

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
V.I.ROMANOVKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi" deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

3. 2017 _____

УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ УЗМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ - 2017

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Ш.А.АЮПОВ	- академик, главный редактор
А.АЗАМОВ	- профессор
Ш.А.АЛИМОВ	- академик
Р.АШУРОВ	- профессор
Р.Н.ГАНИХОДЖАЕВ	- профессор
Х.ДУТТА	- профессор (Индия)
О.ЗАИТОВ	- д.ф.-м.н.
Э.Т.КАРИМОВ	- к.ф.-м.н.
Б.А.ОМИРОВ	- профессор
И.РАХИМОВ	- д.ф.-м.н. (Малайзия)
У.А.РОЗИКОВ	- профессор
А.С.САДУЛЛАЕВ	- академик
М.С.САЛАХИТДИНОВ	- академик
Ф.А.СУКОЧЕВ	- профессор (Австралия)
Ж.А.ТАХИРОВ	- профессор
Ш.К.ФОРМАНОВ	- академик
Ю.Б.ХАКИМДЖАНОВ	- профессор (Франция)
А.Р.ХАЁТОВ	- д.ф.-м.н.
В.И.ЧИЛИН	- профессор
Х.М.ШАДИМЕТОВ	- профессор
Ю.Х.ЭШКАБИЛОВ	- д.ф.-м.н.
К.Ж.ХОЛЛИЕВ	- к.и.н., отв. секретарь

Адрес редколлегии: 100125. Ташкент, Дурмон йули, 29,
Институт математики имени В.И.Романовского АНРУз,
телефон: (+99871) 262-75-44

ТАШКЕНТ - 2017

УДК 512.554

**Об одной разрешимой алгебре Лейбница с
квази-филиформным нильрадикалом максимальной
длины****Расулов Х., Солижонов Г.**

Maqolada nilradikali maksimal uzunlikdagi kvazi-filiform kompleks Leybniz algebrasi bo'lgan yechimli Leybniz algebralari tasnif qilingan.

In this paper solvable Leibniz algebras with a quasi-filiform nilradical of maximum length are described.

Алгебры Лейбница являются обобщением алгебры Ли, для которого сохраняется уникальное свойство алгебры Ли, а именно свойство оператора правого умножения быть дифференцированием. Понятие алгебры Лейбница было введено Ж.-Л. Лоде [4] как "некоммутативное" обобщение алгебр Ли. В настоящее время теория алгебр Лейбница превратилась в самостоятельную бурно развивающуюся теорию неассоциативных алгебр.

Понятие длины для алгебр Ли было введено Гомезом, Хименес-Мершаном и Рейесом в работе [1]. В этой работе они ввели и описали некоторый класс алгебр, допускающих градуировку с наибольшим числом ненулевых подпространств, названные ими алгебрами максимальной длины. В статье [2] описываются и изучаются свойства квази-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины.

В настоящей работе мы изучаем разрешимые алгебры Лейбница, которые имеют в качестве нильрадикала квазифилиформные алгебры максимальной длины.

Определение 1. Алгебра L над полем F называется алгеброй Лейбница, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

где $[-, -]$ — умножение в L .

Заметим, что если в L выполняется тождество $[x, x] = 0$, то тождество Лейбница преобразуется в тождество Якоби. Таким образом алгеб-

ры Лейбница являются "некоммутативным" аналогом алгебр Ли. Изучение алгебр Лейбница со структурной точки зрения является одной из актуальных задач теории алгебр Ли и алгебр Лейбница. Под алгебру H алгебры Лейбница L назовем двусторонним идеалом если $[L, H] \subseteq L$ и $[H, L] \subseteq L$.

Для произвольной алгебры Лейбница L с помощью соответственных двусторонних идеалов рекурсивным образом определяется нижний центральный и производный ряды, соответственно последовательностями:

$$L^1 = L, L^{n+1} = [L^n, L^1], \quad L^{[1]} = L, L^{[n+1]} = [L^{[n]}, L^{[n]}], \quad n \geq 1.$$

Определение 2. Алгебра Лейбница L называется разрешимой (соответственно, нильпотентной), если существует $m \in N$ такое, что $L^{[m]} = \{0\}$ (соответственно, $L^m = \{0\}$).

