O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
V.I.ROMANOVKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi"deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

4. 2017

УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ - 2017

Uzbek Mathematical
Journal, 2017, №4, pp. 168-177

UDC 517.96

Энергетические оценки для решений краевых задач уравнения третьего порядка с кратными характеристиками

Хашимов А.Р.

Mazkur maqolada xarakteristikasi karrali birinchi chegaraviy masala qaralgan bo‘lib, masalaning umumlashgan yechimi uchun Sen-Venan tipidagi energetik baholar o‘rnatilgan. Bu baholar yordamida masalaning yechimi uchun yagonalik sinflari aniqlangan.

In the paper first boundary value problems for equation of the third order with multiple characteristics are considered. Energy estimations of the type of the analogue of the principle Saint-Venant's is installed for generalized solutions of the equation. Most class uniqueness solutions of the problems are revealed by means of this estimations depending on geometric characteristics of the domain.

I. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что уравнения третьего порядка возникают в модели Фойхта нелинейно-вязкоупругих сред и моделировании процессов влагопереноса (так называемые уравнения Аллера). Эти уравнение изучались еще в 20-х годах XX века французским математиком Ж.Адамаром. В дальнейшем уравнения третьего и более высокого нечетного порядка были исследована многими исследователям. Обзор этих работ можно найти в работах [1,2,3].

В работах [1,2] предложена различные методы для построения регулярных решений уравнений третьего порядка. Например, для построения регулярных решений краевых задач уравнения третьего порядка типа

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta u(x,y)=0, \tag{1}$$

предложен метод обратных задач. Здесь сначала методом интегрирование уравнения (1) сводится к уравнению второго порядка эллиптического типа с неизвестной правой частью $\Delta u = \omega(x, y)$, где $\omega(x, y)-$неизвестная функция и будет получена краевая задача для уравнения эллиптического типа второго порядка с неизвестной правой частью. Далее с помощью известных методов (методом потенциалов и функции Грина) будет построено решения краевых задач. В работе [3] предложено методы построение обобщенных решений краевых задач для уравнений третьего порядка в многомерных ограниченных областях с гладкими и кусочно-гладкими границами. Это работа позволяет нам установит различные энергетические оценки для решений краевых задач уравнения третьего порядка, с помощью которых можно будет исследовать асимптотических свойств решений.

В данной работе разработан метод установление один из таких энергетических оценок для обобщенного решение уравнения

$$Lu \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_2(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + a_0(x, y)u = f. \quad (2)$$

II. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Установим аналог принципа Сен-Венана для обобщенного решения уравнения (2). Такие оценки дает возможность определить класс единственности решений краевых задач, а также позволяют построить обобщенных решений в классах функций растущих на бесконечности в зависимости от геометрических характеристик области [4,5]. Аналогичные оценки для обобщенных решений уравнения эллиптического и параболического типа четного порядка установлена в работах [6,7,8,9], а для уравнений третьего порядка составного типа в работе [10]. Кроме того, отметим работы [11,12] посвященный исследованием свойства решений уравнений с помощью принципа Сен-Венана.

С этой целью в области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, \ y > 0\}$ рассмотрим уравнения (2) с условиям

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_x|_{x=0} = 0. \quad (3)$$

Будем разбивать границы области Ω следующем образом

$$\sigma_1 = \{(x, y) : x = 0, \ y \geq 0\},$$

$$\sigma_3 = \{(x, y) : x = l, \ y \geq 0\},$$

$$\sigma_0 = \{(x,y) : y = 0,\ 0 \le x \le l\}.$$

Положим $\Gamma = \partial\Omega$, $\Omega(\tau) = \{(x,y) \in \Omega :\ y < \tau\}$, $\Gamma_\tau = \Gamma \cap \{(x,y) \in \Gamma :\ y < \tau\}$, $\sigma_{1,\tau} = \{(x,y) \in \Gamma_\tau : x = 0\}$, $\sigma_{3,\tau} = \{(x,y) \in \Gamma_\tau : x = l\}$, $\sigma_{0,\tau} = \{(x,y) \in \Gamma_\tau : y = 0\}$, $\sigma_{1,\tau,h} = (x,y) \in \sigma_{1,\tau} :\ h \le y \le \tau - h\}$, $h > 0$, $\sigma^h_{1,\tau} = \sigma_1 \backslash \sigma_{1,\tau,h}$.

