

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМий ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc27.06.2017/ҒМ 01.02 РАҚАМЛИ ИЛМий КЕНГАШ**

**МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ВА ТОШКЕНТ ТЕМИР ЙЎЛ
МУҲАНДИСЛАРИ ИНСТИТУТИ**

АЗАМОВ СИРОЖ СОБИРОВИЧ

**$K_2^{\overline{m,m-2}}$ ФАЗОДА ТАҚРИБИЙ ИНТЕГРАЛЛАШ ФОРМУЛАСИНИНГ
ХАТОЛИК ФУНКЦИОНАЛИ НОРМАСИНИ МИНИМИЗАЦИЯЛАШ**

**01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

ТОШКЕНТ – 2018

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)
диссертацияси автореферати мундарижаси**

**Оглавление автореферата диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-
mathematical sciences**

Азамов Сирож Собирович

$K_2^{m,m-2}$ фазода тақрибий интеграллаш формуласининг хатолик
функционали нормасини минимизациялаш. 3

Азамов Сирож Собирович

Минимизация нормы функционала погрешности формулы
приближённого интегрирования в пространстве $K_2^{m,m-2}$ 19

Azamov Siroj Sobirovich

Minimization of the norm of the error functional for formulas of numerical
integration in the space $K_2^{m,m-2}$ 35

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ
List of published works 38

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМий ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc27.06.2017/ҒМ 01.02 РАҚАМЛИ ИЛМий КЕНГАШ**

**МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ВА ТОШКЕНТ ТЕМИР ЙЎЛ
МУҲАНДИСЛАРИ ИНСТИТУТИ**

АЗАМОВ СИРОЖ СОБИРОВИЧ

**$K_2^{\overline{m,m-2}}$ ФАЗОДА ТАҚРИБИЙ ИНТЕГРАЛЛАШ ФОРМУЛАСИНИНГ
ХАТОЛИК ФУНКЦИОНАЛИ НОРМАСИНИ МИНИМИЗАЦИЯЛАШ**

**01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент – 2018

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.1.PhD/FM162 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Республикаси фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти ва Тошкент темир йўл муҳандислари институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) ва «Ziynet» таълим ахборот тармоғида (www.ziynet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:

Шадиметов Холматвай Маҳкамбаевич
физика-математика фанлари доктори, профессор

Расмий оппонентлар:

Алоев Раҳматилло Джураевич
физика-математика фанлари доктори, профессор

Раимова Гулнора Мирвалиевна
физика-математика фанлари доктори

Етакчи ташкилот:

Самарқанд давлат университети

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc27.06.2017/FM 01.02 рақамли Илмий кенгашнинг «___»_____ 2018 йил соат___ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2018 йил «___» _____ куни тарқатилди.
(2018 йил «___» _____ даги _____ рақамли реестр баённомаси).

А.Р. Марахимов

Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

З.Р. Раҳмонов

Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

З.Х. Юлдашев

Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар натижасида вужудга келадиган математик физиканинг муаммолари аксарият ҳолларда интеграл ва дифференциал тенгламалар назарияси масалаларига келтирилади. Бу масалаларни тақрибий ечиш учун қўлланиладиган методлар ҳисоблаш математикаси соҳаси тадқиқотларининг объектидир. Бундай методларни яратишда квадратур ва кубатур формулалар назарияси асос сифатида хизмат қилади. Катта ҳажмдаги ҳисоблашларда интегралларни тақрибий ҳисоблаш жараёнини оптималлаштириш, агар ҳисоблашлар квадратур ва кубатур формулалар ёрдамида амалга оширилса, формулаларнинг ўзини оптималлаштириш зарур бўлади. Шунинг учун квадратур ва кубатур формулаларни оптималлаштириш ҳамда уларнинг хатолик функционали нормасининг минимумини топиш масаласи муҳим вазифалардан бири бўлиб келмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун дифференциалланувчи функцияларнинг турли фазоларида оптимал квадратур формулалар куриш ҳисоблаш математикасининг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Бу масала дифференциал ва интеграл тенгламаларни тақрибий-аналитик ечимлари билан узвий боғлиқ бўлиб, тақрибий интеграллаш назариясида муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун асимптотик оптимал, тартиб бўйича оптимал ва оптимал квадратур формулалар куриш ҳамда турли гильберт ва банах фазоларида уларнинг хатоликларини баҳолаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган математик физика, дискрет ва ҳисоблаш математикасининг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Шу жумладан, турли фазоларда оптимал квадратур ва кубатур формулалар куриш ва уларнинг хатоликларини баҳолаш, бир ва кўп ўзгарувчили, даврий ва даврий бўлмаган функцияларнинг Соболев фазоларида регуляр ва сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун инвариант, панжарали оптимал кубатур формулаларни куришда муҳим натижаларга эришилди. «Функционал анализ, математик физика, динамик системалар назарияси, амалий ва ҳисоблаш математика» каби фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланади¹. Қарорни ижросини таъминлашда интегралларни тақрибий ҳисоблаш ва дифференциалланувчи функцияларнинг турли фазоларида уларнинг хатоликларини баҳолаш учун оптимал квадратур формулалар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

¹ Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Сонли интеграллаш усуллари аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблашнинг умумийроқ усуллариандир. Сонли интеграллаш назариясида классик, эҳтимолли ва функционал ёндашишлар мавжуд. Сонли интеграллаш формулаларини куришнинг классик ва эҳтимолли ёндашишлар бўйича С.Л.Соболев, Н.С.Бахвалов, С.М.Ермаков, В.И.Крылов, И.П.Мысовских, В.И.Лебедев, В.И.Половинкин, М.Д.Рамазанов, R.Cools, E.Novak, H.Wozniakowski, A.H.Stroud, Г.Н.Салихов, G.V.Milovanovic, И.М.Соболь, Н.Н.Ченцов, Г.А.Михайлов, М.В.Носков, В.Л.Васкевич, М.И.Исраилов, Т.Х.Шарипов, А.С.Расулов, С.Ш.Шушбаев, Г.П.Исматуллаев, Э.А.Шамсиев, З.К.Эшқуватов каби олимлар илмий изланишлар олиб боришган.

Сонли интеграллаш формулаларини куришнинг функционал ёндашишида оптимал квадратур ва кубатур формулалар куришнинг Соболев усули чизиқли дифференциал операторларнинг дискрет аналогларига асосланади. Дастлаб бу метод $L_2^{(m)}$ фазосида оптимал кубатур формулалар куриш учун С.Л.Соболев томонидан таклиф қилинган. $L_2^{(m)}$ фазосида панжарали оптимал формулаларни куриш муаммосини С.Л.Соболев Винер-Хопф типигаги дискрет системани ечишга келтирган ва бу система ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаган, шу билан бирга кубатур формулаларнинг оптимал коэффициентларини топиш учун алгоритм таклиф қилган.

$L_2^{(m)}$ фазосида С.Л.Соболев томонидан таклиф қилинган алгоритмни амалга ошириш билан З.Ж.Жамалов, Ф.Я.Загирова ва Х.М.Шадиметовлар шуғулланишган. Полигармоник операторнинг дискрет аналогини куриш ва унинг хоссаларини ўрганиш билан дастлаб С.Л.Соболев шуғулланган. Бир ўлчовли ҳолда бу дискрет операторнинг кўриниши $m-1$ та номаълум коэффициентлар аниқлигида З.Ж.Жамалов томонидан қурилган. Х.М.Шадиметов томонидан эса d^{2m}/dx^{2m} дифференциал операторнинг дискрет аналогини тўлиқ қурилган. Кейинчалик Х.М.Шадиметов ва

А.Р.Хаётовларнинг ишларида дифференциал операторларнинг дискрет аналогларидан фойдаланиб дифференциалланувчи функцияларнинг турли фазоларида вазнли оптимал квадратур формулалар курилган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ф4-ФА-Ф013 «Ноассоциатив ва операторлар алгебралари, динамик системалар, ҳамда уларнинг статистик физика ва популяцион биологияга тадбиқлари» (2012-2016), ОТ-Ф4-86 «Гильберт фазоларида дифференциал ва интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш учун оптимал методлар ишлаб чиқиш» мавзуларидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади $K_2^{m,m-2}$ фазосида алгебраик, тригонометрик кўпхадлар ва экспоненциал функциялар учун аниқ бўлган оптимал квадратур формулалар коэффицентларини ошкор топишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

$K_2^{m,m-2}$ фазосида кадатур формулаларнинг экстремал функциясини топиш;

алгебраик, тригонометрик кўпхадлар ва экспоненциал функциялар учун аниқ бўлган квадратур формулаларнинг хатолик функционали нормасини ҳисоблаш;

хатолик функционали нормасини коэффицентлар бўйича минималлаштириш;

алгебраик, тригонометрик кўпхадлар ва экспоненциал функциялар учун аниқ бўлган оптимал квадратур формуланинг мавжуд ва ягоналигини исботлаш;

$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ дифференциал операторнинг дискрет аналогларини куриш;

$K_2^{m,m-2}$ фазосида оптимал квадратур формулаларнинг коэффицентларини топиш;

Тадқиқотнинг объекти дифференциал операторларнинг дискрет аналоглари, аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун квадратур формулалар, хатолик функционалларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети экстремал функциялар, алгебраик, тригонометрик кўпхадлар ва экспоненциал функциялар учун аниқ бўлган оптимал квадратур формулалар, оптимал квадратур формулаларнинг хатолик функционали нормаларини баҳолашдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, ҳамда дифференциал тенгламалар, умумлашган функциялар, дискрет аргументли функциялар назарияси усулларида фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

