

ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASINI KO'PHADLAR

HALQASINING IDEALLARI ORQALI YECHISH

Narzullayev U.X. (TATU SF), Murodov H.X.(SamDU)

Gryobner bazislari matematikaning muammolarini, kompyuterga oid tadqiqotlarni, injenerlik hisob kitoblarda va tabiiy fanlarda yuzaga keladigan masalalarni hal qilishda hisoblash algoritmlari bilan ta'minlaydi. Bruno Buxberger o'zining ustози Wolfgang Gryobnerning ilmiy ishlarining ta'sirida 1965 yil fanga Gryobner bazislari tushunchasini kiritdi [2]. Shunday bazislarni hisoblashning Buxberger algoritmi polinomial xalqalar nazariyasiga qo'shilgan muhim hissa bo'ldi. Biz bu yerda ushbu algoritmnı to'liq bermaymiz. Algoritmnı to'liq o'rganish uchun Kox, Littl va O'Shilarining monografiyasiga [2] murojaat qilish mumkin.

$K[x_1, \dots, x_n]$ biror K xalqa ustidagi ko'p o'zgaruvchili ko'phadlar xalqasi bo'lsin.

Ta'rif [1]. $f_1, \dots, f_m \in K[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin. $V(f_1, \dots, f_m) = \{(a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid \text{барча } i = 1, \dots, m \text{ ларда } f_i(a_1, \dots, a_n) = 0\}$ to'plamga $f_1, \dots, f_m$ lar bilan aniqlangan *affin ko'pxillik* deyiladi.

Ba'zida $V(f_1, \dots, f_m)$ ning o'rniga $V(\{f_i, | i = 1, 2, \dots, m\})$ belgilashni ham ishlatiladi.

1-Teorema [1]. $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ xalqaning ideali bo'lsin. U holda berilgan monomial tartiblash bo'yicha I ideal yagona keltirilgan Gryobner bazisiga ega bo'ladi.

2-Teorema [1]. $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ xalqaning ideali bo'lsin. $f_1, f_2, \dots, f_m \in I$ bo'lib, $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$ bo'lsin. U holda $V(I) = V(\{f_1, f_2, \dots, f_m\})$ bo'ladi.

Bu teoremlarga asosan I ning ixtiyoriy bazisidan foydalanib, $V(I)$ ni hisoblashimiz mumkin bo'ladi. $x > y > z$ lex tartiblashdan foydalanib, quyidagi misolda Gryobner bazisini hosil qilishining ixchamlashtirilshgan jadval usulini keltiramiz.

Quyidagi algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin,

$$\begin{cases} f = x^2y - xy - x + 1 \\ g = x^3y^2 - x^2y^3 + x + 1 \end{cases} \quad (1)$$

Bu sistemaning analitik yechimini topish uchun unga mos $I = \langle f, g \rangle$ idealning Gryobner bazisini quramiz. Buning uchun quyidagi qadamlarni qarab chiqamiz.

1-qadam: (1) sistema polinomlari bosh monomlarining barcha juftlari orasidan eng kichik umumiy karralisini topamiz. Ular quyidagi ikkita bosh monomdan iborat bo'ladi:

$$\begin{cases} LM(f) = x^2y \\ LM(g) = x^3y^2 \\ EKUK(LM(f), LM(g)) = x^3y^2 \end{cases} \quad (2)$$

2-qadam: $EKUK(LM(f), LM(g))$ ni $LM(f), LM(g)$ bo'lish natijasida hosil bo'lgan koeffitsientlarni topamiz.

$$k_1 = \frac{EKUK}{x^2y} = \frac{x^3y^2}{x^2y} = xy,$$

$$k_2 = \frac{EKUK}{x^3y^2} = \frac{x^3y^2}{x^3y^2} = 1.$$

Topilgan koeffitsientlardan birinchisini tanlab, uning ishorasini qarama-qarshisiga almashtiramiz $k_1 = -xy$.

