Решение полиномиальных уравнений с помощью техники базисов Грёбнера

Нарзуллаев У.Х., Х.Муродов

В данной работе показано как теория базисов Гребнера может быть применена к решению некоторых систем полиномиального уравнений по отношению к определенному типу упорядочения.

Рассмотрим следующую систему нелинейных уравнений

$$z^2 - 2xyz + 5x = 0,$$

$$xy^2 + yz^3 = -2,$$

$$3xy^2 - 8z^3 = 0$$

в C^3. Эти уравнения задают идеал

$$I = < z^2 - 2xyz + 5x,\ xy^2 + yz^3 + 2,\ 3xy^2 - 8z^3 > \subset C[x, y, z].$$

Наша задача – найти все точки многообразия V(I). Мы можем это сделать, используя любой базис идеала. Посмотрим, что получится, если мы будем работать с базисом Грёбнера.

Мы будем использовать lex-упорядочение.

Подключение пакета Groebner

>with(groebner);

[*finduni, finite, gbasis, gsolve, leadmon, normalf, solvable, spoly*]

Исходная система нелинейных алгебраических уравнений

>Poly:=[$z^2 - 2xyz + 5x,\ xy^2 + yz^3 + 2,\ 3xy^2 - 8z^3$]:

Построение базиса Грёбнера

>G:=gbasis(Poly, [x, y, z], plex);

>G:=[$75x - 32z^5 - 16z^3 + 15z^2 - 12,\ 9y - 64z^5 - 60z^4 - 32z^3 - 48z - 24,$

$9 + 24z^3 + 24z^5 + 32z^8 + 16z^6 + 30z^7$]

Если мы внимательно посмотрим на эти полиномы, то увидим нечто замечательное. Во-первых, третий элемент базиса зависит только от *z*и его корни легко вычисляются (найдем его корни численным методом)

>Solution3:=fsolve(G[3], {z}, complex);

>Solution3:={z=-1.257524095}, {z=-0.6585138286},
{z=-0.3731823784-0.9314701991 i}, {z=-0.3731823784+0.9314701991 i}
{z=0.2884504292-0.7377676589 i} {z=0.2884504292+0.7377676589 i}
{z=0.5740009112-0.4561342620 i} {z=0.5740009112-0.4561342620 i}

что дает нам восемь возможных значений z. Далее, подставляя каждое из этих значений в g_1 и в g_2, мы однозначно определяем x и y.

>for SolutionZ in Solution3 do
>SolutionY:=solve(subs(SolutionZ, G[2]),{y}):
>SolutionX:=solve(subs(SolutionY, SolutionZ, G[1]), {x}):
>print(SolutionX, SolutionY, SolutionZ);
>od:

{x=-1.922255456},{y=-1.660937467},{z=-1.257524095};
{x=-0.04048115000},{y=4.337158513},{z=-0.6585138286};
{x=0.09180008067+0.09284298307 i},{y=-4.467891369+0.8209128856 i},
{z=-0.3731823784-0.9314701991 i};
{x=0.09180008067-0.09284298307 i},{y=-4.467891369-0.8209128856 i},
{z=-0.3731823784+0.9314701991 i};
{x=0.284281410+0.1699085812 i},{y=0.9515756133+1.759803448 i},
{z=0.2884504292-0.7377676589 i};
{x=0.284281410-0.1699085812 i},{y=0.9515756133-1.759803448 i},
{z=0.2884504292+0.7377676589 i}
{x=0.01133844519+0.04814451309 i},{y=-0.488461424-4.583563612 i},
{z=0.5740009112-0.4561342620 i};
{x=0.01133844519-0.04814451309 i},{y=-0.488461424+4.583563612 i},
{z=0.5740009112+0.4561342620 i}.

Таким образом, система имеет восемь решений, два вещественных и шесть комплексных. Так как $V(I)=V(g_1, g_2, g_3)$,то тем самым мы нашли все решения системы.

Рассмотрим следующий пример.

Найти точки в C^3, принадлежащие многообразию
$V\left(x^2+y^2+z^2-1, x^2+y^2+z^2-2x, 2x-3y-z\right)$.

Используя lex-упорядочение, найдем базис Грёбнера для идеала $I=\left\langle x^2+y^2+z^2-1, x^2+y^2+z^2-2x, 2x-3y-z\right\rangle$. Получим следующий базис:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= 2x-1,\\
g_2 &= 3y+z-1,\\
g_3 &= 40z^2-8z-23.
\end{aligned}
$$

Отметим, что g_3 зависит только от *z,* и его корни легко вычисляются (они являются корнями квадратного уравнения):

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{10}+\frac{3}{20}\sqrt{26},\\
z_2 &= \frac{1}{10}-\frac{3}{20}\sqrt{26}.
\end{aligned}
$$

Далее, подставляя каждое из этих значений в уравнения $g_1=0$ и $g_2=0$, мы однозначно определяем *x* и *y.*

Таким образом, система $g_1=g_2=g_3=0$ имеет два решения:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}, y_1=\frac{3}{10}-\frac{1}{20}\sqrt{26}, z_1=\frac{1}{10}+\frac{3}{20}\sqrt{26};\\
x_2 &= \frac{1}{2}, y_2=\frac{3}{10}+\frac{1}{20}\sqrt{26}, z_2=\frac{1}{10}-\frac{3}{20}\sqrt{26}.
\end{aligned}
$$

Так как $V(I)=V(g_1,g_2,g_3)$, то тем самым мы нашли все решения системы.

Как нам удалось решить эти системы? Ответ на этот вопрос дают теоремы об исключении и продолжении, которые можно найти в [1].Основная идея *теории исключения* состоит в том, что и шаг исключения, и шаг продолжения должны рассматриваться в большей общности.

Литература

1. Давенпорт Дж., Сире Й., Турнье Е. Компьютерная алгебра. – М.: Мир,1991.

2. Кокс Д., Литтл Дж., О’Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. – М.:Мир,2000.