Максимальный нильпотентный идеал алгебры Лейбница называется нильрадикалом этой алгебры.

Определение 3. Линейное преобразование d алгебры Лейбница L называется дифференцированием, если

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$$

для любых $x, y \in L$.

Определение 4. [5]. Дифференцирования d_1, d_2, \dots, d_n алгебры Лейбница L называются ниль-независимыми, если

$$\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \dots + \alpha_n d_n$$

не является нильпотентной ни при каких не нулевых скалярах $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$.

Другими словами, если для скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ существует натуральное число k такое, что если $(\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \dots + \alpha_n d_n)^k = 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Пусть R разрешимая алгебра Лейбница. Тогда она может быть представлена в виде прямой суммы векторных пространств $R = N \oplus Q$, где N есть нильрадикал, а Q - дополняющее векторное пространство к N [5].

Теорема 1. [3] Пусть R разрешимая алгебра Лейбница и N ее нильрадикал. Тогда размерность дополняющего пространства к N не больше чем максимальное число ниль-независимых дифференцирований N .

В статье [2] приводятся и изучаются некоторые свойства n -мерной

квазифилиформной нелиевой алгебры Лейбница максимальной длины второго типа. Такая алгебра допускает базис (e_1, e_2, \dots, e_n) в котором она задается следующей таблицей умножения:

$$M : [e_1, e_1] = e_2, \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad [e_1, e_i] = -e_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1.$$

В настоящей статье мы изучаем строение разрешимых алгебр Лейбница имеющих качестве нильрадикала алгебру M . Всевозможные дифференцирования, рассматриваемой алгебры Лейбница M описываются в следующей теореме.

Теорема 2. *Всякое дифференцирование алгебры Лейбница M имеет следующий матричный вид:*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ 0 & 2\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 + \beta_3 & \dots & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & \beta_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-4)\alpha_1 + \beta_3 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (n-3)\alpha_1 + \beta_3 \end{pmatrix}$$

где элементы $\alpha_i, \beta \in F$ и $i \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится непосредственной проверкой свойства дифференцирования и использованием таблицы умножения алгебры M . \square

Имеет место следующее следствие.

Следствие. *Число ниль-независимых дифференцирований алгебры Лейбница M не превосходит 2.*

Следующий результат приводит классификацию $(n+2)$ -мерных разрешимых алгебр Лейбница у которых нильрадикал есть квазифилиформная алгебра Лейбница второго типа и максимальной длины размерности n .

Теорема 3. *Для любой $n+2$ -мерной разрешимой алгебры Лейбница L имеющей в качестве нильрадикала n -мерную квазифилиформную нелиевую алгебры Лейбница максимальной длины и второго типа существует базис $(e_1, e_2, \dots, e_n, x, y)$, где e_1, e_2, \dots, e_n - базис нильрадикала, x, y - базис дополнительного пространства к нильрадикалу M и в*

этом базисе алгебра L имеет следующую таблицу умножения:

$$\left\{ \begin{array}{lll} [e_1, e_1] = e_2, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & [e_1, e_i] = -e_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, x] = e_1 & [x, e_1] = -e_1, & [e_2, x] = 2e_2, \\ [e_i, x] = (i-3)e_i, & [x, e_i] = -(i-3)e_i, & 4 \leq i \leq n, \\ [e_i, y] = e_i, & [y, e_i] = -e_i, & 3 \leq i \leq n. \end{array} \right.$$

Доказательство. Положим дифференцирования d_1, d_2 внутренними в алгебре L . Используя описание дифференцирований Теоремы 2, произведения $[e_i, x]$ и $[e_i, y]$ можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{ll} [e_1, x] = e_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_{1,i} e_i, & [e_1, y] = \sum_{i=2}^n \alpha_{2,i} e_i, \\ [e_2, x] = 2e_2, & \\ [e_3, x] = \beta_{1,2} e_2 + \sum_{i=4}^n \beta_{1,i} e_i, & [e_3, y] = \beta_{2,2} e_2 + e_3 + \sum_{i=4}^n \beta_{2,i} e_i, \\ [e_i, x] = (i-3)e_i + \sum_{j=i+1}^n \beta_{1,j-i+3} e_j, & [e_i, y] = e_i + \sum_{j=i+1}^n \beta_{2,j-i+3} e_j, \\ [e_n, x] = (n-3)e_n, & [e_n, y] = e_n, \end{array} \right.$$

при $4 \leq i \leq n-1$.

