О равномерных оценках осцилляторных интегралов.

Т.Д.Туракулов, Н.А. Исматов.

Mutaxasislik: Matematika (yo`nalishlar bo`yicha) 2-bosqich

Аннотация

В работе изучается некоторые равномерные оценки осцилляторных интегралов, связанных с преобразованием Фурье гладких зарядов, сосредоточенных на некоторых гиперповерхностях**.**

Ключевые слова: *квазиоднородный полином, осцилляторный интеграл, показатель осцилляции, высота функции.*

Определение. Пусть f бесконечно-гладкая функция, в некоторой окрестности точки x^0. Говорят, что функция f имеет конечный тип $k \geq 1$ в этой точке, если $d^l f(x^0) = 0$ при любом $l \leq k-1$ и $d^k f(x^0) \neq 0$. В этом случае используем обозначение $ord_{x^0} f = k$. Если $f(x^0) \neq 0$, то полагаем $ord_{x^0} f = 0$.

Пусть P ненулевой квазиоднородный полином, с весом $\kappa := (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$. Тогда в каждой точке $x \in R^n$ она имеет конечный порядок. Введем обозначение

$$m(P) := \max_{S^{n-1}} \left\{ ord_x(P) : x \in S^{n-1} \right\}$$

где S^{n-1}-единичная сфера в R^n с центром в начале координат.

Рассмотрим функцию: $\Phi(x) := P(x) + R(x)$, где P некоторый квазиоднородный полином, с весом κ и R бесконечно-гладкая функция, в некоторой окрестности начала координат, имеющая вид $R(x) = \sum\limits_{(\alpha,\kappa)=1} x^\alpha R_\alpha(x)$,

здесь (α,κ)-скалярное произведение векторов α, κ и $\{R_\alpha\}$ гладкие функции, обращающиеся в нуль в начале координат. Для вещественных чисел λ, вектора $\xi \in R^n$ и амплитудной функции $a \in C_0^\infty(R^n)$ введем следующий осцилляторный интеграл: $J(\lambda,\xi) := \int_{R^n} a(x) e^{i(\lambda\Phi(x) + (\xi,x))} dx$.

Теорема. *Пусть* P *имеет порядок* $m(P) \geq 2$. *Положим* $l = 0$ *при* $m(P) \neq \frac{1}{|\kappa|}$ *и* $l = 1$ *при* $m(P) = \frac{1}{|\kappa|}$. *Тогда существует окрестность нуля* U *такая, что при любой амплитудной функции* $a \in C_0^\infty(U)$ *для осцилляторного интеграла* $J(\lambda, \xi)$ *справедлива следующая оценка:*

$$|J(\lambda,\xi)| \leq \frac{C\|a\|_{C^3} (\ln(1+|\lambda|+|\xi|))^l}{(1+|\lambda|+|\xi|)^\beta}, \tag{1}$$

где $\beta := \min\left\{\frac{1}{m(P)}, |\kappa|\right\}$ $\quad |\kappa| = |\kappa_1| + |\kappa_2| + \ldots + |\kappa_n|$.

Схема доказательства теоремы. Если $|\lambda| \leq M \cdot \max\limits_{1\leq k\leq n} |\xi_k|$ где M фиксированное положительное число, то можем выбрать окрестность U такую, что для интеграла $J(\lambda,\xi)$ справедливо следующее неравенство

$$|J(\lambda,\xi)| \leq \frac{C_N \|a\|_{C^N}}{(1+|\lambda|+|\xi|)^N},$$

где N любое фиксированное положительное число. Последняя оценка доказывается с помощью формулы интегрированием по частям. Далее, будем предполагать, что $|\lambda| \geq M \cdot \max\limits_{1\leq k\leq n} |\xi_k|$.

Пусть $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n) \in Q_+^n$ и $\tau > 0$ фиксированное число, где Q_+-множество положительных рациональных чисел. Рассмотрим отображение $\delta_\tau^\kappa : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ определенное формулой $\delta_{2^\nu}^\kappa(x) = (2^{\nu\kappa_1} x_1, 2^{\nu\kappa_2} x_2, \ldots, 2^{\nu\kappa_n} x_n)$. Введем функцию $\beta(x)$, удовлетворяющую условиям:

1) $\beta \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. 2) $0 \leq \beta(x) \leq 1$ для любого $x \in \mathbf{R}^n$. 3) $\begin{cases} \beta(x) = 1, & |x| \leq 1 \\ \beta(x) = 0, & |\delta_{2^{-1}}(x)| \geq 1. \end{cases}$

Пусть $\sigma(x) = \beta(x) - \beta(\delta_2(x))$ где $\delta_{2^\nu}(x) = \left(2^{\nu\kappa_1} x_1, \ldots, 2^{\nu\kappa_n} x_n\right)$.

