O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETI QOSHIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi"deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

1. 2017

УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ - 2017

Адрес редколлегии: 100125. Ташкент, Дурмон йули, 29,
Институт математики при Национальном Университете
Узбекистана им. М.Улугбека,
телефон: (+99871) 262-75-44

ТАШКЕНТ - 2017

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.155-164

УДК 517.98

Эргодическая теорема Блума-Хансона в пространствах Лоренца

Чилин В.И., Азизов А.Н

Lorents ketma-ketliklar fazolarida Blum-Xanson ergodik teoremasi isbotlangan.

The Blum-Hanson ergodic theorem for linear contractions in Lorentz spaces sequences it is proved.

1. Введение. Известная статистическая эргодическая теорема для рефлексивного банахового пространства $(X, \|.\|_X)$ [7, гл. VIII §5] утверждает, что для любого линейного сжатия T в X средние Чезаро $A_n(T) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k$ сходятся в сильной операторной топологии, т.е. для любого $x \in X$ существует такое $\overline{x} \in X$, что $\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(x) - \overline{x}\|_X \to 0$ при $n \to \infty$.

Важными примерами, иллюстрирующими данную статистическую теорему, являются банаховы пространства $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $1 < p < \infty$, всех измеримых функций f, заданных на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ с полной $\sigma-$конечной мерой μ, для которых $\|f\|_p = (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{1/p} < \infty$ (равные почти всюду функции отождествляются). Если $\tau : \Omega \to \Omega$ сохраняющее меру μ отображение, то линейное преобразование T в $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, определенное равенством $(Tf)(\omega) = f(\tau(\omega))$, есть изометрия в $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, и поскольку пространства $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ рефлексивны при $1 < p < \infty$, средние Чезаро $A_n(T)$ сходятся в сильной операторной топологии в $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

В случае, когда мера μ — вероятностная и преобразование τ — перемешивающее, эргодическая теорема Блума-Хансона [4] утверждает, что для каждого $f \in L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, имеет место сходимость

$$\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(\tau^{k_i}\omega) - \int_\Omega f d\mu\|_p \to 0$$

для всех строго возрастающих последовательностей $k_0 < k_1 < \ldots$ натуральных чисел.

В связи с этой ситуацией возникает задача о выделение класса ограниченных линейных операторов T, для которых верна сходимость средних Чезаро $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}$ для каждой подпоследовательности $\{T^{k_j}\}_{j=0}^{\infty}$ последовательности $\{T^n\}_{n=0}^{\infty}$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел. Будем говорить, что линейный оператор T, действующий в банаховом пространстве X, имеет свойство Блума-Хансона в точке $x \in X$ (запись: $T \in BH(X,x)$), если для любой последовательности $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)$$

в нормированной топологии [13].

Для сжатий в гильбертовом пространстве H следующий критерий включения $T \in BH(H,x)$ независимо получен в работах [1], [10], [12].

Теорема 1. *Пусть T линейное сжатие в гильбертовом пространстве H. Для каждого $x \in H$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_H \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$ и некоторого $x_0 \in H$.

(ii) Последовательность $\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится слабо в H к элементу $x_0 \in H$.

Следует отметить, что для любого ограниченного линейного оператора T, действующего в банаховом пространстве X, условие $T \in BH(X,x)$ всегда влечет слабую сходимость последовательности $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ к некоторому элементу $\overline{x}$ [8, Гл. 8, Proposition 1.2]. При этом, используя аргументы доказательства импликации $(ii) \to (i)$ из теоремы 1.1 работы [1], получим, что при выполнении условия (i) указанной выше теоремы 1, слабым пределом последовательности $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ обязательно является элемент x_0.

В работе [2] вариант теоремы 1 получен для любых положительных линейных сжатий пространства $L_p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ при $1<p<\infty$. Для произвольных линейных сжатий $L_p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, $1<p<\infty$, аналогов теоремы 1 до сих пор не имеется. Известен только следующий результат В. Мюллера и Ю.Тамилова [13, Теорема 2.5].