3-qadam: Endi birinchi ustuni f yoki g ning monomlaridan, ikkinchi ustuni esa shu monomlarning $k_1 = -xy$ ga ko'taytirishdan hosil bo'lgan jadval tuzamiz.

1-jadval ($f * k_1$)	
f	$-xy$
x^2y	$-x^3y^2$
$-xy$	x^2y^2
$-x$	x^2y
1	$-xy$

2-jadval ($g * k_2$)	
g	1
x^3y^2	x^3y^2
$-x^2y^3$	$-x^2y^3$
x	x
1	1

4-qadam: 1 va 2 - jadvallar bo'yicha o'xshash monomlarini qisqartiramiz. Bu yerda $-x^3y^2$ va x^3y^2 lar qisqaradi. Qisqartirish qadamida qisqaradigan jadvaldagi monomlarni yashil rang bilan, sariq rang bilan esa bungacha qisqargan monomlarni belgilaymiz.

5-qadam: Qolgan monomlardan leksiografik tartibga mos ravishda eng kattasini tanlaymiz. Bu holda, $LM(g * k_2) = -x^2y^3$ bo'ladi.

6-qadam: Tanlangan eng katta monomni f va g polinomlarining bosh monomlariga bo'linish yoki bo'linmasligini aniqlaymiz.

$$f: -\frac{x^2y^3}{x^2y} ; \quad g: -\frac{x^2y^3}{x^3y^2}$$

Agar tanlangan monom sistemaning polinomlarining bosh monomlaridan hech biriga bo'linmasa, 11- qadamga o'tamiz. Bu yerda tanlangan monom f polinomning bosh hadiga bo'linadi va g polinomning bosh hadiga bo'linmaydi. f polinomni keyingi qisqartirishlar uchun tanlaymiz. Agar tanlangan monom sistemaning bittadan ko'p sondagi polinomlarining bosh monomlariga bo'linsa, bosh monomi eng katta bo'lgan polinom tanlanadi.

7-qadam: 5-qadamda tanlangan monom va 6-qadamda tanlangan polinomning bosh monomi uchun EKUKni topamiz. Bu holda

$$EKUK(-x^2y^3, x^2y) = -x^2y^3.$$

8-qadam: 7-qadamda topilgan EKUKni 6-qadamda tanlangan polinomning bosh hadiga bo'lish bilan aniqlanadigan koeffitsientni topamiz.

$$k = \frac{EKUK}{-x^2y} = -\frac{x^2y^3}{-x^2y} = -y$$

9- qadam: 6- qadamdagi polinomni 8-qadamdagi koeffitsientga ko'paytiramiz va hosil bo'lgan qiymatlarni quyidagi jadvallarga kiritamiz.

3-jadval ($f * k;$)		
f	$-xy$	y^2
x^2y	$-x^3y^2$	x^2y^3
$-xy$	x^2y^2	$-xy^3$
$-x$	x^2y	$-xy^2$
1	$-xy$	y^2

4-jadval ($g * 1;$)	
g	1
x^3y^2	x^3y^2
$-x^2y^3$	$-x^2y^3$
x	x
1	1

10-qadam: 3 va 4- jadvallardagi o'xshash monomlarni qisqartiramiz. Bu holda x^2y^3 va $-x^2y^3$ lar qisqaradi. Bu jarayonda 5-qadamni tanlangan monom sistema polinomlarining bosh monomlaridan hech biriga bo'linmaguncha takrorlanadi.

11-qadam: Tanlangan monom sistema polinomlarining bosh monomlaridan hech biriga bo'linmagan holda oxirgi hosil bo'lgan jadvallardagi qisqarmagan monomlar yig'indisi bilan aniqlanuvchi yangi polinom tuziladi. 5- 11-qadamlarni ikkinchi marta bajarib quyidagi jadvallarni olamiz.