Основные свойства функции $\sigma(x)$ содержатся в следующей лемме.

Лемма 1. *Функция $\sigma(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) Для произвольного фиксированного $x \neq 0$ справедливо равенство

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sigma\left(\delta_{2^\nu}(x)\right) = 1.$$

2) *Существует $N = N(\kappa)$ такое, что для произвольного $x \neq 0$ существует $\nu_0 = \nu_0(x)$ такое, что при любом $\nu \notin [\nu_0, \nu_0 + N]$* $\quad \sigma\left(\delta_{2^\nu}(x)\right) = 0$.

3) Для $\forall \nu_0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\sigma\left(\delta_{2^\nu}(x)\right) = 0$ при $\forall \nu < \nu_0$ и $|x| \geq \varepsilon$

Теперь воспользовавшись леммой 1, разлагаем в ряд осцилляторный интеграл $J(\lambda, \xi)$. В этом случае, согласно теореме Лебега о можорантной сходимости, для любых фиксированных λ, ξ осцилляторный интеграл $J(\lambda, \xi)$ выражается в виде суммы следующего ряда: $J(\lambda, \xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu(\lambda, \xi)$, где

$J_\nu(\lambda, \xi) = \int_D e^{i(\Phi(x)\lambda + x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n)} a(x)\sigma(\delta_{2^\nu}(x))dx$ и $D \subset R^n$ некоторая область в R^n.

Далее, рассмотрим оценки для интегралов $J_\nu(\lambda, \xi)$. Воспользуемся заменой переменных $\delta_{2^\nu}(x) = z$. Тогда $x = \delta_{2^{-\nu}}(z),\ dx = 2^{-\nu|\kappa|}dz,\ \ |\kappa| = \kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_n$ и общий вид интегралов $J_\nu(\lambda, \xi)$ меняется следующим образом: $J_\nu(\lambda, \xi) = 2^{-\nu|\kappa|} \int_D e^{i\lambda \cdot 2^{-\nu} Ô_\nu(z,\gamma)} dz$

где $\Phi_\nu(z, \gamma) := P(z) + 2^\nu R(\delta_{2^{-\nu}}(z)) + z_1\gamma_1 + z_2\gamma_2 + \cdots + z_n\gamma_n, \quad \gamma_1 := \dfrac{2^{(1-\kappa_1)\nu}\xi_1}{\lambda}, \ldots, \gamma_n := \dfrac{2^{(1-\kappa_n)\nu}\xi_n}{\lambda}$

Теперь рассмотрим следующие случаи:

1. Если $\left|\lambda \cdot 2^{-\nu}\right| \leq M$ то интеграл $J_\nu(\lambda, \xi)$ легко оценивается. В этом случае из тривиальной оценки для интегралов получим , что

$$\left|J_\nu\right| \leq \frac{C \cdot 2^{-\nu|k|}\|a\|_C}{1 + \left|\lambda \cdot 2^{-\nu}\right|^N}$$

Суммируя по тем номерам ν, удовлетворяющим неравенству $\left|\lambda \cdot 2^{-\nu}\right| \le M$ получим требуюмую оценку.

2. Пусть $\left|\lambda \cdot 2^{-\nu}\right| > M$. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Существует* $\Delta_0 > 0$ *удовлетворяющее условию: если* $\left\|\gamma\right\|_\infty \ge \Delta_0$, *то для любого* ν *справедливо неравенство* $\left|J_\nu\right| \le \dfrac{C \cdot 2^{-\nu|\kappa|}}{1+\left|\lambda \cdot 2^{-\nu}\right|^N}$.

Пусть $z^0 \in R^n \setminus \{0\}$ и $\chi \in C_0^\infty(U(z^0))$ некоторая гладкая функция с носителем в окрестности $U(z^0)$ точки z^0. Рассмотрим интеграл

$$J_\nu^\chi = 2^{-\nu|\kappa|}\int_D e^{i\lambda 2^{-\nu}(P(z)+2^\nu R(\delta_{2^{-\nu}}(z))+(\gamma,z)}\tilde{a}(\delta_{2^{-\nu}}(z))\sigma(z)\chi(z)dz .$$

Обозначим через $F(z,\gamma^0) = P(z) + (z,\gamma^0)$.