Пусть $E(\Omega(\tau))$ есть множество функций $\upsilon \in C^2(\bar{\Omega}(\tau))$ таких, что $\upsilon = 0$ на Γ_τ и для некоторого $h > 0$ $\upsilon_x = 0$ на $\sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{3,\tau} \cup \sigma^h_{1,\tau}$.

Пусть $H(\Omega(\tau))$ есть пополнение $E(\Omega(\tau))$ по норме

$$\|u\|_{H(\Omega(\tau))} = \left\{ \int\limits_{\Omega(\tau)} (u_x^2 + u_y^2 + u^2) dxdy + \int\limits_{\sigma_{1,\tau}} u_x^2(0,y) dy \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Определим билинейную форму

$$a(u,\upsilon) = \int\limits_{\Omega(\tau)} [-u_x \upsilon_{xx} + u_y \upsilon_y + a_2 u_x \upsilon_x +$$

$$+ cu\upsilon_x + bu\upsilon_y + (c_x + b_y - a_0) u\upsilon]\, dxdy.$$

Здесь $c(x,y) \equiv -a_{2x} + a_1$.

Определение 1. Функции $u(x,y)$ будем называть обобщенным решением уравнения (2) в ограниченной области $\Omega(\tau)$, с граничными условиями $u|_{\partial\Omega} = 0$, $u_x|_{x=0} = 0$, если $u \in H(\Omega(\tau))$ и удовлетворяют тождеству

$$a(u,\upsilon) = -\int\limits_{\Omega} f\, \upsilon\, dxdy \tag{4}$$

для произвольной функции $\upsilon \in E(\Omega(\tau))$ такое, что $\upsilon = 0$ на множество $S_\tau = \Omega \cap \{(x,y) : y = \tau\}$.

Теорема 1. (Аналог принципа Сен-Венана) Пусть $a_2 \ge 0$, $a_{2xx} - c \ge 0$, $(c_x - b_y + 2a_0) > 0$ при $\forall (x,y) \in \Omega(\tau)$. Пусть $u\,(x,y)$ является обобщенным решением уравнения (2) в Ω_τ, с граничными условиями (3) и $f\,(x,y) = 0$ в $\Omega(\tau)$. Тогда для любого τ_1, такого, что $0 \le \tau_1 \le \tau_2$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\Omega(\tau_1)} E\,(u)\, dxdy \le \Phi^{-1}\,(\tau_1, \tau_2) \int\limits_{\Omega(\tau_2)} E\,(u)\, dxdy, \tag{5}$$

где

$$E\left(u\right)=\left[\frac{3}{2}e^{l-x}+\left(e^{l-x}-1\right)a_2\right]u_x^2+\left(e^{l-x}-1\right)u_y^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left[(a_{2xx}-c)e^{l-x}+\left(c_x+b_y-2a_0\right)\left(e^{l-x}-1\right)\right]u^2$$

Здесь $\Phi\left(x_1,\tau_2\right)$ является решением следующей задачи:

$$\Phi'(x,\tau_2)=-\mu\left(x\right)\Phi(x,\tau_2),\;\;\tau_1\leq x\leq\tau_2,$$

$$\Phi\left(\tau_2,\tau_2\right)=1,$$

$\mu\left(\tau\right)-$ любая непрерывная функция такая, что

$$0<\mu\left(\tau\right)\leq\lambda\left(\tau\right)\equiv\inf_{\upsilon\in N}\left\{\int\limits_{S_\tau}E\left(\upsilon\right)d(S_\tau)\left|\int\limits_{S_\tau}P\left(\upsilon\right)d(S_\tau)\right|^{-1}\right\},$$

$$P\left(\upsilon\right)=(e^{l-x}-1)\upsilon\upsilon_y+\frac{1}{2}(e^{l-x}-1)b\,\upsilon^2,$$

$N-$ множество непрерывно дифференцируемых функций в окрестности $\bar{S}_\tau$, которые равны нулю на множестве $\bar{S}_\tau\cap\Gamma$. Отметим, что аналогичные теоремы можно доказать для областей $\Omega=\{(x,y):x>0,\;\;y>0\},\Omega=\{(x,y):x>0,\;\;0<y<1\}$.