Введем обозначения

$$\left\{ \begin{array}{llll} [x, e_1] = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i, & [y, e_1] = \sum_{i=1}^n \psi_i e_i, & [x, x] = \sum_{i=1}^n \eta_i e_i, & [x, y] = \sum_{i=1}^n \rho_i e_i, \\ [x, e_3] = \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i, & [y, e_3] = \sum_{i=1}^n \varphi_i e_i, & [y, x] = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, & [y, y] = \sum_{i=1}^n \sigma_i e_i. \end{array} \right.$$

Воспользуясь тождеством Лейбница, получим $[x, e_2] = [x, [e_1, e_1]] = 0$. Аналогично, получим $[y, e_2] = 0$.

Применив тождества Лейбница для следующих произведений:

$$[e_1, [x, e_1]], [e_1, [y, e_1]], [e_1, [x, e_3]], [e_1, [y, e_3]],$$

получим ограничения

$$\mu_1 = -1, \quad \mu_i = -\alpha_{1,i}, \quad 3 \leq i \leq n-1,$$

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_i = -\alpha_{2,i}, \quad 3 \leq i \leq n-1.$$

$$\gamma_1 = \gamma_3 = 0, \quad \gamma_i = -\beta_{1,i}, \quad 4 \leq i \leq n-1,$$

$$\varphi_1 = \varphi_3 = -1, \quad \varphi_i = -\beta_{2,i}, \quad 4 \leq i \leq n-1,$$

Далее из равенств $[x, e_{i+1}] = [x, [e_i, e_1]]$ и $[y, e_{i+1}] = [y, [e_i, e_1]]$ для $3 \leq i \leq n-1$ получим

$$[x, e_3] = \gamma_2 e_2 + \sum_{i=4}^n \gamma_i e_i, \quad [x, e_i] = -(i-3)e_i + \sum_{j=i+1}^n \gamma_{j-(i-3)} e_j$$

при $5 \leq i \leq n-1$ и $[x, e_n] = -(n-3)e_n$.

Аналогичным образом, мы имеем

$$[y, e_3] = \varphi_2 e_2 - e_3 + \sum_{i=4}^n \varphi_i e_i, \quad [y, e_i] = -e_i + \sum_{j=i+1}^n \varphi_{j-i+3} e_j$$

при $4 \leq i \leq n-1$ и $[y, e_n] = -e_n$.

Сделаем замену базиса

$$x' = x + \sum_{i=3}^{n-1} \alpha_{1,i+1} e_i, \quad y' = y + \sum_{i=3}^{n-1} \alpha_{2,i+1} e_i.$$

Тогда

$$[e_1, x] = e_1 + \alpha_{1,2} e_2 + \alpha_{1,3} e_3, \quad [x, e_1] = -e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + (\mu_n + \alpha_{1,n}) e_n,$$

$$[e_1, y] = \alpha_{2,2} e_2 + \alpha_{2,3} e_3, \quad [y, e_1] = \psi_2 e_2 + \psi_3 e_3 + (\alpha_{2,n} + \psi_n) e_n.$$

Рассмотрение равенств $[e_1, [x, x]] = [e_1, [y, y]] = [x, [x, x]] = [y, [y, y]] = 0$ влечет

$$\eta_1 = \eta_i = \sigma_1 = \sigma_i = \eta_n = \sigma_n = 0, \quad 3 \leq i \leq n-1.$$

Возьмем замену базиса

$$e'_1 = e_1 - \frac{\alpha_{1,2}}{2} e_2, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3 - \frac{\beta_{1,2}}{2} e_2, \quad e'_i = e_i, \quad 4 \leq i \leq n.$$

Тогда получим $\alpha_{1,2} = \beta_{1,2} = 0$.

Из тождества Лейбница

$$[y, [e_1, x]] = [[y, e_1], x] - [[y, x], e_1]$$

мы получим ограничения $\psi_3 = \alpha_{1,3} = -\alpha_{2,3}$.

