А.Солеев Б.С.Пулатов (СамГУ)

Применения методов степенной геометрии к решений ОДУ

Абстракт.*Рассматривается одно обыкновенное дифференциальное уравнение общего вида. Предполагается, что его укороченное уравнение, соответствующее вершине илинегоризонтальному ребру многоугольника Ньютона исходного уравнения, имеет решение, содержащее логарифм независимой переменной. Показывается,что при очень слабых ограничениях, эту нестепенную асимптотику решений исходного уравнения можно продолжить в асимптотическое разложение этих решений. Указан алгоритм таких вычислений.*

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\hat{h}_1^{(1)} = -z\ddot{z} + \dot{z}^2 + bz = 0, \qquad (1)$$

где $b \neq 0$оно имеет степенное решение $z = -b\xi^2/2$. Продолжая его расложение по убывающим степеням ξ, получаем решение уравнения

$$h \stackrel{\text{def}}{=} -z\ddot{z} + \dot{z}^2 + bz + d = 0. \qquad (2)$$

с носителем $Q_1(-2,2)$, $Q_2(0,1)$, $Q_3(0,0)$и его многоугольник показаны на рис.1в случае $bd \neq 0$, которое является

$$z = -\frac{b}{2}(\xi + \tilde{c})^2 - \frac{d}{2b}, \qquad (3)$$

где$\tilde{c}$ – произвольная постоянная. По (2) первая вариация

$$\frac{\delta h}{\delta z} = -\ddot{z} - z\frac{d^2}{d\xi^2} + 2\dot{z}\frac{d}{d\xi} + b. \qquad (4)$$

Её носитель содержит три точки $Q_1(-2,1)$, $Q_2(-1,1)$, $Q_3(0,1)$и точку (0,0). Поэтому

$$M\left(\xi, z, \frac{d}{d\xi}\right) = a_1\mu_1\left(\frac{d}{d\xi}\right) + a_2\mu_2\left(\frac{d}{d\xi}\right) + a_3\mu_3 + a_4\mu_4,$$

где

$$a_1 = -z, a_2 = 2\dot{z}, \qquad a_3 = -\ddot{z}, a_4 = b,$$

$\mu_1 = \frac{d^2}{d\xi^2}$, $\mu_2 = \frac{d}{d\xi}$, $\mu_3 = 1$.(5)

Поскольку $\rho = 2$, то ведущим является слагаемое $a_1\mu_1$. Оно даёт характеристический многочлен $\mu_1(s) = s^2$, который не имеет ненулевых корней. Следовательно, критических чисел нет и применима теорема о не явных функциях.После степенного преобразования $y = xz$ и сокращения на x вычислим $\varphi_2(\xi)$. Положим $\xi = \ln x + \tilde{c}$, тогда (3) принимает вид

$$z = -\frac{b}{2}\xi^2 - \frac{d}{2b}. \tag{6}$$

Отсюда решение имеет вид

$$\varphi = \frac{a}{4}\left(\frac{b}{2}\xi^2\right)^2 + O(\xi^3). \tag{7}$$

Если $d = 0$, то уравнение сильно упрощается

$$\frac{1}{2}\xi^2[4\varphi + 4\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}] - 2\xi[2\varphi + \dot{\varphi}] + 2\varphi = a\frac{b^2}{8}\xi^6 \tag{8}$$

и имеет полиномиальное решение

$$\varphi_2 = \varphi = \frac{ab^2}{16}\xi(\xi - 1)(\xi^2 - \xi + 1). \tag{9}$$

Можно показать, что в этом случае все $\varphi_2(\xi)$ в разложении (9) являются полиномами. Однако, если $d \neq 0$, то решение уравнения будет бесконечным рядом

$$\varphi = \sum_{k=4}^{-\infty} c_k \xi^k.$$

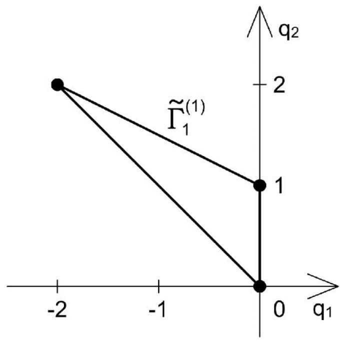

Рис.1

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН, 2004. Т. 59. № 3. С. 31-80.
2. *Брюно А.Д.* Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2006. Т.406. № 6. С. 730-733.
3. *Солеев А.* О вычислении и применения многогранника Ньютона // O'zbekistonmatematikajurnali. №3, 2014, 100-104 betlar.