$K_2^{m,m-2}$ гильберт фазосидаги квадратур формулалар хатолик функционалининг экстремал функцияси топилган;

квадратур формулалар хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган;
 $K_2^{\overline{m,m-2}}$ фазосида оптимал квадратур формуланинг мавжуд ва ягоналиги исботланган;

$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ дифференциал операторнинг дискрет аналоглари қурилган ва уларнинг хоссалари исботланган;

алгебраик, тригонометрик кўпхадлар ва экспоненциал функциялар учун аниқ бўлган оптимал квадратур формулалар коэффицентларининг ошкор шакллари топилган;

$K_2^{\overline{2,0}}$ фазосида оптимал хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси. Қурилган оптимал квадратур формулалар интегралларни етарлича аниқликда тақрибий ҳисоблаш ва янги кубатур формулалар олишда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги квадратур формулалар назарияси, ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, дискрет аргументли функциялар назарияси методларини қўлланилганлиги, ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти $K_2^{\overline{m,m-2}}$ гильберт фазосида алгебраик, тригонометрик кўпхадлар ва экспоненциал функциялар учун аниқ бўлган оптимал квадратур формулалар қуриш методининг ишлаб чиқилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти қурилган оптимал квадратур формулалар регуляр интегралларни сонли ҳисоблашга ҳамда интеграл тенгламаларни тақрибий ечишга хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Тақрибий интеграллаш формулаларининг хатолик функционали нормасини минималлаштиришда олинган натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

$\frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^2}{dx^2} + 1$ дифференциал операторнинг қурилган дискрет аналоглари PPP-FST-14915-00 рақамли «Modified Adomian Decomposition Method For Nonlinear Fredholmvolterra Inregro-Differential Equations» хорижий грант лойиҳасида $K_2^{\overline{2,0}}$ фазосида квадратур формулалар қуришда қўлланилган (Малайзия Ислом фан университетининг 2018 йил 5 июндаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши чизиксиз Фредгольм-Вольтерра интегро-дифференциал тенгламалари учун қўйилган чегаравий масалаларни ечиш имконини берган;

$K_2^{\overline{3,1}}$ фазосида интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун қурилган оптимал квадратур формуласи Ф2-ФА-0-83921/Ф2-ФА-Ф0383 рақамли «Ўтказгичлар ва магнит материалларида кучли ўзаро боғлиқлик ва уларнинг критик параметрларини ҳисоблаш» фундаментал грант лойиҳасида поляризатор-намуна-анализатор системадан ўтган ёруғлик интенсивлигини магнит майдони ориентациясига боғлиқлигини оптимал яқинлаштиришда

фойдаланилган (Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2018 йил 30 апрелдаги 89-03-1578-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши ёруғлик интенсивлигини магнит майдони ориентациясига боғлиқлигини оптимал яқинлаштишини баҳолашга имкон берган;

$K_2^{2,0}$ фазосида интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун қурилган оптимал квадратур формуласи Ф-4-14 рақамли «Суюқлик оқувчи ер ости эгри чизикли қувурнинг ташқи кучлари таъсиридаги кучланиш-деформациялар ҳолатини тадқиқ қилиш назариясини ривожлантириш ва ҳисоблаш усуллари ишлаб чиқиш» фундаментал грант лойиҳасида ностационар тўлқинлар таъсиридаги грунт билан алоқада бўлган эгри чизикли қувурнинг кучланиш-деформация ҳолатини ўрганишда фойдаланилган (Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2018 йил 2 майдаги 89-03-1626-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши эгри чизикли қувурнинг кучланиш деформациясини ҳолатини оптимал баҳолашга имкон берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари, 5 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 2 та халқаро ва 3 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши.

Диссертация мавзуси бўйича жами 12 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 7 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий ва 6 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши.

Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 100 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиқ берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг « $K_2^{m,m-2}$ фазосида квадратур формулалар хатолик функционали нормаси» деб номланган биринчи бобида $K_2^{m,m-2}$ фазосида Сард маъносида оптимал квадратур формулалар қуриш масаласи қўйилган ва

бу масаланинг биринчи қисми ечилган. Бунинг учун қуйидаги квадратур формула қаралган

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \varphi(x_{\beta}), \quad (1)$$

бунда C_{β} ва x_{β} ($x_{\beta} \in [0,1]$) лар (1) квадратур формуланинг коэффициентлари ва тугун нуқталари дейилади, N – фиксирланган натурал сон, φ эса

$$\|\varphi\|_{K_2^{\overline{m,m-2}}} = \left\{ \int_0^1 \left[P_m \left(\frac{d}{dx} \right) \varphi(x) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

норма билан таъминланган

$$K_2^{\overline{m,m-2}} = \{ \varphi : [0,1] \rightarrow R \mid \varphi^{(m-1)} - \text{абсолют узлуксиз}, \varphi^{(m)} \in L_2(0,1) \},$$

гильберт фазосининг элементи бунда $P_m \left(\frac{d}{dx} \right) = \frac{d^m}{dx^m} + \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}$ ва

$\int_0^1 \left[P_m \left(\frac{d}{dx} \right) \varphi(x) \right]^2 dx < \infty$. (2) тенглик ярим норма бўлиб, $\|\varphi\|=0$ фақат ва фақат

$\varphi(x) = b_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + b_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + P_{m-3}(x)$ бўлганда, бунда $P_{m-3}(x)$ – $m-3$ даражали кўпхад.

Интеграл ва квадратур йиғинди орасидаги қуйидаги айирма

$$\int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \varphi(x_{\beta}) = (l_N, \varphi) = \int_R l_N(x) \varphi(x) dx \quad (3)$$

(1) – квадратур формуланинг хатолиги дейилади, ҳамда бу айирмага

$$l_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \delta(x - x_{\beta}), \quad (4)$$

кўринишга эга хатолик функционали мос келади.

Бунда $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ – $[0,1]$ кесмасининг характеристик функцияси, ҳамда $\delta(x)$ – Диракнинг дельта-функцияси.

Фараз қилайлик, (1) – квадратур формуланинг x_{β} тугун нуқталари фиксирланган бўлсин.

$K_2^{\overline{m,m-2}}$ фазосида оптимал квадратур формулалар куриш масаласи бу қуйидаги катталиқни ҳисоблашдир

$$\left\| l_N \right\|_{K_2^{\overline{m,m-2}*}} = \inf_{C_{\beta}} \sup_{\varphi, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(l_N, \varphi)|}{\|\varphi\|_{K_2^{\overline{m,m-2}}}}, \quad (5)$$

бунда $K_2^{\overline{m,m-2}*}$ – бу $K_2^{\overline{m,m-2}}$ фазосига қўшма фазо.

Бу масала қуйида саналган икки қисмдан иборат.

1-Масала. $K_2^{\overline{m,m-2}*}$ фазосида l_N хатолик функционали нормаси $\|l_N\|$ ни ҳисоблаш.

2-Масала. x_{β} тугун нуқталар фиксирланганда l_N хатолик функционали нормаси $\|l_N\|$ нинг C_{β} коэффициентлар бўйича минимумини топиш.

Биринчи бобнинг биринчи параграфида 1–масала ечилган, яъни (4) – хатолик функционалининг $\|l_N\|$ нормаси ҳисобланган. Бунинг учун l_N хатолик функционалининг экстремал функцияси ишлатилган.

Қуйидаги тенгликни қаноатлантирувчи ψ_l функцияга l_N хатолик функционалининг экстремал функцияси дейилади

$$(l_N, \psi_l) = \|l_N\| \cdot \|\psi_l\|. \quad (6)$$

$K_2^{\overline{m, m-2}}$ фазо гильберт фазоси бўлгани учун чизикли узлуксиз функционалнинг умумий кўриниши ҳақидаги Рисс теоремасидан $K_2^{\overline{m, m-2}}$ фазосида қуйидаги тенгликни қаноатлантирувчи ягона ψ_l функция мавжуд

$$(l_N, \varphi) = \langle \psi_l, \varphi \rangle \quad (7)$$

ва $\|l_N\| = \|\psi_l\|$, бунда $\langle \psi_l, \varphi \rangle$ – бу ψ_l ва φ иккита функциянинг $K_2^{\overline{m, m-2}}$ фазосидаги скаляр кўпайтмаси. Бу фазода $\langle \psi_l, \varphi \rangle$ скаляр кўпайтма қуйидагича аниқланади

$$\langle \psi_l, \varphi \rangle = \int_0^1 (\psi_l^{(m)}(x) + \psi_l^{(m-1)}(x) + \psi_l^{(m-2)}(x)) (\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m-1)}(x) + \varphi^{(m-2)}(x)) dx.$$

ψ_l экстремал функция учун (7) тенгламанинг ечими қуйидаги тенгламанинг ечимига келтирилган

$$\psi_l^{(2m)}(x) + \psi_l^{(2m-2)}(x) + \psi_l^{(2m-4)}(x) = (-1)^m l_N(x) \quad (8)$$

бунда

$$\left[\psi_l^{(2m-i)}(x) + \psi_l^{(2m-2-i)}(x) + \psi_l^{(2m-4-i)}(x) \right]_{x=0}^{x=1} = 0, \quad i = \overline{1, m-2}, \quad (9)$$

$$\left[\psi_l^{(m+1)}(x) - \psi_l^{(m-2)}(x) \right]_{x=0}^{x=1} = 0, \quad (10)$$

$$\left[\psi_l^{(m)}(x) + \psi_l^{(m-1)}(x) + \psi_l^{(m-2)}(x) \right]_{x=0}^{x=1} = 0 \quad (11)$$

чегаравий шартлар ўринли.