Полагая

$$e'_1 = e_1, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_i = e_i + \sum_{j=i+1}^n A_{j-i+3} e_j, \quad 3 \leq i \leq n,$$

при

$$A_4 = -\beta_{1,4}, \quad A_i = -\frac{1}{i-3}(\beta_{1,i} + \sum_{j=4}^{i-1} \beta_{1,j} A_{i-j+3}), \quad 5 \leq i \leq n,$$

мы получим $\beta_{1,i} = 0$ для $4 \leq i \leq n$.

Теперь применив тождества Лейбница для произведений

$$[e_3, [y, x]], [e_1, [y, x]], [y, [x, e_3]], [y, [y, x]], [e_1, [y, x]], \\ [e_1, [x, y]], [y, [x, e_1]], [x, [x, e_1]], [x, [x, e_3]],$$

имеем следующие ограничения на параметры:

$$\xi_1 = \beta_{2,4}, \quad \beta_{2,2} = \beta_{2,i} = 0, \quad 5 \leq i \leq n, \\ \xi_1 = \alpha_{2,2} = \beta_{2,4} - \varphi_4, \quad \xi_3 = \alpha_{1,3} \beta_{2,4}, \quad \xi_i = 0, \quad 4 \leq i \leq n-1, \\ \gamma_n - \beta_{1,n} = \alpha_{2,n} + \psi_n = \xi_1 = \xi_3 = \rho_1 = \rho_i = 0, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ \psi_2 = \mu_n + \alpha_{1,n} = 0, \quad \mu_2 = \psi_3 \gamma_2, \quad \gamma_2 = \mu_2 = 0.$$

Далее, взяв замену

$$x' = x - \frac{\eta_2}{2} e_2, \quad y' = y - \frac{\xi_2}{2} e_2,$$

можем считать, что $[x, x] = 0$ и $[y, x] = \xi_n e_n$.

Используя тождество Лейбница для троек $\{x, x, y\}, \{y, x, y\}$ мы имеем $\rho_2 = \sigma_2 = 0, \rho_n = -\xi_n$.

Сделаем замену $x' = x - \rho_n e_n, e'_1 = e_1 + \psi_3 e_3$, мы получим $\rho_n = \psi_3 = 0$. И наконец, из равенства $[y, [e_1, x]] = [[y, e_1], x] - [[y, x], e_1]$ заключаем $\psi_2 = 0$.

Литература

1. Gomez J.R., Jimenez-Merchan A., Reyes J. Quasi-filiform Lie algebras of maximum length, Linear Algebra Appl., 2001, vol. 335, p. 119-135.

2. Camacho L.M., Cañete E.M., Gómez J.R., Omirov B.A. Quasi-filiform Leibniz algebras of maximum length, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2011, vol. 52(5), p. 1058-1073.
3. Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I.A. Classification of solvable Leibniz Algebras with null-filiform Nilradical, *Linear Algebra Appl.*, 2013, vol. 438(7), p 2973-3000.
4. Loday J.-L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz, *Enseign. Math.*, 1993, vol. 39(2), p. 269-293.
5. Malcev A.I. Solvable Lie algebras, *Amer. Math. Soc. Translation*, 1950, vol. 27.
6. Mubarakzjanov G.M. On solvable Lie algebras, *Izv. Vysš. Učehn. Zaved. Matematika*, 1963, vol 32(1), p. 114-123.

