

**ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASÍ INFORMACIYALÍQ
TEXNOLOGIYALARÍ HÁM KOMMUNIKACIYALARÍN
RAWAJLANDÍRÍW MINISTRLIGI**

**MUHAMMED AL – XOREZMIY ATÍNAĞÍ TASHKENT
INFORMACIYALÍQ TEXNOLOGIYALARÍ UNIVERSITETI NÓKIS
FILIALÍ**

Informaciyalıq texnologiyaları kafedrası
Kompyuter injiniingi (Kompyuter injiniringi) baǵdarı

Jaqlawǵa ruxsat
Kafedra baslıǵı
Aytmuratov B.Sh.
2017 j. «__»_____

«Kombinatorika algoritmleri ha'm olardi iske asiriw»
temasındaǵı

PITKERIW QANIYGELIK JUMÍSÍ

Pitkeriwshi: _____ Karabekov E. S

Ilimiy basshı: _____ t.i.k. Eshmuratov Sh.

Nukus -2017

MAZMUNI

KIRISIW.....	3
I BAP. KOMBINATORIKANIN' KLASSIKALIQ MA'SELELERI	
1.1 Kombinatorikanin' klassikalıq ma'seleleri haqqında ulıwma tu'sinikler.....	6
1.2 n elementten ibarat u'les ko'pliktin' generatsiyasi.....	14
II BAP KOMBINATORIKANIN' KLASSIKALIQ MA'SELELERIN SHESHIW	
2.1 Berilgen ko'pliktin barlıq u'les ko'pliklerinin' generatsiyasi.....	21
2.2 n elementten ibarat ko'pliklerdin' barlıq ornına qoyıwları generatsiya qılıw.....	27
2.3 Ko'plikti almasıw.....	30
III BAP KOMBINATORIKANIN' MA'SELELERIN SHESHIWDIN' BO'LISTIRIW USILI	
3.1 Sanlardı qosındılarg'a bo'listiriw.....	34
JUWMAQLAW.....	39
PAYDALANILG'AN A'DEBIYATLAR DIZIMI.....	42

KIRISIW

Shekli yamasa belgili bir ma'niste sheklilik sha'rtin qanaatlandırıwshı ko'pliktin' elementleri u'stinde orın almasıw, teriw yamasa kombinatsiyalar, bo'leklew menen baylanıslı ma'seleler matematikanın' kombinatorikalıq analiz, kombinatorikalıq matematika, qısqasha, kombinatorika dep atalıwshı bo'liminde u'yreniledi. Ha'zirde kombinatorikag'a baylanıslı mag'lıwmatlar insan iskerliginin' tu'rli tarawlarında qollanıladı. Ma'selen, ximiya, matematika, biologiya, fizika, informatsiyalıq texnologiyalar, lingvistika ha'm basqa tarawları menen jumıs islewshi qa'nigeler kombinatsiyalıq ma'selelerdi sheshiwine tuwra keledi.

Ko'plikler ha'm kortejler ko'plikler teoriyası boyınsha kombinatorikada, olardıń birlespeleri kortejlar ha'm u'les ko'pliklerdi tu'rli usıllar ha'mde kesilispeleri menen ta'rтіplew ma'seleleri qaraladı. Kombinatorikanın' tiykarg'ı ma'seleleri bul ko'plik yamasa kortej elementlerinin' berilgen qa'siyetine iye konfiguratsiyası bar yamasa joqlıg'ın tekseriw, bar bolsa, olardı du'ziw ha'm sannın' tabıw usılların u'yreniw ha'mde bul usıllardı qandayda bir parametr boyınsha jetilistiriw bolıp esaplanadı[6].

Eramızdan aldındı II a'sirde hindistanlıqlarg'a kombinatorikanın' geypara elementleri ma'lim edi. Olar ha'zirgi waqıtta gruppalar, dep atalıwshı kombinatorikalıq tu'siniklerden paydalang'an. Bxaskara eramızdın' XII a'sirde Achariya o'zinin' ilimiy izretlewlerinde orın almasıw ha'm gruppalarardı qollag'an. Tariyxıy mag'lıwmatlarg'a qarag'anda, hindistanlıq alımlar kombinatorika elementlerinen, aytımlardan, birikpelerinen paydalanıp, shıg'armalardıń quramının' du'zilisinin' quramalılıg'ın analiz qılıwg'a ha'reket qılğ'an.

Bazı ataqlı matematikler, ma'selen, B.Paskal, Yakob Bernulli, L.Eyler, P.L. Chebishev ha'r qıylı oyınlarda (ten'ge taslaw, tas tan'law karta oyınları h.t.b.) ilimiy jaqtan tiykarlang'an qarar qabıl qılıwda kombinatorikanı qollang'an. Ulıwma

aytqanda, kombinatorikanın' da'slepki rawajı oyınlardı analiz qılıw menen baylanıslı[7].

XVII a'sirde kombinatorika matematikanın' ayırıqsha bir ilimiy bag'darı sıpatında qa'liplese basladı. B. Paskal o'zinin' "Arifmetikalıq u'shmu'yesh haqqında traktat" ha'm "Sanlı ta'rtipler haqqında traktat" (1665-j.) atlı shıg'armalarında ha'zirgi waqıtta binomiallıq koeffitsentler, dep atalıwshı sanlar haqqındag'ı mag'lıwmatlardı keltirgen. P. Ferma figuralı sanlar menen birlespeler teoriyası arasında baylanıs barlıg'ın bilgen.

"Kombinatorika" so'zi birinshi ma'rte 1665-jılda G. Leibnistin' "Kombinatorikalıq o'ner haqqındag'ı pikirler" atlı shıg'armasında keltirilgen. Bul shıg'armada birlespeler teoriyası ilimiy jaqtan birinshi ret tiykarlang'an, ornalastırıwdı u'yreniw menen birinshi bolıp Yakob Bernulli shug'ıllang'an ha'm bul haqqındag'ı mag'lıwmatlardı 1713-jılda basıp shıg'arg'an "Ars conjectandi" (Keleshekti ko'riw o'neri) atlı kitabının' ekinshi bo'liminde bayan qılğ'an. Ha'zirgi waqıtta kombinatorikada qollanılıp atırğ'an belgilewler XIX a'sirde kelip qa'liplesedi[7,8].

Kombinatorika degende belgili qag'ıydalardı qanaatlandırıtug'ın ha'r qıylı obiektler sanın esaplaw usılların u'yrenetug'ın matematikanın' bir bo'limi tu'siniledi. Programmalastırıwda usınday esaplawlar ushın ko'binese konkret obiektlerdin' orın almasırların barlıq mu'mkin bolğ'an variantlarında tez esaplaw ju'z beriw talap etiledi.

Kombinatorikalıq ma'selelerde ko'binese standart kombinatorikalıq obiektler ushırasadı olar - orın almasırlar, ornalastırıw ha'm teriwler.

Bunday a'piwayı kombinatorikalıq obiektler ushın og'ada a'piwayı formulalar bar[6].

Pitkeriw qa'negelik jumısı kirisiw bo'limnen, altı paragraf, juwmaqlaw bo'liminen ha'm paydalanılğ'an a'debiyatlar diziminen turadı. Pitkeriw qa'negelik jumısının' kirisiw bo'liminde kombinatorika termininin' payda bolıwı ha'm kombinatorikalıq ma'seleler haqqında tu'sinikler keltirilip o'tiledi.

Pitkeriw qa'nigelik jumısında ko'plikler h'am u'les ko'plikler elementleri u'stinde kombinatorikalıq algoritmleri ha'm tiykarg'ı ma'seleleri qarap o'tiledi. Olar mısallar ja'rdeminde bayanlap beriledi. Sonday-aq, qoyılǵ'an ma'selelerdi a'melge asırıw ushın programmalar tiykarg'ı bo'limdegi algoritmler C++ ha'm qosımshalar Visual C# tilnde jaratılǵ'an. Programmalastırıwda tiykarınan to'mendegi kombinatorikalıq konfiguratsıyalarınan qarap shıǵ'amız: Ko'pliktin' elementlerinin' orın almasıw ko'pliktin' ules ko'pligi n elementten ibarat ko'pliktin' k elementin teriw (bunda k ko'pliktin' ules ko'pligi bolıp sol $n \geq k$ elementten turadı) jaylastırw (ta'rтіplengen ko'pliktin' u'les ko'pligi, yag'nay ten' elementler quramınan emes al olardın' ta'rтіbi menen parq qıladı) ko'pliklerdi ajaratw (ko'plik u'les ko'plikke o'lishemi boylap ajaratıladı) h t b. usınday algoritmlerden paydalanıp bir neshe ma'selelerdi sheshiw mu'mkinshiliklerge iye bolınadı.

I BAP. KOMBINATORIKANIN' KLASSIKALIQ MA'SELELERI

1.1 Kombinatorikanın' klassikalıq ma'seleleri haqqında ulıwma tu'sinikler

Ko'pshilik a'meliy ma'selelerdi sheshiwde qandayda bir qa'siyetlerge iye bolg'an u'les ko'plikler menen islewgede tuwra keledi. Bunda usı ko'plikke jan'a element qosıw belgili bir ta'rtipte ta'rtiplestiriw olardıń ornın almastırıw ha'm usınday tag'ıda basqa ma'selelerdi kombinatorikalıq ma'seleler dep ataladı.