Теорема 2. *Пусть T–линейное сжатие на банаховом пространстве последовательностей l_p, $1 \le p < \infty$. Тогда для любого элемента $x \in l_p$, $T^n(x) \to x_0 \in l_p$ слабо в том и только в том случае, когда $\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_p \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.*

Отметим также недавнюю работу [9], где с помощью свойства асимптотической гладкости выделяется широкий класс симметричных пространств последовательностей, для которых сохраняется вариант теоремы 1.

Основная цель настоящей работы состоит в получении эргодической теоремы Блума - Хансона (варианта теорем 1 и 2) для банаховых пространств последовательностей Лоренца $l_{p,q}$. Доказательство этой теоремы существенно использует свойство p-выпуклости пространств $l_{p,q}$, что отличает наш подход от методов работы [9].

2. Предварительные сведения. Пусть c_0 — банахова решетка всех сходящихся к нулю последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ действительных чисел с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\geqslant 1} |x_n|$. Обозначим через $x^* = \{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ невозрастающую перестановку последовательности чисел $|x| = \{|x_n|\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$.

Ненулевое линейное подпространство $E \subset c_0$ называется симметричным пространством последовательностей, если из $x^* \leqslant y^*, x \in c_0, y \in E$ следует, что $x \in E$. Каждое симметричное пространство последовательностей E содержит подпространство всех финитных последовательностей из c_0, т.е. таких $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$, для которых $x_n = 0$ при всех n, начиная с некоторого номера $n(x) \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел.

Симметричное пространство последовательностей E, наделенное банаховой нормой $\|\cdot\|_E$, называется банаховым симметричным пространством последовательностей, если выполнены следующие свойства:

1). $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$, если $x^* \leqslant y^*, x, y \in E$;

2). $\|\{1, 0, 0, \dots\}\|_E = 1$.

В каждом банаховым симметричном пространстве последовательностей $(E, \|\cdot\|_E)$ всегда верны равенства $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_E = \|\,|x|\,\|_E = \|x^*\|_E$ для любого $x \in E$.

Говорят, что банахово симметричное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет свойство Фату, если из условий

$$0 \leq x^{(n)} \leq x^{(n+1)} \in E,\ n \in \mathbb{N},\quad \sup_n \|x^{(n)}\|_E < \infty,$$

следует, что существует $x = \sup\limits_n x^{(n)} \in E$ и $\|x\|_E = \sup\limits_n \|x^{(n)}\|_E$.

Говорят, что $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет порядково непрерывную норму, если из $0 \leq x^{(n)} \downarrow 0,\ x^{(n)} \in E$ следует, что $\|x^{(n)}\|_E \to 0$. Известно (см, например, [14], гл. 10, § 4), что $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет порядково непрерывную норму в том и только в том случае, когда $(E, \|\cdot\|_E)$—сепарабельно.

Зафиксируем $1 \leqslant p,\ q < \infty$ и рассмотрим пространство Лоренца $l_{p,q}$ всех таких последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0$, для которых

$$\|\{x_n\}\|_{p,q} = (\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*)^q (n^{q/p} - (n-1)^{q/p}))^{1/p} < \infty.$$

Известно, что при $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$ пространство $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ есть банахово симметричное пространство последовательностей, при этом, для $p = q$ верно равенство

$$l_{p,p} = l_p = \Big\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0,\ \|\{x_n\}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\Big\}.$$

Если же $1 < p < q < \infty$, то $\|\cdot\|_{p,q}$ есть полная квазинорма на векторной решетке $l_{p,q}$, при этом, на $l_{p,q}$ существует такая норма $\|\cdot\|_{(p,q)}$, эквивалентная квазинорме $\|\cdot\|_{p,q}$, что $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ есть банахово симметричное пространство последовательностей (см. например, [3, Гл.4, §4]).

Нам понадобятся следующие свойства пространств $l_{p,q}$.