Прежде чем доказать теоремы 1 нам необходимо построить обобщенное решение уравнения (2) в ограниченной области.

С этой целью мы в области $\Omega(1)=\{(x,y):\,0<x<1,\;\;0<y<1\}$ рассмотрим уравнения (2) с граничными условиями

$$u|_{\partial\Omega(1)}=0,\quad u_x|_{x=0}=0. \tag{6}$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (2) являются бесконечно-дифференцируемы при $x\in\overline{\Omega(1)}$.

Отметим, что в работах [13,14,15] регулярное решение уравнения (2) с различными граничными условиями построено методом потенциалов и функции Грина.

Теорема 2. Пусть $a_2\geq 0,\;\;c_x-a_0+b_y>k_0>0,\;\;x\in\overline{\Omega(1)}$. Тогда задача (2), (6) не имеет более одного решение.

Доказательство. Предположим, что задача (2), (6) имеет два решение $u_1(x,y),\;\;u_2(x,y)$. Обозначим $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$. Рассмотрим тождество

$$-\int\limits_{\Omega(1)} Lu\,u\,dxdy = 0. \tag{7}$$

Интегрируя тождество (7) по частям, получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_x^2(1,y)dy + \int\limits_{\Omega(1)} \left[a_2 u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y) + (c_x + b_y - a_0)\,u^2\right] dxdy = 0. \tag{8}$$

Отсюда $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega(1)}$.

Вводим обозначение:

$$\sigma_1 = \{(x,y) : x = 0,\ 0 \le y \le 1\},\quad \sigma_3 = \{(x,y) : x = 1,\ 0 \le y \le 1\},$$

$$\sigma_0 = \{(x,y) : y = 0,\ 0 \le x \le 1\},\quad \sigma_2 = \{(x,y) : y = 1,\ 0 \le x \le 1\}$$

$$\sigma_{1,h} = \{(x,y) \in \sigma_1 :\ h \le y \le 1 - h\},\quad h > 0,\quad \sigma_1^h = \sigma_1 \backslash \sigma_{1,h}.$$

Пусть $E(\Omega(1))$ есть множество функций $\upsilon \in C^2(\overline{\Omega(1)})$ таких, что $\upsilon = 0$ на $\partial\Omega(1)$ и для некоторого $h > 0$ $\upsilon_x = 0$ на $\sigma_0 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_1^h$.

Пусть $H(\Omega(1))$ пополнение $E(\Omega(1))$ по норме

$$\|u\|_{H(\Omega(1))} = \left\{ \int\limits_{\Omega(1)} (u_x^2 + u_y^2 + u^2)dxdy + \int\limits_0^1 u_x^2(0,y)dy \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Определим билинейную форму

$$a(u,\upsilon) = \int\limits_{\Omega(1)} [-u_x\upsilon_{xx} + a_2 u_x \upsilon_x + u_y \upsilon_y + cu\upsilon_x + bu\upsilon_y +$$

$$+(c_x + b_y - a_0)u\upsilon]\,dxdy.$$

Определение 2. Функции $u \in H(\Omega(1))$ будем называть обобщенным решением задачи (2), (6), если для любой функции $\upsilon \in E(\Omega(1))$

выполняется соотношение

$$a(u, v) = -\int\limits_{\Omega(1)} f\, v\, dxdy. \qquad (9)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любой функции

$$f(x, y) \in L_2(\Omega(1))$$

существует обобщенное решения задачи (2), (6) в смысле определение 2 и для этого решения будут выполняться включения $\sqrt{\varphi}\, u_{xx} \in L_2(\Omega(1))$, где $\varphi(x) = \exp(1 - x) - 1$.

