Ministry of higher and secondary special education
of the Republic of Uzbekistan
National University Of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
Institute of Mathematics

ACTUAL PROBLEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

Scientific Conference
Tashkent, Uzbekistan, December 15–17, 2017

A B S T R A C T S

======== ◊ ========

Министерство высшего и среднего специального
образования Республики Узбекистан
Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
Институт Математики

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканская научная конференция
с участием зарубежных ученых
Ташкент, Узбекистан, 15–17 декабря, 2017 год

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Кодирова Ш.

[1] Национальный университет Узбекистана им.М.Улугбека, Узбекистан, Ташкент
Shohida.93@mail.ru

Пусть имеется некоторая динамическая система, состояние которой в каждый момент времени t описывается вектор-функцией $x(t) \in R^n$. На состояние системы можно воздействовать, изменяя управляемые параметры $u(t) \in U_t \subseteq R^r$. Будем рассматривать класс кусочно-непрерывных управлений $u(t)$.

При заданном управлении $u(t)$ состояние системы изменяется во времени согласно закону:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)). \tag{1}$$

Рассмотрим задачу оптимального управления данной системой: определить управление $u^*(t)$, доставляющее экстремум критерию качества вида:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt + \psi_0(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) \to max. \tag{2}$$

При этом первое слагаемое (интегральная часть критерия) характеризует качество функционирования системы на всем промежутке управления $[t_0, t_1]$, тогда как второе слагаемое (терминальный член) - только конечный результат воздействия управления, определяемый начальным $x(t_0)$ и конечным $x(t_1)$ состояниями и, возможно, моментами начала и окончания управления t_0 и t_1. В зависимости от физического смысла задачи интегральная или терминальная часть критерия может быть равна нулю.

На процесс функционирования системы могут накладываться дополнительные ограничения в форме краевых условий:

$$\psi_i(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) = 0,\ i = 1, ..., m. \tag{3}$$

задающие множества допустимых начальных и конечных состояний системы и моментов начала и окончания управления.

Важным частным случаем (3) являются условия вида: $x(t_0) - x_0 = 0; \quad x(t_1) - x_1 = 0$, соответствующие закрепленному левому или правому концу фазовой траектории.

Моменты времени начала и окончания управления, t_0 и t_1, могут полагаться как известными, тогда говорят о задаче с фиксированным временем управления, или неизвестными (задача с нефиксированным моментом начала или окончания управления).

Необходимые условия оптимальности в данной задаче, точнее, необходимые условия сильного локального максимума даются принципом максимума Понтрягина.

Задача Лагранжа. Пусть $n-$ фиксированное натуральное число, $k, m \geqslant 0-$ целое, причем $k \leqslant n$, $\quad f_i, i = \overline{0, m}, \quad \psi_i, i = \overline{0, m}, \quad \varphi_i, i = \overline{0, k}-$ известные функции своих аргументов, Δ $-$ заданный отрезок числовой прямой, $t_0, t_1 \in \Delta, \quad t_0 < t_1, \quad x(\cdot) \equiv (x_1(\cdot), ..., x_n(\cdot)) \in C_n^1(\Delta)$. Вектор функции $x(\cdot)$ называется фазовой переменной, $\dot{x}(\cdot)-$ управлением, $\xi = (x(\cdot), \dot{x}(\cdot), t_0, t_1)-$ управляемым процессом.

Зададим функционалы

$$\mathfrak{B}_i(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \quad i = \overline{0, m}.$$

Постановка задачи. Задачей Лагранжа в Понтрягинской форме называется следующая экстремальная задача:

$$\mathfrak{B}_0(\xi) \to inf \tag{4}$$

$$\mathfrak{B}_i(\xi) \leqslant 0 \quad i = \overline{1, m'}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{B}_i(\xi) = 0 \quad i = \overline{m' + 1, m}, \tag{6}$$

$$\dot{x}_j(t) = \varphi_j(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad j = \overline{1, k}, \tag{7}$$

(7) -называется дифференциальной связью.