Теорема 3. [15, гл. II, §5]). Банахово симметричное пространство последовательностей $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ при $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$ (соответственно, $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ при $1 < p < q < \infty$) имеет порядково непрерывную норму и обладает свойством Фату.

Пусть $1 \leq p < \infty$. Банахова решетка $(E, \|\cdot\|)$ называется p-выпуклой, если существует такая константа $M > 0$, что для любого конечного набора элементов $\{a_i\}_{i=1}^n \subset E$ верно следующее неравенство

$$\big\|\big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\big)^{\frac{1}{p}}\big\| \leq M\big(\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|^p\big)^{\frac{1}{p}}.$$

Наименьшая среди таких констант M называется константой p-выпуклости пространства E и обозначается через $M^{(p)}(E)$.

Ясно, что любая банахова решетка E является 1-выпуклой, при этом, $M^{(1)}(E) = 1$. Отметим также, что все пространства l_p, $1 \leq p < \infty$, являются p-выпуклыми с $M^{(p)}(l_p) = 1$ (см., например, [11, стр.45]).

Говорят, что банахова решетка $(E, \|\cdot\|)$ удовлетворяет верхней p-оценке, если существует такая константа $M > 0$, что для любого конечного множества попарно дизъюнктных элементов $\{a_i\}_{n=1}^n \subset E$ верно следующее неравенство

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i\Big\| \leq M\Big(\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Любая p-выпуклая банахова решетка всегда удовлетворяет верхней p-оценке. Отметим следующее свойство p-выпуклых банаховых решеток.

Утверждение 1. [5, Proposition 2.6]. *Если банахова решетка удовлетворяет верхней r-оценке для некоторого $1 < r < \infty$, то она является p-выпуклой для любого $1 < p < r$.*

Банаховы решетки $l_{p,q}$ обладают следующими свойствами p-выпуклости [5].

Теорема 4. *(i). Если $1 \leq q \leq p < \infty$, то $l_{p,q}$ — q-выпукло с константой q-выпуклости $M^{(q)}(l_{p,q}) = 1$.*

(ii). Если $1 < p < q < \infty$, то $l_{p,q}$ удовлетворяет верхней p-оценке.

Непосредственно из утверждения 1 и теоремы 4 (ii) вытекает

Следствие 1. *Если $1 < p < q < \infty$, то $l_{p,q}$ — r-выпукло для любых значений $r \in (1, p)$.*

В работе [6, Corollary 3.5] доказано, что в каждом p-выпуклом банаховом симметричном пространстве $(E, \|\cdot\|_E)$, имеющем свойство Фату, всегда существует эквивалентная норма $\|\cdot\|'_E$, относительно которой $(E, \|\cdot\|'_E)$ есть снова p-выпуклое банахово симметричное пространство, но уже имеющее константу p-выпуклости, равную 1. Согласно теореме 3, банахово симметричное пространство $l_{p,q}$ имеет свойство Фату. Поэтому из следствия 1 вытекает следующая

Теорема 5. *Если $1 < p < q < \infty$, то для любого значения $r \in (1, p)$ в $l_{p,q}$ существует норма $\|\cdot\|_{p,q,r}$, эквивалентная норме $\|\cdot\|_{(p,q)}$, такая, что $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q,r})$ есть r-выпуклое симметричное пространство с константой r-выпуклости, равной 1.*

3. Теорема Блума-Хансона в пространствах последовательностей Лоренца. Как уже отмечалось во введении, для любого линейного ограниченного оператора T, действующего в банаховом пространстве X, условие $T \in BH(X, x)$ для $x \in X$ всегда влечет слабую сходимость последовательности $\{T^n x\}$. В частности, если T ограниченный линейный оператор в $l_{p,q}$, то сходимость $\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j} x - x_0\|_X \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$ и некоторого $x_0 \in l_{p,q}$ влечет слабую сходимость последовательности $\{T^n(x)\}$ в $l_{p,q}$ к элементу x_0.

