - 2017

Адрес редколлегии: 100125. Ташкент, Дурмон йули, 29,
Институт математики имени В.И.Романовского АНРУз,
телефон: (+99871) 262-75-44

ТАШКЕНТ - 2017

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№3, pp.102-108

УДК 512.554

Об одной разрешимой алгебре Лейбница с квази-филиформным нильрадикалом максимальной длины

Расулов Х., Солижонова Г.

Maqolada nilradikali maksimal uzunlikdagi kvazi-filiform kompleks Leybniz algebrasi bo‘lgan yechimli Leybniz algebralari tasnif qilingan.

In this paper solvable Leibniz algebras with a quasi-filiform nilradical of maximum length are described.

Алгебры Лейбница являются обобщением алгебры Ли, для которого сохраняется уникальное свойство алгебры Ли, а именно свойство оператора правого умножения быть дифференцированием. Понятие алгебры Лейбница было введено Ж.-Л. Лоде [4] как "некоммутативное"обобщение алгебр Ли. В настоящее время теория алгебр Лейбница превратилась в самостоятельную бурно развивающуюся теорию неассоциативных алгебр.

Понятие длины для алгебр Ли было введено Гомезом, Хименес-Мершаном и Рейесом в работе [1]. В этой работе они ввели и описали некоторый класс алгебр, допускающих градуировку с наибольшим числом ненулевых подпространств, названные ими алгебрами максимальной длины. В статье [2] описывается и изучается свойства квазифилиформных алгебр Лейбница максимальной длины.

В настоящей работе мы изучаем разрешимые алгебры Лейбница, которые имеют в качестве нильрадикала квазифилиформные алгебры максимальной длины.

Определение 1. Алгебра L над полем F называется алгеброй Лейбница, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

где [-,-]– умножение в L.

Заметим, что если в L выполняется тождество $[x, x] = 0$, то тождество Лейбница преобразуется в тождество Якоби. Таким образом алгебры Лейбница являются "некоммутативным"аналогом алгебр Ли. Изучение алгебр Лейбница со структурной точки зрения является одной из актуальных задач теории алгебр Ли и алгебр Лейбница. Подалгебру H алгебры Лейбница L назовем двусторонным идеалом если $[L, H] \subseteq L$ и $[H, L] \subseteq L$.

Для произвольной алгебры Лейбница L с помощью соответственных двусторонных идеалов рекурсивным образом определяется нижний центральный и производный ряды, соответственно последовательностями:

$$L^1 = L, L^{n+1} = [L^n, L^1], \quad L^{[1]} = L, L^{[n+1]} = [L^{[n]}, L^{[n]}], \quad n \geq 1.$$

Определение 2. Алгебра Лейбница L называется разрешимой (соответственно, нильпотентной), если существует $m \in N$ такое, что $L^{[m]} = \{0\}$(соответственно, $L^m = \{0\}$).

Максимальный нильпотентный идеал алгебры Лейбница называется нильрадикалом этой алгебры.

Определение 3. Линейное преобразование d алгебры Лейбница L называется дифференцированием, если

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$$

для любых $x, y \in L$.

Определение 4. [5]. Дифференцирования $d_1, d_2, \ldots, d_n$ алгебры Лейбница L называются ниль-независимыми, если

$$\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \cdots + \alpha_n d_n$$

не является нильпотентной ни при каких не нулевых скалярах $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$.

Другими словами, если для скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ существует натуральное число k такое, что если $(\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \cdots + \alpha_n d_n)^k = 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Пусть R разрешимая алгебра Лейбница. Тогда она может быть представлена в виде прямой суммы векторных пространств $R = N \oplus Q$, где N есть нильрадикал, а Q - дополняющее векторное пространство к N [5].

Теорема 1.[3] *Пусть R разрешимая алгебра Лейбница и N ее нильрадикал. Тогда размерность дополняющего пространства к N не больше чем максимальное число ниль-независимых дифференцирований N.*

В статье [2] приводятся и изучаются некоторые свойства n-мерной квазифилиформной нелиевой алгебры Лейбница максимальной длины второго типа. Такая алгебра допускает базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ в котором она задается следующей таблицей умножения:

$$M : [e_1, e_1] = e_2, \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad [e_1, e_i] = -e_{i+1}, \ 3 \leq i \leq n-1.$$

В настоящей статье мы изучаем строение разрешимых алгебр Лейбница имеющих качестве нильрадикала алгебру M. Всевозможные дифференцирования, рассматриваемой алгебры Лейбница M описываются в следующей теореме.

Теорема 2. *Всякое дифференцирование алгебры Лейбница M имеет следующий матричный вид:*

$$\begin{pmatrix}
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\
0 & 2\alpha_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \ldots & \beta_{n-1} & \beta_n \\
0 & 0 & 0 & \alpha_1+\beta_3 & \ldots & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \beta_{n-3} & \beta_{n-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-4)\alpha_1+\beta_3 & \beta_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & (n-3)\alpha_1+\beta_3
\end{pmatrix}$$

где элементы $\alpha_i, \beta \in F$ и $i \in \{1, ..., n\}$.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится непосредственной проверкой свойства дифференцирования и использванием таблицы умножения алгебры M. $\square$

Имеет место следующее следствие.

