О ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ С ВЫПУКЛОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОСРЕДСТВОМ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

Хатамов.А, Назаров.М.Д
E-mail: Khatamov@rambler.ru

Аннотация. В статье доказаны оценки наилучших равномерных сплайн приближений выпуклых функций, удовлетворяющих условию Липшица на конечном отрезке, выпуклых функций на конечном отрезке, выпуклых функций с заданным модулем непрерывности на конечном отрезке.

1.Основные обозначения и определения. Пусть $f -$ непрерывная на конечном отрезке $\Delta = [a,b]$ действительная функция. $M(f) = \max\limits_{x\epsilon\Delta}|f(x)|$, при $\delta > 0$ через $\omega(f,\delta)$ обозначим модуль непрерывности функции f на отрезке Δ :

$$\omega(f,\delta) = \underset{\substack{x,y\epsilon\Delta \\ |x-y|\leq\delta}}{Sup} |f(x) - f(y)|$$

Определение. Функцию s называют полиномиальным сплайном (или просто сплайном) степени m дефекта 1 с узлами

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

на отрезке Δ, если

1) s −многочлен степени не выше m на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}], i = \overline{0, n-1}$;
2) $s -$ $m - 1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке Δ.

Через $S(m,n,\Delta)$ обозначим множество всех сплайнов степени m дефекта 1 с произвольными $n+1$ узлами на отрезке Δ, а при $0 < p < \infty$ через $S_n^m(f,p,\Delta) -$ наименьшее уклонение функции f от сплайнов $S(m,n,\Delta)$ в метрике $L_p(\Delta)$, т.е.

$$S_n^m(f,p,\Delta) = inf\left\{\|f - s\|_{L_p(\Delta)}: s\epsilon S(m,n,\Delta)\right\},$$

где
$$\|f - s\|_{L_p(\Delta)} = \left(\int_\Delta |f(x) - s(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Всюду в дальнейшем через $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots), C_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots), \dots; C, C_1, \dots$ обозначим положительные величины, зависящие от указанных параметров и индексов; и положительные абсолютные постоянные; и $|\Delta| = b - a$.

После появления в 1964 году работы [1] Д.Ньюмана, в которой установлены оценки наилучших рациональных приближений функции $|x|$ на отрезке $[01,]$ с экспоненциальной скоростью стремления к нулю началось бурное развитие прямых теорем теории равномерных рациональных приближений. Особенно это относится к теории равномерных рациональных приближений непрерывных выпуклых функций и функций с выпуклой производной. Оказалось, что функции из этих классов рациональными дробями приближаются существенно лучше, чем полиномами той же степени. Например, В.А.Попов и П.П.Петрушев [2] доказали, что наилучшее равномерное приближение всего класса выпуклых равномерно ограниченных функций на отрезке рациональными функциями n- того порядка имеет оценку $O(n^{-1})$, однако для индивидуальной выпуклой функции f имеет место оценка $o(n^{-1})$, точнее $O(\omega(f,1/n)/n)$.

В настоящей работе доказываются такие же результаты для наилучших равномерных сплайн - приближений при помощи полиномиальных сплайнов степени 1 минимального дефекта с произвольными $n+1$ узлами. А именно, доказываются следующие теоремы 1-3, которые являются основными результатами настоящей работы.

Теорема 1. Для каждой выпуклой на отрезке Δ функции $f \epsilon Lip_K 1$ верна оценка

$$S_n^1(f,\Delta) \leq C_1 K|\Delta|\, 1/n^2 \,, \quad n = 1,2,\dots .$$

Теорема 2. Для каждой выпуклой на отрезке Δ функции f справедливо неравенство

$$S_n^1(f,\Delta) \leq C_2 M(f)|\Delta|\, 1/n \,, \quad n = 1,2,\dots \,.$$

Теорема 3. Если f выпукла на отрезке Δ и $\omega(f,\delta)$ $-$модул непрерывности функции f, тогда имеет место неравенство

$$S_n^1(f,\Delta) \leq C_3|\Delta|\omega(f,1/n)\,/n \,, \quad n = 1,2,\dots \,,$$

В работе [3] А.Хатамова доказаны следующие теоремы.

Теорема 4. Если $r \geq 1$ и функция f на отрезке Δ имеет выпуклую r $-$ю производную, то для любого натурального n справедливо неравенство

$$S_n^{r+1}(f,\Delta) \leq C(r)M\left(f^{(r)}\right)|\Delta|^r n^{-r-2}.$$

Теорема 5. При любом $r = 0,1,\dots$ для функции $f(x) = x^{r+2}$, r $-$я производная которой выпукла и принадлежит классу $Lip_K 1$ с постоянной $K = (r+2)!$ имеет место неравенство

$$S_n^{r+1}(f,[0,1]) \geq (1/2^{2r+3})n^{-r-2}, \qquad n = 1,2,\dots \,.$$

Теорема 5 показывает точность стремления к нулю последовательности наилучших сплайн приближений в теореме 4.

ЛИТЕРАРУРА

1. Newman D.J. Rational approximation to $|x|$. Michigan Math.J., V11,№1, 1964,11-14.
2. Попов В.А., Петрушев П.П., Точный порядок наилучшего приближения выпуклых функций рациональными функциями // Математический сборник, 103, №2, 1977. 285-292.
3. Хатамов А., О сплайн –аппроксимации функций с выпуклой производной // Матем.заметки, 31, №6, 1982, 877-887.