Последовательное оценование двумерных плотности вероятности и функции регрессии

С.Ш.Бабаджанов

Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимые наблюдения над 2-мерным случайным вектором ξ^2 с неизвестной плотностью вероятности $f(x)$, $x = (x_1, x_2) \in R_2$, где R_2 - двумерное Евклидовое пространство и $\xi_k = (\xi_{k1}, \xi_{k2}), 1 \le k \le n$. В качестве оценки для $f(x)$ в точке $x \in R_2$ рассмотрим статистику

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n_i^2}k\left(\frac{x-\xi_i}{h_i}\right) \tag{1}$$

где $h_n = n^{-\delta},\ \delta > 0,\ k\left(\frac{x-\xi_i}{h_i}\right) = k\left(\frac{x_1-\xi_{i1}}{h_i}, \frac{x_2-\xi_{i2}}{h_i}\right),\qquad k(x),\ x = (x_1, x_2) \in R_2$ положительная функция. Изучены асимптотические свойства оценки (1) при $n \to \infty$ и получены условия асимптотической несмещенности, слабой и сильной состоятельности, а также асимптотической нормальности оценки $f_n(x)$. Эти результаты можно использовать для оценки двумерной кривой регрессии.

Рассмотрим случайный вектор (ξ, η), $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R_2$, $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in R_2$. Обозначим через $f(x)$, $x = (x_1, x_2) \in R_2$ плотность вероятности случайного вектора ξ, через $r_i(x) = M(\eta_i / \xi = x)$ функцию регрессии η_i на $\xi, i = 1,2$. Если $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ совместная плотность вероятности вектора $(\xi_1, \psi_2, \eta_1, \eta_2)$, то кривые регрессии $r_i(x_1, x_2), i = 1,2$ выражаются через плотности вероятности $f(x_1, x_2)$ и $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ следующим образом:

$$r_i(x_1, x_2) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y_i\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)dy_1dy_2}{f(x_1, x_2)},\ \ i = 1,2.$$

Пусть $(\xi_{11}, \xi_{21}, \eta_{11}, \eta_{21})$, $(\xi_{12}, \xi_{22}, \eta_{12}, \eta_{22}), ..., (\xi_{1n}, \xi_{2n}, \eta_{1n}, \eta_{2n})$-независимы наблюдения над 4-мерным вектором $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$. В качестве оценки для $r_i(x)$, $i = 1,2$, $x = (x_1, x_2)$ рассмотрим статистику

$$\hat{r}_{in}(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{h_j^2}\cdot\eta_{ij}k\left(\frac{x-\xi_j}{h_j}\right)\right)}{f_n(x)},\ i=1,2,\ x=(x_1,x_2),$$

где $f_n(x)$ определена в (1), $h_n = n^{-\delta}$, $\delta > 0$, $k\left(\frac{x-\xi_j}{h_j}\right) = k\left(\frac{x_1-\xi_{1j}}{h_j}, \frac{x_2-\xi_{2j}}{h_j}\right)$, $k(x)$ -положительная функция.

Получены условия, при которых $M\hat{r}_{in}(x_1,x_2) \to r_i(x_1,x_2)$ и $\hat{r}_{in}(x_1,x_2) \xrightarrow{p} r_i(x_1,x_2)$ при $n \to \infty$.