Қуйидаги исботланган

Теорема 1. (8)–(11) чегаравий масаланинг ечими (1) – квадратур формула хатолик функционали l_N нинг ψ_l экстремал функцияси ва у қуйидаги кўринишга эга

$$\psi_l(x) = (-1)^m (l_N * G_m)(x) + b_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + b_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + P_{m-3}(x),$$

бунда

$$G_m(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{2} \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+1}}{(6j+1)!} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{x^{6j-1}}{(6j-1)!} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{2}, & m = 3n, n = 1, 2, \dots, \\ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+3}}{(6j+3)!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+1}}{(6j+1)!} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{2} + \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2}, & m = 3n+1, n = 1, 2, \dots, \\ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+5}}{(6j+5)!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+3}}{(6j+3)!} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2}, & m = 3n+2, n = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (12)$$

b_1, b_2 – ихтиёрий ҳақиқий сонлар, $P_{m-3}(x)$ – ихтиёрий $m-3$ - даражали кўпхад.

Кейин, шу экстремал функция ёрдамида l_N хатолик функционали нормасининг квадрати учун қуйидаги ифода топилган

$$\|l_N\|^2 = (-1)^m \left[\sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta C_\gamma G_m(x_\beta - x_\gamma) - 2 \sum_{\beta=0}^N C_\beta \int_0^1 G_m(x - x_\beta) dx + \int_0^1 \int_0^1 G_m(x - y) dx dy \right]. \quad (13)$$

l_N функционал $K_2^{\overline{m,m-2}}$ фазода аниқланганлиги учун унга

$$\left(l_N, e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) = 0, \quad \left(l_N, e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) = 0, \quad (l_N, x^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-3$$

шартлар қўйилади. Бу курган квадратур формуламиз

$$x^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-3, \quad e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x, \quad e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

функцияларга аниқ бўлишини билдиради.

Кейин, 1.3 – параграфда $\overset{\circ}{C}_\beta$ оптимал коэффицентлар учун чизикли тенгламалар системаси олинган. Бу система ечими мавжуд ва ягоналиги исботланган. Ҳамда бу ечим l_N хатолик функционали нормасининг квадратиға минимум бериши исботланган.

Оптимал коэффицентлар учун олинган дискрет системани ечиш алгоритми келтирилган.

$K_2^{\overline{m,m-2}}$ фазосида оптимал квадратур формулалар қуриш $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ дифференциал оператор дискрет аналогини қуришга

боғлиқ. Шунинг учун диссертациянинг « $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ **операторнинг дискрет аналоглари ва уларнинг хоссалари**» деб номланган иккинчи боби $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ операторнинг дискрет аналогларини қуришга бағишланган.

Қуйидаги тенгламанинг $D_m(h\beta)$ ечими $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ дифференциал операторнинг дискрет аналогини дейилади

$$D_m(h\beta) * G_m(h\beta) = \delta(h\beta). \quad (14)$$

Бу ерда $G_m(h\beta)$ – (12) – тенглик билан аниқланган $G_m(x)$ функцияға мос дискрет функция, $\delta(h\beta)$ -дискрет дельта-функция, $\beta = 0$ да 1 га ва $\beta \neq 0$ да 0 га тенг. (12) дан $D_m(h\beta)$ дискрет функцияни қуришимиз учун биз $m = 3n + 2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 3n$, $n = 1, 2, \dots$, $m = 3n + 1$, $n = 1, 2, \dots$ ҳолларни қарашимиз кераклиги кўринади. Бу бобнинг дастлабки учта параграфларида шу учта ҳолға мос келадиган дискрет аналоглар қурилган.

2.1-параграфда $\frac{d^{6n+4}}{dx^{6n+4}} + \frac{d^{6n+2}}{dx^{6n+2}} + \frac{d^{6n}}{dx^{6n}}$ операторнинг $m = 3n + 2$,

$n = 0, 1, \dots$ ҳолга мос келувчи дискрет аналоглари қурилган.

Бу ҳолда (14) – тенглама қуйидаги кўринишга эга

$$D_{3n+2}(h\beta) * G_{3n+2}(h\beta) = \delta(h\beta), \quad (15)$$

бунда

$$G_{3n+2}(x) = \frac{\text{sign} x}{2} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+5}}{(6j+5)!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+3}}{(6j+3)!} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \text{ch} \frac{x}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \text{sh} \frac{x}{2} \right).$$

Қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема 2. $\frac{d^{6n+4}}{dx^{6n+4}} + \frac{d^{6n+2}}{dx^{6n+2}} + \frac{d^{6n}}{dx^{6n}}$ дифференциал операторнинг $D_{3n+2}(h\beta)$

(15)-тенгликни қаноатлантирувчи дискрет аналоглари қуйидаги кўринишга эга:

$$D_{3n+2}(h\beta) = \frac{1}{p_{6n+2}^{(6n+2)}} \begin{cases} \sum_{k=1}^{3n+1} A_k \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2; \\ 1 + \sum_{k=1}^{3n+1} A_k, & |\beta| = 1; \\ P + \sum_{k=1}^{3n+1} \frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta = 0, \end{cases}$$

бунда

$$\begin{aligned} P &= -4 \text{ch} \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} h - 6n - \frac{p_{6n+1}^{(6n+2)}}{p_{6n+2}^{(6n+2)}}, \\ A_{k,1} &= \frac{H_4(\lambda_k) \cdot (\lambda_k - 1)^{6n} \cdot p_{6n+2}^{(6n+2)}}{\lambda_k \cdot P'_{6n+2}(\lambda_k)}, \\ P_{6n+2}(\lambda) &= \sum_{s=0}^{6n+2} p_s^{(6n+2)} \lambda^s = \left[K_1 \lambda^2 - \left(\text{sh}(h) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}h) \right) \lambda + K_1 \right] (1 - \lambda)^{6n} + \\ &+ H_4(\lambda) \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{6k+5} (1 - \lambda)^{6(n-k-1)} E_{6k+4}(\lambda)}{(6k+5)!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{6k+3} (1 - \lambda)^{6(n-k)-4} E_{6k+2}(\lambda)}{(6k+3)!} \right] \\ K_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ch}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} h\right) - \text{sh}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} h\right), \\ H_4(\lambda) &= \lambda^4 - 4 \text{ch}\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} h\right) \lambda^3 + \\ &+ 2 \left(1 + \text{ch}(h) + \cos(\sqrt{3}h) \right) \lambda^2 - 4 \text{ch}\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} h\right) \lambda + 1, \end{aligned} \quad (16)$$

$p_{6n+2}^{(6n+2)}$, $p_{6n+1}^{(6n+2)}$ лар $P_{6n+2}(\lambda)$ кўпхаднинг коэффициентлари, λ_k эса $P_{6n+2}(\lambda)$ кўпхаднинг илдизлари, $|\lambda_k| < 1$, $E_k(\lambda)$ - Эйлернинг k - даражали кўпхади.

2.2- параграфда $\frac{d^{6n}}{dx^{6n}} + \frac{d^{6n-2}}{dx^{6n-2}} + \frac{d^{6n-4}}{dx^{6n-4}}$ операторнинг $m = 3n$, $n = 1, 2, \dots$

ҳолга мос келувчи дискрет аналоглари қурилган. Бунда (14) – тенглама қуйидагича

$$D_{3n}(h\beta) * G_{3n}(h\beta) = \delta(h\beta), \quad (17)$$

бу ерда

$$G_{3n}(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{2} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+1}}{(6j+1)!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j-1}}{(6j-1)!} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{2} \right].$$

Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 3. $\frac{d^{6n}}{dx^{6n}} + \frac{d^{6n-2}}{dx^{6n-2}} + \frac{d^{6n-4}}{dx^{6n-4}}$ дифференциал операторнинг (17) – тенгликни қаноатлантирувчи $D_{3n}(h\beta)$ дискрет аналоглари қуйидаги кўринишга эга:

$$D_{3n}(h\beta) = \frac{1}{q_{6n-2}^{(6n-2)}} \begin{cases} \sum_{k=1}^{3n-1} A_{k,2} \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2; \\ 1 + \sum_{k=1}^{3n-1} A_{k,2}, & |\beta| = 1; \\ Q + \sum_{k=1}^{3n-1} \frac{A_{k,2}}{\lambda_k}, & \beta = 0, \end{cases}$$

бунда

$$Q = -4 \operatorname{ch} \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} h - 6n + 4 - \frac{q_{6n-3}^{(6n-2)}}{q_{6n-2}^{(6n-2)}},$$

$$A_{k,2} = \frac{H_4(\lambda_k) \cdot (\lambda_k - 1)^{6n-4} \cdot q_{6n-2}^{(6n-2)}}{\lambda_k \cdot Q'_{6n-2}(\lambda_k)},$$

$$Q_{6n-2}(\lambda) = \sum_{s=0}^{6n-2} q_s^{(6n-2)} \lambda^s = (-1)^n \left\{ \left[K_2 \lambda^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}h) \lambda + K_2 \right] \cdot (1-\lambda)^{6n-4} + \right. \\ \left. + H_4(\lambda) \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{6k+1} (1-\lambda)^{6(n-k-1)} E_{6k}(\lambda)}{(6k+1)!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^{6k-1} (1-\lambda)^{6(n-k)-4} E_{6k-2}(\lambda)}{(6k-1)!} \right] \right\}$$

$$K_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{ch}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} h\right),$$

$H_4(\lambda)$ ифода (16) – тенглик билан аниқланади, $q_{6n-2}^{(6n-2)}$, $q_{6n-3}^{(6n-2)}$ – лар $Q_{6n-2}(\lambda)$ кўпхаднинг коэффицентлари, λ_k – лар $Q_{6n-2}(\lambda)$ кўпхаднинг илдизлари, $|\lambda_k| < 1$, $E_k(\lambda)$ – Эйлернинг k – даражали кўпхадлари.