В доказательстве теоремы используем те методы, которое разработано в работе [3].

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим задачу

$$L_\varepsilon u^\varepsilon \equiv -\varepsilon u^\varepsilon_{xxxx} + Lu^\varepsilon = f,\ u^\varepsilon|_{\partial\Omega(1)} = 0, \quad \left.\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right|_{\sigma_1\cup\sigma_3} = 0. \qquad (10)$$

Рассмотрим тождество

$$\int\limits_{\Omega(1)} L_\varepsilon u^\varepsilon\, u^\varepsilon dxdy = \int\limits_{\Omega(1)} f\, u^\varepsilon dxdy.$$

Интегрируя ее по частям получаем следующее неравенство

$$\varepsilon \iint\limits_{\Omega(1)} \left(u^{\varepsilon}_{xx}\right)^2 dxdy + \|u^\varepsilon\|^2_{W^1_2(\Omega(1))} \le K_1. \qquad (11)$$

Здесь и далее все постоянные K_i, $i = 1, 2, 3, ...$ не зависят от ε.

Теперь рассмотрим тождество

$$\int\limits_{\Omega(1)} L_\varepsilon u^\varepsilon\, \varphi u^\varepsilon_x dxdy = \int\limits_{\Omega(1)} f\, \varphi u^\varepsilon_x dxdy.$$

Отсюда интегрируя по частям, получаем

$$\varepsilon \int\limits_0^1 \varphi\ (0)\,(u^{\varepsilon}_{xx}(0,y))^2 dy + \int\limits_{\Omega(1)} \varphi(x)\ \ (u^{\varepsilon}_{xx})^2 dxdy \le K_2. \qquad (12)$$

Неравенство (12) позволяет доказать существование обобщенного решения задачи (2), (6). Действительно, в силу оценки (11) из семейства $\{u^{\varepsilon}\}$ можно выбрать подпоследовательности $\{u^{\varepsilon_m}\}$, слабо сходящуюся при $m \to \infty$ в $H(\Omega(1))$. Пусть $\upsilon \in C^2(\overline{\Omega(1)})$, $\upsilon = 0$ на $\partial\Omega(1)$ и для некоторого $h > 0$ $\upsilon_x = 0$ на $\sigma_0 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_1^h$. Умножая уравнение $-\varepsilon u^{\varepsilon_m}_{xxxx} + Lu^{\varepsilon_m} = f$ на υ и интегрируя по частям, получаем

$$\varepsilon_m \int\limits_{\sigma_{1,h}} u^{\varepsilon_m}_{xx}(0,y)\,\upsilon_x dy + \varepsilon_m \int\limits_{\Omega(1)} u^{\varepsilon_m}_{xx}\,\upsilon_{xx} dxdy + a(u^{\varepsilon_m},\upsilon) = -\int\limits_{\Omega(1)} f\,\upsilon dxdy. \qquad (13)$$

Оценка (12) дает сходимость первого слагаемого левой части (13) к нулю при $m \to \infty$. Сходимость к нулю второго слагаемого вытекает из оценки (11). Слабая сходимость последовательности $\{u^{\varepsilon_m}\}$ дает сходимость в третьем слагаемом и выполнение предельной функцией равенства $a(u,\upsilon) = -\iint\limits_{\Omega(1)} f\,\upsilon\,dxdy$.

Для обобщенного решения будет справедлива оценка

$$\int\limits_{\Omega(1)} \varphi(x)\ \ (u^{\varepsilon}_{xx})^2 dxdy \le K_2. \qquad (14)$$

Оценка (14) позволяет утверждать, что обобщенное решение будет принимать второе краевое условие задачи (2), (6).

Теперь переходим доказательство теоремы 1.