Следствие. *Число ниль-независимых дифференцирований алгебры Лейбница M не превосходит 2.*

Следующий результат приводит классификацию $(n+2)$-мерных разрешимых алгебр Лейбница у которых нильрадикал есть квазифилиформная алгебра Лейбница второго типа и максимальной длины размерности n.

Теорема 3. *Для любой $n+2$-мерной разрешимой алгебры Лейбница L имеющей в качестве нильрадикала n-мерную квазифилиформную нелиевую алгебры Лейбница максимальной длины и второго типа существует базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n, x, y)$, где $e_1, e_2, \ldots, e_n$- базис нильрадикала, x, y - базис дополнительного пространства к нильрадикалу M и в* *этом базисе алгебра* L *имеет следующую таблицу умножения:*

$$\begin{cases} [e_1,e_1]=e_2, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad [e_1,e_i]=-e_{i+1}, \quad 3\leq i\leq n-1,\\ [e_1,x]=e_1 & [x,e_1]=-e_1, \quad [e_2,x]=2e_2,\\ [e_i,x]=(i-3)e_i, & [x,e_i]=-(i-3)e_i, \quad 4\leq i\leq n,\\ [e_i,y]=e_i, & [y,e_i]=-e_i, \quad 3\leq i\leq n.\end{cases}$$

Доказательство. Положим дифференцирования d_1, d_2 внутренними в алгебре L. Используя описание дифференцирований Теоремы 2, произведения $[e_i,x]$ и $[e_i,y]$ можно записать в виде

$$\begin{cases} [e_1,x]=e_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\alpha_{1,i}e_i, & [e_1,y]=\sum\limits_{i=2}^{n}\alpha_{2,i}e_i,\\ [e_2,x]=2e_2, & \\ [e_3,x]=\beta_{1,2}e_2+\sum\limits_{i=4}^{n}\beta_{1,i}e_i, & [e_3,y]=\beta_{2,2}e_2+e_3+\sum\limits_{i=4}^{n}\beta_{2,i}e_i,\\ [e_i,x]=(i-3)e_i+\sum\limits_{j=i+1}^{n}\beta_{1,j-i+3}e_j, & [e_i,y]=e_i+\sum\limits_{j=i+1}^{n}\beta_{2,j-i+3}e_j,\\ [e_n,x]=(n-3)e_n, & [e_n,y]=e_n,\end{cases}$$

при $4\leq i\leq n-1$.

Введем обозначения

$$\begin{cases} [x,e_1]=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_ie_i, & [y,e_1]=\sum\limits_{i=1}^{n}\psi_ie_i, & [x,x]=\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_ie_i, & [x,y]=\sum\limits_{i=1}^{n}\rho_ie_i,\\ [x,e_3]=\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_ie_i, & [y,e_3]=\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_ie_i, & [y,x]=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_ie_i, & [y,y]=\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_ie_i.\end{cases}$$

Воспользуясь тождеством Лейбница, получим $[x,e_2]=[x,[e_1,e_1]]=0$. Аналогично, получим $[y,e_2]=0$.

Применив тождества Лейбница для следующих произведений:

$$[e_1,[x,e_1]],[e_1,[y,e_1]],[e_1,[x,e_3]],[e_1,[y,e_3]],$$

получим ограничения

$$\mu_1=-1, \quad \mu_i=-\alpha_{1,i}, \quad 3\leq i\leq n-1,$$

$$\psi_1=0, \quad \psi_i=-\alpha_{2,i}, \quad 3\leq i\leq n-1.$$

$$\gamma_1=\gamma_3=0, \quad \gamma_i=-\beta_{1,i}, \quad 4\leq i\leq n-1,$$

$$\varphi_1=\varphi_3=-1, \quad \varphi_i=-\beta_{2,i}, \quad 4\leq i\leq n-1,$$

Далее из равенств $[x, e_{i+1}] = [x, [e_i, e_1]]$ и $[y, e_{i+1}] = [y, [e_i, e_1]]$ для $3 \le i \le n-1$ получим

$$[x, e_3] = \gamma_2 e_2 + \sum_{i=4}^{n} \gamma_i e_i, \quad [x, e_i] = -(i-3)e_i + \sum_{j=i+1}^{n} \gamma_{j-(i-3)} e_j$$

при $5 \le i \le n-1$ и $[x, e_n] = -(n-3)e_n$.

Аналогичным образом, мы имеем

$$[y, e_3] = \varphi_2 e_2 - e_3 + \sum_{i=4}^{n} \varphi_i e_i, \quad [y, e_i] = -e_i + \sum_{j=i+1}^{n} \varphi_{j-i+3} e_j$$

при $4 \le i \le n-1$ и $[y, e_n] = -e_n$.