2.3-параграф эса $\frac{d^{6n+2}}{dx^{6n+2}} + \frac{d^{6n}}{dx^{6n}} + \frac{d^{6n-2}}{dx^{6n-2}}$ дифференциал операторнинг $m = 3n + 1$, $n = 1, 2, \dots$ ҳолга мос келувчи дискрет аналогини қуришга бағишланган. У ҳолда (14) – тенглама

$$D_{3n+1}(h\beta) * G_{3n+1}(h\beta) = \delta(h\beta) \quad (18)$$

кўринишга эга, бунда

$$G_{3n+1}(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{2} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+3}}{(6j+3)!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+1}}{(6j+1)!} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{2} + \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2} \right).$$

Қуйидаги ўринли

Теорема 4. $\frac{d^{6n+2}}{dx^{6n+2}} + \frac{d^{6n}}{dx^{6n}} + \frac{d^{6n-2}}{dx^{6n-2}}$ дифференциал операторнинг (18) – тенгликни қаноатлантирувчи $D_{3n+1}(h\beta)$ дискрет аналогини қуйидагича:

$$D_{3n+1}(h\beta) = \frac{1}{r_{6n}^{(6n)}} \begin{cases} \sum_{k=1}^{3n} A_{k,3} \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2; \\ 1 + \sum_{k=1}^{3n} A_{k,3}, & |\beta| = 1; \\ R + \sum_{k=1}^{3n} \frac{A_{k,3}}{\lambda_k}, & \beta = 0, \end{cases}$$

бунда

$$R = -4 \operatorname{ch} \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} h - 6n + 2 - \frac{r_{6n-1}^{(6n)}}{r_{6n}^{(6n)}},$$

$$A_{k,3} = \frac{H_4(\lambda_k) \cdot (\lambda_k - 1)^{6n-2} \cdot r_{6n}^{(6n)}}{\lambda_k \cdot R'_{6n}(\lambda_k)},$$

$$R_{6n}(\lambda) = \sum_{s=0}^{6n-2} r_s^{(6n-2)} \lambda^s = (-1)^{n-1} \left\{ \left[K_3 \lambda^2 - \left(\operatorname{sh}(h) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}h) \right) \lambda + K_3 \right] (1-\lambda)^{6n-2} + \right. \\ \left. + H_4(\lambda) \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{6k+3} (1-\lambda)^{6(n-k-1)} E_{6k+2}(\lambda)}{(6k+3)!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{6k+1} (1-\lambda)^{6(n-k)-4} E_{6k}(\lambda)}{(6k+1)!} \right] \right\}$$

$$K_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ch}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} h\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} h\right),$$

$H_4(\lambda)$ ифода (16) – тенглик билан аниқланади, $r_{6n}^{(6n)}, r_{6n-1}^{(6n)}$ лар $R_{6n}(\lambda)$ кўпхаднинг илдизлари, λ_k лар $R_{6n}(\lambda)$ кўпхаднинг илдизлари, $|\lambda_k| < 1$, $E_k(\lambda)$ – Эйлернинг k – даражали илдизлари.

2.4-параграфда $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ дифференциал операторнинг баъзи хоссалари ўрганилган. Бунда 2.1-2.3 – параграфларда олинган натижалардан фойдаланилган, яъни теорема 2-4 лардан.

Қуйидаги ўринли

Теорема 5. $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ дифференциал операторнинг

$D_m(h\beta)$ дискрет аналоги қуйидаги тенгликларни қаноатлантиради:

$$1) D_m(h\beta) * e^{\frac{-1}{2}h\beta} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\beta\right) = 0,$$

$$2) D_m(h\beta) * e^{\frac{-1}{2}h\beta} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\beta\right) = 0,$$

$$3) D_m(h\beta) * e^{\frac{1}{2}h\beta} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\beta\right) = 0,$$

$$4) D_m(h\beta) * e^{\frac{1}{2}h\beta} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\beta\right) = 0,$$

$$5) D_m(h\beta) * (h\beta)^\alpha = 0, \quad \alpha \leq 2m-5,$$

$$6) D_m(h\beta) * G_m(h\beta) = \delta(h\beta),$$

бунда $G_m(h\beta)$ – дискрет аргументли функция бўлиб, (12) – тенглик билан аниқланган $G_m(x)$ функцияга мос келади, $\delta(h\beta)$ – дискрет дельта-функция.

Диссертациянинг « $K_2^{\overline{m,m-2}}$ фазода оптимал квадратур формулаларнинг коэффицентлари» деб номланган учинчи бобида $K_2^{\overline{m,m-2}}$ фазосида (1) – кўринишдаги оптимал квадратур формулаларнинг коэффицентлари топилган. Бунда иккинчи бобнинг натижаларидан фойдаланилган, яъни $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ дифференциал операторнинг $D_m(h\beta)$ дискрет аналогларидан фойдаланилган. Бу ерда ҳам биз $m = 3n + 2$ ($n = 0, 1, \dots$), $m = 3n$ ва $m = 3n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$) бўлган учта ҳолларни қараймиз. 3.1-3.3 – параграфларда мос равишда бу ҳоллардаги оптимал коэффицентлар топилган.

$m = 3n + 2$ ($n = 0, 1, \dots$) ҳолда (1) – кўринишдаги оптимал квадратур формулаларнинг коэффицентлари учун қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 6. $K_2(P_{3n+2})$ фазода (1) – кўринишдаги оптимал квадратур формулалар коэффицентлари $n = 1, 2, \dots$ бўлганда қуйидаги кўринишга эга

$$\overset{\circ}{C}_0 = \frac{h}{2} - \sum_{k=1}^{3n+1} \frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)^2} \left[a_k (h\lambda_k^N - \lambda_k + 1 - h) + b_k (\lambda_k^N - h\lambda_k^N - \lambda_k^{N-1} + h) \right],$$

$$\overset{\circ}{C}_\beta = h + \sum_{k=1}^{3n+1} (a_k \lambda_k^\beta + b_k \lambda_k^{N-\beta}), \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

$$\overset{\circ}{C}_N = \frac{h}{2} - \sum_{k=1}^{3n+1} \frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)^2} \left[a_k (\lambda_k^N - h\lambda_k^N - \lambda_k^{N-1} + h) + b_k (h\lambda_k^N - \lambda_k + 1 - h) \right]:$$

бунда a_k, b_k маълум катталиклар, λ_k лар 2 – теоремада берилган.

$m=3n$ ва $m=3n+1$ ($n=1,2,\dots$) ҳоллар учун ҳам шунга ўхшаш натижалар олинган.

ХУЛОСА

Диссертация ишида $K_2^{\overline{m,m-2}}$ фазосида интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун Сард маъносида оптимал квадратур формулалар қурилган.

Изланишнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат.

1. $K_2^{\overline{m,m-2}}$ гильберт фазосида, чизикли узлуксиз функционалнинг умумий кўриниши ҳақидаги Рисс теоремасидан фойдаланиб, аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун квадратур формулалар хатолик функционалининг экстремал функцияси топилган.
2. $K_2^{\overline{m,m-2}}$ фазосида, экстремал функцияни қўллаб, квадратур формулалар хатолик функционали нормасининг квадрати учун ифода олинган.
3. Лагранжнинг аниқмас коэффицентлар методидан фойдаланиб Сард маъносида оптимал квадратур формулалар коэффицентлари учун чизикли алгебраик тенгламалар системаси олинган.
4. $K_2^{\overline{m,m-2}}$ фазосида алгебраик, тригонометрик кўпхадларга ва экспоненциал функцияларга аниқ бўлган оптимал квадратур формулалар коэффицентлари учун чизикли тенгламалар системаси ечими мавжуд ва ягоналиги исботланган.
5. Олинган тенгламалар системасининг ечими $K_2^{\overline{m,m-2}}$ фазосидаги оптимал квадратур формулалар хатолик функционали нормасининг квадратиға минимум бериши кўрсатилган.
6. Оптимал коэффицентларни топишнинг $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ дифференциал оператор дискрет аналогларига асосланган алгоритми ишлаб чиқилган.
7. $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ дифференциал операторнинг дискрет аналолари қурилган ва уларнинг баъзи хоссалари исботланган.
8. $K_2^{\overline{m,m-2}}$ фазосида алгебраик, тригонометрик кўпхадларга ва экспоненциал функцияларга аниқ бўлган оптимал квадратур формулалар коэффицентлари учун ошкор формулалар топилган.
9. $K_2^{\overline{2,0}}$ фазосида оптимал квадратур формулалар хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc27.06.2017/FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И
ТАШКЕНТСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА**

АЗАМОВ СИРОЖ СОБИРОВИЧ

**МИНИМИЗАЦИЯ НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ
ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЁННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В
ПРОСТРАНСТВЕ $K_2^{\overline{m,m-2}}$**

01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ-2018

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.1.PhD/FM162.