Kombinatorikalıq ma'selelerdin' ko'pshiligi eki tiykarg'ı qag'ıyda tiykarında sheshiledi, Olar - qosıw ha'm ko'beytiw, eger obiektler ko'pligin klaslarg'a bo'liw mu'mkinshiligi bolsa onda ha'r qaysı obiekt tek bir ha'm tek bir klasqa kirse onda barlıq klasslardag'ı obiektlerdin' sanı ulıwma obiekt sanına ten' boladı (bul qosıw qag'ıydası).

Ko'beytiw qag'ıydası bug'an qarag'anda anag'urlım quramalı boladı. Eni A ha'm V ko'plikler berilgen bolsın A ha'm V ko'pliktegi obiektler sanı M bolsın. Ta'rtiplengen ab juplıqlar du'ziledi, onda $a \in A$ (a tiyisli A) ha'm $b \in B$ (b tiyisli B) usınday juplıqlar (obiektler) sanı $N \times M$ ge ten' boladı. u'lken ko'lemdegi obiektler ko'pliginde qag'ıyda ulıwmalastırıladı.

Orın almastırıw (P_n menen orın almastırıw sanı belgilengen).

Kombinatoriyanın' klassikalıq ma'selelerinen biri bul sanlardın' orın almastırılıwları haqqında.

Ma'selen ha'r qıylı orında jaylasqan predmetlerdi qansha usıl menen orın almastırıwlar haqqında.

Ma'seleni to'mendegi misallar ja'rdeminde tu'sindirilip o'tiwge boladı.

1. Mashındı marshrut a'dresleri menen adresleyemiz. Bizge 1 den 3 ke shekem no'mer berilgen. Olardı neshe usıl menen marshrut nomeri menen a'dreslew mu'mkin?

Juwap: 6.

2. 1, 2, 3, 4 orinlarga sa'ykes 4 ren'li kartishkalar (qizil, jasil, sari, ko'k) arqali neshe ret orin almastiruv mu'mkin?

Juwap: 24:

3. "Eylar" so'zindeki ha'riplardi neshe ma'rte orin almastiruvga boladi?

Juwap: 120.

N ha'r qiyli predmetlerdi N ha'r qiyli orinlarga $N!$ (N faktorial) usil menen jaylastiruvga boladi. $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot N$ ($P_n = N!$). Obiektlerdi 1 den N ge shekem natural sanlar menen sanawga boladi. Usinday etip orin almastiruvga to'mendegishe tu'sinik beriwge boladi.

N elementlerdin' orin almastiruv dep 1 den N ge shekemgi ha'r qiyli natural sanlardin' ta'rtiplengen toplamına aytiladi. Onda jaylasqan orinlarida 1 den N ge shekemgi sanlardan turatug'in tablitsalardin' eki qatarı arqalı orin almastiruvdi jazıwga boladı.

Mısalı: $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & N \\ 3 & 5 & 1 & 6 & \dots & N \end{pmatrix}$ orin almastiruvlar ten' ku'shli esaplanadi.

F ha'm G orin almastiruvlardin' super pozitsiyası dep sonday FG orin almastiruv tu'siniledi ha'm to'mendegishe anıqlanadi $G(i) = F(G(i))$. Eger E joqaridagi keltirilgen orin almastiruv menen sa'ykes kelse onda

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ ha'm } FG = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

F orin almastiruv boyınsha bir tu'rdegi F^{-1} orin almastiruvda anıqlanadi bunda $FF^{-1} = EF^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Ornalastiruv (belgilew- A_N^M) ma'sele to'mendegishe beriledi. N ha'r qiyli predmetlerdi M ha'r qiyli orinlarga M boyınsha qansha usil menen tan'law ha'm jaylastiruv mu'mkin?

Mısallar ja'rdeminde tu'sindiriw.

1. Mashındı marshrut adresleri menen adresleyimiz. Bizge 1 den 5 ke shekem no'mer berilgen. Olardı neshe usıl menen eki nomerı arqalı ornalastırıw mu'mkin?

Juwap: 20.

2. 4 ren'li kartıshkalardı (qızıl, jasıl, sarı, ko'k) 2 orıng'a neshe usıl menen tan'law h'am jaylastırıw mu'mkin?

Juwap: 12.

3. "Eylar" so'zinin' ha'riplerin paydalanıp u'sh ha'ripten ibarat neshe so'z du'ziwge boladı?

Juwap: 6.

4. O'zbekstan boyınsha chempionata 16 kamanda qatnasadı, ha'mde olar altın, gu'mis ha'm bronza medalları ushın oynaydı. Neshe jol menen olardı bo'listiriwge boladı?

Juwap: 3360.

5. "Yaks" firmasında 25 adam isleydi. Bul firmanın' baslıg'ın onın' orınbasarın tan'law kerek. Eger ha'r qaysı adam bir lawazımdı islese neshe jol menen bul ma'seleni iske asırıw mu'mkin?

Juwap: 600.

Ornalastırıwlar sanı to'mendegi formula ja'rdeminde a'melge asırıladı.

$$A_N^M = N * (N - 1) * (N - 2) * \dots * (N - M + 1) \text{ yamasa } A_N^M = \frac{N!}{(N - M)!}$$

Teriwler (tan'lawlar) C_N^M belgilenedi. Kombinatorikanın' basqa bir klassikalıq ma'selelerinen biri bul teriwler sanı haqqında. N predmetler berilgen bolsa olardıń ishinen neshe M ha'r qıylı predmetlerdi tan'law mu'mkin?

Mısallar ja'rdeminde tu'sinidiriw.

1. Mashındı marshrut adresleri menen adresleyimiz. Bizge 1 den 5 ke shekem no'mer berilgen. Olardı neshe usıl eki nomer menen teriw mu'mkin?

Juwap 10.

2. A, B, V, G miymanlardın' ishinen ekewin teriwler sanı qansha boladı?

Juwap 6.

3. “Eylar” so'zinen berilgen bolsa olardin' ishinen 3 ha'ripti teriwler sanı qansha boladı?

Juwap 6.

4. O'zbekstan boyınsha chempionata 16 komanda qatnastı, olar altın, gu'mis ha'm bronza medalların alıw ushın oynaydı. Olardin' ishinen usı medallardı alıwı ushın qansha tan'lawlar bolıwı mu'mkin?

Juwap 560.

5. “Yaks” firmasında 25 adam isleydi. Bul firmanın' baslıg'ın onın' orınbasarın tan'law kerek. Eger ha'r qaysı adam bir lawazımdı islese neshe jol menen bul ma'seleni iske asırıw mu'mkin?

Juwap 300.

6. Shaxmat doskasında 8 ladyanı bir-birin urmaytug'ın qılıp neshe ret qoyıwg'a boladı?

Juwap 4328284968.

N elemetten turatug'ın M nin' du'zilgen kombinatsiya dep N elementli ko'pliktin' M elementinen ibarat bolg'an ha'r qanday u'les ko'pliklerge ayıladı. N elementten M usı du'zilgen ha'r qıylı kombinatsiyalar sanı C_N^M simvol menen belgilenedi ha'm to'mendegi formula menen an'latıladı

$$C_N^M = \frac{N!}{M! \cdot (N - M)!}$$

Tan'law menen baylanıslı kerekli formulalar.

$$C_N^0 = C_N^N = 1$$

$$C_N^M = C_N^{N-M} \quad (\text{simmetriya qag'ıydası})$$

$$C_N^M = C_{N-1}^{M-1} + C_{N-1}^M \quad (N > 1, 0 < M < N) \quad (\text{Paskal qag'ıydası})$$

$$C_N^M \cdot C_M^K = C_N^K \cdot C_{N-K}^{M-K}$$

$$\sum_{i=0}^N C_N^i = 2^N$$

Mina formula Nyuton Binom dep ataladı:

$$(x + y)^N = \sum_{K=0}^N C_N^K x^K y^{N-K}$$

Egerde $x = y = 1$ bolg'anda Nyuton Binomı joqarıdığ'ı keltirilgen formulanı beredi.

Takirarlanıwlar menen berilgen orın almasırlar. (A_N^K – belgilew) N ha'r qıylı tu'rlerge tiyisli bolg'an predmetler berilgen bolsın. Bunday jag'dayda orın almasırlıw'g'a bir tu'rdegi predmetler kiriwi mu'mkin. Egerde eki orınlardıwda predmetler ta'rtpileri yamasa tu'rleri menen parq qılsa onda bunday orın almasırlıw ha'r qıylı dep esaplanadı.

Mısallar ja'rdeminde tu'sindiriwler

1. Altı sıfırlı sanlardın' ulıwma sanın tabın'?

Juwap: $9 * 10 * 10 * 10 * 10 * 10 = 900000$.

2. 41 ha'ripten turatug'ın Qaraqalpaq a'lipbesinin' 4 ha'ripinen paydalanıp ha'ripler almasırlınsın eki qon'sı du'zilgen ha'ripler ha'r qıylı bolsın, olardıń' sanın tabın'?

Juwap: $41 * 40 * 40 * 40 = 2624000$

3. Kompyuter yadının' yacheykası 16 bit (k) turadı, ha'r bir yacheykag'a 0 yamasa 1 di jazıw mu'mkin ekenligi ma'lim. (N) qansha ha'r qıylı kombinatsiyalar ha'm 0 ha'm 1 di jazıw mu'mkin?