Доказательство. Положим в (4) $\upsilon(x,y) = u_m(x,y)(\varphi(x,l) - 1))(\psi(y,\tau_2) - 1)$. Здесь $\varphi(x,l)$ определяется как в теореме 2:

$$\varphi(x,l) = \exp(l - x)$$

$$\psi(y,\tau_2) = \Phi(\tau_1,\tau_2) = \exp(\tau_2 - \tau_1),\ 0 \le y \le \tau_1,$$
$$\psi(y,\tau_2) = \Phi(y,\tau_2) = \exp(\tau_2 - y), \qquad \tau_1 \le y \le \tau_2,$$
$$\psi(y,\tau_2) = \Phi(\tau_2,\tau_2) = 1, \quad y \ge \tau_2,$$

$u_m(\varphi(x,l)-1) \in E(\Omega(\tau)),\ \|u_m(\varphi(x,l)-1)-u\|_{H(\Omega(\tau))} \to 0.$

Тогда

$$a(u_m(\varphi(x,l)-1)(\psi(y,\tau_2)-1), u_m(\varphi(x,l)-1)(\psi(y,\tau_2)-1)) = \delta_m, \quad (15)$$

где

$$\delta_m = -a(u-u_m(\varphi(x,l)-1)(\psi(y,\tau_2)-1), u_m(\varphi(x,l)-1)(\psi(y,\tau_2)-1)) \to 0$$

при $m \to \infty$.

Интегрируя по частям из (15) имеем

$$\int\limits_{\Omega(\tau_2)} E(u_m)(\psi-1)\,dxdy = -\int\limits_{\Omega(\tau_2)\setminus\Omega(\tau_1)} P(u_m)\,\psi' dxdy + \delta_m.$$

Отсюда учитывая условия теоремы, получаем

$$\int\limits_{\Omega(\tau_2)} E(u_m)(\psi-1)\,dxdy = \int\limits_{\Omega(\tau_2)\setminus\Omega(\tau_1)} P(u_m)\,\mu\psi dxdy + \delta_m,$$

$$\int\limits_{\Omega(\tau_2)} E(u_m)\psi\,dxdy - \int\limits_{\Omega(\tau_2)} E(u_m)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{\Omega(\tau_2)} E(u_m)\psi\,dxdy - \int\limits_{\Omega(\tau_1)} E(u_m)\psi\,dxdy + \delta_m.$$

Оценка (5) вытекает с последующем переходом к пределу при $m \to \infty$.

Теорема 4. Пусть выполняется условия теоремы 1, множество $S_\tau = \Omega \cap \{(x,y) : y = \tau\}$ при любом $\tau > 0$ не пусто, и $f(x,y) = 0$ в Ω. Пусть $u(x,y)$ является обобщенным решением уравнения (2) в $\Omega(\tau)$ с граничными условиями (3) при любом $\tau > 0$. Если некоторой последовательности $\tau_m \to \infty$ и некоторого $d_* = const > 0$ имеет место следующая оценка

$$\int\limits_{\Omega(\tau_m)} E(u)dxdy \le \varepsilon(\tau_m)\Phi(d_*, \tau_m), \quad (16)$$

где $\varepsilon(\tau_m) \to 0$ при $\tau_m \to \infty$, то $u(x,y) = 0$ в Ω.

Доказательство. Из (5) учитывая (16), получаем

$$\int\limits_{\Omega(d_*)} E(u)dxdy \leq \Phi^{-1}(d_*, \tau_m) \int\limits_{\Omega(\tau_m)} E(u)dxdy \leq \varepsilon(\tau_m) \to 0 \qquad (17)$$

при $\tau_m \to \infty$. Следовательно, $u(x, y) = 0$ в $\Omega(d_*)$. Далее, для любого фиксированного $d_1 > d_*$, имеем

$$\Phi^{-1}(d_*, \tau_m) = \exp\left(l^{\frac{1}{2}}(d_1 - \tau_m)\right) \exp\left(l^{\frac{1}{2}}(d_* - d_1)\right) = c\Phi^{-1}(d_1, \tau_m).$$

Поэтому

$$\int\limits_{\Omega(d_1)} E(u)dxdy \leq \Phi^{-1}(d_1, \tau_m) \int\limits_{\Omega(\tau_m)} E(u)dxdy \leq c^{-1}\varepsilon(\tau_m) \to 0,$$

при $\tau_m \to \infty$. Следовательно, $u(x, y) = 0$ в $\Omega(d_1)$. Так как d_1 выбрано произвольно, то $u(x, y) = 0$ в Ω. .

