О операторах преобразования для оператора Штурма-Лиувилля в классе разных конечнозонных потенциалов

А.Б.Неъматов, А.К.Отамуродов, П.А. Бегимкулова

Самаркандский государственный университет

Аннотация: *В настоящей работе рассматривается самосопряженные операторы Штурма-Лиувилля в пространстве* $L_2(-\infty,\infty)$ *порожденные дифференциальными выражениями вида*

$$Hy \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad H_N^{(j)} y \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q_N^{(j)}(x), \;\; j = 1, 2,$$

где $q(x)$ *вещественная функция, удовлетворяющая следующим условиям*

$$(1+x^2)\left|q(x) - q_N^{(1)}(x)\right| \in L_1(0,\infty), \;\; (1+x^2)\left|q(x) - q_N^{(2)}(x)\right| \in L_1(-\infty, 0).$$

Здесь $q_N^{(1)}(x),\; q_N^{(2)}(x)$ *в общем случае различные конечнозонные потенциалы.*

Доказаны существования решений Йоста и построены операторы преобразования для операторов $H_N^{(j)}$, H, $j = 1, 2$.

Рассмотрим в пространстве $L_2(R^1)$ самосопряженный оператор порожденный дифференциальным выражением вида

$$Hy \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (-\infty < x < \infty) \qquad (1)$$

где $q(x)$ вещественная функция, удовлетворяющая следующим условиям

$$(1+x^2)\left|q(x) - q_N^{(1)}(x)\right| \in L_1(0,\infty), \;\; (1+x^2)\left|q(x) - q_N^{(2)}(x)\right| \in L_1(-\infty, 0). \qquad (2)$$

Здесь $q_N^{(1)}(x),\; q_N^{(2)}(x)$, в общем случае, различные конечнозонные непериодические потенциалы.

В дальнейшем будем предполагать, что спектры следующих невозмущённых самосопряжённых операторов

$$H_N^{(j)} y \equiv -y'' + q_N^{(j)}(x) y = \lambda y, \;\; (-\infty < x < \infty), \;\; j = 1, 2, \qquad (3)$$

совпадают, т.е. $\sigma(H_N^{(1)}) = \sigma(H_N^{(2)}) = E_N = [0, \lambda_1] \cup [\mu_1, \lambda_2] \cup \ldots \cup [\mu_N, \infty)$.

В настоящей работе построены операторы преобразования для операторов $H_N^{(1)}$, H и $H_N^{(2)}$ (см.[5]). Отметим, что в случае оператора Штурма-Лиувилля с возмущённым периодическим потенциалом оператор преобразования построен в работе Н.Е.Фирсовой [1].

Для невозмущенных уравнений (3) решения Вейля-Блоха имеют вид:

$$\varphi_{1,2}(x,\lambda) = \sqrt{\frac{P(x,\lambda)}{P(\lambda)}} \exp\left\{ \pm i\sqrt{R(\lambda)} \int_0^x \frac{du}{P(u,\lambda)} \right\}, \quad \text{при} \quad j = 1,$$

$$\psi_{1,2}(x,\lambda)=\sqrt{\frac{Q(x,\lambda)}{Q(\lambda)}}\exp\left\{\pm i\sqrt{R(\lambda)}\int_0^x\frac{du}{Q(u,\lambda)}\right\},\quad \text{при } j=2,$$

где $\qquad R(\lambda)=\lambda\prod_{k=1}^{N}(\lambda-\lambda_k)(\lambda-\mu_k),$

$$P(x,\lambda)=\prod_{k=1}^{N}\left(\lambda-\xi_k^{(1)}(x)\right),\qquad Q(x,\lambda)=\prod_{k=1}^{N}\left(\lambda-\xi_k^{(2)}(x)\right),$$

а $\xi_k^{(j)}(t)$ $k=1,2,\ldots,N$, $j=1,2$ спектральные параметры, соответствующие потенциалам $q_N^{(j)}(x+t)$.

Обозначим через $\overset{0}{\Lambda}$ спектральную поверхность (см. [2]) оператора $H_N^{(j)}$, $j=1,2$. Последняя получается склеиванием двух экземпляров спектральной плоскости $C\setminus E_N$, разрезанной по зонам спектра $E_N=[0,\lambda_1]\cup[\mu_1,\lambda_2]\cup\ldots\cup[\mu_N,\infty)$ операторов $H_N^{(j)}$, $j=1,2$.

Обозначим через $f(x,\lambda)$, $g(x,\lambda)$ решения уравнения (1) удовлетворяющие условиям

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x,\lambda)-\varphi_1(x,\lambda)\right)=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\left(g(x,\lambda)-\psi_2(x,\lambda)\right)=0,\ \lambda\in\overset{o}{E}_N.$$

Теорема 1. 1) При $\lambda\in\overset{o}{E}_N$ уравнение (1) имеет линейно независимые решения представимые в виде

$$f(x,\lambda)=\varphi_1(x,\lambda)+\int_x^\infty K^+(x,t)\varphi_1(t,\lambda)\,dt\equiv(\mathrm{I}+\mathrm{K}^+)\,\varphi_1(x,\lambda),$$

$$\overline{f(x,\lambda)}=\varphi_2(x,\lambda)+\int_x^\infty K^+(x,t)\varphi_2(t,\lambda)\,dt\equiv(\mathrm{I}+\mathrm{K}^+)\,\varphi_2(x,\lambda),\qquad (4)$$

причем $K^+(x,t)$ (ядро оператора преобразования) является решением следующего интегрального уравнения

$$K^+(x,t)=\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}\Gamma^{(1)}(x,s,s,t)[q(s)-q_N^{(1)}(s)]ds+$$

$$+2\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}d\alpha\int_0^{\frac{t-x}{2}}[q(\alpha-\beta)-q_N^{(1)}(\alpha-\beta)]\,\Gamma^{(1)}(x,\alpha-\beta,\alpha+\beta,t)K^+(\alpha-\beta,\alpha+\beta,)d\beta,$$

(5)

где $\Gamma^{(1)}(x,t,y,z)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{E'_N}F^{(1)}(x,t;s^2)\,\varphi_1(y,s^2)\varphi_2(z,s^2)\dfrac{P(s^2)}{\sqrt{R(s^2)}}sds, \quad (t\ge x)$,

кроме того $K^+(x,t)=0$, при $x>t$.