Juwap

Ta'kirarlanıw menen orınlardırlar sanı $A_N^K = N^K$ formula menen esaplanadı.

Ta'krarlanıw menen berilgen orın almasırlıw. Joqarıdag'ı ko'rip o'tken orın almasırlıw, ol ha'r qıylı predmetlerden ibarat edi. Bul jag'daydag'ı orın almasırlıw ayırım predmetleri bir tu'rdegi, al orın almasırlıwlardın' qanday da bir bo'legi bir-biri menen sa'ykes boladı. Demek orın almasırlıwlar sanı azayadı ha'm ma'sele

to'mendegishe formallastıradı. k ha'r qıylı tu'rdegi predmetler berilgen bolsın. Birinshi tiptegi N_1 predmetlerdi qansha orın almasırlar qılıwg'a boladı, Sonday-aq N_2 ekinshi ha'm N_k, k - predmetlerden, yag'nıy $(N_1 + N_2 + \dots + N_k = N)$?

Mısallar ja'rdeminde tu'sindiriw

1. Sara so'zindegi ha'riplerdi neshe ret qaytalanbaytug'ın qılıp almasırlar qılıwg'a boladı?

Juwap 6: (Sara, saar, sraa, asar, aasr, asra)

2. Institut so'zinen qansha ret qaytalanbaytug'ın qılıp ha'riplerdi teriwge boladı?

Juwap: 3360.

3. Anvardın' anası 5 ku'nde 2 birdey "almurt" ha'm 3 birdey "alma" lardı neshe ret qaytalanbaytug'ın qılıp salat du'zetiwi mu'mkin?

Juwap: 10

4. 6 belgilew arqalı qansha xabardı kodlaw mu'mkin. Bunda 2 qızıl, 3 jasıl ha'm 1 jasıl?

Juwap 60.

Takrarlanıw menen berilgen orın almasırlardıń ulıwma formulası to'mendegishe boladı.

$$P(N_1, N_2, \dots, N_k) = \frac{N!}{N_1! * N_2! * \dots * N_k!} \text{ bulda}$$

$N = N_1 + N_2 + \dots + N_k$ - elementlerdin' ulıwma sanı. Bul jerde

$P(N_1, N_2, \dots, N_k) = C_N^{N_1} * C_{N-N_1}^{N_2} * \dots * C_{N-N_1-\dots-N_k}^{N_k}$ formulası kelip shıg'adı.

Takrarlanıw menen berilgen teriwler. N ha'r qıylı tu'rdegi predmetler berilgen bolsın. Predmetlerdi orın almasırlarda olardıń ta'rtibi (buzılmasa) parqlanbasa neshe K uzınlıqtag'ı orın almasırlar bar boladı (ha'r qıylı orın almasırlar en' keminde bir predmet menen parq qılıwı kerek)?

Ma'selen. Meyli $N = 4$ ha'm $K = 7$ bolsın. Ornalasırlardı no'ller ha'm birler menen kodlaymız. Birinshi tu'rdegi predmetler neshe bolsa, sonsha birlerdi jazamız onnan keyin no'ldi ha'm ekinshi tu'rdegi elementler qansha bolsa,

sonshama birlerdi jazamız h.t.b. (No'l, birler sa'ykes tu'rde u'shinshi tu'rdegi predmetlerge keyin no'l ha'm birler to'rtinshi tu'rdegi predmetlerde jazıladı). Izbe-izliktegi birlerdin' summalıq sanı 7 ge ten' bolsa, al no'llerdin' sanı $N - 1$ yag'nıy 3 ke ten' boladı. Sonday-aq uzınlıg'ı 10 g'a ten' boladı.

Usınday izbe-izlikler sanı 3 no'ldi 10 orıng'a jazıw menen anıqlanadı yag'nıy $C_{10}^3 = 120$ g'a ten'.

Ta'kiraralanıwlar menen berilgen teriwlerdin' ulıwma formulası

$$C_N^K = C_{N+K-1}^{N-1} = C_{N+K-1}^K = \frac{(N+K-1)!}{K!(N-1)!}$$

menen anıqlanadı.

Mısallar ja'rdeminde tu'sindiriw

1. To'rt bala birlikte 30 “gribok” jıynadı. Olar o'z-ara qansha ret usıladı bo'liwi mu'mkin?

Juwap: $C_{4+30-1}^{30} = 5456$.

2. Kartalardın' tek tu'rlerinin' o'zgesheligine qarap 52 kartadan 13 ushın qanshama ret saylap alıw'g'a boladı?

Juwap 560 (N=4, K=13).

3. $x_1 + x_1 + x_1 + x_1 = 7$ ten'lemesinin' sheshimleri sanı neshew ekenligin tabın'?

Juwap: 120 (N=4, K=7 sheshiw ushın mısallar-1101101101)

Bo'listiriw. Berilgen S , predmetlerinin' sanı anıq bolg'an ko'plikten (bunda $|S| = N$ predmetler sanı) $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ jup-juptan kesilispeytug'ın k ha'r qıylı u'les ko'pliklerge bo'listiriwler sanın tabıw talap qılınadı

$$|S_i| = n_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$$

Sxeması S_1 di $C_N^{N_1}$ usıl, S_2 ni $C_{N-N_1}^{N_2}$ usıl S_k ni $C_{N-N_1-N_2-\dots-N_{k-1}}^{N_k}$ usıl menen an'latıw mu'mkin onday bolsa, bo'listiriwler sanı

$$C_N^{N_1} * C_{N-N_1}^{N_2} * \dots * C_{N-N_1-N_2-\dots-N_{k-1}}^{N_k} = \dots = \frac{N!}{N_1! * N_2! * N_3! * \dots * N_k!}$$

Mısallar menen tu'sindiriw

1. 1, 2, 5 sanların u'sh gruppaga bir sannan neshe ma'rte bo'listiriwge boladı?

Juwap: 6.

2. A, B, V, G miymanlardı eki gruppaga neshe ma'rte bo'listiriwge boladı?

Juwap: 6.

3. “Euler” so'zin u'sh gruppaga bo'listiriw kerek bolsın, onda birinshi gruppada bir ha'rip al qalg'an eki gruppada eki ha'ripten bolsın, onda ajratıwlar sanı qansha boladı?

Juwap: $\frac{5!}{1! * 2! * 2!} = 30$.

4. Bir orınlı, u'sh orınlı ha'm to'rt orınlı bolg'an u'sh komnataga 8 studentti neshe usılda jaylastırıwga boladı?

Juwap: $\frac{8!}{1! * 3! * 4!} = 280$.

5. 6 ha'r qıylı predmetlerde ha'r biri ekewden qızıl, jasıl ha'm ko'k ren'lerge neshe ret bo'liwge boladı?

Juwap: $\frac{6!}{2! * 2! * 2!} = 90$.

$S(N, k)$ ekinshi tu'rli Stirling sanı, N elementten ibarat ko'plikti k u'les ko'plikke bo'listiriw sıyaqlı anıqlanadı. Yag'nıy,

$$S(4, 2) = 7: \{1, 2, 3\}, \{4\}, \{1, 2, 4\}, \{3\}, \{1, 3, 4\}, \{2\},$$

.

Sunday-aq, $S(0, 0) = 1$. Eger $k > N$, onda $S(N, k) = 0$. Eger $k = N, S(N, N) = 1$. Ulıwma jag'dayda to'mendegi formula menen anıqlanadı, bunda .

$$S(N, k) = 0, S(N - 1, k - 1) + kS(N - 1, k).$$

1.2 n elementten ibarat u'les ko'pliktin' generatsiyasi

Kombinatorikada usənday u'les ko'plikler n elementlerdi k element boyənsha teriwler dep ataladə ha'm C_n^k dep belgilenedi. Olardən' sanə to'mendegi formula menen an'latəladə:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n(n-1)\dots(k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots (n-k)}, 0 < k < n$$
$$C_n^0 = C_n^n = 1 \quad (1)$$

Olar sa'ykes tu'rde bolg'an to'mendegi rekurent qatnastə programmalaštərwəda paydalanəw og'ada qolaylā:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, 0 < k < n, C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}, 0 < k \leq n,$$
$$C_n^k = \frac{n}{n-k} C_{n-1}^k, 0 \leq k < n. \quad (2)$$

Bul jerde (1) formulada aləma ha'm bo'limi tez pa't penen o'sedi sonən' ushənda kompyuter arifmetikasənən' mu'mkinshiliklerinen kelip shəg'əp C_n^k nən' ma'nislerin barqullada anəq esaplawdən' əmkanəyatə bolmaydə.

n nən' fikserlengen ma'nislerinin' maksəmal ma'nislerinde teriwlerdin' sanə $k = \frac{n}{2}$ ge jetedi (bunda n jup bolg'anda maksəмум birew boladə al n taq bolsa k ma'niste maksəмум boladə $\left[\frac{n}{2}\right]$ ha'm $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$). Usə sebepli n jup bolg'anda to'mendegi bahalaw esaplanadə ha'm ol Stirlin formulasəna təykarlang'an:

$$C_n^{n/2} = \frac{2^n}{\sqrt{\left(\pi^{n/2}\right)\left(1 + O\left(1/n\right)\right)}}$$

(3)

C_n^k нэ esaplaw

C_n^k нэ esaplawg'a ju'da ko'p məsallar keltiriw mumkin. Bəraq barləq usəlday klass ma'selelerinin' formal ta'rizde qoyələw bul teriwlərdun' sanən anəqlaw boləp esaplanadə.