Диссертация выполнена в Институте математики им. В.И.Романовского АН РУз и в Ташкентском институте инженеров железнодорожного транспорта.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) и на Информационно-образовательном портале «Ziynet» (www.ziynet.uz)

Научный руководитель:	Шадиметов Холматвай Махкамбаевич доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Алоев Рахматилло Джураевич доктор физико-математических наук, профессор Раимова Гулнора Мирвалиевна доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	Самаркандский государственный университет

Защита диссертации состоится «___» _____ 2018 года в ___ часов на заседании Научного совета DSc27.06.2017/FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №___). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «___» _____ 2018 года.
(протокол рассылки №___ от «___» _____ 2018 года).

А.Р. Марахимов
Председатель Научного совета по присуждению
научных степеней, д.т.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению
научных степеней, д.ф.-м.н.

З.Х. Юлдашев
Председатель научного семинара при Научном
совете по присуждению научных степеней,
д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Проблемы математической физики, возникающие в результате многих научно-прикладных исследований, проводимых на мировом уровне, приводят к задачам теории интегральных и дифференциальных уравнений. Методы, применяемые при приближенном решении этих задач, являются объектом исследования области вычислительной математики. При создании таких методов основой служит теория квадратурных и кубатурных формул. При больших численных расчетах очень важно оптимизировать процесс приближенного вычисления интеграла, а если вычисление производится с помощью квадратурных и кубатурных формул, то оптимизировать и сами формулы. Поэтому задача оптимизации квадратурных и кубатурных формул, а также отыскание минимума нормы функционала погрешности этих формул является одной из важных задач.

В настоящее время в мире одной из важнейших задач вычислительной математики является построение оптимальных квадратурных формул в различных пространствах дифференцируемых функций для приближенного вычисления интегралов. Следует отметить, что эта задача имеет тесную связь с приближенно-аналитическими решениями дифференциальных и интегральных уравнений, она имеет важное значение в теории численного интегрирования. В этом направлении: построение асимптотически оптимальных, оптимальных по порядку и оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов, а также оценки их погрешностей в различных гильбертовых и банаховых пространствах считаются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране большое внимание уделяется актуальным направлениям вычислительной математики, имеющим фундаментальное и прикладное применения. В частности, значительные результаты были достигнуты по построению оптимальных квадратурных и кубатурных формул и оценке их погрешностей в различных пространствах, по построению инвариантных, решетчатых оптимальных кубатурных формул для приближенного вычисления регулярных и сингулярных интегралов в пространствах Соболева одной и многих переменных, периодических и непериодических функций. Проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук на уровне международных стандартов по «функциональному анализу, математической физике, теории динамических систем, прикладной и вычислительной математике» является одной из основных задач². Развитие теории оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов и оценка их погрешностей в различных пространствах дифференцируемых функций играют важную роль в исполнении постановления.

² Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

Настоящая диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-916 «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий в производство» от 15 июля 2008 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 8 февраля 2017 года а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Универсальными методами приближенного вычисления определенных интегралов являются методы численного интегрирования. Имеются классический, вероятностный и функциональный подходы в теории численного интегрирования. По классическим и вероятностным подходам построения формул численного интегрирования занимались такие ученые как Н.С.Бахвалов, С.М.Ермаков, В.И.Крылов, И.П.Мысовских, В.И.Лебедев, R.Cools, E.Novak, H.Wozniakowski, A.H.Stroud, Г.Н.Салихов, G.V.Milovanovic, И.М.Соболь, Н.Н.Ченцов, Г.А.Михайлов, М.И.Исраилов, А.С.Расулов, С.Ш.Шушбаев, Г.П.Исматуллаев, Э.А.Шамсиев, З.К.Эшкуватов и др.

В функциональном подходе построения формул численного интегрирования метод Соболева построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул основывается на дискретные аналоги линейных дифференциальных операторов. Впервые этот метод предложен С.Л.Соболевым для построения оптимальных кубатурных формул в пространстве $L_2^{(m)}$. Проблему построения оптимальных решетчатых формул над пространством $L_2^{(m)}$ С.Л.Соболев свел к решению дискретной системы типа Винера-Хопфа и доказал существование и единственность решения этой системы, а также предложил алгоритм для нахождения оптимальных коэффициентов кубатурных формул.

Реализацией предложенного С.Л.Соболевым алгоритма в пространстве $L_2^{(m)}$ занимались З.Ж.Жамалов, Ф.Я.Загирова, Х.М.Шадиметов. Впервые построением и изучением дискретного аналога полигармонического оператора занимался С.Л.Соболев. В одномерном случае этот оператор построен З.Ж.Жамаловым, при этом вид этого дискретного оператора им выписан с точностью до $m+1$ – неизвестного коэффициента. Х.М.Шадиметовым полностью построен дискретный аналог дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m} . Далее, в работах Х.М.Шадиметова и А.Р.Хаётова, используя дискретные аналоги дифференциальных операторов,

построены весовые оптимальные квадратурные формулы в различных пространствах дифференцируемых функций.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Ф4-ФА-Ф013 «Неассоциативные и операторные алгебры, динамические системы и их приложения в статистической физике и популяционной биологии» (2012-2016), ОТ-Ф4-86 «Разработка оптимальных методов для приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений в гильбертовых пространствах» Института математики им. В.И.Романовского АН РУз.

Целью исследования является нахождение явного вида коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве $K_2^{\overline{m,m-2}}$, точных для алгебраических, тригонометрических полиномов и экспоненциальных функций.

Задачи исследования:

нахождение экстремальной функции квадратурных формул в пространстве $K_2^{\overline{m,m-2}}$;

вычисление нормы функционала погрешности квадратурных формул, точных для алгебраических, тригонометрических полиномов и экспоненциальных функций;

минимизация нормы функционала погрешности по коэффициентам;

исследование задачи существования и единственности оптимальной квадратурной формулы, точной для алгебраических, тригонометрических полиномов и экспоненциальных функций в пространстве $K_2^{\overline{m,m-2}}$;

построение дискретных аналогов дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$;

нахождение коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве $K_2^{\overline{m,m-2}}$.

Объектом исследования являются дискретные аналоги дифференциальных операторов, квадратурные формулы для приближенного вычисления определенных интегралов, функционалы погрешностей.

Предметом исследования являются экстремальные функции, оптимальные квадратурные формулы, точные для алгебраических, тригонометрических полиномов и экспоненциальных функций, норма функционала погрешности оптимальных квадратурных формул.

Методы исследования. В исследовательской работе использованы методы вычислительной математики и функционального анализа, а также теории дифференциальных уравнений, обобщенных функций, функций дискретного аргумента.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

найдена экстремальная функция функционала погрешности квадратурных формул в гильбертовом пространстве $K_2^{\overline{m,m-2}}$;

вычислена норма функционала погрешности квадратурных формул;

доказаны существование и единственность оптимальной квадратурной формулы в пространстве $K_2^{\overline{m,m-2}}$;

построены дискретные аналоги дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$, и доказаны их свойства;

найлены явные виды коэффициентов оптимальных квадратурных формул, точных для алгебраических, тригонометрических полиномов и экспоненциальных функций;

вычислена норма оптимального функционала погрешности в пространстве $K_2^{\overline{2,0}}$.

Практические результаты исследования. Используя оптимальные квадратурные формулы, построенные в диссертационной работе, вычисленные интегралы с достаточной точностью и построены новые кубатурные формулы.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием теории квадратурных формул, методов вычислительной математики, функционального анализа, теории функций дискретного аргумента, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что в гильбертовом пространстве $K_2^{\overline{m,m-2}}$ разработан метод построения оптимальных квадратурных формул, точных для алгебраических, тригонометрических полиномов и экспоненциальных функций.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что построенные оптимальные квадратурные формулы могут служить для численного вычисления регулярных интегралов, а также для приближенного решения интегральных уравнений.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты при минимизации нормы функционала погрешности формулы численного интегрирования были использованы в следующих научно-исследовательских проектах.

Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^2}{dx^2} + 1$ использованы в исследованиях зарубежного гранта под номером PPP-FST-14915-00 «Modified Adomian Decomposition Method For Nonlinear Fredholmvolterra Integro-Differential Equations» для построения квадратурных формул в пространстве $K_2^{\overline{2,0}}$ (Исламский научный университет Малайзии, справка от 5 июня 2018 года). Применение научного результата позволило приближенно решить краевых задач поставленных на интегро-дифференциальных нелинейных уравнений Фредгольма-Вольтерра.

Оптимальные квадратурные формулы, построенные для приближенного вычисления интегралов в пространстве $K_2^{\overline{3,1}}$, использованы в исследованиях фундаментального гранта под номером Ф2-ФА-0-83921/Ф2-ФА-Ф0383 «Сильная взаимосвязанность в проводниках и магнитных материалах и вычисление их критических параметров» для оптимального приближения зависимости интенсивности света, проходящего через системы поляризатор-образец-анализатор, от ориентации магнитного поля на плоскости слабых ферромагнитных (Министерство высшего и среднего специального образования, справка № 89-03-1578 от 30 апреля 2018 года). Применение научного результата позволило оценить оптимальную близость взаимосвязи световой интенсивности от ориентации магнитного поля.

