О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ В ПРОСТРАНСТВЕ R^m

Ислам Тагаев
Специальност: 5А130101-Математика, 1-курс

Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений Ламе в пространственной неограниченной многомерной области. По значениям искомого решения и значениям напряжений на части границы области дается явная формула восстановления решения внутри области, т.е рассматриваются вопросы регуляризации задачи Коши для систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Во многих реальных задачах часть границы недоступна для измерений смещений и напряжений, либо известны лишь интегральные характеристики. При экспериментальном исследовании напряженно-деформированного состояния натурных конструкций измерение можно произвести только на доступных участках, т.е. компоненты смещений и напряжений заданы лишь на части границы. Поэтому возникает необходимость рассмотрения задачи продолжения решения системы уравнений теории упругости в область по значениям смещений и напряжений на части границы.

Как известно, задача Коши для эллиптических уравнений некорректна, решение задачи единственно, но неустойчиво (пример Адамара). Для рассматриваемой задачи построена пример иллюстрирующий неустойчивость задачи Коши. Для того, чтобы постановка задачи была корректной, необходимо сузить класс рассматриваемых решений.

На протяжении последних десятилетий не ослабевал интерес к классической некорректной задаче математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в 50-х годах в работах [1]-[4], и развивалось впоследствии в работах [5]-[10].

Пусть $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $y=(y_1,\ldots,y_m)$ точки Евклидова пространства R^m и D область в R^m с кусочно-гладкой границей ∂D, S-часть ∂D, $\sum = \partial D \setminus S$. Рассмотрим в области D системы уравнений Ламе в векторной форме

$$\mu\Delta U(y) + (\lambda+\mu) grad\ div\ U(y) = 0,$$

здесь $U=(U_1,\ldots,U_m)$-вектор смещения; Δ-оператор Лапласа; λ, μ -постоянные Ламе. Для сокращения изложения удобно пользоваться матричной записью. Введём матричный дифференциальный оператор

$$A(\partial_x) = \left\| A_{ij}(\partial_x) \right\|_{m\times m},$$

где
$$A_{ij}(\partial_x) = \delta_{ij}\mu\Delta + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Тогда рассматриваемая эллиптическая система уравнений запишется в матричной форме

$$A(\partial_x)U(x) = 0 \qquad (1)$$

Постановка задачи. Известны данные Коши решения системы на поверхности S:

$$\left.\begin{aligned} U(y) &= f(y),\ \ y \in S, \\ T(\partial_y, n(y))U(y) &= \psi(y),\ \ y \in S, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где $f = (f_1,\ldots, f_m), \psi = (\psi_1,\ldots, \psi_m)$-заданные непрерывные вектор функции на S, $T(\partial_y, n(y))$ -оператор напряжения, т.е.

$$T(\partial_y, n(y)) = \left\| T_{ij}(\partial_y, n(y)) \right\|_{m\times m} = \left\| \lambda n_i \frac{\partial}{\partial y_j} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial y_i} + \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n} \right\|_{m\times m} \quad (3)$$

δ_{ij}-символ Кронекера, а $n = (n_1,\ldots, n_m)$-единичный вектор нормали к поверхности S.

Требуется определить функцию $U(y)$ в D, исходя из заданных f и ψ, т.е. решить задачу аналитического продолжения решения системы уравнений в пространственной области по её значениям f и значениям её напряжений ψ на гладком куске S границы .

Единственность решения задачи (1), (2) следует из общей теоремы Холмгрена [15]. После установления единственности в теоретических исследованиях некорректных задач возникают важные вопросы получения оценки условной устойчивости и построения регуляризирующих операторов.

Пусть вместо $f(y)$ и $\psi(y)$ заданы их приближения $f_\delta(y)$ и $\psi_\delta(y)$ с точностью $\delta, \delta \in (0,1)$ (в метрике C), которые могут не принадлежать классу существования решений. В работе строится семейство функций $U(x, f_\delta, \psi_\delta) = U^{\sigma\delta}(x)$, зависящее от параметра σ, и доказывается, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma(\delta)$ при $\delta \to 0$ семейство $U^{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению $U(x)$ задачи (1),(2).

Следуя А.Н. Тихонову[16], $U^{\sigma\delta}(x)$ назовём регуляризованным решением задачи. Регуляризованное решение определяет устойчивый метод приближённого решения задачи [16].