Shaxmat fəguralarən ornalastərəw. Shaxmat doskasında 8 ladyanı bir-birin urmaytug'in qılıp neshe ret qoyıwg'a boladı.

Lawazəmg'a saylaw. “Yaks” firmasında 25 adam isleydi. Bul firmanın' başlıg'in onın' orınbasarın tan'law kerek. Eger ha'r qaysı adam bir lawazımdı islese neshe jol menen bul ma'seleni iske asırıw mu'mkin?

Futbol boyənsha shempionat. O'zbekstan boyınsha chempionata 16 komanda qatnastı, olar altın, gümis ha'm bronza medalların alıw ushın oynaydı. Olardın' ishinen usı medallardı alıwı ushın qansha tan'lawlar bolıwı mu'mkin.

Birinshi jag'ədayda teriwlər C_{64}^8 ge ten', ekinshi məsaldə mu'mkin bolg'an teriwlər C_{25}^3 ge ten', u'shinshi jag'əday C_{16}^3 ge ten' boladə.

(1) formula ja'rdeminde n nen k boyənsha teriwlər ayqən emes. Faktorial o'setug'ən funksiyanə ko'rsetedi ha'm sonən' ushən bo'lshektin aləmən ha'm bo'limin esaplawdə toləp ketiwi mu'mkin, bəraqta teriwlər sanə MaxInt penen o'sedi. Sonən' ushənda teriwlərgə (2) formulənə isletemiz.

Paskaldən' belgili u'shmu'yeshligine iye bolaməz (1-keste)

K →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N ↓										
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

(1-keste)

Usənday etip bizlerdin' qoyəlg'an ma'sele Paskal u'shmu'yeshligine keltiriledi. Egerde ma'sele C_n^k nə esaplawg'a tuwrə kelse, onda kompyuterlerde eki o'lsheimli massəvtə saqlaw za'rur bolmaydə.

n nen k boyənsha teriw sanən esaplaw algoritmi

Longint $A, B[MaxN]$ /* A paskal u'shmu'yeshliginin' aldəng'ə qatarə ma'nisleri, B paskal u'shmu'yeshliginin' aqərg'ə qatarə ma'nisleri.*/

Teriwler sani k

1 $A \leftarrow 0$ /* A masıvtın' barlıq elementlerine no'ldi menshiklew */

2 $B \leftarrow 0$ /* B massıvtın' barlıq elementlerine no'ldi menshiklew */

3 $A[0] \leftarrow 1; A[1] \leftarrow 1;$

4 *for* ($i \leftarrow 1; i \leq N; i \leftarrow i+1$)

5 {

6 $B[0] \leftarrow 1; B[1] \leftarrow 1;$

7 *for* ($j \leftarrow 1; j \leq k; j \leftarrow j+1$)

8 $B[j] \leftarrow A[j] + A[j-1];$ /* Eger san *Longint*, tu'rindegi sanan u'lken bolsa onda «uzin» arifmetik algoritm paydalanıladi */

```

9   $A \leftarrow B$  /* usı ma'nisler alding'ı ma'nisler boladı */
10 }
11 Teriwler sanı  $\leftarrow A[k]$ 

```

Paskal u'shmu'yeshliginin' tolıq esaplaytug'm algoritmi

Const MaxN = 100

Longint T[MaxN+1][MaxN+1] / no'llik qatar ha'm no'llik bag'ana qosıladı. Bul massıvtin' shegarasın shıg'ıp ketpewdin' imkanın beredi. */*

Paskal u'shmu'yeshligi.

```

{
    T ← 0 /* massıvtin' barlıq elementlerine no'l ma'nisin menshiklew */
    for (i ← 0; i ≤ N; i ← i + 1) T[i][0] ← 1; /* birinshi bag'anag'a 1 ma'nisin
    jazıp shıg'amız */
    for (i ← 1; i ≤ N; i ← i + 1)
        for (j ← 1; j ≤ K; j ← j + 1)
            if (T[i-1][j]*1.0 + T[i-1][j-1] > MaxLongint) Exit /* tolıp ketiw */
            else T[i][j] ← T[i-1][j] + T[i-1][j-1]
}

```

Leksikografikalıq ta'rtipte barlıq teriwler generatsıyası

Egerde belgili bir qaratılğ'an waqıtta ma'seleni sheshiw ushın 10^6 varəantlardə ko'rip shəgəw (teriw) mu'mkin bolsa, onday jag'ədayda (3) formuladan kelip shəgəp n elementten ibarat qa'legen fikserlengen k ushən barləq teriwler generatsıyasən $n \leq 24$ ushən o'tkeriw mu'mkin boladə.

Ko'binese u'les ko'pliktin' k elementleri generatsıyasə leksokografikalıq ta'rtipte o'tkeriledi. Bunda leksokografikalıq u'les ko'plik degende, eger qa'legen eki u'les ko'plik ushın n lik san sistemasəndag'ə (yamasa onləqta $n < 10$ ushən) k -ma'nili sannan kishi element indekslerin du'ziw mu'mkin boləp aldənnan generatsıya qələnəwə aytəladə. Demek $n = 6$ ha'm $k = 3$ teriwlerde birinshi,

u'shinshi ha'm besinshi elementler ekinshi, u'shinshi ha'm to'rtinshilerge qarag'anda aldənnan generasiyalang'an boləwə kerek. misal $135 < 234$

Ma'sele: N quwatlı ko'plikten k elementli u'les ko'plikti qurən'? (2-keste)

Məsələ, $K = 5$, $N = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, bolsa teriwler sanı 21 ten'.

0	{1,2,3,4,5}	7	{1,2,4,5,7}	14	{1,4,5,6,7}
1	{1,2,3,4,6}	8	{1,2,4,6,7}	15	{2,3,4,5,6}
2	{1,2,3,4,7}	9	{1,2,5,6,7}	16	{2,3,4,5,7}
3	{1,2,3,5,6}	10	{1,3,4,5,6}	17	{2,3,4,6,7}
4	{1,2,3,5,7}	11	{1,3,4,5,7}	18	{2,3,5,6,7}
5	{1,2,3,6,7}	12	{1,3,4,6,7}	19	{2,4,5,6,7}
6	{1,2,4,5,6}	13	{1,3,5,6,7}	20	{3,4,5,6,7}

2-keste

Qoyılğ'an ma'selenin' sheshiwidin' rekursiv protsedurası. Usı ma'seleni sheshiw ushin ideya to'mendegishe boladı. U'les ko'pliktin' da'slepki elementleri qa'legenshe bolıwı mu'mkin, olar birden baslanıp $n - k + 1$ element penen tamamlanadə. U'les ko'pliktin birinshi elementi indeksi fikserlengennen keyin, birinshi elementten u'ken bolg'an elementler indeksleri menen $k - 1$ elementti toplaw kerek. Keyin ala usəg'an uqsas dawam ettiriledi. Keyingi elementti aləp bolg'annan keyin rekurtsiyasən aqərg'ə jag'ədayəna kelinesi ha'm taqlang'an u'les ko'plikti qayta islew mu'mkin (analizlew ha'm baspag'a shəg'arəw) to'mendegi keltirilgen programmada a massəv berilgen ko'plik elementlerinnen ibarat ha'm erkin tu'rde toləqtərləg'an boləwə mu'mkin. p massəvte kelesi elementlerdin' teriwleri formalastərləw mu'mkin.

$const\ nmax = 24;$

$int\ a,p[nmax]; int\ k,i,j,n,q; shıg'arıw\ (k,p)\{$

```

    for (i←1; i ≤ k; i←i+1) shıg'arıw (p[i]);
}
Cnk(n,k );Gen(m,l );{
    1  if( m=0 ) shıg'arıw (k, p)
    else      2  for (i←l; i ≤ n -m+1; i←i+1)      {
        3  p[k-m+1] ←a[i];
        4  Gen(m-1,i+1)
    }
};/*gen*/
{ /*cnk*/1  gen(k,1)};/*cnk*/{ /*main*/1  oqıw (n,k);2  for (i←1; i ≤ n;
i←i+1)3  a[i]←i;/*a massivti manshiklew*/
4  cnk(n,k)
}

```

Bul algortimge teriwlerdin' generatsiyasə Gen rekursiv u'les programmasənda a'melge asərladə. Ol to'mendegi parametrlerge iye:

m- ko'plikten tan'lawə kerek bolg'an qalg'an elementlerdin' sanə ha'm birinshi bul m elementlerdi tan'law berilgen ko'pliktin' qaysə elementinen baslanəwəna kelesi tan'lawlardə qurəwdən' rekursiv bolg'an algortim qaraləp atərg'an teriwden basqasəna o'tiw to'mendegi algoritm boyənsha a'melge asərladə. Teriwdi on'nan shepke qarap ko'rip o'tilse onda arttərəw mu'mkin bolg'an birinshi element tabəladə. Tabəlg'an elementti birge arttərləladə, usə elementten baslap sanəna shekemgi elementti tabəw qatar sanlarə menen formallastərəw h.t.b algoritm to'mendegishe:

Kelesi teriw (p)

```

1  {
2  i←k;
3  while ( p[i]+k-i+1 >n) i←i-1;/* arttırıw kerek bolg'an elementti tabamız */
4  p[i]←p[i] + 1;    /* elementti birge arttıramız */