Следующая теорема об является вариантом эргодической теоремы

Блума-Хансона для банаховых пространств $l_{p,q}$.

Теорема 6. *Пусть* $1 < p,q < \infty$, $x \in l_{p,q}$. *Тогда*

(i). *Если* $1 < q \le p < \infty$, *то для любого линейного сжатия*

$$T : (l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q}) \to (l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$$

из слабой сходимости в $l_{p,q}$ *последовательности* $\{T^n(x)\}$ *к элементу* $x_0 \in l_{p,q}$ *следует сходимость*

$$\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_{p,q} \to 0$$

для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

(ii). *Если* $1 < p < q < \infty$, *то в* $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)}$ *существует такая эквивалентная норма* $\|\cdot\|_{[p,q]}$, *что для любого линейного сжатия*

$$T : (l_{p,q}, \|\cdot\|_{[p,q]}) \to (l_{p,q}, \|\cdot\|_{[p,q]})$$

слабая сходимость последовательности $\{T^n(x)\}$ *к элементу* $x_0 \in l_{p,q}$ *влечет сходимость*

$$\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_{[p,q]} \to 0$$

для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

Доказательство. (i). Пусть $T^n(x) \to x_0$ слабо в $l_{p,q}$. Так как T — ограниченный линейный оператор, то $T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) \to T(x_0)$ слабо и поэтому $T(x_0) = x_0$. Если $x_0 \ne 0$, то заменяя элемент x_0 на $(x - x_0)$, можно считать, не ограничивая общности, что $T^n(x) \to 0$ слабо. Таким образом, для доказательства пункта (i) следует установить, что если $T^n(x) \to 0$ слабо в $l_{p,q}$, то

$$\|\tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)\|_{p,q} \to 0$$

при $n \to \infty$ для любой последовательности $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

Поскольку T — сжатие, то $\|T^{n+1}(x)\|_{p,q} \le \|T^n(x)\|_{p,q}$ и поэтому предел $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\|_{p,q}$ существует. Если этот предел равен нулю, то утверждение теоремы 5 очевидно. Предположим, что этот предел равен $\alpha \ne 0$. Заменяя, если необходимо элемент x на элемент $\frac{x}{\alpha}$, можно считать, что $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\|_{p,q} = 1$.

Зафиксируем $\delta > 0$ и выберем натуральное число t так, чтобы выполнялось неравенство $t^{\frac{1}{q}-1} < \frac{\delta}{2}$. Поскольку $1 + 2^q s < 2^q(s+1)$ для всех $s \in \mathbb{N}$, то существует такое $\varepsilon \in (0,1)$, что

$$((1+\varepsilon)^q + 2^q s)^{\frac{1}{q}} < 2(s+1)^{\frac{1}{q}} - (s+1)\varepsilon \tag{1}$$

для всех $s = 1, \ldots, t-1$.

Согласно равенству $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\|_{p,q} = 1$, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что верно неравенство

$$\|T^k(x)\|_{p,q} < 1 + \varepsilon. \tag{2}$$

Пусть $e_n = \{0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$ стандартный базис в $l_{p,q}$, где единица стоит на "n"-ом месте. Рассмотрим оператор проектирования P_r в $l_{p,q}$ на линейную оболочку $Lin\{e_1, \ldots, e_r\}$ элементов $e_1, e_2, \ldots, e_r \in l_{p,q}$, т.е.

$$P_r(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{x_1, ..., x_r, 0, 0...\} = \sum_{n=1}^{r} x_n e_n.$$

Обозначим через I тождественный оператор в $l_{p,q}$, т.е. $I(x) = x$ для всех $x \in l_{p,q}$. Если $x = \{x_n\} \in l_{p,q}$, то

$$|(I - P_r)(x)| = \{0, ..., 0, |x_{r+1}|, |x_{r+2}|, ...\} \downarrow 0,$$

при $r \to \infty$, и поэтому, в силу теоремы 3, имеем, что

$$\|(I - P_r)(x)\|_{p,q} = \|\{0, ..., 0, |x_{r+1}|, |x_{r+2}|, ...\}\|_{p,q} \downarrow 0.$$