Следаем замену базиса

$$x' = x + \sum_{i=3}^{n-1} \alpha_{1,i+1} e_i, \quad y' = y + \sum_{i=3}^{n-1} \alpha_{2,i+1} e_i.$$

Тогда

$$[e_1, x] = e_1 + \alpha_{1,2} e_2 + \alpha_{1,3} e_3, \quad [x, e_1] = -e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + (\mu_n + \alpha_{1,n}) e_n,$$

$$[e_1, y] = \alpha_{2,2} e_2 + \alpha_{2,3} e_3, \quad [y, e_1] = \psi_2 e_2 + \psi_3 e_3 + (\alpha_{2,n} + \psi_n) e_n.$$

Рассмотрение равенств $[e_1, [x, x]] = [e_1, [y, y]] = [x, [x, x]] = [y, [y, y]] = 0$ влечет

$$\eta_1 = \eta_i = \sigma_1 = \sigma_i = \eta_n = \sigma_n = 0, \quad 3 \le i \le n-1.$$

Возьмем замену базиса

$$e_1' = e_1 - \frac{\alpha_{1,2}}{2} e_2, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = e_3 - \frac{\beta_{1,2}}{2} e_2, \quad e_i' = e_i, \quad 4 \le i \le n.$$

Тогда получим $\alpha_{1,2} = \beta_{1,2} = 0$.

Из тождества Лейбница

$$[y, [e_1, x]] = [[y, e_1], x] - [[y, x], e_1]$$

мы получим ограничения $\psi_3 = \alpha_{1,3} = -\alpha_{2,3}$.

Полагая

$$e'_1 = e_1, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_i = e_i + \sum_{j=i+1}^{n} A_{j-i+3} e_j, \quad 3 \le i \le n,$$

при

$$A_4 = -\beta_{1,4}, A_i = -\frac{1}{i-3}(\beta_{1,i} + \sum_{j=4}^{i-1} \beta_{1,j} A_{i-j+3}), \quad 5 \le i \le n,$$

мы получим $\beta_{1,i} = 0$ для $4 \le i \le n$.

Теперь применив тождества Лейбница для произведений

$$[e_3, [y, x]], \ [e_1, [y, x]], \ [y, [x, e_3]], \ [y, [y, x]], \ [e_1, [y, x]],$$

$$[e_1, [x, y]], \ [y, [x, e_1]], \ [x, [x, e_1]], \ [x, [x, e_3]],$$

имеем следующие ограничения на параметры:

$$\xi_1 = \beta_{2,4}, \ \beta_{2,2} = \beta_{2,i} = 0, \ 5 \le i \le n,$$

$$\xi_1 = \alpha_{2,2} = \beta_{2,4} - \varphi_4, \quad \xi_3 = \alpha_{1,3}\beta_{2,4}, \ \xi_i = 0, \ 4 \le i \le n-1,$$

$$\gamma_n - \beta_{1,n} = \alpha_{2,n} + \psi_n = \xi_1 = \xi_3 = \rho_1 = \rho_i = 0, \quad 3 \le i \le n-1,$$

$$\psi_2 = \mu_n + \alpha_{1,n} = 0, \ \mu_2 = \psi_3\gamma_2, \ \gamma_2 = \mu_2 = 0.$$

Далее, взяв замену

$$x' = x - \frac{\eta_2}{2} e_2, \quad y' = y - \frac{\xi_2}{2} e_2,$$

можем считать, что $[x, x] = 0$ и $[y, x] = \xi_n e_n$.

Используя тождество Лейбница для троек $\{x, x, y\}, \{y, x, y\}$ мы имеем $\rho_2 = \sigma_2 = 0, \ \rho_n = -\xi_n$.

Сделав замену $x' = x - \rho_n e_n, \ e'_1 = e_1 + \psi_3 e_3$, мы получим $\rho_n = \psi_3 = 0$. И наконец, из равенства $[y, [e_1, x]] = [[y, e_1], x] - [[y, x], e_1]$ заключаем $\psi_2 = 0$.

Литература

1. Gomez J.R., Jimenez-Merchan A., Reyes J. Quasi-filiform Lie algebras of maximum length, Linear Algebra Appl., 2001, vol. 335, p. 119-135.

2. Camacho L.M., Cañete E.M., Gómez J.R., Omirov B.A. Quasi-filiform Leibniz algebras of maximum length, Sibirsk. Mat. Zh., 2011, vol. 52(5), p. 1058-1073.
3. Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I.A. Classification of solvable Leibniz Algebras with null-filiform Nilradical, Linear Algebra Appl., 2013, vol. 438(7), p 2973-3000.
4. Loday J.-L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz, Enseign. Math., 1993, vol. 39(2), p. 269-293.
5. Malcev A.I. Solvable Lie algebras, Amer. Math. Soc. Translation, 1950, vol. 27.
6. Mubarakzjanov G.M. On solvable Lie algebras, Izv. Vysš. Učehn. Zaved. Matematika, 1963, vol 32(1), p. 114-123.

Наманганский государственный
университет

Mundarija

Содержание