Существенно используя результаты работ [1], [4] по задаче Коши для уравнения Лапласа, удалось построить матрицу Карлемана в явном виде и на её основе регуляризованное решение задачи Коши для системы уравнений (1). Поскольку здесь идёт речь о явных формулах, то построение матрицы Карлемана в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес. При m=2,3 рассматриваемая задача совпадает с задачей Коши для системы уравнений теории упругости уравнений статики изотропной упругой среды. В этих случаях задача (1), (2) для специальных классов областей исследована в работах [10-12].

Далее задача Коши для системы уравнений установившихся упругих колебаний, для системы уравнений термоупругости и для системы уравнений моментной теории упругости в пространстве исследована в [6], [8]

Ранее в работах [13], [14] было доказано, что матрица Карлемана существует во всякой задаче Коши для решений эллиптических систем, если только данные Коши задаются на граничном множестве с положительной мерой.

В теории уравнений в частных производных важную роль играют представления решений этих уравнений в виде функции типа потенциала. Приведем здесь из этих представлений формулу Сомилиана [17].

Поскольку матрица Карлемана отличается от матрицы фундаментальных решений на решение транспонированной системы, то формула Сомилиана остаётся справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на матрицу Карлемана. Таким образом имеет место

Теорема 1. Всякое регулярное решение $U(x)$ уравнения (1) в области D определяется формулой

$$U(x)=\int\limits_{\partial D}\Big[\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y,n)U(y)\}-\{T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}'U(y)\Big]ds_y, \quad x\in D,$$

где $\Pi(y,x,\sigma)$- матрица Карлемана.

Используя матрицу Карлемана, легко вывести оценку устойчивости решения задачи Коши (1), (2) (многомерный аналог теоремы о двух константах), а также построен метод эффективного решения этой задачи.

В работе, также обсуждаеся задача Коши для нестационарной системы уравнений Ламе [12].

Литературы

1. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв.АН. СССР Сер. Матем.1956. Т.20.№6. С. 819-842.
2. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. 92 с.
3. Мергелян С.Н. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // УМН. 1956. Т.11.№ 5. С. 3-26.
4. Ярмухамедов Ш.Я. , Ишанкулов Т.И. , Махмудов О.И. О задаче Коши для системы уравнений теории упругости в пространстве // Сиб. матем. журн. 1992. Т.33.№1. С. 186-190.
5. Ярмухамедов Ш.Я. О задаче Коши для уравнения Лапласа //ДАН СССР. 1977. Т.235. № 2.С.281-283.
6. Ишанкулов Т.И., О.И.Махмудов. Задача Коши для системы уравнений термоупругости в пространстве. // Матем. заметки. 1998. Т 64. №2. С. 210- 217.
7. Махмудов О.И. , Ниёзов И.Э. Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений теории упругости в перемещениях // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. № 2. С. 369-376.
8. Махмудов О.И. Задача Коши для системы уравнений пространственной теории упругости в перемещениях // Изв. Вузов. Математика, 1994. № 1 (380). С. 54-61.
9. Махмудов О.И. , Ниёзов И.Э. Об одной задаче Коши для системы уравнений теории упругости. // Дифференц. уравнения .2000. Т.36. №5. С.674-678.
10. Махмудов О.И. , Ниёзов И.Э. Регуляризация решения задачи Коши для системы теории упругости. // Матем. заметки. 2000.Т.68. №4. С. 548-553.
11. Махмудов О.И. , Ниёзов И.Э. Задача Коши для системы теории упругости в бесконечной области. // Узбекский матем. журнал. 1999. №2. С.34-39.
12. Makhmudov K. O, Makhmudov O. I, N. N. Tarkhanov. A Nonstandard Cauchy Problem for the Heat Equation. Preprints des Instituts für Mathematik der Universität Potsdam 4 (2015) 11. Pp.1-18
13. Айзенберг Л.А. , Тарханов Н.Н. Абстрактная формула Карлемана // ДАН СССР. 1988. Т. 298. № 6. С. 1292-1296.
14. Тарханов Н.Н. О матрице Карлемана для эллиптических систем // Докл. АН. СССР. 1985. Т. 284. № 2. С. 294-297.
15. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.:Физматгиз, 1961.
16. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН. СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501-504.

17. Купрадзе В.Д., Бурчуладзе Т.В., Гегелия Т.Г. и др. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Классическая и микрополярная теория. Статика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения. М.: Наука, 1976.

Научная руководитель: к.ф-м.н. доц. О.И.Махмудов