Оптимальная квадратурная формула для приближенного вычисления интегралов в пространстве $K_2^{\overline{2,0}}$ использована в исследованиях фундаментального гранта под номером Ф-4-14 «Развитие и разработка вычислительных методов теории исследования напряженно-деформационного положения под воздействием внешних сил воды текущей под земной криволинейной трубы» для изучения напряженно-деформационного положения криволинейной трубы который был в контакте с грунтом под воздействием нестационарных волн (Министерство высшего и среднего специального образования, справка № 89-03-1626 от 2 мая 2018 года). Применение научного результата позволило оптимально оценить напряженно-деформационное положение криволинейной трубы.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 5 научно-практических конференциях, в том числе на 2 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 12 научных работ, из них 7 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 1 опубликована в зарубежном журнале и 6 – в республиканских научных изданиях.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 100 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая

значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Норма функционала погрешности квадратурных формул в пространстве $K_2^{\overline{m,m-2}}$** », поставлена задача построения оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда в пространстве $K_2^{\overline{m,m-2}}$ и решена первая часть этой задачи. Для этого рассмотрена следующая квадратурная формула

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(x_\beta), \quad (1)$$

где C_β и x_β ($x_\beta \in [0,1]$) называются *коэффициентами* и *узлами* квадратурной формулы (1), N – фиксированное натуральное число, φ является элементом гильбертова пространства

$K_2^{\overline{m,m-2}} = \{\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} | \varphi^{(m-1)}$ является абсолютно непрерывной, $\varphi^{(m)} \in L_2(0,1)\}$, снабженной с нормой

$$\|\varphi\|_{K_2^{\overline{m,m-2}}} = \left\{ \int_0^1 \left[P_m \left(\frac{d}{dx} \right) \varphi(x) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

где $P_m \left(\frac{d}{dx} \right) = \frac{d^m}{dx^m} + \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}$ и $\int_0^1 \left[P_m \left(\frac{d}{dx} \right) \varphi(x) \right]^2 dx < \infty$.

Равенство (2) является полунормой и $\|\varphi\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = b_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + b_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + P_{m-3}(x)$, где $P_{m-3}(x)$ – многочлен степени $m-3$.

Следующая разность между интегралом и квадратурной суммой

$$\int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(x_\beta) = (l_N, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} l_N(x) \varphi(x) dx \quad (3)$$

называется *погрешностью квадратурной формулы* (1), и этой разности соответствует функционал погрешности, имеющий вид

$$l_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(x - x_\beta). \quad (4)$$

Здесь $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ – характеристическая функция отрезка $[0,1]$, а $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Пусть узлы x_β квадратурной формулы (1) фиксированы.

Задача построения оптимальных квадратурных формул в пространстве $K_2^{\overline{m,m-2}}$ – это вычисление следующей величины

$$\left\| l_N \right|_{K_2^{\overline{m,m-2}*}} = \inf_{C_\beta} \sup_{\varphi, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(l_N, \varphi)|}{\|\varphi\|_{K_2^{\overline{m,m-2}}}}, \quad (5)$$

где $K_2^{\overline{m,m-2}^*}$ – сопряженное пространство к пространству $K_2^{\overline{m,m-2}}$.

Эта задача состоит из двух частей, которые перечислены ниже.

Задача 1. Вычислить норму $\|l_N\|$ функционала погрешности l_N в пространстве $K_2^{\overline{m,m-2}^*}$.

Задача 2. Найти минимум нормы $\|l_N\|$ функционала погрешности l_N по коэффициентам C_β при фиксированных узлах x_β .

В первом параграфе главы 1 решена задача 1, т.е. вычислены нормы $\|l_N\|$ функционала погрешности (4). Для этого использована экстремальная функция функционала погрешности l_N .

Функция ψ_l , для которой выполняется равенство

$$(l_N, \psi_l) = \|l_N\| \cdot \|\psi_l\|, \quad (6)$$

называется *экстремальной функцией* функционала l_N .

Так как пространство $K_2^{\overline{m,m-2}}$ является гильбертовым, то, по теореме Рисса об общем виде линейного функционала, существует единственная функция ψ_l из пространства $K_2^{\overline{m,m-2}}$, для которой выполняется следующее равенство

$$(l_N, \varphi) = \langle \psi_l, \varphi \rangle \quad (7)$$

и $\|l_N\| = \|\psi_l\|$, где $\langle \psi_l, \varphi \rangle$ – скалярное произведение двух функций ψ_l и φ из пространства $K_2^{\overline{m,m-2}}$. Напомним, что скалярное произведение $\langle \psi_l, \varphi \rangle$ в этом пространстве определяется следующим образом

$$\langle \psi_l, \varphi \rangle = \int_0^1 (\psi_l^{(m)}(x) + \psi_l^{(m-1)}(x) + \psi_l^{(m-2)}(x)) (\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m-1)}(x) + \varphi^{(m-2)}(x)) dx.$$

Решение уравнения (7) для экстремальной функции ψ_l приведено к решению следующего уравнения

$$\psi_l^{(2m)}(x) + \psi_l^{(2m-2)}(x) + \psi_l^{(2m-4)}(x) = (-1)^m l_N(x) \quad (8)$$

с краевыми условиями

$$\left[\psi_l^{(2m-i)}(x) + \psi_l^{(2m-2-i)}(x) + \psi_l^{(2m-4-i)}(x) \right]_{x=0}^{x=1} = 0, \quad i = \overline{1, m-2}, \quad (9)$$

$$\left[\psi_l^{(m+1)}(x) - \psi_l^{(m-2)}(x) \right]_{x=0}^{x=1} = 0, \quad (10)$$

$$\left[\psi_l^{(m)}(x) + \psi_l^{(m-1)}(x) + \psi_l^{(m-2)}(x) \right]_{x=0}^{x=1} = 0. \quad (11)$$

Доказана следующая

Теорема 1. Решение краевой задачи (8)-(11) является экстремальной функцией ψ_l функционала погрешности l_N квадратурной формулы вида (1) и она имеет следующий вид

$$\psi_l(x) = (-1)^m (l_N * G_m)(x) + b_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + b_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + P_{m-3}(x),$$

где

$$G_m(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{2} \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+1}}{(6j+1)!} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{x^{6j-1}}{(6j-1)!} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{2}, & m = 3n, n = 1, 2, \dots, \\ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+3}}{(6j+3)!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+1}}{(6j+1)!} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{2} + \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2}, & m = 3n+1, n = 1, 2, \dots, \\ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+5}}{(6j+5)!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+3}}{(6j+3)!} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2}, & m = 3n+2, n = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (12)$$

b_1, b_2 – произвольные действительные числа, $P_{m-3}(x)$ – произвольный многочлен степени $m - 3$.

Далее, с помощью этой экстремальной функции найдено представление квадрата нормы функционала погрешности l_N , которое имеет вид

$$\|l_N\|^2 = (-1)^m \left[\sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta C_\gamma G_m(x_\beta - x_\gamma) - 2 \sum_{\beta=0}^N C_\beta \int_0^1 G_m(x - x_\beta) dx + \int_0^1 \int_0^1 G_m(x - y) dx dy \right]. \quad (13)$$

Так как функционал l_N определен на пространстве $K_2^{\overline{m, m-2}}$, то на l_N налагаются условия

$$\left(l_N, e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) = 0, \quad \left(l_N, e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) = 0, \quad (l_N, x^a) = 0, \quad a = 0, 1, \dots, m - 3.$$

Это значит, что наша квадратурная формула будет точна на функциях

$$x^a, \quad a = 0, 1, \dots, m - 3, \quad e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x, \quad e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

Затем, в параграфе 1.3 получена система линейных уравнений для оптимальных коэффициентов $\overset{\circ}{C}_\beta$. Доказаны существование и единственность решения этой системы. Также доказано, что решение этой системы дает минимум квадрата нормы функционала погрешности l_N .

Приведен алгоритм решения полученной дискретной системы для оптимальных коэффициентов.

Построение оптимальных квадратурных формул в пространстве $K_2^{\overline{m, m-2}}$ зависит от построения дискретного аналога дифференциального оператора

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}. \quad \text{Поэтому вторая глава диссертации, названная}$$

«Дискретные аналоги оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ и их свойства»,

посвящена построению дискретных аналогов оператора

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}.$$

Решение $D_m(h\beta)$ уравнения

$$D_m(h\beta) * G_m(h\beta) = \delta(h\beta) \quad (13)$$

называется дискретным аналогом дифференциального оператора

$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$. Здесь $G_m(h\beta)$ - дискретная функция, соответствующая функции $G_m(x)$ определенной равенством (12), $\delta(h\beta)$ - дискретная дельта функция, равная 1 при $\beta = 0$ и равная 0 при $\beta \neq 0$. Из (12) видно, что для того чтобы построить дискретную функцию $D_m(h\beta)$, нам нужно рассмотреть три случая, когда $m = 3n + 2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 3n$, $n = 1, 2, \dots$, $m = 3n + 1$, $n = 1, 2, \dots$. В первых трех параграфах второй главы построены дискретные аналоги, соответствующие этим трем случаям.

В параграфе 2.1 построен дискретный аналог оператора $\frac{d^{6n+4}}{dx^{6n+4}} + \frac{d^{6n+2}}{dx^{6n+2}} + \frac{d^{6n}}{dx^{6n}}$, который соответствует случаю $m = 3n + 2$, $n = 0, 1, \dots$.