Следовательно, $\|(I - P_r)T^k(x)\|_{p,q} \to 0$ при $r \to \infty$, что влечет существование такого $r \in \mathbb{N}$, для которого верно неравенство

$$\|(I - P_r)T^k(x)\|_{p,q} < \varepsilon. \tag{3}$$

Так как $P_r(l_{p,q}) = Lin\{e_1, \ldots, e_r\}$ — конечномерное линейное подпространство в $l_{p,q}$ и $T^{k+j}(x) \to 0$ слабо при $j \to \infty$, то существует такое $d \in \mathbb{N}$, что

$$\|P_r T^{k+j}(x)\|_{p,q} < \varepsilon \tag{4}$$

для всех $j \geq d$.

Покажем теперь, что

$$\|T^{m_1}(x) + \ldots + T^{m_s}(x)\|_{p,q} \leq 2s^{\frac{1}{q}}, \tag{5}$$

где $k \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_s$, $s \leq t$ и $m_{i+1} - m_i \geq d$ для всех $i = 1, \ldots, s-1$.

Докажем неравенство (5), используя индукцию по s. Для $s = 1$ неравенство (5) верно в силу выбора числа ε. Предположим, что неравенство (5) верно для $s < t$ и последовательность $m_1, m_2, \ldots, m_{s+1}$ удовлетворяет указанным выше требованиям. Тогда

$$\|T^{m_1}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}}(x)\|_{p,q} = \|T^{m_1-k}(T^k(x) + T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots +$$

$$+T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))\|_{p,q} \leq \|T^k x + T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\|_{p,q} \leq$$

$$\leq \|P_r T^k x + (I - P_r)(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))\|_{p,q} +$$

$$+\|(I - P_r)T^k(x)\|_{p,q} + \|P_r(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))\|_{p,q}.$$

В силу неравенств (3) и (4) имеем, что

$$\|(I - p_r)T^k(x)\|_{p,q} + \|P_r(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\|_{p,q} < (s+1)\varepsilon.$$

Согласно теореме 4 (i), при $1 < q \leq p < \infty$ банахова решетка $l_{p,q}$ является q-выпуклой с константой q-выпуклости $M^q(l_{p,q}) = 1$, в частности $l_{p,q}$ удовлетворяет верхней q-оценке с той же константой, т.е

$$\| \textstyle\sum_{i=1}^n a_i\|_{p,q} \leq (\sum_{i=1}^n \|a_i\|_{p,q}^q)^{\frac{1}{q}}$$

в случае, когда элементы $\{a_i\}_{i=1}^n \subset l_{p,q}$ попарно дизъюнктны.

Поскольку элементы $(I - P_r)(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))$ и $P_r T^k(x)$ попарно дизъюнктны, то используя предположение индукции (5) и неравенство (2), получим следующую оценку:

$$\|P_r T^k(x(+(I - P_r)(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))\|_{p,q} \leq$$
$$(\|P_r T^k(x)\|_{p,q}^q + \|(I - P_r)(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))\|_{p,q}^q)^{\frac{1}{q}} \leq$$
$$((1 + \varepsilon)^q + 2^q s)^{\frac{1}{q}}.$$

Следовательно, в силу неравенства (1), имеем, что

$$\|T^{m_1}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}}(x)\|_{p,q} \leq ((1 + \varepsilon)^q + 2^q s)^{\frac{1}{q}} + (s + 1)\varepsilon < 2(s + 1)^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, неравенство (5) верно для каждого $s \leq t$.

