

РЕШЕНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА ФИЛЬТРОВАНИЮ СУСПЕНЗИЙ С ОБРАЗОВАНИЕМ РЕЛАКСИРУЮЩЕГО КЕЙК-СЛОЯ

У.Ж.Сайдуллаев, Н.З.Алавиждинов, Ё.Д.Усанов

Самаркандский государственный университет им. А. Навои, г. Самарканд.

e-mail: saydullayev@samdu.uz

Сначала следуя [1,2], дадим уравнения фильтрования суспензий с образованием релаксирующего кейк-слоя. При этом воспользуемся моделями релаксационной фильтрации, приведенными в [3,4]. Неравновесность может возникать как в скорости фильтрации жидкой и твердой фаз относительно градиента давления, так и наоборот, в градиенте давления относительно скоростей фильтрации. Неравновесность здесь принимается в линейной дифференциальной форме. Кроме того, поскольку скорости фильтрования фаз могут иметь разные масштабы изменения, релаксационные эффекты также могут происходить с разными характерными временами.

Уравнение фильтрования суспензии с образованием кейк-слоя относительно компрессионного давления p_s запишем в виде

$$\frac{\beta}{p_A} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{\beta-1} \frac{\partial p_s}{\partial t} = \frac{k^0}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{\beta-\delta} \left(1 + \lambda_{pl} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{1}{1-\varepsilon_s} \frac{\partial p_s}{\partial x}\right) \right] - \frac{\beta}{p_A} q_{lm} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{\beta-1} \frac{\partial p_s}{\partial x}, \quad (1)$$

где μ – коэффициент вязкости, p_A – характерное давление, k^0 – значение k – проницаемости при $p_s = 0$, β , δ – показатели – постоянные величины, λ_{pl} – время релаксации градиента давления, t – время, x – координата,

$q_{lm} = \frac{k}{\mu} \left(1 + \lambda_{pl} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p_s}{\partial x} \Big|_{x=0}$ – расход фильтрата на выходе из фильтра.

Начальные и граничные условия для решения (1) имеют вид

$$p_s(0, x) = 0, \quad -k \left(1 + \lambda_{pl} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p_s}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{p_0 - p_s}{R_m} \Big|_{x=0}, \quad p_s(t, L(t)) = 0, \quad (2)$$

где p_0 – давление подачи суспензии, R_m – приведенное сопротивление фильтра.

Уравнение роста толщины слоя осадка $L(t)$ принимает вид

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\varepsilon_s^0}{\varepsilon_s^0 - \varepsilon_{s_0}} \left[\frac{k}{\mu} \left(1 + \lambda_{pl} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p_s}{\partial x} \right]_{L^-} + q_{lm}, \quad (3)$$

где ε_s^0 – твердосодержимость при нулевом напряжении, ε_{s_0} – концентрация твердых частиц в суспензии.

Задача (1)-(3) является задачей типа Стефана. Из уравнения (3) определяется подвижный фронт $L(t)$ - граница между суспензией и кейк-слоем. Это уравнение решается совместно с основным уравнением фильтрования (1) при условиях (3) и $L(0) = 0$.

Вводим следующие обозначения

$$a(p) = \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{1-\beta}, \quad b(p) = \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{\beta-\delta}, \quad c(p) = \frac{k^0}{\mu} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{-\delta},$$

$$c^0(p) = \frac{k^0}{\mu} \left(1 + \frac{p_s}{p_A}\right)^{-\delta} \Big|_{x=0}, \quad c_1 = \frac{k^0 p_A}{\beta \mu}, \quad c_2 = \frac{\varepsilon_s^0}{\varepsilon_s^0 - \varepsilon_{s0}}.$$

С учетом этих обозначений уравнение (1) преобразуется к следующему виду

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = c_1 a(p) \frac{\partial}{\partial x} \left[b(p) \left(1 + \lambda_{pl} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial p_s}{\partial x}\right) \right] - q_{lm} \frac{\partial p_s}{\partial x}. \quad (4)$$

Уравнение для подвижной границы (3) приводится к виду

$$\frac{dL}{dt} = -c_2 \left[c(p) \left(1 + \lambda_{pl} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p_s}{\partial x} \right] \Big|_L + q_{lm}, \quad (5)$$

где

$$q_{lm} = c^0(p) \left[\left(1 + \lambda_{pl} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p_s}{\partial x} \right] \Big|_{x=0}.$$