В этом случае уравнение (14) имеет вид

$$D_{3n+2}(h\beta) * G_{3n+2}(h\beta) = \delta(h\beta), \quad (15)$$

где

$$G_{3n+2}(x) = \frac{\text{sign} x}{2} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+5}}{(6j+5)!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+3}}{(6j+3)!} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \text{ch} \frac{x}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \text{sh} \frac{x}{2} \right).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Дискретный аналог $D_{3n+2}(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^{6n+4}}{dx^{6n+4}} + \frac{d^{6n+2}}{dx^{6n+2}} + \frac{d^{6n}}{dx^{6n}}$, удовлетворяющий равенству (15), имеет вид:

$$D_{3n+2}(h\beta) = \frac{1}{p_{6n+2}^{(6n+2)}} \begin{cases} \sum_{k=1}^{3n+1} A_k \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2; \\ 1 + \sum_{k=1}^{3n+1} A_k, & |\beta| = 1; \\ P + \sum_{k=1}^{3n+1} \frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta = 0, \end{cases}$$

где

$$P = -4 \text{ch} \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} h - 6n - \frac{p_{6n+1}^{(6n+2)}}{p_{6n+2}^{(6n+2)}},$$

$$A_{k,1} = \frac{H_4(\lambda_k) \cdot (\lambda_k - 1)^{6n} \cdot p_{6n+2}^{(6n+2)}}{\lambda_k \cdot P'_{6n+2}(\lambda_k)},$$

$$\begin{aligned}
P_{6n+2}(\lambda) &= \sum_{s=0}^{6n+2} p_s^{(6n+2)} \lambda^s = \left[K_1 \lambda^2 - \left(\operatorname{sh}(h) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}h) \right) \lambda + K_1 \right] (1-\lambda)^{6n} + \\
&+ H_4(\lambda) \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{6k+5} (1-\lambda)^{6(n-k-1)} E_{6k+4}(\lambda)}{(6k+5)!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{6k+3} (1-\lambda)^{6(n-k)-4} E_{6k+2}(\lambda)}{(6k+3)!} \right] \\
K_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ch}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right), \\
H_4(\lambda) &= \lambda^4 - 4 \operatorname{ch}\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right) \lambda^3 + \\
&+ 2 \left(1 + \operatorname{ch}(h) + \cos(\sqrt{3}h) \right) \lambda^2 - 4 \operatorname{ch}\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right) \lambda + 1,
\end{aligned} \tag{16}$$

$p_{6n+2}^{(6n+2)}$, $p_{6n+1}^{(6n+2)}$ - коэффициенты многочлена $P_{6n+2}(\lambda)$, λ_k - корни многочлена $P_{6n+2}(\lambda)$, $|l_k| < 1$, $E_k(\lambda)$ - многочлен Эйлера степени k .

В параграфе 2.2 построен дискретный аналог оператора $\frac{d^{6n}}{dx^{6n}} + \frac{d^{6n-2}}{dx^{6n-2}} + \frac{d^{6n-4}}{dx^{6n-4}}$, который соответствует случаю $m = 3n$, $n = 1, 2, \dots$. При этом уравнение (14) имеет вид

$$D_{3n}(h\beta) * G_{3n}(h\beta) = \delta(h\beta), \tag{17}$$

где

$$G_{3n}(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{2} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+1}}{(6j+1)!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j-1}}{(6j-1)!} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{2} \right].$$

Имеет место следующая

Теорема 2. Дискретный аналог $D_{3n}(h\beta)$ дифференциального оператора

$\frac{d^{6n}}{dx^{6n}} + \frac{d^{6n-2}}{dx^{6n-2}} + \frac{d^{6n-4}}{dx^{6n-4}}$, удовлетворяющий равенству (17), имеет вид:

$$D_{3n}(h\beta) = \frac{1}{q_{6n-2}^{(6n-2)}} \begin{cases} \sum_{k=1}^{3n-1} A_{k,2} \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2; \\ 1 + \sum_{k=1}^{3n-1} A_{k,2}, & |\beta| = 1; \\ Q + \sum_{k=1}^{3n-1} \frac{A_{k,2}}{\lambda_k}, & \beta = 0, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}
Q &= -4 \operatorname{ch} \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} h - 6n + 4 - \frac{q_{6n-3}^{(6n-2)}}{q_{6n-2}^{(6n-2)}}, \\
A_{k,2} &= \frac{H_4(\lambda_k) \cdot (\lambda_k - 1)^{6n-4} \cdot q_{6n-2}^{(6n-2)}}{\lambda_k \cdot Q'_{6n-2}(\lambda_k)},
\end{aligned}$$

$$Q_{6n-2}(\lambda) = \sum_{s=0}^{6n-2} q_s^{(6n-2)} \lambda^s = (-1)^n \left\{ \left[K_2 \lambda^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}h) \lambda + K_2 \right] \cdot (1-\lambda)^{6n-4} + \right. \\ \left. + H_4(\lambda) \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{6k+1} (1-\lambda)^{6(n-k-1)} E_{6k}(\lambda)}{(6k+1)!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^{6k-1} (1-\lambda)^{6(n-k)-4} E_{6k-2}(\lambda)}{(6k-1)!} \right] \right\}$$

$$K_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{ch}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),$$

$H_4(\lambda)$ определяется равенством (16), $q_{6n-2}^{(6n-2)}, q_{6n-3}^{(6n-2)}$ - коэффициенты многочлена $Q_{6n-2}(\lambda)$, λ_k - корни многочлена $Q_{6n-2}(\lambda)$, $|\lambda_k| < 1$, $E_k(\lambda)$ - многочлен Эйлера степени k .

Параграф 2.3 посвящен построению дискретного аналога оператора $\frac{d^{6n+2}}{dx^{6n+2}} + \frac{d^{6n}}{dx^{6n}} + \frac{d^{6n-2}}{dx^{6n-2}}$, который соответствует случаю $m = 3n + 1$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда уравнение (14) примет вид

$$D_{3n+1}(h\beta) * G_{3n+1}(h\beta) = \delta(h\beta), \quad (18)$$

где

$$G_{3n+1}(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{2} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+3}}{(6j+3)!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+1}}{(6j+1)!} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{2} + \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2} \right).$$

Справедлива следующая

Теорема 4. Дискретный аналог $D_{3n+1}(h\beta)$ дифференциального оператора

$\frac{d^{6n+2}}{dx^{6n+2}} + \frac{d^{6n}}{dx^{6n}} + \frac{d^{6n-2}}{dx^{6n-2}}$, удовлетворяющий равенству (18), имеет вид:

$$D_{3n+1}(h\beta) = \frac{1}{r_{6n}^{(6n)}} \begin{cases} \sum_{k=1}^{3n} A_{k,3} \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2; \\ 1 + \sum_{k=1}^{3n} A_{k,3}, & |\beta| = 1; \\ R + \sum_{k=1}^{3n} \frac{A_{k,3}}{\lambda_k}, & \beta = 0, \end{cases}$$

где

$$R = -4 \operatorname{ch} \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} h - 6n + 2 - \frac{r_{6n-1}^{(6n)}}{r_{6n}^{(6n)}}, \\ A_{k,3} = \frac{H_4(\lambda_k) \cdot (\lambda_k - 1)^{6n-2} \cdot r_{6n}^{(6n)}}{\lambda_k \cdot R'_{6n}(\lambda_k)},$$

$$R_{6n}(\lambda) = \sum_{s=0}^{6n-2} r_s^{(6n-2)} \lambda^s = (-1)^{n-1} \left\{ \left[K_3 \lambda^2 - \left(\operatorname{sh}(h) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}h) \right) \lambda + K_3 \right] (1-\lambda)^{6n-2} + \right. \\ \left. + H_4(\lambda) \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{6k+3} (1-\lambda)^{6(n-k-1)} E_{6k+2}(\lambda)}{(6k+3)!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{6k+1} (1-\lambda)^{6(n-k)-4} E_{6k}(\lambda)}{(6k+1)!} \right] \right\} \\ K_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ch}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),$$

$H_4(\lambda)$ определяется равенством (16), $r_{6n}^{(6n)}$, $r_{6n-1}^{(6n)}$ - коэффициенты многочлена $R_{6n}(\lambda)$, λ_k - корни многочлена $R_{6n}(\lambda)$, $|\lambda_k| < 1$, $E_k(\lambda)$ - многочлен Эйлера степени k .

В параграфе 2.4 исследованы некоторые свойства дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$. При этом используются результаты параграфов 2.1-2.3, т.е. теоремы 2.1-2.3.

Имеет место

Теорема 5. Дискретный аналог $D_m(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ удовлетворяет следующим равенствам:

$$1) D_m(h\beta) * e^{\frac{1}{2}h\beta} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\beta\right) = 0, \quad 2) D_m(h\beta) * e^{\frac{1}{2}h\beta} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\beta\right) = 0,$$

$$3) D_m(h\beta) * e^{\frac{1}{2}h\beta} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\beta\right) = 0, \quad 4) D_m(h\beta) * e^{\frac{1}{2}h\beta} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\beta\right) = 0,$$

$$5) D_m(h\beta) * (h\beta)^\alpha = 0, \quad \alpha \leq 2m-5, \quad 6) D_m(h\beta) * G_m(h\beta) = \delta(h\beta),$$

где $G_m(h\beta)$ - функция дискретного аргумента, соответствующая функции $G_m(x)$, определенной (12), $\delta(h\beta)$ - дискретная дельта-функция.

