УДК 510.5+515.12

О ПОЗИТИВНЫХ И НЕГАТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ПЛОТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ

Н.Х.Касымов, И.А.Ходжамуратова
Национальный университет Узбекистана
e-mail: nadim59@mail.ru; *e-mail:indiraazatovna@mail.ru*

Резюме. Приведен сравнительный анализ позитивных и негативных эквивалентностей с точки зрения определимости над ними плотных линейных порядков.

Ключевые слова: позитивные и негативные плотные линейные порядки, определимость порядка над эквивалентностью.

С неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в [1-3].

Определение 1 Линейный порядок $\langle L; \preceq_L\rangle$ называется негативно (позитивно) представимым над эквивалентностью η на ω, если существует такая его нумерация ν, что $\eta = \{\langle x, y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$ и множество $\{\langle x, y\rangle \mid \nu x \preceq_L \nu y\}$ является коперечислимым (соответственно перечислимым).

Предложение 1. Негативный (позитивный) линейный порядок с позитивной (соответственно негативной) нумерационной эквивалентностью является вычислимым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle L; \preceq_L\rangle$ – линейный порядок, негативно представимый над позитивной эквивалентностью η, т.е. для некоторой нумерации ν этого порядка, с нумерационной эквивалентностью равной η, множество $\{\langle x, y\rangle \mid \nu x \preceq_L \nu y\}$ коперечислимо. Обозначим через $\prec_L$ – строгий линейный порядок ($\preceq_L \setminus id\, L$). Тогда $x \neq y \pmod{\eta} \leftrightarrow \nu x \prec_L \nu y \vee \nu y \prec_L \nu x$. Следовательно, η – негативная, а значит и вычислимая, эквивалентность. Далее, для любых двух различных по модулю η натуральных чисел принадлежность их ν-образов строгому порядку $\prec_L$ эффективно распознаваема в силу линейности отношения. Поэтому как η, так и $\preceq_L$ вычислимы.

Если же $\langle L; \preceq_L\rangle$ – линейный порядок, позитивно представимый над негативной эквивалентностью η, то эта эквивалентность и позитивна, т.к. $x = y \pmod{\eta} \leftrightarrow \nu x \preceq_L \nu y \wedge \nu y \preceq_L \nu x$, но правая часть этой равносильности перечислима в силу позитивности порядка $\preceq_L$ в нумерации ν ($\nu(x) = x/\eta$). Используя вычислимость η для пар чисел x, y различных по ее модулю, эффективно распознается в точности один из двух случаев: $\nu x \prec_L \nu y$ либо $\nu y \prec_L \nu x$, т.е. порядок $\preceq_L$ в нумерации ν вычислим. *Предложение доказано.*

Таким образом, для рассмотрения собственных расширений класса линейных порядков, обладающих вычислимыми представлениями имеет смысл изучение линейных порядков, негативно (позитивно) представимых над негативными же (соответственно позитивными) эквивалентностями, т.к. другие комбинации дают вычислимые порядки.

Далее через $\langle Q; \preceq_Q\rangle$ будем обозначать множество рациональных чисел вместе с их естественным упорядочением типа τ. Отметим, что сами рациональные числа (точнее, их изображения) удобно считать их же номерами, сопоставляя каждому числу все его представления в виде пары целых чисел (числитель/знаменатель). Эквивалентно, можно выбрать любую гчделевскую нумерацию всех пар целых чисел, отождествляя их с рациональными и считать основным множеством ω, на котором задается вычислимый линейный порядок. Детали мы опускаем. Очевидно, что для любого такого представления полученная модель будет вычислимой.

Предложение 2. Существует позитивная эквивалентность, над которой не определим никакой линейный порядок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть η – такая бесконечная позитивная эквивалентность, что всякое собственное η-замкнутое вычислимо перечислимое подмножество ω является объединением конечного числа классов η-эквивалентности. Примеры таких эквиваленностей можно найти в [Ю.Л.Ершов, 1, глава 3, §6]. Допустим, что над η позитивно определим линейный порядок $\langle L; \preceq_L \rangle$, т.е. $\langle L; \preceq_L \rangle \cong \langle \omega/\eta; \preceq_\eta \rangle$, где $\preceq_\eta$ – представляющий $\preceq_L$ позитивный линейный порядок на фактор-можестве ω/η. Зафиксируем элемент линейного порядка $\langle \omega/\eta; \preceq_\eta \rangle$, отличный от наименьшего и наибольшего (что возможно в силу бесконечности η), и выберем любой номер (скажем, n) данного элемента. Тогда количество элементов больших (или меньших) данного фиксированного также бесконечно. Пусть, для определенности, бесконечным будет множество $\preceq_\eta$-меньших элементов (случай $\preceq_\eta$-больших элементов рассматривается аналогично). Тогда множество $\{x \mid x \preceq_\eta n\}$ является собственным η-замкнутым перечислимым подмножеством ω, состоящим из бесконечного количества классов η-эквивалентности, что невозможно. *Предложение доказано.*