Для решения задачи (4) - (5) используем метод конечных разностей. Введем равномерную сетку по t с шагом τ $\overline{\omega}_\tau = \{t \mid t = t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, N, \tau N = T\}$, а по координате x будем использовать неравномерную сетку [6, 7]

$$\overline{\omega}_h = \{x \mid x = x_i = x_{i-1} + h_i, h_i = 0, i = 1, 2, \dots, N, N+1, N+1, \dots, x_N = L\}$$

с переменным шагом $h_i > 0$. Шаг h_i из промежутка $[x_i, x_{i+1}]$ так, чтобы подвижная граница сдвинулась ровно на один шаг по временной сетке. Этот подход известен как метод ловли фронта в узел сетки. Сеточную функцию, соответствующую p_s обозначим через ϕ_i^{j+1} . Аппроксимируем уравнение (4) неявной разностной схемой, нелинейной относительно функции ϕ_i^{j+1}

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^j}{\tau} = c_1 \frac{2a(\phi_i^j)}{h_i + h_{i+1}} & \left\{ b(\phi_{i+1/2}^{j+1}) \frac{\phi_{i+1}^{j+1} - \phi_{i-1}^{j+1}}{h_i + h_{i+1}} + \frac{\lambda_{pl}}{\tau} b(\phi_{i+1/2}^{j+1}) \cdot \right. \\
& \cdot \left[\frac{\phi_{i+1}^{j+1} - \phi_{i-1}^{j+1}}{h_i + h_{i+1}} - \frac{\phi_{i+1}^j - \phi_{i-1}^j}{h_i + h_{i+1}} \right] - b(\phi_{i-1/2}^{j+1}) \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_{i-1}^{j+1}}{h_i} - \\
& \left. - \frac{\lambda_{pl}}{\tau} b(\phi_{i-1/2}^{j+1}) \left[\frac{\phi_i^{j+1} - \phi_{i-1}^{j+1}}{h_i} - \frac{\phi_i^j - \phi_{i-1}^j}{h_i} \right] \right\} - (q_{\ell m})_0^{j+1} \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_{i-1}^{j+1}}{h_i}, \\
& i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,
\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
a(\phi_i^j) &= \left(1 + \frac{\phi_i^j}{p_A} \right)^{1-\beta}, \quad b(\phi_{i+1/2}^{j+1}) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\phi_{i+1}^{j+1}}{p_A} \right)^{\beta-\delta} + \left(1 + \frac{\phi_i^{j+1}}{p_A} \right)^{\beta-\delta} \right], \\
(q_{\ell m})_0^{j+1} &= c^0(\phi_0^{j+1}) \left(\frac{\phi_1^{j+1} - \phi_0^{j+1}}{h_0} + \frac{\lambda_{pl}}{\tau} \left(\frac{\phi_1^{j+1} - \phi_0^{j+1}}{h_0} - \frac{\phi_1^j - \phi_0^j}{h_0} \right) \right), \\
c^0(\phi_0^{j+1}) &= \frac{k^0}{\mu} \left(1 + \frac{\phi_0^{j+1}}{p_A} \right)^{-\delta}.
\end{aligned}$$

Уравнение (5) с учетом $\frac{dL}{dt} \approx \frac{h_{i+1}}{\tau}$ после аппроксимация приводится к виду

$$\frac{h_{i+1}}{\tau} = -c_2 \left[c(\phi_{i-1/2}^j) \left(\frac{\phi_i^{j+1} - \phi_{i-1}^{j+1}}{h_{i+1}} + \frac{\lambda_{pl}}{\tau} \left(\frac{\phi_i^{j+1} - \phi_{i-1}^{j+1}}{h_{i+1}} - \frac{\phi_i^j - \phi_{i-1}^j}{h_{i+1}} \right) \right) \right] + (q_{\ell m})_0^{j+1}, \tag{7}$$

где

$$c(\phi_{i-1/2}^j) = \frac{k^0}{2\mu} \left[\left(1 + \frac{\phi_i^j}{p_A} \right)^{-\delta} + \left(1 + \frac{\phi_{i-1}^j}{p_A} \right)^{-\delta} \right].$$

Аппроксимация начального и граничных условий (2) дает

$$\begin{aligned}
\phi_i^j &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, \\
-\mu c^0(\phi_0^j) & \left(\frac{\phi_1^{j+1} - \phi_0^{j+1}}{h_1} + \frac{1}{\tau} \left(\frac{\phi_1^{j+1} - \phi_0^{j+1}}{h_1} - \frac{\phi_1^j - \phi_0^j}{h_1} \right) \right) = \frac{p_0 - \phi_0^{j+1}}{R_m}, \quad j = \overline{0, N}, \\
\phi_i^{j+1} &= 0, \quad i = N+1, N+2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots.
\end{aligned} \tag{8}$$