```

```
5 for ( $j \leftarrow i+1; j \leq k; j \leftarrow j+1$ )  $p[j] \leftarrow p[j-1] + 1$ ; /* on' tarepte turg'an elementti  
   o'zgertiw*/  
}
```

II BAP KOMBINATORIKANIN' KLASSIKALIQ MA'SELELERIN SHESHIW

2.1 Berilgen ko'pliktin barliq u'les ko'pliklerinin' generatsiyasi

Ko'plik ma'selelerin sheshiwde sonday-aq ko'plikten izlenip atirg'am belgisiz u'les ko'plikti tabiw ma'selelerinde barliq u'les tan'lawlardi ko'rip o'tiwge tuwra keledi. Atap aytqanda, eger minimal u'les ko'plikti tabiw kerek bolsa, sonday-aq kishi sandag'ı elementlerden ibarat bolsa, tan'lawda da'slep bir elementten, keyin eki elementten, u'sh h.t.b elementlerden ibarat barliq u'les ko'pliklerdi tekserip shıg'ıw effektiv sho'lkemlestirilgen boladı. Usınday jag'ıdayda ma'selenin sha'rtin qanaatlantırg'an birinshi u'les ko'plik izlenip boladı ha'm keyingi tan'lawlar toqtatıladi. Usınday ma'selelerdi sheshiw algoritmnin' relizatsiyasında joqarıda keltirilgendey Cnk protsedurasın paydalanıw mu'mkin. Ja'ne basqa bir parametr kiritiledi bul logikalıq o'zgeriwshi flag, terilgen elementlerdin' ma'selenin' sha'rtin qanatlandırıwın tekseredi. Kelesi teriwdi teksergende onı baspag'a jiberiwdin' ornına onı tekseretug'ın check, protsedurası shaqırıladi. Bul protsedura flag o'zgeriwshisinin' ma'nisin anıqlawdı onday jag'ıdayda to'mendegishe jazıladi:

procedure gen(m,L);

1. {

2. If($m=0$)

3. {

check(p,k,flag); /* eger generatsiya qılınıp atirg'an ko'plik qurılsa check protsedurası flag o'zgeriwshisine "ras" ma'nisin menshikleydi */

if (flag) break

}

else ...

Aldindag'ı adımlardı protsedura buring'ısı menen sa'ykes boladı. Tiykarg'ı protsedura usı protseduranı shaqırıwg'a to'mendegi fragment ja'rdeminde almastırıw mu'mkin boladı:

```

1  $k \leftarrow 0$ ;
2  $flag \leftarrow false$ ;
3 do
4  $k \leftarrow k + 1$ ;
5  $cnk(n, 1, flag)$ 
6 while ( $flag = false \ \&\& \ k \neq n$ );
7 if ( $flag$ )
8 shıg'arıw ( $k$ )
9 else
10 shıg'arıw ('no solution');
```

Sonady-aq bunan tiykargı programma k o'zgeriwshisine bolg'an soraw (zapros) a'melge aserelmag'anə ma'lim boladə. Anaw yamasa mənaw ko'pliktin' u'les ko'pliklerin tan'lawdən' alternariv algoritmdə bar. Onda ha'r qaysə u'les ko'pliktin' saləstərmalə tu'rde qa'legen bir elementtin' berilgen u'les ko'plikke ta'siri yamasa tiyisli emes ekinshi ekinshisin aniqlaw mu'mkin. Bunday a'meldi ko'pliktin' ha'r bir elementin sa'ykes tu'rde 0 yamasa 1 din' ornəna qoyəp tekseriw mu'mkin. Onda ha'r qaysə u'les ko'plik n ma'nisli son'g'ə ekilik sanaq sistemasəna sa'ykes boləwə mu'mkin. Usənday jag'ədayda n elementten ibarat ko'plik no'ller menen toləqtəreladə. Usənday jag'ədaydan berilgen ko'pliktin u'les ko'pligin izlew din' toləq tan'lawdə ekilik sanaq sistemasənda a'melge asərladə.

$$\underbrace{0 \dots 01}_{n-1} \text{ den } \underbrace{1 \dots 11}_n \text{ ge shekem}$$

Demek, berilgen ko'pliktegi ha'r qəylə u'les ko'pliklerdi izlewdi a'melge

asərəw qolaylə tu'rde boladə, al (bos ko'plik bolsa) ge ten'

boladə. Usənday etip tan'lawdən' 2 usələnən paydalanəlsa, berilgen ko'pliktin' barləq u'les ko'pliklerinin' toləq teriwlerinen to'mendegi formulag'a iye boladə.

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

Demek joqarədag'ə tan'lawdag'ə mu'mkin bolg'an variantlardən' sanəna baylanəslə aləng'an bahalaw shegarasənda berilgen ko'pliktin' u'les ko'pliklerin tek $n \leq 20$ bolg'andag'ana qarap o'tiwge boladə. Ekinshi ta'repten to'mendegi

kestede ekilik sanlardən' den ge shekemgi jazəlg'an:

№	Ekilik sandi ornatiw (B)	Ekilik izbe-izlik (Now)	U'les ko'plik
0	0000	0000	{}
1	0001	0001	{1}
2	0010	0011	{1,2}
3	0011	0010	{2}
4	0100	0110	{2,3}
5	0101	0111	{1,2,3}
6	0110	0101	{1,3}
7	0111	0100	{3}
8	1000	1100	{3,4}
9	1001	1101	{1,3,4}
10	1010	1111	{1,2,3,4}
11	1011	1110	{2,3,4}
12	1100	1010	{2,4}
13	1101	1011	{1,2,4}
14	1110	1001	{1,4}
15	1111	1000	{4}

(3-keste)

Harbir sanlar to'mendegishe sa'wlelendiriledi. Harbir ekilik tsifr, yag'nəy birinshiden basqasən onən' summasəna, odan aldəng'ə tsifr menen modulə boyənsa almasəraməz (Grey boyənsa kodlaw). Sanlardə sa'wlelendiriw mənə massivtin' elementleri boləp tabəladə. Barlə i ushən den n ge shekemgi $Now[1] \leftarrow B[1]; Now[i] \leftarrow B[i] \oplus B[i-1]$ sa'wlelendiriwler u'shinshi basqışında keltirilgen to'rtinshi bag'anada Now massivtin' birlik elementleri boyınsha qurılğ'an u'les ko'plik jazılğ'an.

Now massivti du'zetug'ın algoritm

Procedure ko'plik;

```

1 {
2  Now  $\leftarrow 0$  /* Now massivtin' barlıq elementlerine 0 di menshikleydi */
3  Now[1]  $\leftarrow B[1]$ 
4  for ( $i \leftarrow 2; i \leq N; i \leftarrow i+1$ )
5    Now[i]  $\leftarrow B[i] \oplus B[i-1]$ 
6 }
```

Ko'plikti ekilik sang'a kerisinshe sa'wlelendiriw

Procedure ekilik san;

```

1 {
2  B  $\leftarrow 0$  /* B massivtin' barlıq elementlerine 0 di menshiklew */
3  B[1]  $\leftarrow Now[1]$ 
4  for ( $i \leftarrow 2; i \leq N; i \leftarrow i+1$ )
5    B[i]  $\leftarrow Now[i] \oplus B[i-1]$ 
7 }
```

Kelesi bo'listiriwdi generatsiya qılıwshı protsedura

Procedure kelesi bo'listiriw;

```

1  i  $\leftarrow N+1$ 
```

```

2  do
3  {
4  i ← i-1
5  B[i] ← B[i] ⊕ 1
6  while B[i] ≠ 1
7  }

```

Ushu programmalar ja'rdeminde berilgen ko'pliktegi barliq u'les ko'pliklerdi teriwdi a'melge asiraw og'ada apiwayı boladı. (Misal: qandayda bir amaw ya minaw sha'rtti qanaatlandıratug'ın barliq sheshimleri tabıw talap etilgen ma'seleler). Eger ma'selenin' sha'rti ahmiyetke iye bolmasa onday jag'ıdayda izlenip atırg'an u'les ko'plikke neshe element kiriwi kerek boladı, sonı to'mendegi misallarda ko'rip o'temiz.

Misal. Berilgen ko'plik ushın qa'siyetleri menen berilgen u'les ko'pliklerdi tabıw kerek: $a[1..N]$ pu'tin tu'rdegi massiv h'am M sanı berilgen $a[i_1], a[i_2], \dots, a[i_k]$, masivtin' elementlerinen ibarat u'les ko'plikti tabıw. Bul jerde ha'm $a[i_1] + a[i_2] + \dots + a[i_k] = M$ bolad.