Заметим, что любая позитивная (негативная) эквивалентность с конечным числом смежных классов является вычислимой и порядковый тип всякого линейного порядка, эффективно реализуемого над ней, с точностью до изоморфизма, есть начальный отрезок порядкового числа ω. Поэтому с точки зрения дескриптивной теории алгоритмов (т.е. принципиального наличия или отсутствия алгоритмов) интерес представляют лишь бесконечные эквивалентности.

Известно, что всякий предельный элемент негативного линейного порядка является эффективно предельным, в то время как предельный элемент позитивного линейного порядка может не быть эффективно предельным и, более того, существует позитивная совершенная нумерация порядка рациональных чисел $\langle Q; \preceq_Q \rangle$, в которой никакой элемент не является эффективно предельным, т.е. в данном позитивном представлении порядкового типа τ множество вычислимых сечений пусто. Для любой же негативной нумерации порядка типа τ семейство вычислимых сечений, как будет показано далее, трудно обозримо.

Ниже будет показано, что всякий не двухсторонне предельный элемент негативного линейного порядка является рубежом подходящего дедекиндова вычислимого сечения, в то время как для двухсторонне предельных это не так.

Следующая теорема вместе с предыдущим предложением обосновывает целесообразность рассмотрения именно негативных линейных порядков как наиболее широкого и естественного класса моделей, в котором можно развить теорию эффективных предельных переходов. Эти же факты в определнном смысле обуславливают приоритетность негативных порядков перед позитивными, хотя, традиционно, считалось что позитивные модели гораздо важнее негативных.

Всюду далее символ λ, если не оговорено противное, используется в качестве стандартного λ-обозначения.

Теорема 1. Над всякой бесконечной негативной эквивалентностью негативно представимы все типы изоморфизмов счетных плотных линейных порядков.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следующих двух вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Для всякой бесконечной негативной эквивалентности η существует частично рекурсивная функция f от четырех переменных, обладающая следующим свойством:

если n – индекс характеристической функции η-замкнутого и η-бесконечного вычислимого множества α, а x, y – различные по модулю η натуральные числа, принадлежащие α, то $\lambda z.f(z, n, x, y)$ является вычислимой характеристической функцией η-закнутого и η-бесконечного вычислимого подмножества α, отделяющего x от y, дополнение которого до α также η-бесконечно (и, очевидно, η-замкнуто и вычислимо).

Лемма 2. Если η – бесконечная негативная эквивалентность, то над ней негативно представим порядковый тип $1 + \tau$, где τ – порядковый тип изоморфизма рациональных чисел с их естественным упорядочением.

Очевидно, что необходимым условием негативной представимости счетного плотного линейного порядка над заданной негативной эквивалентностью является ее бесконечность. Теорема 1 показывает, что этого и достаточно, т.е. верно

Следствие 1. Счетный плотный линейный порядок негативно представим над негативной эквивалентностью η тогда и только тогда, когда η бесконечна.

Следствие 2. Над всякой бесконечной негативной эквивалентностью негативно представим порядковый тип $\tau + 2 + \tau$.

Заметим, что порядковый тип $\tau + 2 + \tau$ – не плотный.

Следствие 2 показывает, что над любой бесконечной негативной эквивалентностью нагативно представимы и порядки, типы изоморфизмов которых отличны от четырех классических типов. Однако, нетрудно убедиться в том, что наличие у элемента как правого, так и левого соседнего нарушает свойство "универсальности" в следующем смысле.

Предложение 3. Если всякий смежный класс бесконечной негативной эквивалентности невычислим, то над ней негативно не представим порядок типа $\tau + 3 + \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из того очевидного факта, что элемент, не являющийся предельным, в любом негативном представлении должен интерпретироваться вычислимым смежным классом.

Литература

1. *Ершов Ю.Л.* Теория нумераций, М., Наука, 1977, 416.

2. *Мальцев А.И.* Конструктивные алгебры.I // Успехи математических наук, 16 (1961), No 3, 3-60.

3. *Касымов Н.Х.* Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры // Успехи математических наук, 51 (1996), No 3, 145-176.