Наманганский государственный
университет

Mundarija

Azamov S.S. $K_2^{\overline{m-2,m}}$ fazosida Sard ma'nosida optimal kvadratur formulalar	3
Ahmadaliyev G'.N., Hayotov A.R. $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 2\omega^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \omega^4 \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ differensial operator diskret analogi	10
Ashurov R.R., Fayziyev Yu.E. O'zgarmas koeffitsiyentli, chiziqli differensial tenglama uchun Koshi masalasining yechimi	23
Abdurasulov K.K. Nilradikali to'rt o'lchamli maksimal uzunlikdagi kvazi-filiform kompleks Leybniz algebrasi	42
Begmatov A.S. Bitta nuqtada sinishga ega aylana gomeomorfizmlari renormalizatsiyalarining yaqinlashishi	53
Boltayev N.D. $K_2(P_2)$ fazosida Furrye integrallarini sonli hisoblash uchun optimal kvadratur formula	63
Ganixodjayev R.N., Eshimbetov M.R. Kvadratik akslantirishlarning asimptotik holati	75
Nuraliyev F.A. $L_2^{(3)}(0, 1)$ fazosida hosilali optimal interpolatsion formula	83
Raimova G.M. Elliptic tenglamalar sistemasiga qo'yilgan Dirixle masalasini echish uchun ehtimoliy modellar	94
Rasulov X., Solijonova G. Bir nilradikali maksimal uzunlikdagi kvazi-filiform kompleks Leybniz algebrasi bo'lgan yechimli Leybniz algebralari haqida	102
Taxirov J.O., Umirxonov M. Biologiya muammolarida erkin chegarali masalalar	109
To'rayev R.N. Kvazichiziqli parabolik tenglama uchun noklassik Florin masalasi	116
Tuxtasinov M., Mamadaliyev N.O., Mustapokulov X.Ya. Ko'pqiymatli akslantirishning kuchli va kuchsiz invariantligi masalasi ...	129
Xusanboyev Ya.M., Jumakulov X.K. Immigratsiyali deyarli kritik tarmoqlanuvchi jarayonlarni deterministik jarayonga yaqinlashish	142
Xusanboyev Ya.M., Sharipov S.O. Bog'liqlik immigratsiyali kritik tarmoqlanuvchi jarayon uchun funksional limitik teorema	149
Hof A., Shade J., Whiting W. Nilradikali kvazi-filiform bo'lgan yechiluvchan Leybnis algebralari	159
Chilin V.I. Sadovskaya O.S. Lorents ketma-ketliklari fazolari izomorf klassifikatsiyasi	169

Содержание

Азамов С.С. <i>Оптимальные квадратурные формулы в смысле Сарда в пространстве $K_2^{m-2,m}$</i>	3
Ахмадалиев Г.Н., Хаётов А.Р. <i>Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 2\omega^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \omega^4 \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$</i>	10
Ашууров Р.Р., Файзиев Ю.Э. <i>О построении решений линейного дифференциального уравнения с дробными производными и постоянными коэффициентами</i>	23
Абдурасулов К.К. <i>Комплексные разрешимые алгебры Лейбница с четырехменным квази-филиформным нильрадикалом максимальной длины</i>	42
Бегматов А.С. <i>Сходимость ренормализаций гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома</i>	53
Болтаев Н.Д. <i>Оптимальная квадратурная формула для численного вычисления интегралов Фурье в пространстве $K_2(P_2)$</i>	63
Ганиходжаев Р.Н., Эшимбетов М.Р. <i>Динамика квадратичных отображений эллиптического типа</i>	75
Nuraliev F.A. <i>Optimal interpolation formula with derivative in the space $L_2^{(3)}(0,1)$</i>	83
Раимова Г.М. <i>Вероятностные модели для решения задачи Дирихле для системы эллиптических уравнений</i>	94
Расулов Х., Солижонова Г. <i>Об одной разрешимой алгебре Лейбница с квази-филиформным нильрадикалом максимальной длины</i>	102
Тахиров Ж. О, Умирхонов М. <i>Задача со свободной границей в проблемах биологии</i>	109
Тураев Р.Н. <i>Неклассическая задача Флорина для квазилинейного параболического уравнения</i>	116
Тухтасинов М., Мамадалиев Н.О., Мустапокулов Х.Я. <i>Об инвариантном постоянном многозначном отображении в задаче теплопроводности с запаздыванием</i>	129
Хусанбаев Я.М., Жумакулов Х.К. <i>О сходимости почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией к детерминированному процессу</i>	142
Хусанбаев Я.М., Шарипов С.О. <i>Функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса с зависимой иммиграцией</i>	149
Хоф А., Шаде Ж., Уитинг У. <i>Разрешимые алгебры Лейбница у которых нильрадикал есть квази-филиформная разложимая алгебра Ли</i>	159
Чилин В.И., Садовская О.С. <i>Изоморфная классификация пространств последовательностей Лоренца</i>	169