Пусть $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$ — произвольная строго возрастающая последовательность натуральных чисел и пусть $N > k$ достаточно большое натуральное число. Тогда $N = k + mt + r$, где $0 \leq r < t$ и m натуральное число, для которого $m \geq d$. Используя доказанное неравенство (5), получим, что

$$\| \sum_{j=0}^{N} T^{n_j}(x)\|_{p,q} \leq \| \sum_{j=0}^{k+r} T^{n_j}(x)\|_{p,q} + \sum_{s=1}^{m} \| \sum_{j=0}^{t-1} T^{n_{k+r+s+jm}}(x)\|_{p,q} \leq (k+r+1)\|x\|_{p,q} + m \cdot 2 \cdot t^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{N+1}\| \sum_{j=0}^{N} T^{n_j}(x)\|_{p,q} \leq \frac{(k+r+1)\|x\|_{p,q}}{N+1} + \frac{2mt^{\frac{1}{q}}}{tm} = \frac{(k+r+1)\|x\|_{p,q}}{N+1} + 2t^{\frac{1}{q}-1}$$

и согласно выбору t,

$$\overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\| \sum_{j=0}^{N} T^{n_j}(x)\|_{p,q} \leq 2t^{\frac{1}{q}-1} < \delta.$$

Так как $\delta > 0$ произвольное, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\| \sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)\|_{p,q} = 0.$$

(ii). Пусть теперь $1 < p < q < \infty$. Согласно теореме 5, для числа $1 < r_0 < p$ в $l_{p,q}$ существует такая норма $\|\cdot\|_{[p,q]}$, эквивалентная норме $\|\cdot\|_{(p,q)}$, что $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{[p,q]})$ есть r_0-выпуклое симметричное пространство с константой r_0—выпуклости $M^{(r_0)}((l_{p,q}, \|\cdot\|_{[p,q]})) = 1$. Повторяя теперь доказательство пункта (i), заменив q на r_0, получим,

$$\| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)\|_{[p,q]} \to 0$$

при $n \to \infty$ для любой последовательности $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

$\square$

Литература

1. M. Akcoglu, L. Sucheston. On operator convergence in Hilbert space and in Lebesgue space, Period. Math. Hungar. 1972. V. 2. P. 235-244.

2. A. Bellow, An L_p–inequality with application to ergodic theory. Hous. J. Math. 1975. V.1. No.1. P. 153-159.

3. C.Bennet, R.Sharpley. *Interpolation of operators.* Academic Press, INC. 1988.

4. J.R. Blum, D.L. Hanson. On the mean ergodic theorem for subsequences. Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. P. 308-311.

5. J.Creekmore. Type and cotype in Lorentz of $L_{p,q}$ spaces. Indag. Math. 1981. V. 43. P. 145-152.

6. P. G. Dodds, T. K. Dodds and F. A. Sukochev. On p-convexity and q-concavity in non-commutative symmetric spaces. Integr. Equ. Oper. Theory. 2014. V. 78. P. 91-114.

7. N. Dunford and J.T. Schwartz. *Linear operators.* Part I:General theory. Wiley. 1988.

8. U. Krengel. *Ergodic theorems.* De Gruyter Stud. Math., V. 6. Walter de Gruyter. Berlin - New York. 1985.

9. P. Lefevre, E. Matheron and A. Primot. Smoothness, asymptotic smoothness and the Blum-Hanson property. Israel J. Math. 2016. V. 211. 271-309.

10. M. Lin. Mixing for Markov operators. Z. Wahrsch. Verw. Geb. 1971. V. 19. P. 231-242.

11. J.Lindenstrauss, L.Tzafriri. *Classical Banach spaces.* Springer-Verlag. Berlin-New York. 1996.

12. L.K. Jones, V. Kuftinec. A note on the Blum-Hanson theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 30. P. 202-203.

13. V. Muller, Y. Tomilov. Quasisimilarity of power bounded operators and Blum-Hanson property. J. Funct. Anal. 2007. V. 246. P. 385-399.

14. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. *Функциональный анализ.* М.: «Наука». 1977.

15. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* М.: «Наука». 1978.

Национальный университет Узбекистана
им. М.Улугбека