Полученная система уравнений (6) - (8) является нелинейной, поэтому для ее решения используем метод конечных разностей [6,7]. Полученную нелинейную систему разностных уравнений решаем методом простой итерации. Численные результаты решения задачи (6) - (8) получены при следующих значениях параметров:

$p_A = 10^4$ Па, $p_0 = 10^5$ Па, $R_m = 10^{12}$ 1/м², $\mu = 10^{-3}$ Па·с, $k^0 = 10^{-13}$ м², $\varepsilon_s^0 = 0,2$, $\varepsilon_{s_0} = 0,0076$, $\beta = 0,13$, $\delta = 0,57$.

На рис. 1 приведены графики роста толщины слоя осадка при различных значениях времени релаксации λ_{lm} . Как видно из графиков, увеличение времени релаксации при прочих равных условиях приводит к ускоренному росту толщины осадка. Другими словами, релаксационные эффекты в зависимости фильтрационного потока от градиента давления приводят к интенсификации осаждения частиц суспензии на поверхности фильтра в виде осадка. Это, в свою очередь, изменяет все другие фильтрационные характеристики процесса, такие как распределение давления жидкости, компрессионное давление, пористость осадка, консолидация кейк-слоя, расход фильтрата через фильтр, эффективное гидравлическое сопротивление осадка и др.

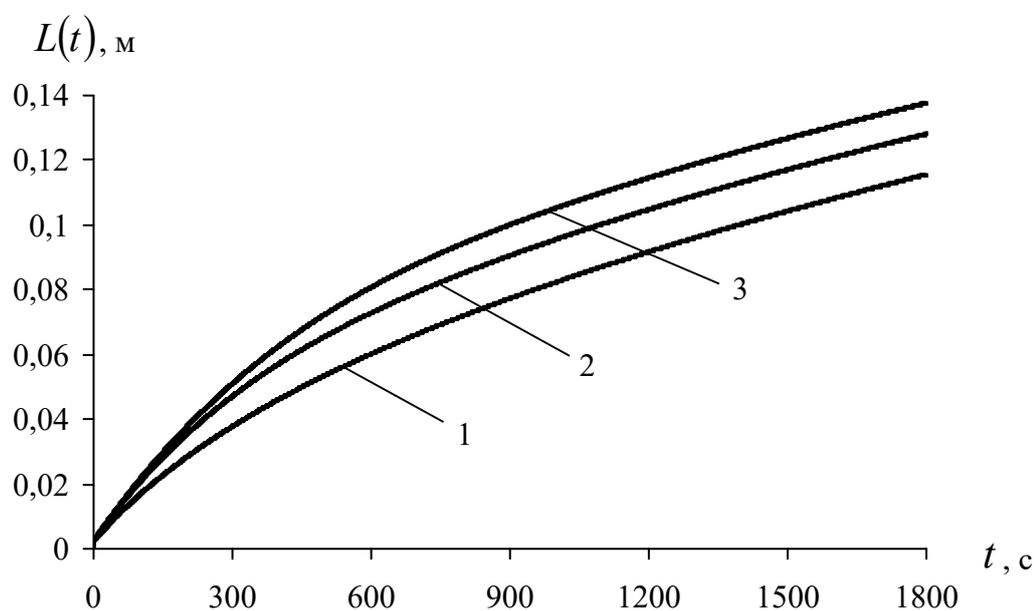


Рис. 1. Динамика толщины слоя осадка на поверхности фильтра при $\lambda_{lm} = 0$ (1); 150 (2); 350 (3) с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tien C. Principles of filtration. Elsevier, The Netherlands. 2012.
2. Федоткин И.М. Математическое моделирование технологических процессов. Киев: Вища шк., Головные изд-во. 1988.-415с.
3. Молокович Ю.М., Непримеров Н.Н., Пикуза В.И., Штанин А.В. Релаксационная фильтрация. Казань: КГУ. 1980. – 136 с.
4. Хужаёров Б.Х. Фильтрация неоднородных жидкостей в пористых средах. Ташкент. Издательство «ФАН». 2012. - 280 с.
5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
6. Caldwell J., Kwan Y.Y. Numerical methods for one-dimensional Stefan problems. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2004; 20: 535–545.