Лемма 3. *Пусть* $z^0 \in D$ *фиксированная точка удовлетворяющая условию* $\nabla F(z^0,\gamma^0) \ne 0$ *Тогда существуют положительные числа* N_0,ε *и окрестность* $U(z_0)$ *точки* z^0 *такие, что при любом* $\chi \in C_0^\infty(U(z^0))$ *и* N, $\nu > N_0$, $\left|\gamma - \gamma^0\right| < \varepsilon$ *для осцилляторного интеграла* J_ν *имеет место следующая оценка:*

$$\left|J_\nu^\chi(\xi)\right| \le \frac{C_N 2^{-\nu|\kappa|}}{1+\left|\lambda \cdot 2^{-\nu}\right|^N} .$$

Согласно лемме 3 нам необходимо рассмотреть лишь достаточно малые окрестности критических точек функции $F(z,\gamma^0)$. Пусть $C_F = \left\{z \in D : \nabla F(z,\gamma^0) = 0\right\}$ (C_F замкнутое множество). Отметим, что C_F может быть пустым множеством. Допустим, что $C_F \ne \varnothing$ и $z^0 \in \mathrm{C_F}$ фиксированная точка. Тогда $\nabla P(z^0) + \gamma^0 = 0$

Лемма 4. *Пусть* $(z^0,\gamma^0) \in R^n \times R^n$ *фиксированная точка, где выполняется условие* $\nabla P(z^0) \ne 0$. *Тогда существуют положительные числа* N_0,ε *и окрестность* $U(z^0)$ *такие, что при любом* $\chi \in C_0^\infty(U(z^0)), \nu > N_0$, $\left|\gamma - \gamma^0\right| < \varepsilon$

справедлива следующая оценка $\left|J_\nu^\chi(\xi)\right| \le \dfrac{C \cdot 2^{-\nu|\kappa|}}{1+\left|\lambda \cdot 2^{-\nu}\right|^{\frac{1}{2}}}$.

Лемма 5. *Пусть* $(z^0, \gamma^0) \in R^n \times R^n$ *фиксированная точка, где выполняется условие* $m_{z^0}(P) = k \ge 2$. *Тогда существуют положительные числа* N_0, ε *и окрестность* $U(z^0)$ *такие, что при любом* $\chi \in C_0^\infty(U(z^0)), \nu > N_0$, $\left|\gamma - \gamma^0\right| < \varepsilon$ *справедлива следующая оценка* $\left|J_\nu^\chi(\xi)\right| \le \dfrac{C \cdot 2^{-\nu|\kappa|}}{1+\left|\lambda \cdot 2^{-\nu}\right|^{\frac{1}{k}}}$.

Теперь суммируя полученных оценок по ν, получим требуемую оценку (1).

Окончание доказательство теоремы. Если $l = 0$, то суммирование оценок полученных для J_ν дает требуемую оценку. Если $l = 1$ то при $2^{-\nu|\kappa|}|\lambda| < 1$ сумма тривиальных оценок дает искомую оценку без логарифмического множителя. В случае $2^{-\nu|\kappa|}|\lambda| \ge 1$ количество интегралов оценивается с $\ln(2+|\lambda|)$ и суммированием полученных оценок получим доказательство теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Н.Карпушкин, Теорема о равномерных оценках осциллирующих интегралов с фазой, зависящих от двух переменных // Труды Семинара имени И.Г.Петровского, вып. 10, стр 150-169, 1984.
2. Iosevich A., Sawyer E. Maximal Averages over Surfaces, Adv. in Math. 1997, 132, p. 46-119.
3. Isroil A. Ikromov, Michael Kempe, and Detlef Muller. Damped oscillatory integrals and boundedness of maximal operators associated to mixed homogeneous hypersurfaces.Duke Math. J. 126(3):471--490, 2005
4. I. Ikromov, A.Soleev. Newton polyhedra and oscillation index for convex phases. Lecture Note Computer Science, No 4194, pp.227-240. 2006.
5. Sogge C.D., Fourier integrals in Classical Analysis, Cambridge university press, Cambridge, 1993.