В третьей главе диссертации, названной «**Коэффициенты оптимальных квадратурных формул в пространстве $K_2^{m,m-2}$** », найдены коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) в пространстве $K_2^{m,m-2}$. При этом использованы результаты второй главы, т.е. дискретные аналоги $D_m(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$. Здесь также мы рассматриваем три случая, когда $m = 3n + 2$ ($n = 0, 1, \dots$), $m = 3n$, $m = 3n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$). В параграфах 3.1–3.3 соответственно рассмотрено нахождение оптимальных коэффициентов в этих случаях.

В случае $m = 3n + 2$ ($n = 0, 1, \dots$) для коэффициентов оптимальных квадратурных формул вида (1) доказана следующая теорема.

Теорема 6. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) в пространстве $K_2(P_{3n+2})$ при $n=1,2,\dots$ имеют следующий вид

$$\overset{\circ}{C}_0 = \frac{h}{2} - \sum_{k=1}^{3n+1} \frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)^2} \left[a_k (h\lambda_k^N - \lambda_k + 1 - h) + b_k (\lambda_k^N - h\lambda_k^N - \lambda_k^{N-1} + h) \right],$$

$$\overset{\circ}{C}_\beta = h + \sum_{k=1}^{3n+1} (a_k \lambda_k^\beta + b_k \lambda_k^{N-\beta}), \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

$$\overset{\circ}{C}_N = \frac{h}{2} - \sum_{k=1}^{3n+1} \frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)^2} \left[a_k (\lambda_k^N - h\lambda_k^N - \lambda_k^{N-1} + h) + b_k (h\lambda_k^N - \lambda_k + 1 - h) \right]:$$

где a_k, b_k известны, λ_k даются в теореме 2.

Для случаев $m=3n, m=3n+1$ ($n=1,2,\dots$) получены аналогичные результаты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе построены оптимальные квадратурные формулы в смысле Сарда для приближенного вычисления интегралов в пространстве $K_2^{m,m-2}$.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

1. В гильбертовом пространстве $K_2^{m,m-2}$, используя теорему Рисса об общем виде линейного функционала, найдена экстремальная функция функционала погрешности квадратурных формул для приближенного вычисления определенных интегралов.
2. Применением экстремальной функции получено выражение для квадрата нормы функционала погрешности квадратурных формул в пространстве $K_2^{m,m-2}$.
3. Используя метод неопределенных множителей Лагранжа получена система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда.
4. Доказаны существование и единственность решения системы линейных уравнений для коэффициентов оптимальных квадратурных формул, точных для алгебраических, тригонометрических полиномов и экспоненциальных функций в пространстве $K_2^{m,m-2}$.
5. Показан, что решение полученной линейной системы дает минимум значению квадрата нормы функционала погрешности оптимальных квадратурных формул в пространстве $K_2^{m,m-2}$.
6. Разработан алгоритм нахождения явного вида оптимальных коэффициентов, который основан на дискретные аналоги дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$.
7. Построены дискретные аналоги дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ и изучены некоторые их свойства.
8. Найдены явные формулы для коэффициентов оптимальных квадратурных формул, точных для алгебраических, тригонометрических полиномов и экспоненциальных функций в пространстве $K_2^{m,m-2}$.
9. Вычислена норма функционала погрешности оптимальных квадратурных формул в пространстве $K_2^{2,0}$.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc27.06.2017/FM.01.02 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

**INSTITUTE OF MATHEMATICS AND
TASHKENT INSTITUTE OF RAILWAY ENGINEERS**

AZAMOV SIROJ SOBIROVICH

**MINIMIZATION OF THE NORM OF THE ERROR FUNCTIONAL FOR
FORMULAS OF NUMERICAL INTEGRATION IN THE SPACE $K_2^{m,m-2}$**

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY
(PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

TASHKENT – 2018

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2018.1.PhD/FM162.

Dissertation has been prepared at V.I.Romanovskiy Institute of mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences and Tashkent institute of railway engineers.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website <http://ik-fizmat.nuu.uz/> and the «ZiyoNet» Information and educational portal <http://www.ziynet.uz/>.

Scientific supervisor:

Shadimetov Kholmat Makhkambaevich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents:

Aloev Rakhmatillo Dhuraevich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Raimova Gulnora Mirvalievna

Doctor of Physical and Mathematical Sciences

Leading organization:

Samarkand State University

Defense will take place «____» _____ 2018 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc27.06.2017.FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «____» _____ 2018 year

(Mailing report № _____ on «____» _____ 2018 year)

A.R.Mirakhimov

Chairman of Scientific Council on award
of scientific degrees, D.T.S., Professor

Z.R.Rakhmonov

Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.M.S.

Z.H.Yuldashev

Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific
degrees, D.F.M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The urgency and relevance of the dissertation topic.

At the present time, in the world, construction of optimal quadrature formulas in different spaces of differentiable functions for numerical calculation of integrals is one of the important problems of computational mathematics. It should be noted that this problem is closely connected with approximate analytic solutions of differential and integral equations. In connection with this construction of asymptotic optimal, optimal in order and optimal quadrature formulas for numerical calculation of integrals and estimations their errors in different Hilbert and Banach spaces are targeted scientific researches. Investigations conducted by the above mentioned scientific research directions confirm actuality of the theme of the thesis.

The aim of the research work is to find explicit forms of coefficients for optimal quadrature formulas which are exact for algebraic, trigonometric polynomials and exponential functions in the space $K_2^{\overline{m,m-2}}$.

The tasks of the research work:

to find an extremal function of quadrature formulas in the space $K_2^{\overline{m,m-2}}$;

to calculate the norm of the error functional of quadrature formulas exact for algebraic, trigonometric polynomials and exponential functions;

to minimize the norm of the error functional by coefficients;

to study the problem of existence and uniqueness of optimal quadrature formula which are exact for algebraic, trigonometric and exponential functions in the space $K_2^{\overline{m,m-2}}$;

to construct discrete analogs of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$;

to find the coefficients of the optimal quadrature formulas in the space $K_2^{\overline{m,m-2}}$.

The object of the research work is discrete analogs of differential operators, quadrature formulas for approximate calculation of definite integrals, error functionals.

The scientific novelty of the research work is as follows:

the extremal function of the error functional of the quadrature formulas is found in the space $K_2^{\overline{m,m-2}}$;

the norm of the error functional of the quadrature formulas is calculated;

the existence and uniqueness of the optimal quadrature in the space $K_2^{\overline{m,m-2}}$ are proved;

discrete analogs of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ are constructed

and their properties are proved;

the explicit forms of the coefficients of the optimal quadrature formulas, exact for algebraic, trigonometric and exponential functions, are found;

the norm of the error functional of optimal quadrature formulas in the space $K_2^{\overline{2,0}}$ is calculated.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Шадиметов Х.М., Азамов С.С. Об экстремальной функции одной оптимальной квадратурной формулы // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2009. -№ 2. -С.176-185. (01.00.00; №6).
2. Шадиметов Х.М., Азамов С.С. Об одном дискретном аналоге одного дифференциального оператора // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2010. -№ 1. -С.181-188. (01.00.00; №6).
3. Азамов С.С. Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ // Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2011.-№ 2. -С.15-28. (01.00.00; №6).
4. Азамов С.С. Вычисление коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве $K_2(P_m)$ // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2011. -№ 4. -С.3-12. (01.00.00; №6).
5. Азамов С.С. Вычисление нормы функционала погрешности оптимальных квадратурных формул в пространстве $K_2(P_2)$ // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2012. -№ 2. -С.13-19.
6. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Azamov S.S. Optimal quadrature formula in $K_2(P_2)$ space// Applied Numerical Matematics. 2012, -Pp. 1893-1909. (3. Scopus. IF=1.087)
7. Азамов С.С. Оптимальные квадратурные формулы в смысле Сарда в пространстве $K_2^{\overline{m-2,m}}$ // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2017. -№ 3. -С.3-9. (01.00.00; №6).

II бўлим (Часть II; Part II)

8. Азамов С.С. Дискретный аналог одного дифференциального оператора// Материалы X международного семинара-совещания “Кубатурные формулы и их приложения”, -Улан-Удэ, Россия, 2009, -С.5-7.
9. Азамов С.С. Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^2}{dx^2} + 1$ // “Ёш математикларнинг янги теоремалари-2009” Республика илмий анжуманининг материаллари. – Наманган, Узбекистан, 2009, -С.85-87.
10. Азамов С.С. Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ и его свойства// Материалы международной конференции “Кубатурные формулы, методы Монте-Карло и их приложения”. - Красноярск, Россия, 2011, -С. 13-16.

11. Азамов С.С. Система для нахождения коэффициентов оптимальных квадратурных формул в одном Гильбертовом пространстве// Материалы международной научной конференции “Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий”, -Ташкент, Узбекистан, 2012, -С.284-287.
12. Азамов С.С. Вычисления коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве $K_2(P_3)$ // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ “Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения”. -Ташкент, Узбекистан, 2013, -С.299-301.

Автореферат Ўзбекистон Миллий университетининг «ЎзМУ хабарлари»
журнали таҳририясида 2018 йил 20 июнда таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат рухсат этилди 21.06.2018. Ҳажми 2,5 босма табок.
Бичими 60x84 1/16. Адади 80 нусха. Буюртма 113
М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети
босмахонасида чоп этилди.