Литература

1. М.С.Салахитдинов. Уравнения смешанно - составного типа. Ташкент. Фан. 1974. 156 с.

2. Т.Д.Джураев. Краевые задачи для уравнений третьего порядка смешанного и смешанно- составного типов. Ташкент. Фан. 1979. 240с.

3. А.И.Кожанов. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск, 1990, 130 с.

4. A.R.Khashimov. An analogue of Saint Venant's principle and uniqueness of the first boundary-value problems in unbounded regions for a third order equation of combined type. Nonlinear Oscillations, vol. 9 (2006), No. 1, pp. 117-126.

5. Т.Д.Джураев, А.Р.Хашимов. О существовании решений первой краевой задачи для уравнений третьего порядка составного типа в неограниченных областях. Вест. Сам. Техн. Ун-та, Сер. Физ.-мат. наук. №9, 2003, стр.5-7.

6. О.А.Олейник, Г.А.Иосифьян. Оценки решений бигармонического уравнения в окрестности нерегулярных точек границы и на бесконечности, УМН., т-33, т. 3, 1978, 181.

7. О.А.Олейник, Г.А.Иосифьян. Априорные оценки решений первой краевой задачи для системы уравнений теории упругости и их приложения, УМН., т-32, №5, 1979, 193.

8. О.А.Олейник, Г.А.Иосифьян. О принципе Сен-Венана в плоской теории упругости. ДАН СССР, т. 239, №3, 1978, стр. 530.

9. О.А.Олейник, Г.А.Иосифьян. Принцип Сен-Венана в плоской теории упругости и краевые задачи для бигармонического уравнения в неограниченных областях. Сиб. Мат. журнал, т. 19, №5, 1978, стр. 1154.

10. A.R.Khashimov. An analogue of Saint Venant's principle and uniqueness of the first boundary-value problems in unbounded regions for a third order equation of combined type. Nonlinear Oscillations, vol. 9 (2006), No. 1, pp. 117-126.

11. Andrey Shishkov, Laurent Veron. Diffusion versus absorption in semilinear elliptic equations. J. Math. Anal. Appl. 352 (2009) 206-217.

12. V.Berdichevsky, D.J.Foster. On Saint-Venant's principle in the dynamics of elastic beams. Volume 40, Issues 13-14, 2003, P. 3293-3310.

13. Т.Д.Джураев, С.Абдиназаров. К теории уравнений нечетного порядка с кратными характеристиками. ДАН СССР, 1991, т.320, №6, с 1305- 1309.

14. Т.Д.Джураев, С.Абдиназаров. К теории уравнений нечетного порядка с кратными характеристиками. Узбекский математический журнал. 1991. №1 с. 21-31.

15. А.Р.Хашимов. Об одной задаче для уравнения смешанного типа с кратными характеристиками. Узбекский математический журнал. 1995, №2, стр. 93-97.

Tashkent Financial Institute. Tashkent. Uzbekistan

Содержание

Mundarija

Компьютерная верстка: к.ф.-м.н. *Ф.А.Нуралиев*

Журнал зарегистрирован Агентством по печати и информации
Республики Узбекистан 22 декабря 2006 г. Регистр. №0044.

Сдано в набор 01.11.2017 г. Подписано к печати 04.12.2017 г.
Формат 60×84 1/16. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл.-печ.л. 11,0. Тираж 120 Заказ №

Институт математики имени В.И.Романовского АНРУз
Узбекистана им. М.Улугбека: 100125,
Ташкент, Академгородок, ул. Дурмон йули, 29.

Отпечатано в ООО "NISO POLIGRAF".
Ташкентский вилоят, Урта Чирчикский туман,
ССГ "Ок-Ота" улица Марказ-1