[1]. Н.А.Игнатьев Кластерный анализ данных и выбор объектов-эталонов в задачах распознавания с учителем, Ташкент

ВЫЧЕТ В ТОЧКЕ $a = \infty$ ДЛЯ A-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ A–КОНСТАНТА

Алланиязова А.М, Самиева М.В
Национальный университет Узбекистанаимени Мирзо Улугбека,
Каршинский государственный университет
e-mail: aysara_allaniyazova@bk.ru, samieva93@bk.ru

Пусть $A-$антианалитическая функция, $\partial A = 0$, в области $D \subset$ C и такая, что $|A(z)| \leq C < 1, \quad \forall z \in D$. Положим

$$D_A = \frac{\partial}{\partial z} - \bar{A}(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \bar{D}_A = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда класс аналитических функций $f(z) \in O_A(D)$ характеризуется тем, что $\bar{D}_A f(z) = 0$.

Определение 1 [2]. Точка $a \in \mathbb{C}$ называется *изолированной особой точкой функции* $f(z)$, если существует такая проколотая окрестность лемниската этой точки (т. е. множество $0 < |\psi(z,a)| < r$), если точка a конечна, или множество ($R < \left|z + \int\limits_0^z \overline{A(\tau)} d\tau\right| < \infty$ если $a = \infty$), в которой функция $f(z)$ $A(z)-$аналитическая.

Определение 2 [2]. Изолированная особая точка a функции $f(z)$ называется

1. *устранимой точкой*, если существует конечный

$$\lim_{z \to a} f(z) = B$$

2. *полюсом*, если существует

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$$

3. *существенно особой точкой*, если $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z \to a$.

Пусть функция $f(z)$ является $A(z)-$аналитической в $L(a,r) \setminus \{a\}$ и точка $z = a$ является еч особая точка.

Теорема 1 [2]. Изолированная особая точка $a \in$ C функции $f(z)$ является устранимой в том и только том случае, если лорановское разложение $f(z)$ в окрестности a не содержит главной части:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(z,a)} \overline{A(\tau)} d\tau}\right)^n.$$

Изолированная особая точка $a \in \mathrm{C}$ функции $f(z)$ является полюсом в том и только том случае, если главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки a содержит лишь конечное (и положительное) число отличных от нуля членов:

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n \left(z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(z,a)} \overline{A(\tau)} d\tau} \right)^n .$$

После такого изменения вышеуказанная теорема будет справедлива и для случая $a = \infty$ и $A = const$. Этот результат можно получить при помощи замены переменного $z = \frac{1}{w}$. Если обозначить $f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right) = g(w)$ то, очевидно, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{w\to\infty} g(w)$ и поэтому g имеет в точке $w = 0$ ту же особенность, что f в точке $z = \infty$. Например, в случае полюса g имеет в $V = \{0 < |z + A\bar{z}| < r\}$ разложение

$$g(w) = \frac{c_{-N}}{(z + A\bar{z})^N} + ... + \frac{c_{-1}}{z + A\bar{z}} + c_0 + c_1 (z + A\bar{z}) + c_2 (z + A\bar{z})^2 + ...$$

заменяя здесь $w = \frac{1}{z}$, получим разложение в кольце лемнискате $V' = \left\{\frac{1}{r} < |z + A\bar{z}| < \infty\right\}$

$$f(z) = ... + \frac{b_{-2}}{(z + A\bar{z})^2} + \frac{b_{-1}}{z + A\bar{z}} + b_0 + b_1 (z + A\bar{z}) + ... + b_N (z + A\bar{z})^N$$

где $b_n = c_{-n}, b_N \neq 0$.

Дадим определение вычета в бесконечности.

Определение 3. Пусть функция f имеет в точке $a = \infty$ свою изолированную особую точку. *Вычетом в бесконечности* называется данная величина

$$\underset{z=\infty}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+A\bar{z}|=R} f(z) (dz + Ad\bar{z})$$

где лемниската достаточно большого радиуса, проходящая по часовой стрелке.

Теорема 2. Пусть функция f – A-аналитическая всюду в плоскости C, за исключением конечного числа точек $a_k (k = 1, 2, ..., n)$; тогда сумма ее вычетов во всех конечных особых точках и вычета в бесконечности равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res} f(z) + \underset{z=\infty}{res} f(z) = 0.$$

Литература

[1]. **Бухгейм А.Л.** Формулы обращения в обратных задачах. *Дополнение к книге "Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Линейные операторы и некорректные задачи."* М. Наука, 1991.

[2]. **Н.М.Жабборов, Ш.Я.Хурсанов**. Классификации изолированных особых точек A(z)-аналитической функции. ДАН Узбекистан 4.217 ст. 9-12.

[3]. **Шабат Б.В.** Введение в комплексный анализ, М. Наука, 1976г.

[4]. **Хурсанов Ш.Я.** Вычет для A-аналитических функций. Modern problems of dynamical systems and their applications. Turin polytechnic university in Tashkent . 2017 стр. 51-52.