Bunday ma'sleleni sheshiw barlıq u'les ko'pliklerin generatsiya qalaw protsedurasına tayıkarlanad, yag'nay ma'selenin' sha'rtin qanaatlandıratug'ın tekseriw funksiýalarına ha'm massiv elementlerinen ibarat bolg'an konkret u'les ko'plikti du'ziw mu'mkin.

function Tekseriw (*j*); /* funksiya o'zinin' ma'nisi spatında logiykalıq ma'nis qaytaradı */

```
1 {
```

```
2 s ← 0;
```

```
3 for (k ← 1; i ≤ N; i ← i+1)
```

if (eger $k-1$ jag'ıdayda j sanı 1 den tursa) /* usı sha'rt ekilik sanaq sistemasında berilgenin bildiredi */

```
4 s ← s+a[k];
```

```

5  if (s=m)
{
6  for (k←1; k ≤ N; k←k+1) /*ko'pliktin tabilg'an elementin
shig'aramiz*/
7      if (eger  $k-1$  jag'idayda  $j$  sanı den tursa) shig'arıw(a[k]);
}
};

procedure u'les ko'plik(n);
{
 $q \leftarrow 2^n$ ; /*  $q$  g'a  $2^n$  di menshiklew */
for (j←1; j ≤ q-1; j←j+1) /*barlıq u'les ko'pliklerdin' tsikllı u'les
ko'plik aldın ala generatsiya qılınğ'an bolıwı kerek*/
if tekseriw (j) break;
}

```

Eger itibar bersek massivtin' barlıq elementleri on', onda qaralıp atırğ'an u'les ko'pliktin' ta'rtibi o'zgertip ta'rtibi o'zgerip joqarıda qoyılğ'an ma'selenin' effektivligi asıwı mu'mkin. Demek qandayda bir u'les ko'pliktin' elementleri summası M nen u'lken bolsa, onda onı o'zine qosatug'ın u'les ko'plikti qarawdan mag'ana (a'himyet) joq. Eger ha'r qıylı keyingi generaysiya qılınıp atırğ'an u'les ko'plik en' keminde bir elementten aldındag'ıg'a parq qılsa, onda summanı esaplawdı optimizatsiyalawg'a boladı. Keltirilgen programma og'ada a'pıwayı bolğ'anlıqtan kemshilikke iye bolıp, onda M elementten ko'p bolğ'an barlıq u'les ko'pliklerdi qarap shig'ıw mu'mkin emes. Bunda M konkret programma sistemasındag'ı pu'tin sanlardın' ko'rinslerin maksimal sandag'ı biytleri joqarıda aytıp o'tkendey barlıq u'les ko'pliklerdi tanlawdı a'melge asırıw qıyın boladı, eger ko'plik waqıtqa qarag'anda u'lken o'lsheemde bolsa.

2.2 n elementten ibarat ko'pliklardin' barliq ornina qoyiwlarđı

generatsiya qılıw

n elementten turatug'ın ko'pliktin' ornına qoyıw generatsiyası $n!$ g'a ten'.

Bug'an to'mendegishe: Birinshi jag'ıdayda ornına qoyıw ko'pliktin' qa'legen n elementinen ibarat boladı. Onnan keyin birinshi orında qandayda bir elementti fikserleymiz, demek ekinshisinde qalg'an $n - 1$ elementten ibarat bolıw mu'mkin h.t.b. Usınday etip ulıwma variantlardın' sanı $n(n - 1)(n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ mu'mkinshilikten kelip shıqqan halda elementten aspaytug'ın ko'pliktin barlıq ornına teriwlerın ko'rip shıgıwıg'a boladı. Bunı to'mendegishe algoritmnıen paydalanamız:

Bul algoritm tek ornına qoyıwılardın' sanı anıqlaydı.

```
long int Fac(long int j);
```

```
int main()
```

```
{
```

```
    long int n,j;
```

```
    cin>>n;
```

```
    for(j=1;j<=n;j++)
```

```
    {
```

```
        cout<<"\n"<<j<<"!="<<Fac(j)<<endl<<endl;
```

```
    }
```

```
}
```

```
long int Fac(long int j)
```

```
{
```

```
    long int i,r=1;
```

```
    for (i=1; i<=j; i++)
```

```
        r*=i;
```

```
    return r;
```

}

Leksikografiyaləq ta'rtiptegi barləq ornəna qoyəw generatsiyasən a'melge asəratug'ən rekursiv algoritm qarap o'tiledi.

p menen massiv elementleri indekslerin belgileymiz. Da'slep ol $1, 2, \dots, n$, ler menen toltərag'an boladə. Bul sanlar keyingi adəmlarda orənlərə o'zgerip baradə. i paramatri Perm rekursiv protsedurasənda p massivtin' ornənda isletiledi. Rekursəyanən' ideyasə to'mendegishe a'melge asərladə: i ornənda p massivtən' n boyənshe i den baslap barlə elementleri jaylasqan boladə. Ha'rbir bul element ushən qa'legen elementleri, barləq ornəna teriwlerən a'melge asərəwg'a boladə, yag'nəy leksikografiyaləq ta'rtipte $(i + 1)$ ornəna baslanadə ha'm onən' toləq algoritmi to'mendegishe boladə.

```
const int mm=100;
int m,i,j,k,n;
int a[mm],p[mm];
int main()
{
    cin>>m;
    for(i=1;i<=m;i++)
    {
        cin>>a[i];
        p[i]=i;
    }
    for(i=1;i<=m;i++)
        cout<<a[i]<<" ";
    cout<<endl;
    for(i=m-1;i>=1;i--)
        if(p[i]<p[i+1])
        {
            n=p[i];
```

```

for(j=m;j>=i;j--)
if(n<p[j])
{
    p[i]=p[j];
    p[j]=n;
    k=1;
    while(i+k<m-k+1)
    {
        n=p[i+k];
        p[i+k]=p[m+1-k];
        p[m+1-k]=n;
        k=k+1;
    }
    j=i;
}
for(i=1;i<=m;i++)
cout<<a[p[i]]<<" ";
cout<<endl;
}
}

```

Bul jerde **p** massivtın' elementleri usı programmada isletepey, yag'nıy **a** massivti elementti tikkeley paydalanıwg'a boladı.

Misal: m=4 bolg'an to'mendegishe na'tiyje shıg'ıwdı.

1	1 2 3 4	9	2 3 1 4	17	3 4 1 2
2	1 2 4 3	10	2 3 4 1	18	3 4 2 1
3	1 3 2 4	11	2 4 1 3	19	4 1 2 3
4	1 3 4 2	12	2 4 3 1	20	4 1 3 2

5	1 4 2 3	13	3 1 2 4	21	4 2 1 3
6	1 4 3 2	14	3 1 4 2	22	4 2 3 1
7	2 1 3 4	15	3 2 1 4	23	4 3 1 2
8	2 1 4 3	16	3 2 4 1	24	4 3 2 1

2.3 Ko'plikti almashtiruv

n elementten ibarat ko'plikti qandayda k bloklarg'a ajratəw $S(n, k)$ ekinshi tu'rdegi Sterlin' sanə menen almashtəratug'ən ko'pliktin' ha'r qaysə elementi bloklardən' birine jazəladə. Demek bos bolmag'an ko'plikti ajratəwg'a en' bolmag'anda $n > 0$ bolg'anda bir $S(n, 0) = 0$ bo'lek za'rur boladə. $k = 2$ bolg'an jag'ədaydə qarap o'temiz. Eger bos bolg'an ko'plikti eki bos bolmag'an ko'plikke bo'linse, onda birinshi bo'legi o'zinin' quramənda ko'pliktin' aqərg'ə elementin bar bolg'an u'les ko'plikten təsqarə berilgen ko'pliktin' qa'legen u'les ko'pligi esaplanadə, al qalg'an elementler avtomat ta'rizde ekinshi bo'leginde boladə. Usənday u'les ko'pliklerdi usəllar menen tanlaw mu'mkinshiligi ha'm $n > 0$ ge $S(n, 2)$ sa'kes keledi.

Berilgen k ushən to'mendegishe boladə. Aqərg'ə element ajratəwda o'z aldəna blokda bolg'an jag'ədayda onda qalg'an elementlerdi $k - 1$ bo'lekke $S(n - 1, k - 1)$ usəl menen ajratəw mu'mkin, yamasa element bos emes bolg'an jag'ədaylarda song'ə jag'ədayda $kS(n - 1, k)$ mu'mkin bolg'an variantlarga iye, bunnan aqərg'ə elementti k bo'leklerden $n - 1$ birinshi elementlerdin' ha'r qaysə blogəna qosəwg'a boladə. Usənday etip:

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k). \quad n > 0.$$

Teriwlər sanən anəqlaytug'ən binominalləq koeffitsentlər menen Sterlin' sanə baylanəstərg'an formulalardə ahmiyetli boləwə mu'mkin.

$$S(n, k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_{n-1}^i S(i, k-1); \quad S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k C_k^i i^n (-1)^{k-i}$$

Eger k nən' ma'nisi fikserlenbese h'am n elementli ko'plik elementlerdin' barləq ajəratəwlarə qarap o'tilse, onda oladən' sanə Bella sanə menen almasterələdə.

$$B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k) \quad B_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_n^i B_i$$

To'mende berilgen ko'pliktin' barləq ajəratəwlarənən' generastiyasə qarap o'tiledi. Da'slep qaraləp atərg'an ajəratəwlarədə qanday etip belgilew kelisinip alənəwə kerek. Demek ha'r bir ajəratəwdə berilgen ko'pliktin' barləq elementləri qatnasadə. Qaraləp atərg'an ajəratəwg'a ha'r qaysə elementlər qatnasatug'ən p indeksler massivg'a indeks bolgə jazələdə. Part rekursiv protsedurasəndag'ə i parametrə, qaraləp atərg'an adəmg'a onən' ushən mu'mkin bolg'an ha'r qaysə bloklarg'a i elementinin' jaylasəwən bildiredi, al j usə bloktən' maksimal nomerin bildiredi. i elementti bloklardən' birine jaylasqanna keyin keying element ushən usənday ma'sele rekursiv sheshiledi (bunday jag'əday tanlawdən' universal sxemasəna paydalanələdə). Algoritm to'mendegishe boladə.