Определение. Будем говорить, что точка $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{\dot{x}}, \hat{t}_0, \hat{t}_1)$- в задаче (4) - (7) доставляет слабый локальный минимум (максимум), если существует $\delta > 0$, что для любой допустимой функции $\xi = (x(\cdot), \dot{x}, t_0, t_1)$ для которой $\|\xi - \hat{\xi}\| < \delta$ выполняется

$$\mathfrak{B}_0(\xi) \geqslant \mathfrak{B}_0(\hat{\xi}) \quad \left(\mathfrak{B}_0(\xi) \leqslant \mathfrak{B}_0(\hat{\xi})\right).$$

Теорема (принцип максимума Понтрягина). Если $\hat{\xi}$ есть оптимальный процесс для задачи (4) - (7) и $\psi_j(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad j = \overline{1,s}, \quad \dot{x} \in U$ ($U-$ произвольное множество из R^r), то найдутся множители Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m), \quad p(\cdot) \in KC^1([t_0,t_1], R^n), \quad l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ не равные нулю одновременно и такие, что для функции Лагранжа

$$\mathfrak{L} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t,x,\dot{x}) + p(t)(\dot{x} - \varphi(t,x,\dot{x})) \right) dt + l,$$

выполнены условия:

а) стационарности по $x-$ уравнение Эйлера:

$$p(t) + p(t)\hat{\varphi}_x(t) = \hat{f}_x(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

$$f(t,x,\dot{x}) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t,x,\dot{x});$$

б) трансверсальности по $x : p(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_0}, \quad p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_1};$

в) оптимальности по $\dot{x} : f(t, \hat{x}(t), \dot{x}) - p(t)\varphi(t, \hat{x}(t), \dot{x}) \geqslant \hat{f}(t) - p(t)\hat{\varphi}(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1], \forall \dot{x} \in U;$

г) стационарности по $t_k, k = 0,1 : -\hat{f}(\hat{t_0}) + \hat{l_{t_0}} + \hat{l_{x_0}}\hat{\varphi}(t_0) = 0, \quad \hat{f}(\hat{t_1}) + \hat{l_{t_1}} + \hat{l_{x_1}}\hat{\varphi}(t_1) = 0;$

д) дополняющей нежесткости: $\lambda_i \mathfrak{B}_i(\hat{\xi}) = 0, \quad i = \overline{1,m'};$

е) неотрицательности: $\lambda_i \geqslant 0, \quad i = \overline{0,m'}.$

Литература

1. *В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров.* Сборник задач по оптимизации. Москва, 1984
2. *А.В. Ожегова, Р.Г. Наибуллин.* Вариационное исчисление: задачи, алгоритмы, примеры. Казань, 2013

INTEGRAL CHEGARALI DIFFERENSIAL O'YINDA YETARLI SHARTLAR

Quchqarova S.A[1], To'xtasinov M [2]

[1,2] Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti, O'zbekiston, Toshkent
kuchkarov1@yandex.ru, mumin51@mail.ru

Biz quyidagi differensial tenglama orqali ifodalanuvchi bir nechta quvuvchi va bitta qochuvchiga ega bo'lgan differensial o'yinni o'rganamiz [1]:

$$P_i : \dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_{i0}, \tag{1}$$

$$E : \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

bu yerda $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^n$, $x_{i0} \neq y_0$, P_i, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ m$, quvuvchilarning boshqaruv parametri $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{in})$ va E qochuvchiniki $v = (v_1, \dots, v_n)$.

Boshqaruv $v_1(t), \dots, v_n(t), u_{i1}(t), \dots, u_{in}(t)$ lar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\|v_K(\cdot)\|^2 = \int_0^{\infty} \sum_{j \in K} |\ v_j(t)\ |^2\, dt \leq \sigma_K^2, \quad K \subset \{1, \dots, n\} = N$$