2) При $\lambda\in \overset{o}{E}_N$ уравнение (1) имеет линейно независимые решения представимые в виде

$$g(x,\lambda)=\psi_2(x,\lambda)+\int\limits_{-\infty}^{x}K^-(x,t)\psi_2(t,\lambda)dt\equiv(\mathrm{I}+\mathrm{K}^-)\,\psi_2(x,\lambda), \tag{6}$$

$$\overline{g(x,\lambda)}=\psi_1(x,\lambda)+\int\limits_{-\infty}^{x}K^-(x,t)\psi_1(t,\lambda)dt\equiv(\mathrm{I}+\mathrm{K}^-)\,\psi_1(x,\lambda), \tag{7}$$

причем $K^-(x,t)$ (ядро операторов преобразования) является решением следующего интегрального уравнения

$$K^-(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\frac{x+t}{2}}\Gamma^{(2)}(x,s,s,t)[q(s)-q_N^{(2)}(s)]ds+$$

$$+2\int\limits_{-\infty}^{\frac{x+t}{2}}d\alpha\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}[q(\alpha+\beta)-q_N^{(2)}(\alpha+\beta)]\,\Gamma^{(2)}(x,\alpha+\beta,\alpha-\beta,t)K^-(\alpha+\beta,\alpha-\beta)d\beta, \tag{8}$$

где $\Gamma^{(2)}(x,t,y,z)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{E'_N}F^{(2)}(x,t;s^2)\psi_1(y,s^2)\psi_2(z,s^2)\dfrac{Q(s^2)}{\sqrt{R(s^2)}}sds, \quad (t\le x)$,

кроме того $K^-(x,t)=0$, при $t>x$.

Имеет место следующая

Теорема 2. Функции $K^{\pm}(x,t)$ имеют первые частные производные по обеим переменным, при этом имеют место следующие оценки:

$$\left|K^{\pm}(x,t)\right|\le\sigma^{\pm}\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left\{2[\sigma_1^{\pm}(x)-\sigma_1^{\pm}\left(\frac{x+t}{2}\right)]\right\},$$

$$\left|\frac{\partial K^+(x,t)}{\partial x}+\Gamma^{(1)}\left(x,\frac{x+t}{2},\frac{x+t}{2},t\right)[q\left(\frac{x+t}{2}\right)-q_N^{(1)}\left(\frac{x+t}{2}\right)]\right|\le c_1(x)\sigma^{+}\left(\frac{x+t}{2}\right),$$

$$\left|\frac{\partial K^+(x,t)}{\partial t}+\Gamma^{(1)}\left(x,\frac{x+t}{2},\frac{x+t}{2},t\right)[q\left(\frac{x+t}{2}\right)-q_N^{(1)}\left(\frac{x+t}{2}\right)]\right|\le c_1(x)\sigma^{+}\left(\frac{x+t}{2}\right),$$

$$\left|\frac{\partial K^-(x,t)}{\partial x}+\Gamma^{(2)}\left(x,\frac{x+t}{2},\frac{x+t}{2},t\right)[q\left(\frac{x+t}{2}\right)-q_N^{(2)}\left(\frac{x+t}{2}\right)]\right|\le c_2(x)\sigma^-\left(\frac{x+t}{2}\right),$$

$$\left|\frac{\partial K^-(x,t)}{\partial t}+\Gamma^{(2)}\left(x,\frac{x+t}{2},\frac{x+t}{2},t\right)[q\left(\frac{x+t}{2}\right)-q_N^{(2)}\left(\frac{x+t}{2}\right)]\right|\le c_2(x)\sigma^-\left(\frac{x+t}{2}\right),$$

где $c_1(x), c_2(x)$ непрерывные функции и

$$\sigma^+(x)=C_1\int_x^\infty|q(s)-q_N^{(1)}(s)|\,ds,\quad \sigma_1^+(x)=\int_x^\infty\sigma^+(t)dt,\ (C_1>0),$$

$$\sigma^-(x)=C_2\int_{-\infty}^x|q(s)-q_N^{(2)}(s)|\,ds,\quad \sigma_1^-(x)=\int_{-\infty}^x\sigma^-(t)dt,\ (C_2>0).$$

Использованная литература

1. Фирсова Н.Е. Обратная задача рассеяния для возмущенного оператора Хилла. Мат. заметки, 1975, т. 18, № 6, с. 831-843.
2. Фирсова Н.Е. Прямая и обратная задача рассеяния для одномерного возмущенного оператора Хилла. Мат. сб., 1986, т. 130(172), № 3(7), с. 346-385.
3. Левитан Б.М., Хасанов А.Б. Оценка функции Коши в случае конечнозонных потенциалов. Функц. ан. и его прилож., 1992, т. 26, № 2, с. 18-28.
4. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: «Наука», 1988 г.-432с.
5. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977, 332 с.