Partition(n, p);

Part(*int* i, j);

{

1 *if*($i > n$) shıg'arıw(n, p)

2 *else*

3 *for* ($l \leftarrow 1; l \leq j; l \leftarrow l+1$)

```

4 {
5  $p[i] \leftarrow l$ ;
6 if(  $l = j$  )  $part(i+1, j+1)$ 
7 else  $part(i+1, j)$ 
8 }
9 } /* part protsedurasının' tamamlanır */
{ /* partition protsedurasının' başlanır */
1   $part(1,1)$ 
} /* partition protsedurasının' tamamlanır */

```

Eger ha'r bir ajratır bloklarının' elementleri o'z aldına shıg'arır kerek bolsa usı jag'ıdaydag'ı print protsedurası ulıwma esaplanbaydı. Sonın' ushında onı relizatsiya qılıwdın' mu'mkin bolg'an variantlar ko'rip o'tiledi.

```

Print(n; p);
{
1  $imax \leftarrow 1$ ; /* ajratırwlardag'ı bloklar sanın anıqlaymız */
2 for ( $i \leftarrow 2$ ;  $i \leq n$ ;  $i \leftarrow i+1$ )
3 if ( $p[i] > imax$  )  $imax \leftarrow p[i]$ ;
4 for ( $i \leftarrow 1$ ;  $i \leq imax$ ;  $i \leftarrow i+1$ ) /* bloklar boyınsha tsikl */
5 {
6 for ( $j \leftarrow 1$ ;  $j \leq n$ ;  $j \leftarrow j+1$ )
7 if ( $p[j] = i$ ) shıg'arır ( $a[j]$ ); /* blok baspag'a shıg'arır */
8 }
9 /* bo'listirir baspag'a shıg'adı */
10 }

```

Ha'r bir bloktag'ı elementler summasın esaplaw kerek bolsa onday jag'edaylarda ishpe-ish jaylasqan tsikdan paydalanbawg'a boladı. Onda qaralıp atırg'an elementke sa'ykes blok ushın summanın' ma'nisi asırladı ha'm *a* massivtin' elementlerin izbe-iz qarap shıg'ıp qosımsha massiv paydalanıladı.

Eger usənday jag'ədayda n sanaq sistemasənda p masiv n ma'nisliden qaralsa, ko'plik ajəratəw ushən leksikografiyaləq tu'sinikti kiritiw ha'm ajəratəw nomerin anəqlaw h'am og'an kerisinshe ma'selegə qaytəw mu'mkin. Bul ma'seleler dinamikaləq metodlarə menen sheshiwge boladə ha'm barləq ajəratəwlar generatsiyasə paydalanəlmaydə.

III BAP KOMBINATORIKANIN' MA'SELELERIN SHESHIWDIN' BO'LISTIRIW USILI

3.1 Sanlardı qosındılarg'a bo'listiriw

N natural san berilgen. Onı natural qosılıwshılardıń qosındısı ko'riniside jazıwǵa boladı: $N = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, bul jerde $k, a_1, a_2, \dots, a_k$ no'lden u'lken. Qosındılar ekvivalent esaplanadı, egerde olar tek qosılıwshılardı ta'rtibi menen parq qılsa ekvivalent qosındılar (summa) klassı $b_1, \dots, b_k$ ja'rdeminde beriledi. Ha'r qaysı usınday $b_1, \dots, b_k$ izbe-izlikti N sanın k qosılıwshılarg'a bo'listiriliwi dep ataladı.

Birinishi ma'sele. $N = 8$ bolg'andag'ı bo'listiriwlerge mısıl keltiremiz.

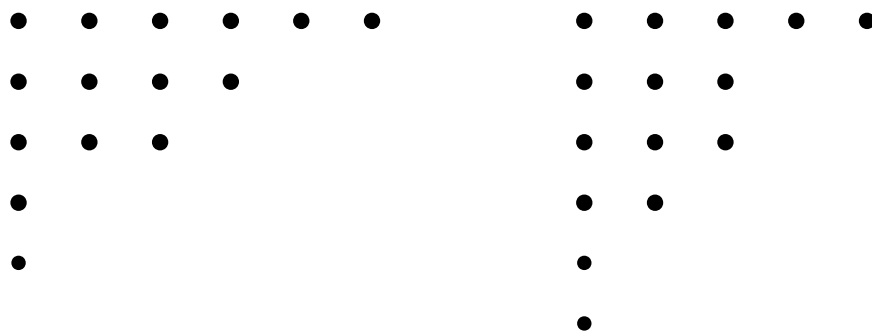
1	11111111	9	3311	17	521
2	2111111	10	332	18	53
3	221111	11	41111	20	611
4	22211	12	4211	20	62
5	2222	13	422	21	71
6	311111	14	431	22	8
7	32111	15	44		
8	3221	16	5111		

(4-keste)

N sanın k qosındılarg'a bo'listiriwdi $P(N, K)$ dep belgileymiz, bo'listiriwlerdin' ulıwma sanı $p(N)$. Ko'rinip turg'anınday $p(N)$ nin' ma'nisinin' k ma'nisi boyınsha $P(N, K)$ summasına ten'. Meyli $p(0) = p(1) = 1$ bolsın. Onda to'mendegi fakt belgili boladı.

Teorema. N sanı k qosındılarg'a bo'listiriw sanı N sanın' k nin' en' u'lken qosılıwshılarg'a bo'listiriwine ten' boladı.

Teorema. Ferrer diagramması tiykarında da'lillenedi. Onday diagrammma to'mendegishe keltirilgen.



$$15=6+4+3+1+1$$

$$15=5+3+3+2+1+1$$

$P(i, j)$ bo'listriwler sanı k nın' ma'nisi boyınsha $P(i - j, k)$ g'a ten'. Bunda k 0 den j ge shekem o'zgeredi. Bunı to'mendegi keste ja'rdeminde tekseriwge boladı.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	2
3	0	1	1	1	0	0	0	0	0	3
4	0	1	2	1	1	0	0	0	0	5
5	0	1	2	2	1	1	0	0	0	7
6	0	1	3	3	2	1	0	0	0	1
7	0	1	3	4	3	2	1	1	0	5
8	0	1	4	5	5	3	1	1		22

(5-keste)

Mısalı. $R(8,3) = R(5,0) + R(5,1) + R(5,2) + R(5,3)$.

Programma kodı to'mendegishe boladı.

Const $N=100$;

Procedure *FillSmallSc*(*Longint* *SmallSc*[*N*][*N*])

{

```

    int i, j , k;
    FillChar(SmallSc,Size.SmallSc[0]);
    SmallSc[0][0]:=1;
    for(i=1;i<=N;i++)
    for(j=1;j<=I;j++)
    for (k=0;k<=j )
    {
        SmallSc [i][ j]++;
        SmallSc[i-][k]++;
    }
    SmallSc[0][0]=0;
};

```

Tablitsa ma'nisleri basqada ma'selelerdi sheshiwde paydalanadı. Bo'listiriwler sanın anıqlaw ushın to'mendegi a'piwayı protseduranı jazıw jeterli.

```

Procedure Calc;
{
    int i;
    long intRes;
    Res:=SmallSc[N][1];
    for(i=2;i<=N;i++)
    Res:=Res+SmallSc [N][i] ;
    cout<<Res;
}

```

Ekinshi ma'sele. Bo'listiriwlerdi a'melge asırıw talap qılınadı.

Birinshi gezekte bo'listiriwlerdi saqlaw mag'lıwmatlar sttrukturasın du'ziw kerek boladı. Onın' ushın pu'tin tu'rdegi massivtan paydalanamız.

int Now[MaxN] *Now[0]* ge bo'listiriw uzınlıg'ın saqlaymız, yag'nıy *Now* massivinde qatnasıp atırg'an elementler sanı. Joqarıdag'ı tablitsada 8 sanlı bo'listiriwlerden ba'rin alamız, mısalı «41111», keyingi «4211».

Qanday jag'dayda $Now[2]$ ni arttırıw mu'mkinı Ko'rinip turg'anday $Now[1]$ $Now[2]$ den u'lken. Sonday aq usı bo'listiriwde «birden o'zgeriw» bar- $Now[i-1] > Now[i]$, $Now[i]$ birge artıradı, al keyingi barlıq bo'listiriw elementleri mu'mkin bolg'anınsha minimal qılıp alınadı. Usınday bo'listiriw sxeması barlıq waqıttada durıspa? Ma'selen, «44» bo'listiriwi keyingi «5111». Usınday etip, yamasa «birden o'zgeriw» yamasa $i = 1$ ge ten' boladı. Bunnan baqa o'zgerip atır'g'an element aqır'g'ı element bolmaydı yamasa o'siwi, kemeyiwsiz mu'mkin bolmaydı.