5-jadval			
f	$-xy$	y^2	$-y$
x^2y	$-x^3y^2$	x^2y^3	$-x^2y^3$
$-xy$	x^2y^2	$-xy^3$	xy^2
$-x$	x^2y	$-xy^2$	xy
1	$-xy$	y^2	$-y$

6-jadval	
g	1
x^3y^2	x^3y^2
$-x^2y^3$	$-x^2y^3$
x	x
1	1

5-11 qadamlarni 3-marta bajarib quyidagi jadvallarni hosil qilamiz.

7-jadval				
f	$-xy$	y^2	$-y$	-1
x^2y	$-x^3y^2$	x^2y^3	$-x^2y^3$	$-x^2y$
$-xy$	x^2y^2	$-xy^3$	xy^2	xy
$-x$	x^2y	$-xy^2$	xy	x
1	$-xy$	y^2	$-y$	1

8-jadval	
g	1
x^3y^2	x^3y^2
$-x^2y^3$	$-x^2y^3$
x	x
1	1

Bu bosqichda eng katta monom $-xy^3$ bo'ladi.

$$f: -\frac{xy^3}{x^2y}; \quad g: -\frac{xy^3}{x^3y^2}$$

Polinomlarning bosh monomlari bu monomga bo'linishini aniqlaymiz. Bu monom poliniomlarning hech bir bosh monomlariga bo'linmaydi. Keyin esa 9- qadamga o'tib yangi polinom tuzamiz, 7-8 jadvallarga asosan yangi polinom tuzamiz.

$$p_1 = -xy^3 + xy + 2x + y^2 - y - 2$$

Bu polinom polinomial tenglamalar sistemasiga qo'shiladi va keyinchalik u soddalashtirish jarayonida qo'llaniladi.

Endi 1-qadamni f, g, p_1 polinomlarga qo'llaymiz. Jarayon sistemaning Gryobner bazisi bo'lguncha davom ettiriladi. Bu misolda Gryobner bazisi quyidagi polynomial tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi:

$$\begin{cases} f = x^2y - xy - x + 1 \\ g = x^3y^2 - x^2y^3 + x + 1 \\ p_1 = -xy^3 + xy + 2x + y^2 - y - 2 \\ p_2 = 2x^2 - xy^3 - x + y^2 - 1 \\ p_3 = xy^2 + xy - 2x - y^2 - y + 2 \\ p_4 = -2xy + 4x - y^3 + y^2 + 2y - 4 \\ p_5 = 8x - y^4 - 2y^3 + 3y^2 - 8 \\ p_6 = -y^5 + 3y^3 - 2y^2. \end{cases}$$

Hosil bo'lgan sstema Gryobner bazisidan iborat bo'lib, u polynomial tenglamalar sistemasi yechimining analitik ko'rinishiga mos keladi. Bu usulning asosiy afzalligi u standart usuldan farqli ravishta qisqargan sondagi qadamlarda Gryobner bazisini topishga yordam beradi. Qisqarish quyidagi kombinatsiyalarni tanlash yo'li bilan erishiladi. Berilgan usulga moslashtirilgan Buxberger shartlari jadvaldagi va shartlardan kelib chiquvchi yangi tekshirish shartlarining berilgan usul sistemani yomon shartlanganlik muammosidan qutulishga imkon beradi. Bu polinomlar ustida arifmetik amallarni qisqartirish hisobiga ro'y beradi.

Shunday qilib, $I = \langle f, g \rangle$ idealning (1) sistemaga mos affin ko'pxilligi $V(I) = V(\{f, g, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\})$ dan iborat bo'ladi.

Adabiyotlar

1. Malik D.S., Morderson John N., Sen M.K. *Fundamentals of abstract algebra*. - WCB. McGraw-Hill. Boston, 1997.
2. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. *Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры*. Пер. с англ. — М.: Мир, 2000. — 687с, ил.