Procedure GetNext;

```
{
    int i,j,sc;
    i=Now[0]-1; /*bo'listiriwdin' en' son'g'ı elementinen aldındag'ısı*/
    sc:=Now[i+1]-1;
    Now[i+1]:=0; /*sc g'a summanı jazamız, bul san keyin ala
    minimallastırıw mu'mkin bolg'an elementlerdi beredi*/
    while (i>1 && Now[i]=Now[i-1])
    {
        sc=sc+Now[i];
        Now[i]:=0;
        i--; /*Birden o'zgeriwdi tabamız*/
    }
    Now[i]++; /*Tabıl'g'an elementti birge arttıramız*/
    Now[0] =i+sc; /*Bo'listiriwdin' uzınlıg'ın o'zgartiremiz*/
    for(j=1;j<=cs;j++)
        Now[j+i] =1; /*minimal mu'mkin bolg'an elementlerdi jazamız,
    yag'nıy birlerdi*/
}
```

Usı logika son'g'ı bo'listiriw ushında isley almaydı.(Bul mısalda «8» ushın) negizinde islemeydi.

Last massivinde son'g'ı bo'listiriw al *Now* massivinde da'slepki bo'listiriw saqlansın. Onda joqarıdag'ılardı to'mendegishe a'melge asıramız.

```
while(Eq(Now,Last) )
{
    /* Eq funtsiyası «shın» boladı egerde qaralıp atırǵ'an bo'listiriw aqırǵ'ısı
    menen tuwra kelse, «jalǵ'an» kerisinshe bolsa. Onı a'piwayı ko'riniste while
    Now[0] <> 1 Do ... depte alıwǵ'a boladı*/
    GetNext;
    cout; /*bo'listiriwlerdi baspag'a shıǵ'arıw*/
}
```

U'shinshi ma'sele. Bo'listiriw nomeri (*L*) berilgen bolsa og'an sa'ykes bo'listiriwlerdi (*Now*) tabıw. Bo'listiriwler nomeri no'lden baslap a'melge asırıladı.

*sc=N; i=1; /*sc -Bul jerde bo'listiriwde berilgen sifrlar, al *i* bo'listiriw nomeri*/*

```
while (sc<>0)
{
    j:=1; /*Bo'listiriwdegi i ornına jazılatug'ın san*/
    ?????????? /*j din' ma'nisi L din' ma'nisine qarap anıqlanadı, ha'zirshe
    belgisiz*/
    Now[i]=j; sc=sc-j; i++; /*Usı waqıttag'ı bo'listiriwlerdi qa'liplestiremiz ha'm
    keyingi jan'a bo'listiriwge o'tiwge tayarlaymız*/
}
```

«????» belgiler ornına bos orın bolsa, onda $L = 0$ bolsa, bul logika boyınsha birlerden ibarat bolǵ'an da'slepki bo'listiriwge iye bolamaı Meyli $L = 1$ bolsın, *SmallSc*[8][1] di tekseremiz. Eger *L* din' ma'nisin *SmallSc*[8][1] ge kemeytiremiz, *L* din' ma'nisin 1 ge arttıramız ha'm son'ında 2111111 bo'listiriwge iye bolamız.

Demek, qanday qanday a'melege asırıw kerekı Bunda *sc* nomerdegı *SmallSc* massiv qatarın qaraw kerek ha'm aqırg'ı element qatarın anıqlaw kerek yag'nıy *L* den kishi bolg'an *j* nomer.

Biz izbe-iz tu'rde *Sc* sandag'ı bo'listiriwdi anıqlaymız. Bunda ol *j* sannan baslanadı. To'mende protseduranın' tolıq teksti keltirilgen.

Procedure GetWhByNum (Longint L);

```
{
    int x,j,sc;
    sc=N; :=1;
    while (sc<>0)
    {
        j=1;
        while (L>=SmallSc[sc][j])
        {
            Dec(L,SmallSc[sc][j]);
            j++;
        }
        Now[i]=j;
        sc=sc-j;
        i++;
    }
}
```

To'rtinshi ma'sele. Bo'listiriw (*Now*) berilgen bolsa, onın' nomerın tabıw kerek: Mısalı «22211» bo'listiriw berilgen bolsa, birinshi orında neshe 2 bar ekenligi, keyin ekinshisin ha'm tag'ıda basqalar anıqlanadı. To'mendegi funksiya tekstinde bunı qalay anıqlaw ko'rsetilgen:

long int GetNumByWh();

```
{
    int i,jk,p;
```

```

long int sc;
sc=1; /*bo'listiriw nomerin qa'liplestiremiz*/
jk=N; /* SmallSc massivinde qatar nomer*/
for(i=1;i<=Now[0]
{
    for (p=0;p<=Now[i]-1;p++)
        sc=sc+SmallSc[jk][p];
    jk=jk-Now[i];
}
GetNumByWh=sc;
}

```

$N = 8$, ushin Now - 22211 bolsa to'mendegishe boladı.

Eski ma'nisi	Eski ma'nisi	i	p	SC jan'a ma'nisi	Jk jan'a ma'nisi
1	8	1	0	1	
			1	2	6
2	6	2	0		
			1	3	4
3	4	3	0		
			1	4	2
4	2	4	0	4	1
4	1	5	0	4	0

(6-keste)

Bul tablitsada joqarıda keltirilgen funktsiyanın' iske asırıwdag'ı beretug'ın na'tiyjeleri keltirilgen. Bunda N ha'm (NW) massivinin' ma'nisi joqarıda keltirilgen.

JUWMAQLAW

Joqarıda atap o'tkendey induktsiyalıq matematik Bxaskaranın' "Lilovati" atlı tiykarg'ı miynetlerinde orın almasıw ha'm teriwler, sonday-aq ta'kirarlanıwlar menen berilgen orın almasıwlar haqqındag'ı ma'seleler menen shug'ıllang'an. Batis Evropada Avram Ibn Ezra (XII-a'sir) ha'm Leviber Gersh (Gersonid, XIX a'sir) sıyaqlı ilimpazlar kombinatorika ma'seleleri menen teren' shug'ıllang'an. Ibn Ezranın' shug'ıllang'an ma'seleleri Fibonashshi "Abaka kitabı" atlı miynetinde keltirip o'tiledi. Bunnan basqada Paskal, Leybnits, Yakob Bernulli miynetlerinde kombinatorikalıq ma'seleleri qarap o'tiledi.

Pitkeriw qa'nigelik jumısında kombinatorikanın' tiykarg'ı ma'seleleri qarap o'tiledi ha'm olar mısallar jardeminde bayanlap beriledi. Sonday-aq qoyılğan ma'selelerdi a'melge asırıw ushın programmalar jaratılğan.

Ulıwma pitkeriw qa'nigelik jumısında kombinatorikanın' orın almasıw, ornalasıw, teriw ha'm bo'leklew sıyaqlı ma'selelerdi sheshiwde algoritmlerdi a'melge asırıw usılları keltiriledi.

Pitkeriw qa'nigelik jumısındag'ı keltirip o'tilgen protsedura ha'm funktsiyalardan basqada quramalı ma'selelerdi sheshiw algoritmlerinde de paydalanıw mu'mkin. Sonday-aq jumısta kombinatorlıq algoritmlerdi a'melge asırıwda bir neshe ma'selelerdi sheshiwde programmalar islep shıg'ıldı.

Orın almasıwlar menen baylanıslı ma'seleler algoritmleri orın almasıwlar sanın tabıw, barlıq orın almasıwlardı tabıw, berilgen leksikografiyalıq ta'rtiptegi orın almasıw boyınsha ta'rtip nomeri berilgen bolsa, og'an sa'ykes orın almasıwlardı tabıw ha'm kerisinshe jag'dayda berilgen orın almasıwıg'a sa'ykes nomerin anıqlaw sıyaqlı algoritmler EEMde iske asırıldı.

Ornalasıwılarg'a baylanıslı ma'selelerdi sheshiwde algoritmlerdi a'melge asırıw ushın protsedura ha'm funktsiyalar du'ziw ko'rip shıg'ıldı. Bunda N berilgende M ornalasıwlar sanın anıqlaw, ornalasıwlardı iske asırıw, eger ornalasıw leksikografiyalıq ta'rtipte berilse, nomeri boyınsha onı anıqlaw sıyaqlı

ma'seleler sheshshiledi ha'm usıg'an uqsas ma'seleler teriwler ushında a'melge asırıladi.

Pitkeriw qa'nigelik jumısında bo'listiriwlerge de ma'seleler qarap shıg'ılǵ'an bolıp ha'm olardı sheshiw algoritmleri ko'rsetiledi. Qa'nigelik jumısındag'ı qoyılǵ'an ma'selelerdi sheshiwdin' tolıq programmaları qosımshada keltirilgen.

Pitkeriw qa'nigelik jumısında ko'plik ma'selelerin sheshiw sonday-aq ko'plikten izlenip atırǵ'an belgisiz u'les ko'plikti tabıw ma'selelerinde barlıq u'les tan'lawlardı ko'rip o'tiw, atap aytqanda, eger minimal u'les ko'plikti tabıw kerek bolsa, sonday-aq kishi sandag'ı elementlerden ibarat bolsa, tan'lawda da'slep bir elementten, keyin eki elementten, u'sh h t b elementlerden ibarat barlıq u'les ko'pliklerdi tekserip shıg'ıw effektiv sho'lkemlestiriw olardıń qolaylı algoritmleri islep shıg'ıladi ha'm C++ tilinde programmaları jaratıladi. Qa'nigelik jumısındag'ı programmalarda tayar funktsiyalarda (bibloteka arqalı islesetug'ın) paydalanıladi.

PAYDALANILG'AN A'DEBİYATLAR DİZİMİ